# *Metody probabilistyczne*
# Pominięte dowody

8. Wielowymiarowe zmienne losowe II

16.12.2020

**Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego-Schwarza):** *dla dowolnych zmiennych losowych $X$ i $Y$ zachodzi:*

$$\big(E(XY)\big)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2),$$

*Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $X$ i $Y$ są swoimi wielokrotnościami, tzn. $X = cY$ lub $Y = cX$ dla $c \in \mathbb{R}$.*

*Dowód*: Dowód przeprowadzimy osobno w dwóch przypadkach: (1) gdy $E(Y^2) = 0$; (2) gdy $E(Y^2) > 0$.

1. Zauważmy, że jeśli $E(Y^2) = 0$, to znaczy, że

   $$0 \;=\; E(Y^2) \;=\; \sum_y y^2 P(Y = y).$$

   Ponieważ wszystkie elementy sumy po prawej stronie są nieujemne, równość ta będzie spełniona tylko wtedy, gdy $y^2 = 0$ dla wszystkich $y$ (takich, że $P(Y = y) > 0$). Oznacza to, że zmienna $Y$ jest stałą równą zero[1]. Tym samym $XY = 0$ oraz $Y^2 = 0$, a więc: $E(XY) = 0$ i $E(Y^2) = 0$, więc nierówność Cauchy'ego-Schwarza jest spełniona jako równość. Ponieważ możemy zapisać wtedy $Y = 0 \cdot X$, jest to przypadek kiedy $Y$ jest (trywialną) wielokrotnością $X$.

2. Załóżmy teraz, że $E(Y^2) > 0$. Rozważmy zmienną losową $Z = X - \lambda Y$ dla pewnego $\lambda \neq 0$, które ustalimy później. Mamy oczywiście $E(Z^2) \geqslant 0$, ponieważ $Z^2$ przyjmuje tylko wartości nieujemne. Tym samym:

   $$0 \;\leqslant\; E(Z^2) \;=\; E(X^2) - 2\lambda E(XY) + \lambda^2 E(Y^2) \tag{1}$$

   Przyjmijmy teraz $\lambda = \frac{E(XY)}{E(Y^2)}$. Prawa strona nierówności (1) przyjmie wtedy postać:

   $$\begin{aligned} E(X^2) - 2\frac{E(XY)}{E(Y^2)}E(XY) + \frac{\big(E(XY)\big)^2}{\big(E(Y^2)\big)^2}E(Y^2) \;&=\; E(X^2) - 2\frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)} + \frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)} \\ &=\; E(X^2) - \frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)}. \end{aligned}$$

   Z (1) wynika więc, że:

   $$E(X^2) - \frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)} \;\geqslant\; 0,$$

   lub przemnażając obie strony przez $E(Y^2)$:

   $$E(X^2)E(Y^2) - \big(E(XY)\big)^2 \;\geqslant\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \big(E(XY)\big)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

   To dowodzi nierówności Cauchy'ego-Schwarza. Na koniec zauważamy, że jedyna nierówność, jaką tutaj zastosowaliśmy to $E(Z^2) \geqslant 0$. Nierówność ta spełniona jest jako równość $E(Z^2) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(Z = 0) = 1$, tzn. $Z$ jest stałą równą zero. Ale ponieważ $Z = X - \lambda Y$, zachodzi to wtedy i tylko wtedy gdy $X = \lambda Y$, tzn. $X$ i $Y$ są swoimi wielokrotnościami.

[1] Ściślej: $Y$ jest równe zero *z prawdopodobieństwem 1*, tzn. $P(Y = 0) = 1$. $Y$ może przyjąć inną wartość niż zero, ale musi to mieć wtedy prawdopodobieństwo równe zero. Tę subtelność matematyczną pomijamy