Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

6. Momenty zmiennych losowych

25.11.2020

Zadanie 1. *Pokaż, że jeśli $X \sim B(n,p)$ to $EX = np$.*

Odpowiedź: X przyjmuje wartości w zbiorze $\{0, 1, \ldots, n\}$ z prawdopodobieństwami zadanymi wzorem $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Korzystając z definicji wartości oczekiwanej:

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&\overset{(*)}{=} np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1\ (\dagger)} \\
&= np,
\end{aligned}
$$

gdzie w $(*)$ obniżyliśmy indeks sumowania (z k na $k-1$), a równość oznaczona przez $(\dagger)$ wynika z tego, że każdy element sumy to prawdopodobieństwo k sukcesów w $n-1$ próbach, stąd suma po wszystkich możliwych k (od 0 do $n-1$) musi dać łącznie 1.

Zadanie 2*. *Pokaż, że jeśli $X \sim NB(r,p)$ to $EX = \frac{rp}{1-p}$*

Odpowiedź: Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ma rozkład ujemny dwumianowy $NB(r,p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^r p^k.$$

Liczymy wartość oczekiwaną:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^r p^k, \tag{1}$$

gdzie opuściliśmy składnik sumy dla $k = 0$ (równy zero). Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
k\binom{r+k-1}{r-1} &= k\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!(r+k-1-(r-1))!} = k\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!k!} \\
&= \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!(k-1)!} = r\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \\
&= r\frac{(r+k-1)!}{r!(r+k-1-r)!} = r\binom{r+k-1}{r}.
\end{aligned}$$

Wracając do (1), mamy:

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{k=1}^{\infty} r\binom{r+k-1}{r}(1-p)^r p^k \\
&= r\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{r+k-1}{r}(1-p)^{r+1}p^{k-1} \\
&= r\frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k}{r}(1-p)^{r+1}p^{k}, \qquad (2)
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika ze zmiany indeksu sumowania z k na $k-1$. Czym jest suma otrzymana w ostatnim wyrażeniu? Aby odpowiedzieć na to pytanie zauważmy, że Y ma rozkład $NB(r+1,p)$ jeśli:

$$P(Y=k) = \binom{(r+1)+k-1}{(r+1)-1}(1-p)^{r+1}p^k = \binom{r+k}{r}(1-p)^{r+1}p^k.$$

A więc ostatnia suma w (2) jest po prostu równa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) = 1$$

Czyli $EX = \frac{rp}{1-p}$, co należało dowieść.

Zadanie 3. *Pokaż, że jeśli* $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ *to* $EX = \lambda$

Odpowiedź: Zmienna $X \in \{0,1,2,\ldots\}$ ma rozkład Poissona $\mathrm{Pois}(\lambda)$, jeśli:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Liczymy wartość oczekiwaną:

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) \overset{(a)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} \\
&\overset{(b)}{=} \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)}_{=1} = \lambda,
\end{aligned}$$

gdzie w (a) opuściliśmy składnik sumy dla $k = 0$ (równy zero), w (b) zmieniliśmy indeks sumowania z k na $k-1$, a ostatnia suma wynosi 1, ponieważ jest to suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych wyników zmiennej losowej X.

Zadanie 4. *Pokaż, że dla dyskretnej zmiennej losowej $X \in \mathcal{X}$ i funkcji $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zachodzi:*

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{x\in\mathcal{X}} g(x)P(X=x).$$

Odpowiedź: Zdefiniujmy zmienną losową $Y = g(X)$. Z definicji wartości oczekiwanej:

$$E(Y) \;=\; \sum_{y\in\mathcal{Y}} y\, P(Y=y),$$

natomiast z definicji rozkładu funkcji zmiennej losowej mamy:

$$P(Y=y) \;=\; \sum_{x\,:\;g(x)=y} P(X=x).$$

Łącząc oba powyższe otrzymujemy:

$$E(Y) \;=\; \sum_{y\in\mathcal{Y}} y \left(\sum_{x:g(x)=y} P(X=x) \right) \;=\; \sum_{y\in\mathcal{Y}} \sum_{x:g(x)=y} g(x)\; P(X=x) \;=\; \sum_{x\in\mathcal{X}} g(x)\; P(X=x),$$

gdzie ostatni krok wynika z faktu, że $\sum_{y\in\mathcal{Y}}\sum_{x:g(x)=y}$ to po prostu suma po wszystkich $x \in \mathcal{X}$.

Zadanie 5. *Pokaż, że dla dowolnych funkcji $g_1, \ldots, g_n$:*

$$E\Big(g_1(X) + \ldots + g_n(X)\Big) \;=\; E\big(g_1(X)\big) + \ldots + E\big(g_n(X)\big)$$

Odpowiedź: Zdefiniujmy sobie funkcję $g(X) = g_1(X) + g_2(X) + \ldots + g_n(X)$. Używając wzoru na wartość oczekiwaną funkcji zmiennej losowej:

$$E\big(g(X)\big) \;=\; \sum_x g(x)P(X=x),$$

mamy:

$$\begin{aligned}
E\Big(g_1(X) + \ldots + g_n(X)\Big) \;&=\; E\big(g(X)\big) \;=\; \sum_x g(x)\, P(X=x) \\
&=\; \sum_x \Big(g_1(x) + \ldots g_n(x)\Big)\, P(X=x) \\
&=\; \sum_x g_1(x)\, P(X=x) \;+\; \ldots \;+\; \sum_x g_n(x)\, P(X=x) \\
&=\; E\big(g_1(X)\big) + \ldots + E\big(g_n(X)\big)
\end{aligned}$$

Zadanie 6. *Pokaż, że jeśli $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, to $D^2(X) = \lambda$. Wykorzystaj fakt, że $EX = \lambda$ i użyj wzoru skróconego mnożenia dla wariancji.*

Odpowiedź: Jeśli $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, to rozkład X jest dany wyrażeniem:

$$P(X=k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad X \in \{0,1,\ldots\}.$$

Wykorzystując wzór skróconego mnożenia dla wariancji oraz fakt, że $EX = \lambda$ mamy:

$$D^2(X) \;=\; E\big(X^2\big) - \big(EX\big)^2 \;=\; E\big(X^2\big) - \lambda^2.$$

Musimy więc tylko policzyć $E\big(X^2\big)$:

$$\begin{aligned}
E\big(X^2\big) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\big(k(k-1)+k\big)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \;+\; \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=EX} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} \;+\; \lambda \\
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} \;+\; \lambda \\
&\overset{(*)}{=} \lambda^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=1 \quad (\dagger)} \;+\; \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda,
\end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ obniżyliśmy indeks sumowania (z k na $k-2$), a w równości oznaczonej $(\dagger)$ wykorzystaliśmy fakt, że elementy sumy to prawdopodobieństwa postaci $P(X=k)$ dla wszystkich możliwych $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, stąd suma daje wartość równą 1.

Zadanie 7*. *Pokaż, że dla rozkładu geometrycznego:*

$$P(X=k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad k=1,2,\ldots$$

wariancja wynosi $D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Odpowiedź: Jeden sposób został pokazany na wykładzie. Tutaj rozważymy inny sposób, w którym bezpośrednio będziemy próbowali policzyć nieskończone sumy wykorzystując wiedzę z matematyki dyskretnej. Wiemy, że wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym wynosi $EX = \frac{1}{p}$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia dla wariancji:

$$D^2(X) \;=\; E\big(X^2\big) - \big(EX\big)^2 \;=\; E\big(X^2\big) - \frac{1}{p^2}, \tag{3}$$

Musimy tylko policzyć $E\big(X^2\big)$:

$$E\big(X^2\big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X=k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p$$

Rozważmy funkcję $g(p)$ określoną wyrażeniem:

$$g(p) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+1} \tag{4}$$

Możemy wyznaczyć wartość $g(p)$ jako sumę nieskończonego szeregu geometrycznego $a + ar + ar^2 + \ldots$ o wyrazie początkowym $a = (1-p)^2$ i ilorazie $r = (1-p)$:

$$g(p) \;=\; \frac{a}{1-r} \;=\; \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{p} \tag{5}$$

Policzmy pierwszą i drugą pochodną $g(p)$. Możemy wykorzystać wyrażenie (4):

$$\begin{aligned} g'(p) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k+1}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\left((1-p)^{k+1}\right)' = -\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(1-p)^k \\ g''(p) &= \left(-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(1-p)^k\right)' = -\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\left((1-p)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

Teraz zauważmy, że:

$$pg''(p) = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k(1-p)^{k-1}p = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p}_{=E\left(X^2\right)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p}_{=EX},$$

a więc:

$$pg''(p) = E\left(X^2\right) + \frac{1}{p} \qquad \Longrightarrow \qquad E\left(X^2\right) = pg''(p) - \frac{1}{p}.$$

Z drugiej strony, korzystając z wyrażenia (5), mamy:

$$\begin{aligned} g'(p) &= \left(\frac{(1-p)^2}{p}\right)' = \left(\frac{1-2p+p^2}{p}\right)' = \left(\frac{1}{p}\right)' - (2)' + (p)' = -\frac{1}{p^2} + 1 \\ g''(p) &= \left(-\frac{1}{p^2} + 1\right)' = \frac{2}{p^3} \end{aligned}$$

Tym samym:

$$E\left(X^2\right) = pg''(p) - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p},$$

a więc z (3):

$$D^2(X) = E\left(X^2\right) - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

Zadanie 8*. *Pokaż, że dla rozkładu dwumianowego:*

$$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

wariancja wynosi $D^2(X) = np(1-p)$

Odpowiedź: Wiemy, że wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym wynosi $EX = np$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia dla wariancji:

$$D^2(X) = E\left(X^2\right) - \left(EX\right)^2 = E\left(X^2\right) - n^2p^2, \tag{6}$$

musimy tylko policzyć $E\big(X^2\big)$:

$$\begin{aligned}
E\big(X^2\big) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(\underbrace{k(k-1)+k}_{=k^2}\big) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=EX=np} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}_{=\binom{n-2}{k-2}} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}}_{=1} \;+\; np \\
&= n(n-1)p^2 + np \;=\; n^2p^2 - np^2 + np,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia z sum równa jest jeden, ponieważ jest to suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych wyników zmiennej o rozkładzie dwumianowym $B(n-2,p)$. Używając (6) otrzymujemy:

$$D^2(X) \;=\; E\big(X^2\big) - n^2p^2 \;=\; n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \;=\; np - np^2 \;=\; np(1-p).$$

Zadanie 9. *Pokaż, że jeśli $E(X^2) = 0$, to X ma rozkład jednopunktowy w zerze.*

Odpowiedź: Mamy:

$$0 \;=\; E(X^2) \;=\; \sum_x x^2 P(X=x),$$

Ponieważ wszystkie elementy sumy po prawej stronie są nieujemne, równość ta będzie spełniona tylko wtedy, gdy $x^2 = 0$ (a więc i $x = 0$) dla wszystkich x (takich, że $P(X=x) > 0$). Oznacza to, że zmienna X ma rozkład jednopunktowy w zerze.