

Metody probabilistyczne

Rozwiązania zadań

7. Wielowymiarowe zmienne losowe

2.12.2020

Zadanie 1*. Pokaż, że rozkład $P_{X|B}(A) = P(X \in A|Y \in B)$ zdefiniowany jako

$$P(X \in A|Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)} \quad (1)$$

dla $P(Y \in B) > 0$, spełnia aksjomaty Kołmogorowa

Odpowiedź:

1. *Nieujemność* $P_{X|B}(A) \geq 0$: wynika wprost z definicji, ponieważ wszystkie wyrażenia po prawej stronie (1) są nieujemne.
2. *Normalizacja* $P_{X|B}(\mathbb{R}) = 1$. Wynika to z poniższego:

$$P_{X|B}(\mathbb{R}) = \frac{P(X \in \mathbb{R}, Y \in B)}{P(Y \in B)} \stackrel{(*)}{=} \frac{P(Y \in B)}{P(Y \in B)} = 1,$$

gdzie w (*) użyliśmy dość oczywistej równości $P(Y \in B) = P(X \in \mathbb{R}, Y \in B)$, wynikającej z tego, że zdarzenia $\{Y \in B\}$ oraz $\{X \in \mathbb{R} \wedge Y \in B\}$ są identyczne.

3. *Addytywność*: mając ciąg A_1, A_2, \dots zdarzeń rozłącznych, tj. takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$, musimy pokazać, że $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j | Y \in B\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j | Y \in B)$. Mamy:

$$\begin{aligned} P_{X|B}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \frac{P\left((X \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j), Y \in B\right)}{P(Y \in B)} \\ &= \frac{P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{X \in A_j \wedge Y \in B\}\right)}{P(Y \in B)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(\{X \in A_j \wedge Y \in B\})}{P(Y \in B)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(X \in A_j, Y \in B)}{P(Y \in B)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(X \in A_j | Y \in B) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{X|B}(A_j), \end{aligned}$$

gdzie w (*) wykorzystaliśmy fakt, że skoro zdarzenia $\{X \in A_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$) są rozłączne (bo zbiory $A_j, j = 1, 2, \dots$ są rozłączne), to tym bardziej są rozłączne są zdarzenia $\{X \in A_j \wedge Y \in B\}$ ($j = 1, 2, \dots$).

Zadanie 2*. Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby potomków X

Odpowiedź: Y ma rozkład $\text{Pois}(\lambda)$, tzn:

$$P(Y = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zakładając, że $Y = n$ (tzn. owad złożył n jajeczek), liczba potomków X dana jest rozkładem dwumianowym (liczba „sukcesów” w n próbach, gdzie „sukces” oznacza wylęgnięcie się potomka z danego jaja, stąd prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p):

$$P(X = k|Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Zauważmy też, że $P(X = k|Y = n) = 0$ dla $n < k$ (nie może się wylęgnąć więcej potomków niż jest złożonych jaj). Celem zadania jest policzenie „bezwarunkowego” rozkładu X , tzn. wyznaczenie prawdopodobieństwa $P(X = k)$, dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = k|Y = n)P(Y = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad (2)$$

gdzie możemy sumować od $n = k$, ponieważ $P(X = k|Y = n) = 0$ dla $n < k$. Przekształcając ostatnie wyrażenie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} &= \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \overbrace{\frac{\lambda^{n-k} \lambda^k}{\cancel{n!}}}^{\lambda^n} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Podstawiając do (2) dostajemy:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}, \end{aligned}$$

gdzie w (*) zmieniliśmy indeks sumowania z n na $n - k$, a w (†) użyliśmy znanego faktu: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (patrz zadanie z poprzedniego wykładu) dla $x = \lambda(1-p)$, a następnie zauważyliśmy, że $e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda + \lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}$.

A więc $P(X = k)$ ma rozkład Poissona z parametrem λp . Możemy z tego natychmiast wyznaczyć wartość oczekiwaną $EX = \lambda p$.

Zadanie 3. Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p . Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Odpowiedź: Niech $Y \in \{0, 1, \dots, n\}$ będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $B(n, p)$ określającą liczbę sukcesów w n próbach. Niech $X \in \{0, 1\}$ będzie binarną zmienną losową określającą czy w

pierwszej próbie zaszedł sukces ($X = 1$) czy porażka ($X = 0$). Naszym celem jest policzenie $E(X|Y = k)$. Mamy:

$$E(X|Y = k) = 0 \cdot P(X = 0|Y = k) + 1 \cdot P(X = 1|Y = k) = P(X = 1|Y = k).$$

Zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(X = 1|Y = k) = \frac{P(X = 1, Y = k)}{P(Y = k)}.$$

Mianownik jest po prostu równy $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ponieważ jest to prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach.

Teraz skupimy się na wyznaczeniu licznika. Od razu zauważmy, że licznik jest równy 0, jeśli $k = 0$ (ponieważ nie ma możliwości aby w pierwszej próbie zaszedł sukces ($X = 1$), a jednocześnie łączna liczba sukcesów k była równa 0). Rozważmy więc tylko $k > 0$. Prawdopodobieństwo w liczniku $P(X = 1, Y = k)$ określa szansę zajścia zdarzenia „ k sukcesów w n próbach, przy czym w pierwszej próbie nastąpił sukces”. Dla dowolnego n -elementowego ciągu binarnego z k jedynekami (sukcesami), prawdopodobieństwo tego ciągu wynosi $p^k (1-p)^{n-k}$. Ile jest takich ciągów, w których sukces nastąpił w pierwszej próbie? Jest ich dokładnie $\binom{n-1}{k-1}$, ponieważ na tyle sposobów możemy rozłożyć $k-1$ sukcesów wśród pozostałych $n-1$ prób (jeden sukces jest zarezerwowany dla pierwszej próby). Tym samym:

$$P(X = 1, Y = k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{dla } k > 0$$

Otrzymujemy więc:

$$P(X = 1|Y = k) = \frac{\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k}{n}.$$

Wynik ten zgadza się również dla $k = 0$ (jak zauważyliśmy wcześniej, $P(X = 1|Y = 0) = 0$). Tym samym $E(X|Y = k) = \frac{k}{n}$. Co zaskakujące, wynik ten w ogóle nie zależy od prawdopodobieństwa sukcesu p !

Zadanie 4. Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p . Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie? Wyznacz wynik na dwa sposoby:

- Bezpośrednio (trywialne),
- Korzystając ze wzoru $E(E(X|Y)) = EX$ i wyniku z zadania 3.

Odpowiedź: Niech zmienna $X \in \{0, 1\}$ określa liczbę sukcesów w pierwszej próbie. Ponieważ X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$, więc oczywiście $EX = p$.

Zobaczmy, czy ten sam wynik dostaniemy używając wyniku z poprzedniego zadania. Niech $Y \in \{0, 1, \dots, n\}$ będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $B(n, p)$ określającą liczbę sukcesów w n próbach. Pokazaliśmy, że:

$$E(X|Y = k) = \frac{k}{n}.$$

Traktując warunkową wartość oczekiwaną jako funkcję zmiennej Y dostajemy:

$$E(X|Y) = \frac{Y}{n}$$

Stąd:

$$EX = E(E(X|Y)) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{np}{n} = p,$$

czego oczywiście się spodziewaliśmy.