Karta z wzorami na egzamin z *Metod probabilistycznych*, 2019/2020 (wersja 1 z: 22.01.2020)

1. Prawdopodobieństwo klasyczne

- Wariacje z powtórzeniami: n^k
- Wariacje bez powtórzeń: $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Permutacje: $n!$
- Kombinacje: $\binom{n}{k}$

2. Aksjomatyczna def. prawd.

- Definicja σ-ciała zbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$:

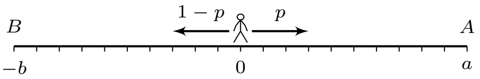
  1. $\Omega \in \mathcal{F}$
  2. Jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $A' \in \mathcal{F}$
  3. Jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$

- Własności σ-ciała: $\emptyset \in \mathcal{F}$; jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$
- Własności prawdopodobieństwa:
  - $P(\emptyset) = 0$, $P(A') = 1 - P(A)$
  - Jeśli $A \subseteq B$ to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_n)$, równość tylko dla parami rozłącznych zdarzeń ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$)

3. Prawdopodobieństwo warunkowe

- Definicja: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ dla $P(B) > 0$
- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
- Reguła łańcuchowa: $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$
- Układ zupełny $A_1, \ldots, A_n$: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, oraz $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$
- Prawd. całkowite: jeśli $A_1, \ldots, A_n$ – układ zupełny: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$
- Wzór Bayesa: jeśli $A_1, \ldots, A_n$ – ukł. zupełny: $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$

4. Niezależność

- Definicja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ogólniej: $A_1, \ldots, A_n$ niezależne gdy dla każdego $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$: $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
- Jeśli $A \perp B$ to $A \perp B'$, $A' \perp B$, $A' \perp B'$
- Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ – niezależne to $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(A'_1) \cdot \ldots \cdot P(A'_n)$
- Warunkowa niezależność (pod warunkiem C): $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
- Spacer losowy: 

  - Prawdopodobieństwo osiągnięcia A:
  $$P(A) = \begin{cases} \frac{b}{a+b} & (p = \frac{1}{2}) \\ \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^a - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{a+b}} & (p \neq \frac{1}{2}) \end{cases}$$
  - Prawd. osiągnięcia B: $P(B) = 1 - P(A)$

5. Zmienne losowe

- Definicja: dowolna mierzalna funkcja $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$
- Rozkład zm. losowej: miara P_X na $\mathbb{R}$ z σ-ciałem borelowskim taka, że $P_X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$
- Dystrybuanta: $F_X(x) = P(X \leqslant x)$
- Własności F_X: niemalejąca; $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$; $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$
- Rozkład jednopunktowy: $P(X = c) = 1$
- Rozkład jednostajny: $X \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$
- Rozkład dwupunktowy $B(p)$: $X \in \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$
- Rozkład dwumianowy $B(n, p)$: $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Rozkład geometryczny $G_1(p)$: $X \in \{1, 2, \ldots\}$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$
- Rozkład geometryczny $G_0(p)$: $X \in \{0, 1, \ldots\}$, $P(X = k) = (1-p)^k p$
- Dla $X \sim G_1(p)$: $P(X > k) = (1-p)^k$
- Brak pamięci $X \sim G_1(p)$: $P(X > k + \ell | X > k) = P(X > \ell)$
- Rozkład ujemny dwumianowy $NB(r, p)$: $P(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^r p^k$
- Rozkład Poissona $\mathrm{Pois}(\lambda)$: $X \in \{0, 1, \ldots\}$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- $B(n, p) \to \mathrm{Pois}(\lambda)$ dla $n \to \infty$ i $\lambda = np$

6. Momenty zmiennych losowych

- Dla $X \in \{0, 1, \ldots\}$: $EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$
- Dla $Y = f(X)$: $EY = \sum_x f(x) P(X = x)$
- Liniowość: $E(aX + b) = aEX + b$
- $D^2(X) = E\big((X - EX)^2\big) = E(X^2) - (EX)^2$
- $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$
- $D^2(X) \geqslant 0$ oraz $D^2(X) = 0 \iff X$ ma r. jednopunktowy
- Wartości oczekiwane i wariancje rozkładów:

rozkład X	EX	$D^2(X)$
$B(p)$	p	$p(1-p)$
$B(n,p)$	np	$np(1-p)$
$G_1(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$NB(r,p)$	$\frac{rp}{1-p}$	$\frac{rp}{(1-p)^2}$
$\mathrm{Pois}(\lambda)$	λ	λ

- Moment rzędu k: $m_k = E(X^k)$
- Mom. centralny rzędu k: $\mu_k = E\big((X - EX)^k\big)$
- Nierówność Markowa: dla nieujemnej X i $a > 0$: $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$
- Nierówność Czebyszewa: $P(|X - EX| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$

7. Wielowymiarowe zmienne losowe

- Rozkład brzegowy: $P(X{=}x) = \sum_y P(X{=}x, Y{=}y)$
- Rozkład warunkowy: $P(X{=}x | Y{=}y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$
- $P(X \in A) = \sum_y P(X \in A | Y = y) P(Y = y)$ (pr. całkowite)
- Warunkowa wartość oczekiwana: $E(X|Y = y) = \sum_x x\, P(X = x | Y = y)$
- $E\big(E(X|Y)\big) = EX$

8. Wielowymiarowe zm. losowe II

- $E(X_1+\ldots+X_n)=EX_1+\ldots+EX_n$
- $C(X,Y)=E\big((X-EX)(Y-EY)\big)=E(XY)-(EX)(EY)$
- $D^2(X\pm Y)=D^2(X)\pm 2C(X,Y)+D^2(Y)$
- $|C(X,Y)|\leqslant D(X)D(Y)$
- $\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{D(X)D(Y)}\in[-1,1]$
- Niezależność: $P(X_1\in A_1,\ldots,X_n\in A_n)=P(X_1\in A_1)\cdot\ldots\cdot P(X_n\in A_n)$
- Dla niezależnych $X_1,\ldots,X_n$: $E(X_1\cdot\ldots\cdot X_n)=EX_1\cdot\ldots\cdot EX_n$
- Dla niezależnych X,Y: $C(X,Y)=0$
- Dla niezależnych $X_1,\ldots,X_n$: $D^2(X_1\pm\ldots\pm X_n)=D^2(X_1)+\ldots+D^2(X_n)$
- Jeśli $X_1,\ldots,X_n\sim B(p)$ niezależne to $Y=\sum_{i=1}^n X_i\sim B(n,p)$

9. Ciągłe zmienne losowe

- Dla $Y=g(X)$ g różniczkowalna i odwracalna: $f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)|h'(y)|$, gdzie $h=g^{-1}$
- Jeśli $Y=g(x)$ to $EY=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$
- Rozkład jednostajny Unif$[a,b]$: $f(x)=\frac{1}{b-a}$ dla $x\in[a,b]$ $E(X)=\frac{a+b}{2}$, $D^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
- Rozkład wykładniczy Exp(λ): $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ dla $x\geqslant 0$, $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, $EX=\frac{1}{\lambda}$, $D^2(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
- Brak pamięci: jeśli $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$ to $P(X\geqslant b|X\geqslant a)=P(X\geqslant b-a)$
- Rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\big\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\big\}$, $EX=\mu$, $D^2(X)=\sigma^2$
- Jeśli $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ to $aX+b\sim N(\mu a+b,a^2\sigma^2)$
- Jeśli $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ to $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$
- Jeśli $Z\sim N(0,1)$ to $X=\sigma Z+\mu\sim N(\mu,\sigma^2)$
- Dystrybuanta $Z\sim N(0,1)$: $\Phi(z)=P(Z\leqslant z)$, $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$

10. Ciągłe zmienne losowe II

- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$
- Gęstość brzegowa: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$
- Gęstość warunkowa: $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$
- $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\,\mathrm{d}x$
- Zmienne niezależne: $f(x_1,\ldots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(x_n)$
- $X_1,\ldots,X_n$ – niezależne o tej samej dystryb. F_X, $Y=\max_i\{X_i\}$, $Z=\min_i\{X_i\}$ to $F_Y(y)=F_X(y)^n$, $F_Z(z)=1-(1-F_X(z))^n$
- Jeśli X,Y niezależne i $Z=X+Y$ to: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$ (splot)
- Jeśli $X\sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$, $Y\sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$, oraz X,Y – niezależne to: $Z=X+Y\sim N(\mu_X+\mu_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$
- $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ – niezależne, $Z=\sum_{i=1}^n a_iX_i$, to: $Z\sim N\big(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\big)$
- Z ma rozkład $\chi^2(k)$ jeśli $Z=\sum_{i=1}^k X_i^2$ gdzie $X_i\sim N(0,1)$, niezależne. $EZ=k$
- T ma rozkład t-Studenta, $t(k)$, jeśli $T=\frac{X}{\sqrt{Z}}\sqrt{k}$, gdzie $X\sim N(0,1)$, $Z\sim\chi^2(k)$, X i Z niezależne

11. Twierdzenia graniczne I

- Jeśli $X_1,\ldots,X_n$ niezależne o tym samym rozkł. z $EX_i=\mu$ i $D^2(X_i)=\sigma^2$ to $E\overline{X}_n=\mu$ oraz $D^2(\overline{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}$
- $X_n\overset{\text{z pr. 1}}{\to}X$: $P\big(\lim_{n\to\infty}X_n=X\big)=1$
- $X_n\overset{P}{\to}X$: $\forall\epsilon>0,\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|>\epsilon)=0$
- $X_n\overset{\text{z pr. 1}}{\to}X\ \Rightarrow\ X_n\overset{P}{\to}X\ \Rightarrow\ X_n\overset{D}{\to}X$
- (Silne) PWL Bernoulliego: jeśli $X_1,\ldots,X_n\sim B(p)$ niezależne, to $\overline{X}_n\overset{\text{z pr. 1}}{\to}p$
- (Silne) PWL Chińczyna: jeśli $X_1,\ldots,X_n$ niezależne o tym samym rozkładzie, $EX=\mu$, $D^2(X)<\infty$ to $\overline{X}_n\overset{\text{z pr. 1}}{\to}\mu$

12. Twierdzenia graniczne II

- Dla $U=\frac{X-EX}{D(X)}$ mamy $EU=0$, $D^2(U)=1$
- $X_n\overset{D}{\to}X$: $\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)$ w każdym punkcie ciągłości F_X
- Tw. Moivre'a-Laplace'a: jeśli $X_1,\ldots,X_n\sim B(p)$ niezależnie, to $U=\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{\overline{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\overset{D}{\to}Z\sim N(0,1)$
- Tw. Lindeberga-Levy'ego: jeśli $X_1,\ldots,X_n$ niezależne o tym samym rozkładzie, $EX=\mu$, $D^2(X)=\sigma^2$ to: $U=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\overset{D}{\to}Z\sim N(0,1)$
- Wniosek: jeśli $S_n\sim B(n,p)$ to S_n można przybliżyć zmienną $X\sim N(np,np(1-p))$ (warunek: $np\geqslant 5$ i $n(1-p)\geqslant 5$)
- Funkcja tworząca momenty: $M_X(t)=E(e^{tX})$

rozkład X	$M_X(t)$	rozkład X	$M_X(t)$
$B(p)$	pe^t+1-p	$B(n,p)$	$(pe^t+1-p)^n$
Unif$[0,1]$	$\frac{e^t-1}{t}$ (lub 1)	Exp(λ)	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
Pois(λ)	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$N(\mu,\sigma^2)$	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

- $M_X(0)=1$, $M_X^{(k)}(0)=E(X^k)$, $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$,
- $M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)$ dla X,Y - niezależne

13. Statystyka

- Estymator zgodny: $\widehat{\theta}\overset{P}{\to}\theta$ (słabo), $\widehat{\theta}\overset{\text{z pr. 1}}{\to}\theta$ (silnie)
- Estymator nieobciążony: $E(\widehat{\theta})=\theta$
- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X}_n)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-(\overline{X}_n)^2$
- Nieobciążony estymator wariancji: $\widehat{\sigma}_*^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X}_n)^2$
- Nierówność Craméra-Rao: $D^2(\widehat{\theta})\geqslant\frac{1}{nI(\theta)}$ dla nieobciążonego $\widehat{\theta}$ parametru θ, gdzie:
  $I(\theta)=E\Big(\Big(\frac{\partial\ln p(X)}{\partial\theta}\Big)^2\Big)$ (rozkł. dyskretny)
  $I(\theta)=E\Big(\Big(\frac{\partial\ln f(X)}{\partial\theta}\Big)^2\Big)$ (rozkł. ciągły)

14. Statystyka II

- Przedział ufności na poziomie ufności $1-\alpha$: $P(\widehat{\theta}_L\leqslant\theta\leqslant\widehat{\theta}_P)=1-\alpha$
- Przedział ufności dla wart. oczekiwanej μ gdy $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 znana: $[\overline{X}_n-\Delta,\overline{X}_n+\Delta]$, gdzie $\Delta=z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $z_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$
- Przedział ufności dla μ gdy $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 nieznana: $[\overline{X}_n-\Delta,\overline{X}_n+\Delta]$, gdzie $\Delta=t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{\widehat{\sigma}_*}{\sqrt{n}}$
- Przedział ufności dla p gdy $X\sim B(p)$: $[\widehat{p}-\Delta,\widehat{p}+\Delta]$, gdzie $\Delta=z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$, $z_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, $\widehat{p}=\overline{X}_n$