

# Metody probabilistyczne

## 7. Wielowymiarowe zmienne losowe

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP  
<http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/>

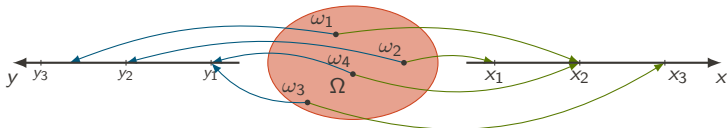
2.12.2020

# Wiele zmiennych losowych

Będziemy rozważali wiele zmiennych losowych zdefiniowanych na **tej samej** przestrzeni probabilistycznej  $\Omega$

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



## Przykład: rzut dwoma kostkami

- $X$  – wynik rzutu na pierwszej kostce
- $Y$  – wynik rzutu na drugiej kostce

## Przykład: rzut dwoma kostkami

- $X$  – wynik rzutu na pierwszej kostce
- $Y$  – wynik rzutu na drugiej kostce

$$P(X = 1) = 1/6$$

$$P(2 \leq Y \leq 3) = 2/6$$

$$P(X \geq 4) = 3/6$$

## Przykład: rzut dwoma kostkami

- $X$  – wynik rzutu na pierwszej kostce
- $Y$  – wynik rzutu na drugiej kostce

$$P(X = 1) = 1/6$$

$$P(2 \leq Y \leq 3) = 2/6$$

$$P(X \geq 4) = 3/6$$

$$P(X = 2 \wedge Y = 3) = 1/36$$

## Przykład: rzut dwoma kostkami

- $X$  – wynik rzutu na pierwszej kostce
- $Y$  – wynik rzutu na drugiej kostce

$$P(X = 1) = 1/6$$

$$P(2 \leq Y \leq 3) = 2/6$$

$$P(X \geq 4) = 3/6$$

$$P(X = 2 \wedge Y = 3) = 1/36$$

$$P(X = 2 | Y = 3) = 1/6$$

## Przykład: rzut dwoma kostkami

- $X$  – wynik rzutu na pierwszej kostce
- $Y$  – wynik rzutu na drugiej kostce

$$P(X = 1) = 1/6$$

$$P(2 \leq Y \leq 3) = 2/6$$

$$P(X \geq 4) = 3/6$$

$$P(X = 2 \wedge Y = 3) = 1/36$$

$$P(X = 2 | Y = 3) = 1/6$$

$$P(X + Y = 10) = 3/36$$

## Rozkład łączny

Niech  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$  będą dyskretnymi zmiennymi losowymi zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Rozkład łączny określa prawdopodobieństwa równoczesnego przyjęcia danych wartości przez  $X$  i  $Y$ :

$$P(X = x, Y = y), \quad x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$



# Rozkład łączny

Niech  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$  będą dyskretnymi zmiennymi losowymi zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Rozkład łączny określa prawdopodobieństwa równoczesnego przyjęcia danych wartości przez  $X$  i  $Y$ :

$$P(X = x, Y = y), \quad x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$

Interpretacja:

$$P(\{X = x \wedge Y = y\})$$

# Rozkład łączny

Niech  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$  będą dyskretnymi zmiennymi losowymi zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Rozkład łączny określa prawdopodobieństwa równoczesnego przyjęcia danych wartości przez  $X$  i  $Y$ :

$$P(X = x, Y = y), \quad x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$




Interpretacja:

$$P(\{X = x \wedge Y = y\})$$



Rozkład łączny pozwala wyznaczać dowolne prawdopodobieństwa postaci:

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} P(X = x, Y = y), \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

## Przykład: rzut kostką

						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

## Przykład: rzut kostką


						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{6} \quad P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 0, Y = 3) = \frac{0}{6}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{6}$$

## Przykład: rzut kostką

						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3







Rozkład łączny:

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{6} \quad P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 0, Y = 3) = \frac{0}{6}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X + Y = 2) =$$

## Przykład: rzut kostką

						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3




Rozkład łączny:

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{6} \quad P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 0, Y = 3) = \frac{0}{6}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X + Y = 2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$

## Przykład: rzut kostką

						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:





$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{6} \quad P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 0, Y = 3) = \frac{0}{6}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6} \quad P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X + Y = 2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$

$$P(X = 1) =$$

## Przykład: rzut kostką

						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \frac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \frac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \frac{0}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \frac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$

$$P(X=1) = P(X=1, Y \in \mathbb{R})$$

$$= P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) = \frac{3}{6}$$



## Przykład: rzut kostką

						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \frac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \frac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \frac{0}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \frac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \frac{1}{6}$$





$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$

$$P(X=1) = P(X=1, Y \in \mathbb{R})$$

$$= P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) = \frac{3}{6}$$

$$P(X=1|Y=1) =$$

## Przykład: rzut kostką

						
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \frac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \frac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \frac{0}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \frac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$

$$P(X=1) = P(X=1, Y \in \mathbb{R})$$

$$= P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) = \frac{3}{6}$$

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

# Rozkład brzegowy

Mając rozkład **łączy** zmiennych  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$  definiujemy rozkłady **brzegowe**:

- Ze względu na  $X$  jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

# Rozkład brzegowy

Mając rozkład **łączy** zmiennych  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$  definiujemy rozkłady **brzegowe**:

- Ze względu na  $X$  jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

wynika z rozbicia na sumę **rozłącznych** zdarzeń:

$$\{X = x\} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \{X = x \wedge Y = y\}$$

# Rozkład brzegowy

Mając rozkład **łączy** zmiennych  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$  definiujemy rozkłady **brzegowe**:

- Ze względu na  $X$  jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

wynika z rozbicia na sumę **rozłącznych** zdarzeń:

$$\{X = x\} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \{X = x \wedge Y = y\}$$

- Ze względu na  $Y$  jako:

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x, Y = y)$$

# Rozkład brzegowy

Mając rozkład **łączy** zmiennych  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$  definiujemy rozkłady **brzegowe**:

- Ze względu na  $X$  jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

wynika z rozbicia na sumę **rozłącznych** zdarzeń:

$$\{X = x\} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \{X = x \wedge Y = y\}$$

- Ze względu na  $Y$  jako:

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x, Y = y)$$

Rozkład brzegowy określa więc rozkład prawdopodobieństwa jednej ze zmiennych, gdzie wynik drugiej zmiennej jest dowolny

## Rozkład brzegowy a łączny

	$y_1$	$y_2$	
$x_1$	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	
$x_2$	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	

## Rozkład brzegowy a łączny

	$y_1$	$y_2$	$\Sigma$
$x_1$	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
$x_2$	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
$\Sigma$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1



## Rozkład brzegowy a łączny

	$y_1$	$y_2$	$\Sigma$
$x_1$	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
$x_2$	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
$\Sigma$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1

Czy mając rozkłady brzegowe jesteśmy w stanie odtworzyć rozkład łączny?

## Rozkład brzegowy a łączny

	$y_1$	$y_2$	$\Sigma$
$x_1$	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
$x_2$	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
$\Sigma$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1

Czy mając rozkłady brzegowe jesteśmy w stanie odtworzyć rozkład łączny?

W ogólności **nie da się**:

	$y_1$	$y_2$	$\Sigma$
$x_1$	0.08	0.12	0.2
$x_2$	0.32	0.48	0.8
$\Sigma$	0.4	0.6	1

	$y_1$	$y_2$	$\Sigma$
$x_1$	0.2	0	0.2
$x_2$	0.2	0.6	0.8
$\Sigma$	0.4	0.6	1

Rozkłady brzegowe są takie same, rozkłady łączne różne.

## Rozkład warunkowy

Rozkładem **warunkowym** zmiennej  $X$  pod warunkiem  $Y \in B$ , gdzie  $P(Y \in B) > 0$ , nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany dla dowolnego  $A \subseteq \mathbb{R}$  jako:

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

## Rozkład warunkowy

Rozkładem **warunkowym** zmiennej  $X$  pod warunkiem  $Y \in B$ , gdzie  $P(Y \in B) > 0$ , nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany dla dowolnego  $A \subseteq \mathbb{R}$  jako:

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

**Uwaga:** Zwykle będziemy zainteresowani tylko prawdopodobieństwami postaci:

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad \text{dla } P(Y = y) > 0$$

## Rozkład warunkowy

Rozkładem **warunkowym** zmiennej  $X$  pod warunkiem  $Y \in B$ , gdzie  $P(Y \in B) > 0$ , nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany dla dowolnego  $A \subseteq \mathbb{R}$  jako:

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

**Uwaga:** Zwykle będziemy zainteresowani tylko prawdopodobieństwami postaci:

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad \text{dla } P(Y = y) > 0$$

### Zadanie 1

Pokaż, że rozkład  $P_{X|B}(A) = P(X \in A | Y \in B)$  zdefiniowany w ten sposób spełnia aksjomaty Kołmogorowa.

## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) =$$

## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0 | Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) =$$



## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0$$

## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0$$

$$P(X = 1|Y = 1) =$$

## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0$$

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0$$

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

$$P(Y = 0|X = 0) =$$

## Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0$$

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

$$P(Y = 0|X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(X = 0)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

## Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Dla dyskretnych zmiennych  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$ , gdzie  $P(Y = y) > 0$  dla wszystkich  $y \in \mathcal{Y}$ , zachodzi:

$$P(X \in A) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X \in A | Y = y) P(Y = y)$$

## Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Dla dyskretnych zmiennych  $X \in \mathcal{X}$  i  $Y \in \mathcal{Y}$ , gdzie  $P(Y = y) > 0$  dla wszystkich  $y \in \mathcal{Y}$ , zachodzi:

$$P(X \in A) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X \in A | Y = y) P(Y = y)$$

**Dowód:** Rodzina zdarzeń  $\{Y = y\}$  dla wszystkich  $y \in \mathcal{Y}$  tworzy **układ zupełny** (wzajemnie rozłączne i pokrywają całą przestrzeń probabilistyczną).

Wzór wynika więc bezpośrednio ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dla zdarzeń.

## Przykład

Rzucamy wpierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  orłów ( $k = 0, \dots, 6$ ).



## Przykład

Rzucamy wpierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  orłów ( $k = 0, \dots, 6$ ).

$X$  – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) =$$

## Przykład

Rzucamy wpierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  orłów ( $k = 0, \dots, 6$ ).

$X$  – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli } k \leq n \end{cases}$$

## Przykład

Rzucamy w pierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  orłów ( $k = 0, \dots, 6$ ).

$X$  – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli } k \leq n \end{cases}$$

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^6 P(X = k | Y = n) P(Y = n)$$

## Przykład

Rzucamy wpieryw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  orłów ( $k = 0, \dots, 6$ ).

$X$  – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli } k \leq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^6 P(X = k | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=\max\{1, k\}}^6 \frac{1}{6} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

## Przykład

Rzucamy w pierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  orłów ( $k = 0, \dots, 6$ ).

$X$  – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli } k \leq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^6 P(X = k | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=\max\{1, k\}}^6 \frac{1}{6} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{np. } P(X = 5) = \frac{1}{6} \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6} \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

# Zadanie

## Zadanie 2

Owad składa  $Y$  jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych.

Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby potomków  $X$

# Warunkowa wartość oczekiwana

## Definicja

Wyrażenie:

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} xP(X = x|Y = y)$$

nazywamy **warunkową wartością oczekiwaną** zmiennej losowej  $X$  pod warunkiem  $Y = y$ .

Jest to wartość średnia zmiennej  $X$  policzona na rozkładzie warunkowym  $P(X = x|Y = y)$ .

# Warunkowa wartość oczekiwana

## Definicja

Wyrażenie:

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} xP(X = x|Y = y)$$

nazywamy **warunkową wartością oczekiwaną** zmiennej losowej  $X$  pod warunkiem  $Y = y$ .

Jest to wartość średnia zmiennej  $X$  policzona na rozkładzie warunkowym  $P(X = x|Y = y)$ .

**Uwaga:** Ponieważ rozkład warunkowy jest rozkładem prawdopodobieństwa (ze względu na  $x$ ), warunkowa wartość oczekiwana ma te same własności co zwykła wartość oczekiwana, np:

$$E(g(X)|Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)P(X = x|Y = y)$$

$$E(aX + b|Y = y) = aE(X|Y = y) + b$$



## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

$$E(X|Y = 0) =$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

$$E(X|Y = 0) = 0 \cdot P(X = 0|Y = 0) + 1 \cdot P(X = 1|Y = 0)$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

$$\begin{aligned} E(X|Y = 0) &= 0 \cdot P(X = 0|Y = 0) + 1 \cdot P(X = 1|Y = 0) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

$$\begin{aligned} E(X|Y = 0) &= 0 \cdot P(X = 0|Y = 0) + 1 \cdot P(X = 1|Y = 0) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$E(X|Y = 1) =$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	$0$	$1/2$
$X = 1$	$0$	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\Sigma$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$1$

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

$$E(X|Y = 0) = 0 \cdot P(X = 0|Y = 0) + 1 \cdot P(X = 1|Y = 0)$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$E(X|Y = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

$$E(X|Y = 0) = 0 \cdot P(X = 0|Y = 0) + 1 \cdot P(X = 1|Y = 0)$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$E(X|Y = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(X|Y = 2) =$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$P(X = 0|Y = 0) = 1$$

$$P(X = 1|Y = 0) = 0$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 1|Y = 1) = 1/2$$

$$P(X = 0|Y = 2) = 0$$

$$P(X = 1|Y = 2) = 1$$

$$E(X|Y = 0) = 0 \cdot P(X = 0|Y = 0) + 1 \cdot P(X = 1|Y = 0)$$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$E(X|Y = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(X|Y = 2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$



## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Owad składa  $Y$  jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych. Jeśli  $X$  określa liczbę potomków, wyznacz  $E(X|Y = n)$ .

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Owad składa  $Y$  jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych. Jeśli  $X$  określa liczbę potomków, wyznacz  $E(X|Y = n)$ .

Przy zadanym  $Y = n$ ,  $X$  ma rozkład dwumianowy  $B(n, p)$ :

$$P(X = k|Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

## Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Owad składa  $Y$  jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych. Jeśli  $X$  określa liczbę potomków, wyznacz  $E(X|Y = n)$ .

Przy zadanym  $Y = n$ ,  $X$  ma rozkład dwumianowy  $B(n, p)$ :

$$P(X = k|Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Tym samym:

$$E(X|Y = n) = np$$

# Zadanie

## Zadanie 3

Rozważmy schemat  $n$  prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu  $p$ . Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło  $k$  sukcesów?

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Ponieważ  $E(X|Y = n) = g(n)$  jest pewną funkcją wartości przyjmowanej przez  $Y$ , możemy ją potraktować jako **zmienną losową będącą funkcją  $Y$** :

$$E(X|Y) = g(Y)$$

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Ponieważ  $E(X|Y = n) = g(n)$  jest pewną funkcją wartości przyjmowanej przez  $Y$ , możemy ją potraktować jako **zmienną losową będącą funkcją  $Y$** :

$$E(X|Y) = g(Y)$$

**Przykład:** W poprzednim zadaniu wyznaczyliśmy  $E(X|Y = n) = np$ .  
Tym samym:

$$E(X|Y) = Yp$$

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Ponieważ  $E(X|Y = n) = g(n)$  jest pewną funkcją wartości przyjmowanej przez  $Y$ , możemy ją potraktować jako **zmienną losową będącą funkcją  $Y$** :

$$E(X|Y) = g(Y)$$

**Przykład:** W poprzednim zadaniu wyznaczyliśmy  $E(X|Y = n) = np$ . Tym samym:

$$E(X|Y) = Yp$$

**Przykład:** W pierwszym przykładzie wyznaczyliśmy:

$$E(X|Y = 0) = 0, \quad E(X|Y = 1) = \frac{1}{2}, \quad E(X|Y = 2) = 1$$

Tym samym:

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y = 0 \\ 1/2 & \text{dla } Y = 1 \\ 1 & \text{dla } Y = 2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

$$E(E(X|Y)) = EX$$



## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

$$E(E(X|Y)) = EX$$

**Dowód:** Skoro  $E(X|Y) = g(Y)$ , mamy:

$$E(E(X|Y)) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} g(y)P(Y = y)$$

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

$$E(E(X|Y)) = EX$$

**Dowód:** Skoro  $E(X|Y) = g(Y)$ , mamy:

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} g(y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y) \end{aligned}$$

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

$$E(E(X|Y)) = EX$$

**Dowód:** Skoro  $E(X|Y) = g(Y)$ , mamy:

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} g(y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left( \sum_{x \in \mathcal{X}} xP(X = x|Y = y) \right) P(Y = y) \end{aligned}$$

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

$$E(E(X|Y)) = EX$$

**Dowód:** Skoro  $E(X|Y) = g(Y)$ , mamy:

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} g(y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left( \sum_{x \in \mathcal{X}} xP(X = x|Y = y) \right) P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x|Y = y)P(Y = y) \end{aligned}$$

## Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

$$E(E(X|Y)) = EX$$

**Dowód:** Skoro  $E(X|Y) = g(Y)$ , mamy:

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} g(y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left( \sum_{x \in \mathcal{X}} xP(X = x|Y = y) \right) P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x|Y = y)P(Y = y) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{x \in \mathcal{X}} xP(X = x) = EX, \end{aligned}$$

gdzie (\*) wynika ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

## Przykład: oblicz $EX$

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y = 0 \\ 1/2 & \text{dla } Y = 1 \\ 1 & \text{dla } Y = 2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

## Przykład: oblicz $EX$

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y = 0 \\ 1/2 & \text{dla } Y = 1 \\ 1 & \text{dla } Y = 2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

- Z jednej strony:

$$EX = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

## Przykład: oblicz $EX$

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$\Sigma$
$X = 0$	1/4	1/4	0	1/2
$X = 1$	0	1/4	1/4	1/2
$\Sigma$	1/4	1/2	1/4	1

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y = 0 \\ 1/2 & \text{dla } Y = 1 \\ 1 & \text{dla } Y = 2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

- Z jednej strony:

$$EX = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

- Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} EX &= E(E(X|Y)) = \frac{1}{2}EY \\ &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2)}_{=1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



## Przykład

Owad składa  $Y$  jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych. Jeśli  $X$  określa liczbę potomków, wyznacz  $EX$

## Przykład

Owad składa  $Y$  jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych. Jeśli  $X$  określa liczbę potomków, wyznacz  $EX$

Policzyliśmy, że:

$$E(X|Y) = Yp$$

## Przykład

Owad składa  $Y$  jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda$ , a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem  $p$  niezależnie od innych. Jeśli  $X$  określa liczbę potomków, wyznacz  $EX$

Policzyliśmy, że:

$$E(X|Y) = Yp$$

Tym samym:

$$EX = E(E(X|Y)) = pEY = p\lambda$$

## Przykład

Rzucamy wpierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech  $X$  oznacza liczbę orłów. Wyznacz  $EX$

## Przykład

Rzucamy wpierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech  $X$  oznacza liczbę orłów. Wyznacz  $EX$

Przy zadanym  $Y = n$ ,  $X$  ma rozkład dwumianowy  $B(n, 1/2)$ .

## Przykład

Rzucamy wpierw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech  $X$  oznacza liczbę orłów. Wyznacz  $EX$

Przy zadanym  $Y = n$ ,  $X$  ma rozkład dwumianowy  $B(n, 1/2)$ . Stąd:

$$E(X|Y = n) = \frac{1}{2}n, \quad E(X|Y) = \frac{1}{2}Y$$

## Przykład

Rzucamy wpieryw kostką ( $Y \in \{1, \dots, 6\}$ ), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech  $X$  oznacza liczbę orłów. Wyznacz  $EX$

Przy zadanym  $Y = n$ ,  $X$  ma rozkład dwumianowy  $B(n, 1/2)$ . Stąd:

$$E(X|Y = n) = \frac{1}{2}n, \quad E(X|Y) = \frac{1}{2}Y$$

$$EX = E(E(X|Y)) = \frac{1}{2}EY = \frac{1}{2} \cdot 3.5$$

# Zadanie

## Zadanie 4

Rozważmy schemat  $n$  prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu  $p$ . Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie?

Wyznacz wynik na dwa sposoby:

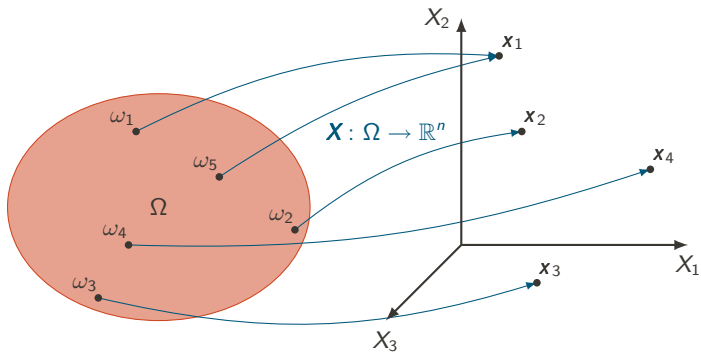
- Bezpośrednio (trywialne),
- Korzystając ze wzoru  $E(E(X|Y)) = EX$  i wyniku z zadania domowego nr 3.



## Wielowymiarowe zmienne losowe

Rozważmy  $n$  zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_n$  zdefiniowanych na tej samej przestrzeni probabilistycznej  $\Omega$

Zmienne to można całościowo traktować jako wielowymiarową zmienną losową (wektor losowy)  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gdzie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

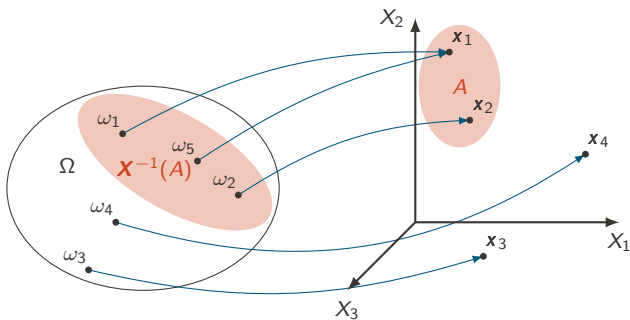


## Rozkład łączny

Łącznym rozkładem prawdopodobieństwa wektora  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazywamy miarę określoną dla zbiorów borelowskich  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  jako:

$$P_{\mathbf{X}}(A) = P(\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in A\}) = P(\mathbf{X}^{-1}(A))$$

Częściej zapisujemy  $P(\mathbf{X} \in A)$



## Rozkład łączny

Niech  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie wektorem **dyskretnych** zmiennych losowych. Rozkład łączny można w pełni opisać za pomocą prawdopodobieństw postaci:

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n),$$

dla dowolnego  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

# Rozkład łączny

Niech  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie wektorem **dyskretnych** zmiennych losowych. Rozkład łączny można w pełni opisać za pomocą prawdopodobieństw postaci:

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n),$$

dla dowolnego  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Wtedy dla dowolnego borelowskiego  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$P(\mathbf{X} \in A) = \sum_{\mathbf{x} \in A} P(\mathbf{X} = \mathbf{x})$$

## Rozkład brzegowy

Mając rozkład **łączy** wektora  $\mathbf{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiujemy rozkład **brzegowy** ze względu na zmienną  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) jako:

$$\begin{aligned} P(X_i = a) &= P(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i = a, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}: x_i = a} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \end{aligned}$$

## Rozkład brzegowy

Mając rozkład **łączy** wektora  $\mathbf{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiujemy rozkład **brzegowy** ze względu na zmienną  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) jako:

$$\begin{aligned} P(X_i = a) &= P(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i = a, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}: x_i = a} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Można też definiować rozkłady brzegowe ze względu na **podzbiór** zmiennych, np:

$$P(X_i = a, X_j = b) = \sum_{\mathbf{x}: x_i = a, x_j = b} P(\mathbf{X} = \mathbf{x})$$

## Rozkład warunkowy

Rozkładem **warunkowym** dyskretnego wektora  $\mathbf{X}$  pod warunkiem  $X_i = x_i$  dla  $P(X_i = x_i) > 0$  nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n | X_i = x_i) \\ = \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i, \dots, X_n = x_n)}{P(X_i = x_i)} \end{aligned}$$

## Rozkład warunkowy

Rozkładem **warunkowym** dyskretnego wektora  $\mathbf{X}$  pod warunkiem  $X_i = x_i$  dla  $P(X_i = x_i) > 0$  nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n | X_i = x_i) \\ = \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i, \dots, X_n = x_n)}{P(X_i = x_i)} \end{aligned}$$

Można też zdefiniować rozkłady warunkowe pod warunkiem wielu zmiennych, np:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 | X_3 = x_3, X_4 = x_4) \\ = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)}{P(X_3 = x_3, X_4 = x_4)} \end{aligned}$$



## Wielowymiarowe zmienne losowe

W podobny sposób można uogólnić na  $n$  zmiennych:

- Wzór na prawdopodobieństwo całkowite, np:

$$P(X_1 \in A) = \sum_{x_2, x_3} P(X_1 \in A | X_2 = x_2, X_3 = x_3) P(X_2 = x_2, X_3 = x_3)$$

- Warunkową wartość oczekiwaną, np:

$$E(X_1 | X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \sum_{x_1} x_1 P(X_1 = x_1 | X_2 = x_2, X_3 = x_3)$$