

Metody probabilistyczne

6. Momenty zmiennych losowych

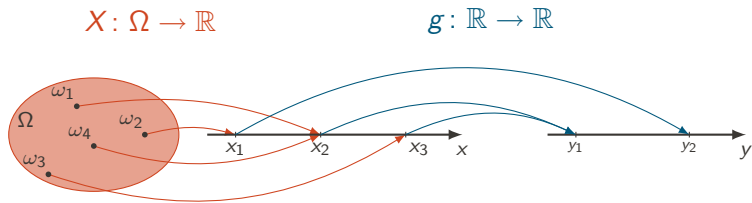
Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
<http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/>

25.11.2020

Funkcje zmiennych losowych

Mierzalna funkcja $Y = g(X)$ zmiennej losowej X o wartościach rzeczywistych jest również zmienną losową.



Rozkład zmiennej losowej Y definiujemy poprzez **przeciwwobraz** jako:

$$P_Y(A) = P_X(g^{-1}(A)),$$

lub w „zdarzeniowej” notacji:

$$P(Y \in A) = P(X \in g^{-1}(A))$$

Przykład

Rzucamy dwoma kostkami:

- X określa sumaryczną liczbę oczek na obu kostkach
- $Y = g(X) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } X < 5 \\ 1 & \text{jeśli } 5 \leq X \leq 8 \\ 2 & \text{jeśli } 9 \leq X \leq 11 \\ 3 & \text{jeśli } X = 12 \end{cases}$

Przykład

Rzucamy dwoma kostkami:

- X określa sumaryczną liczbę oczek na obu kostkach
- $Y = g(X) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } X < 5 \\ 1 & \text{jeśli } 5 \leq X \leq 8 \\ 2 & \text{jeśli } 9 \leq X \leq 11 \\ 3 & \text{jeśli } X = 12 \end{cases}$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
y	0			1				2			3
$P(Y = y)$	$\frac{6}{36}$			$\frac{20}{36}$				$\frac{9}{36}$			$\frac{1}{36}$

Przykład

Rzucamy dwoma kostkami:

- X określa sumaryczną liczbę oczek na obu kostkach
- $Y = g(X) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } X < 5 \\ 1 & \text{jeśli } 5 \leq X \leq 8 \\ 2 & \text{jeśli } 9 \leq X \leq 11 \\ 3 & \text{jeśli } X = 12 \end{cases}$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
y	0			1			2			3	
$P(Y = y)$	$\frac{6}{36}$			$\frac{20}{36}$			$\frac{9}{36}$			$\frac{1}{36}$	

Przykład:

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(X \in g^{-1}(2)) \\ &= P(X \in \{x: g(x) = 2\}) = P(X \in \{9, 10, 11\}) \end{aligned}$$

Funkcje dyskretnych zmiennych losowych

Jeśli $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$ oraz $Y = g(X) \in \{y_1, y_2, \dots\}$ są **dyskretnymi** zmiennymi losowymi to:

$$P(Y = y) = \sum_{x: g(x)=y} P(X = x)$$

Czyli aby policzyć prawdopodobieństwo $P(Y = y)$ sumujemy prawdopodobieństwa $P(X = x)$ dla wszystkich x które prowadzą do wyniku $g(x) = y$.

Wartość oczekiwana: motywacja

- Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?
- Wygrywamy a zł z prawdopodobieństwem p i przegrywamy b zł z prawdopodobieństwem $1 - p$. Ile wynosi średnia wygrana?
- Rzucamy kostką, jaka jest średnia liczba oczek której można się spodziewać?
- Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki”. Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?
- Jaka jest średnia liczba sukcesów w n próbach w schemacie Bernoulliego?

Wartość oczekiwana

Definicja

Niech $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$ będzie zmienną dyskretną. **Wartością oczekiwaną** (wartością przeciętną, wartością średnią) zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Wartość oczekiwana jest **średnią ważoną** po zbiorze $\{x_1, x_2, \dots\}$ z wagami $P(X = x_i)$.

Uwaga: wartość oczekiwana jest **deterministyczną liczbą!**

Uwaga: Często będziemy opuszczali nawiasy i zapisywali $E(X)$ jako EX

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P(X = i) = \frac{1}{6}$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P(X = i) = \frac{1}{6}$$

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P(X = i) = \frac{1}{6}$$

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Przykład: Podobnie, ale rzucamy dwoma kostkami i sumujemy wynik

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P(X = i) = \frac{1}{6}$$

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Przykład: Podobnie, ale rzucamy dwoma kostkami i sumujemy wynik

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$$X \in \{-1, 2\}, P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$$X \in \{-1, 2\}, P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

$$EX = -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{warto!})$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$$X \in \{-1, 2\}, P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

$$EX = -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{warto!})$$

Przykład: Wygrywamy a zł z prawdopodobieństwem p i przegrywamy b zł z prawdopodobieństwem $1 - p$. Ile wynosi średnia wygrana?

$$X \in \{a, -b\}, P(X = a) = p, P(X = -b) = 1 - p$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$$X \in \{-1, 2\}, P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

$$EX = -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{warto!})$$

Przykład: Wygrywamy a zł z prawdopodobieństwem p i przegrywamy b zł z prawdopodobieństwem $1 - p$. Ile wynosi średnia wygrana?

$$X \in \{a, -b\}, P(X = a) = p, P(X = -b) = 1 - p$$

$$EX = ap - b(1 - p)$$

Warto grać, jeśli $ap - b(1 - p) > 0$.

Strategia „martyngałowa”

Po obstawieniu a zł wygrywamy dodatkowe a zł z prawdopodobieństwem $1 - p$ lub tracimy obstawione a zł z prawdopodobieństwem p .

Rozważmy strategię, w której gramy do momentu wygranej w ten sposób: obstawiamy 1zł; jeśli przegramy, obstawiamy 2zł; jeśli przegramy, obstawiamy 4zł, itp. (przy każdej przegranej podwajamy stawkę). Robimy tak, dopóki nie wygramy lub nie stracimy całego kapitału.

W przypadku wygranej **zawsze** jesteśmy do przodu 1zł, ponieważ następne zakłady kompensują poprzednie przegrane!

Jaka jest wartość oczekiwana wygranej?

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

$$EX = 1 \cdot (1 - p^n) - (2^n - 1)p^n$$

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

$$EX = 1 \cdot (1 - p^n) - (2^n - 1)p^n = 1 - 2^n p^n = 1 - (2p)^n$$

Strategia „martyngałowa”

Założmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

$$EX = 1 \cdot (1 - p^n) - (2^n - 1)p^n = 1 - 2^n p^n = 1 - (2p)^n$$

- Jeśli $p = \frac{1}{2}$ to $EX = 0$
- Jeśli $p > \frac{1}{2}$ (np. w ruletce), to $EX < 0$
Mimo, że przegrana jest **bardzo mało prawdopodobna**, to generuje **bardzo dużą stratę**, stąd średnio przegrywamy

Własności wartości oczekiwanej

Jeśli X przyjmuje tylko wartości większe bądź równe a , to $EX \geq a$.
Podobnie, jeśli X przyjmuje wartości mniejsze bądź równe b , to $EX \leq b$.

Własności wartości oczekiwanej

Jeśli X przyjmuje tylko wartości większe bądź równe a , to $EX \geq a$.
Podobnie, jeśli X przyjmuje wartości mniejsze bądź równe b , to $EX \leq b$.

Dowód: bezpośrednio z definicji wartości oczekiwanej:

$$EX = \sum_x xP(X = x) \geq \sum_x aP(X = x) = a \underbrace{\sum_x P(X = x)}_{=1}$$

Podobnie dowodzimy $EX \leq b$.

Własności wartości oczekiwanej

Jeśli X przyjmuje tylko wartości większe bądź równe a , to $EX \geq a$.
Podobnie, jeśli X przyjmuje wartości mniejsze bądź równe b , to $EX \leq b$.

Dowód: bezpośrednio z definicji wartości oczekiwanej:

$$EX = \sum_x xP(X = x) \geq \sum_x aP(X = x) = a \underbrace{\sum_x P(X = x)}_{=1}$$

Podobnie dowodzimy $EX \leq b$.

Wniosek: jeśli X przyjmuje wartości nieujemne, to $EX \geq 0$.

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwupunktowym

Zmienna X ma rozkład **dwupunktowy** $B(p)$, jeśli $X \in \{0, 1\}$

$$p = P(X = 1), \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwupunktowym

Zmienna X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$, jeśli $X \in \{0, 1\}$

$$p = P(X = 1), \quad P(X = 0) = 1 - p$$

$$EX = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwupunktowym

Zmienna X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$, jeśli $X \in \{0, 1\}$

$$p = P(X = 1), \quad P(X = 0) = 1 - p$$

$$EX = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Jeśli $X \sim B(p)$ to $EX = p$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$EX = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \dots = np \end{aligned}$$

Zadanie 1

Uzupełnij brakującą część wyprowadzenia

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

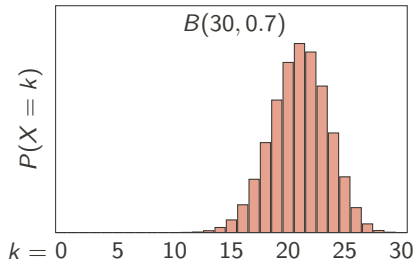
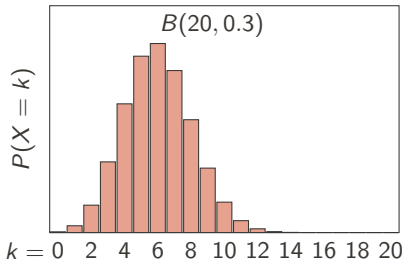
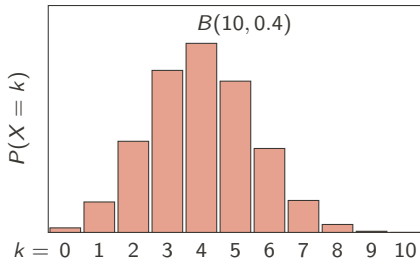
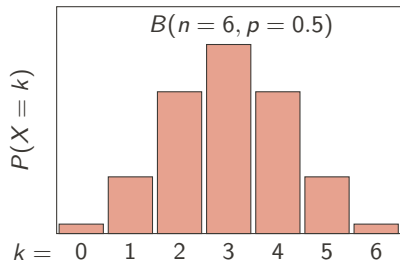
$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \dots = np \end{aligned}$$

Zadanie 1

Uzupełnij brakującą część wyprowadzenia

Jeśli $X \sim B(n, p)$ to $EX = np$

Rozkład dwumianowy



Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots$$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots$$

$$= P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + \dots$$

$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
		$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
			$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
				$P(X = 5)$	\dots

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots$$

$$= P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + \dots$$

$$= P(X \geq 1) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline P(X = 1) & P(X = 2) & P(X = 3) & P(X = 4) & P(X = 5) & \dots \\ \hline & P(X = 2) & P(X = 3) & P(X = 4) & P(X = 5) & \dots \\ \hline & & P(X = 3) & P(X = 4) & P(X = 5) & \dots \\ \hline & & & P(X = 4) & P(X = 5) & \dots \\ \hline & & & & P(X = 5) & \dots \\ \hline \end{array}$$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots$$

$$= P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + \dots$$

$= P(X \geq 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
					$P(X = 5)$	\dots

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots$$

$$= P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + \dots$$

$= P(X \geq 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 3)$			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
					$P(X = 5)$	\dots

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots$$

$$= P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + \dots$$

$= P(X \geq 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 3)$			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 4)$				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
					$P(X = 5)$	\dots

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X będzie zmienną losową przyjmującą tylko wartości **całkowite nieujemne** ($X \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots$$

$$= P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + \dots$$

$= P(X \geq 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 3)$			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+P(X \geq 4)$				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	\dots
$+ \dots$					$P(X = 5)$	\dots

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \dots, j\}$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \dots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \dots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład Rzut kostką: $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \dots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład Rzut kostką: $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$

$$EX = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots + P(X \geq 6)$$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \dots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład Rzut kostką: $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} EX &= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots + P(X \geq 6) \\ &= 1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \dots + \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(X \geq k)}_{=(1-p)^{k-1}}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(X \geq k)}_{=(1-p)^{k-1}} \\ &= 1 + (1 - p) + (1 - p)^2 + \dots = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(X \geq k)}_{=(1-p)^{k-1}} \\ &= 1 + (1 - p) + (1 - p)^2 + \dots = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Jeśli $X \sim G_1(p)$ to $EX = \frac{1}{p}$

Rozkład geometryczny: przykład

Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki”. Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?

Rozkład geometryczny: przykład

Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki”. Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?

X – liczba gier (prób) do trafienia „szóstki” (sukcesu)

$$X \sim G_1(p), \quad p = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Rozkład geometryczny: przykład

Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki”. Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?

X – liczba gier (prób) do trafienia „szóstki” (sukcesu)

$$X \sim G_1(p), \quad p = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

$$EX = \frac{1}{p} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **ujemny dwumianowy** $NB(r, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^r p^k$$

Zadanie 2*

Pokaż, że jeśli $X \sim NB(r, p)$ to:

$$EX = \frac{rp}{1-p}$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **Poissona** $\text{Pois}(\lambda)$ jeśli:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Zadanie 3

Pokaż, że jeśli $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ to:

$$EX = \lambda$$

Uwaga: Ponieważ rozkład Poissona jest przybliżeniem rozkładu dwumianowego przy $\lambda = np$, takiego wyniku należało oczekiwać!

Zmienna losowe może nie mieć wartości oczekiwanej

Weźmy zmienną losową $X \in \{1, 2, \dots\}$ dla której:

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

Zmienna losowa może nie mieć wartości oczekiwanej

Weźmy zmienną losową $X \in \{1, 2, \dots\}$ dla której:

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

Czy to się poprawnie normalizuje?

Zmienna losowa może nie mieć wartości oczekiwanej

Weźmy zmienną losową $X \in \{1, 2, \dots\}$ dla której:

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

Czy to się poprawnie normalizuje?

Ponieważ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Zmienna losowa może nie mieć wartości oczekiwanej

Weźmy zmienną losową $X \in \{1, 2, \dots\}$ dla której:

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

Czy to się poprawnie normalizuje?

Ponieważ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

A więc $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$, czyli normalizacja jest poprawna.

Zmienna losowa może nie mieć wartości oczekiwanej

Weźmy zmienną losową $X \in \{1, 2, \dots\}$ dla której:

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

Czy to się poprawnie normalizuje?

Ponieważ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

A więc $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$, czyli normalizacja jest poprawna.

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Zmienna losowa może nie mieć wartości oczekiwanej

Weźmy zmienną losową $X \in \{1, 2, \dots\}$ dla której:

$$P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

Czy to się poprawnie normalizuje?

Ponieważ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

A więc $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$, czyli normalizacja jest poprawna.

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Ale ta suma się rozbiega do nieskończoności!

$$EX = \infty$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- $Y = g(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $$Y = g(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$y = g(x)$	1			2		3
$P(Y = y)$	1/2			1/3		1/6

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $Y = g(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$y = g(x)$	1			2		3
$P(Y = y)$	1/2			1/3		1/6

$$EY = 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) \quad (\text{z def.})$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $Y = g(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$y = g(x)$	1			2		3
$P(Y = y)$	1/2			1/3		1/6

$$\begin{aligned} EY &= 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) && \text{(z def.)} \\ &= 1 \cdot (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\ &\quad + 2 \cdot (P(X = 4) + P(X = 5)) + 3 \cdot P(X = 6) \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $Y = g(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$y = g(x)$	1			2		3
$P(Y = y)$	1/2			1/3		1/6

$$\begin{aligned} EY &= 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) && \text{(z def.)} \\ &= 1 \cdot (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\ &\quad + 2 \cdot (P(X = 4) + P(X = 5)) + 3 \cdot P(X = 6) \\ &= g(1)P(X = 1) + g(2)P(X = 2) + \dots + g(6)P(X = 6) \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\dots	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	\dots	p_n
$y = g(x)$	y_1		y_2	y_3			\dots	y_n
$P(Y = y)$	$p_1 + p_2$		p_3	$p_4 + p_5 + p_6$			\dots	p_n

$$EY = \sum_y y \cdot P(Y = y) = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\dots	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	\dots	p_n
$y = g(x)$	y_1		y_2	y_3			\dots	y_n
$P(Y = y)$	$p_1 + p_2$		p_3	$p_4 + p_5 + p_6$			\dots	p_n

$$EY = \sum_y y \cdot P(Y = y) = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$$

Aby policzyć EY nie musimy wyznaczać rozkładu zmiennej Y , wystarczy rozkład zmiennej X

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\dots	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	\dots	p_n
$y = g(x)$	y_1		y_2	y_3			\dots	y_n
$P(Y = y)$	$p_1 + p_2$		p_3	$p_4 + p_5 + p_6$			\dots	p_n

$$EY = \sum_y y \cdot P(Y = y) = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$$

Aby policzyć EY nie musimy wyznaczać rozkładu zmiennej Y , wystarczy rozkład zmiennej X

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)P(X = x)$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\dots	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	\dots	p_n
$y = g(x)$	y_1		y_2	y_3			\dots	y_n
$P(Y = y)$	$p_1 + p_2$		p_3	$p_4 + p_5 + p_6$			\dots	p_n

$$EY = \sum_y y \cdot P(Y = y) = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$$

Aby policzyć EY nie musimy wyznaczać rozkładu zmiennej Y , wystarczy rozkład zmiennej X

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)P(X = x)$$

Zadanie 4

Przeprowadź formalny dowód powyższego wniosku

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b : $E(b) = b$
- Tym samym np. $E(EX) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną:
 $E(aX) = a EX$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b : $E(b) = b$
- Tym samym np. $E(EX) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną:
 $E(aX) = a EX$

Dowód: Rozważmy funkcję $g(x) = ax + b$

Linijowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b : $E(b) = b$
- Tym samym np. $E(EX) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną:
 $E(aX) = a EX$

Dowód: Rozważmy funkcję $g(x) = ax + b$

$$E(aX + b) = E(g(X)) = \sum_x g(x) P(X = x)$$

Linijowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b : $E(b) = b$
- Tym samym np. $E(EX) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną:
 $E(aX) = a EX$

Dowód: Rozważmy funkcję $g(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= E(g(X)) = \sum_x g(x) P(X = x) \\ &= \sum_x (ax + b) P(X = x) \end{aligned}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b : $E(b) = b$
- Tym samym np. $E(EX) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną:
 $E(aX) = a EX$

Dowód: Rozważmy funkcję $g(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= E(g(X)) = \sum_x g(x) P(X = x) \\ &= \sum_x (ax + b) P(X = x) \\ &= a \underbrace{\left(\sum_x x P(X = x) \right)}_{=EX} + b \underbrace{\left(\sum_x P(X = x) \right)}_{=1} \end{aligned}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

Zadanie 5

Pokaż, że dla dowolnych funkcji g_1, \dots, g_n :

$$E(g_1(X) + \dots + g_n(X)) = E(g_1(X)) + \dots + E(g_n(X))$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Z jednej strony:

$$EX = E(Y + 1) = EY + 1$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Z jednej strony:

$$EX = E(Y + 1) = EY + 1$$

Z drugiej strony:

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^k p = (1 - p) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} p}_{=EX}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Z jednej strony:

$$EX = E(Y + 1) = EY + 1$$

Z drugiej strony:

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k p = (1-p) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p}_{=EX}$$

Czyli:

$$EX = EY + 1 = (1-p)EX + 1 \quad \implies \quad EX = \frac{1}{p}$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.

- Jeśli orzeł wypadnie w 1. rzucie – wygrywamy 2 zł
- Jeśli orzeł wypadnie w 2. rzucie – wygrywamy 4 zł
- Jeśli orzeł wypadnie w 3. rzucie – wygrywamy 8 zł
- itd.

Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła,

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$Y = g(X) = 2^X$ – wygrana

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$Y = g(X) = 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$Y = g(X) = 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)P(X = k)$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$Y = g(X) = 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$Y = g(X) = 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$Y = g(X) = 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

Warto zapłacić każdą kwotę „wpisowego” ???

A za ile byście przystąpili do takiej gry?

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia **teorii użyteczności**

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale **oczekiwaną użytecznością wygranej**
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („**prawo malejącej użyteczności krańcowej**”)

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia **teorii użyteczności**

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale **oczekiwaną użytecznością wygranej**
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („**prawo malejącej użyteczności krańcowej**”)

Przykład: weźmy grę, w której z prawdopodobieństwem **20%** wygrywamy **10-krotność** zakładu, a z prawdopodobieństwem **80%** przegrywamy zakład.

Jeśli obstawimy a zł, to średnia wygrana wynosi:

$$0.2 \cdot 10a - 0.8 \cdot a = 1.2a$$

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia **teorii użyteczności**

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale **oczekiwaną użytecznością wygranej**
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („**prawo malejącej użyteczności krańcowej**”)

Przykład: weźmy grę, w której z prawdopodobieństwem **20%** wygrywamy **10-krotność** zakładu, a z prawdopodobieństwem **80%** przegrywamy zakład.

Jeśli obstawimy a zł, to średnia wygrana wynosi:

$$0.2 \cdot 10a - 0.8 \cdot a = 1.2a$$

- Czy obstawilibyście w tej grze $a = 10$ zł?

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia **teorii użyteczności**

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale **oczekiwaną użytecznością wygranej**
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („**prawo malejącej użyteczności krańcowej**”)

Przykład: weźmy grę, w której z prawdopodobieństwem **20%** wygrywamy **10-krotność** zakładu, a z prawdopodobieństwem **80%** przegrywamy zakład.

Jeśli obstawimy a zł, to średnia wygrana wynosi:

$$0.2 \cdot 10a - 0.8 \cdot a = 1.2a$$

- Czy obstawilibyście w tej grze $a = 10$ zł?
- Czy obstawilibyście w tej grze całe oszczędności życia, powiedzmy $a = 100$ tys. zł?

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się użyteczność logarytmiczną jako funkcję kapitału y :

$$U(y) = \log_2(y)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę”)

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się użyteczność logarytmiczną jako funkcję kapitału y :

$$U(y) = \log_2(y)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę”)

W poprzednim przykładzie, mając początkowy kapitał y_0 zł i obstawiając a zł, oczekiwana użyteczność wynosi:

$$EU = 0.2 \cdot U(y_0 + 10a) + 0.8 \cdot U(y_0 - a) = 0.2 \log_2(y_0 + 10a) + 0.8 \log_2(y_0 - a),$$

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się użyteczność logarytmiczną jako funkcję kapitału y :

$$U(y) = \log_2(y)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę”)

W poprzednim przykładzie, mając początkowy kapitał y_0 zł i obstawiając a zł, oczekiwana użyteczność wynosi:

$$EU = 0.2 \cdot U(y_0 + 10a) + 0.8 \cdot U(y_0 - a) = 0.2 \log_2(y_0 + 10a) + 0.8 \log_2(y_0 - a),$$

stąd oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\Delta U = EU - U(y_0) = 0.2 \log_2(y_0 + 10a) + 0.8 \log_2(y_0 - a) - \log_2(y_0)$$

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się **użyteczność logarytmiczną** jako funkcję kapitału y :

$$U(y) = \log_2(y)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę”)

W poprzednim przykładzie, mając początkowy kapitał y_0 zł i obstawiając a zł, oczekiwana użyteczność wynosi:

$$EU = 0.2 \cdot U(y_0 + 10a) + 0.8 \cdot U(y_0 - a) = 0.2 \log_2(y_0 + 10a) + 0.8 \log_2(y_0 - a),$$

stąd oczekiwany **przyrost użyteczności** wynosi:

$$\Delta U = EU - U(y_0) = 0.2 \log_2(y_0 + 10a) + 0.8 \log_2(y_0 - a) - \log_2(y_0)$$

- Jeśli $y_0 = 1000$ zł i $a = 10$ zł, to $\Delta U \simeq 0.02$
- Jeśli $y_0 = 105\,000$ zł i $a = 100\,000$ zł, to $\Delta U \simeq -2.83$

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k)P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k)P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k)P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

- Mając $y_0 = 1\,000\,000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 20.88$ zł

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k)P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

- Mając $y_0 = 1\,000\,000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 20.88$ zł
- Mając $y_0 = 1\,000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 10.96$ zł

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

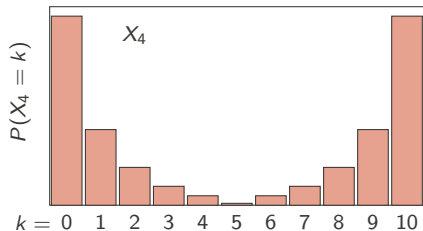
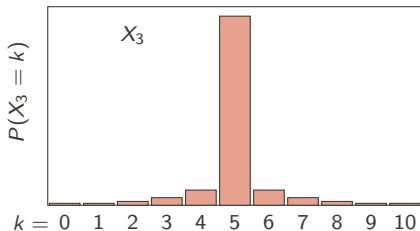
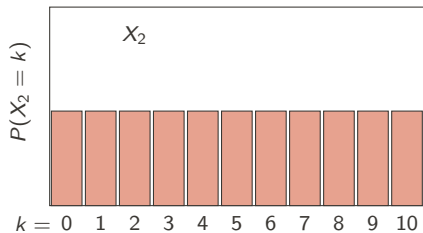
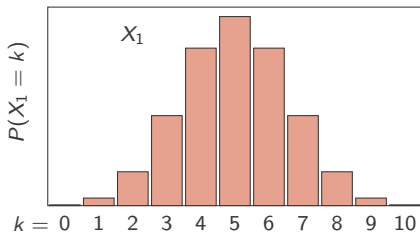
Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k)P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

- Mając $y_0 = 1\,000\,000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 20.88$ zł
- Mając $y_0 = 1\,000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 10.96$ zł
- Mając $y = 1$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 2.82$ zł

Wariancja: motywacja



Wszystkie zmienne losowe mają **tę samą wartość oczekiwaną** równą 5

Jak mocno rozkład jest **skoncentrowany** wokół tej wartości?

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę określającą **średni kwadrat odchylenia od wartości średniej**:

$$D^2(X) = E\left((X - EX)^2\right) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x),$$

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę określającą **średni kwadrat odchylenia od wartości średniej**:

$$D^2(X) = E\left((X - EX)^2\right) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x),$$

- Wariancja określa koncentrację rozkładu wokół swojej wartości oczekiwanej (średniej)
- Kwadrat w definicji wariancji używany jest do tego, żeby poszczególne odchyłki się nie znosiły

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę określającą **średni kwadrat odchylenia od wartości średniej**:

$$D^2(X) = E((X - EX)^2) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x),$$

- Wariancja określa koncentrację rozkładu wokół swojej wartości oczekiwanej (średniej)
- Kwadrat w definicji wariancji używany jest do tego, żeby poszczególne odchyłki się nie znosiły

$$E(X - EX) = EX - EX = 0$$

Wykorzystujemy wzór $E(aX + b) = aE(X) + b$
dla $a = 1$ i $b = -EX$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = 3.5$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = 3.5$

$$D^2(X) = E\left((X - EX)^2\right)$$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = 3.5$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E\left((X - EX)^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^6 (k - EX)^2 P(X = k) \end{aligned}$$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = 3.5$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E\left((X - EX)^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^6 (k - EX)^2 P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^6 (k - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = 3.5$

$$\begin{aligned}D^2(X) &= E\left((X - EX)^2\right) \\&= \sum_{k=1}^6 (k - EX)^2 P(X = k) \\&= \sum_{k=1}^6 (k - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\&= \frac{1}{6} \left((1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + \dots + (6 - 3.5)^2 \right) = \frac{35}{12}\end{aligned}$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego $B(p)$

$$X \in \{0, 1\}, \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego $B(p)$

$$X \in \{0, 1\}, \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = p$

Wariancja rozkładu dwupunktowego $B(p)$

$$X \in \{0, 1\}, \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = p$

$$D^2(X) = (0 - EX)^2 P(X = 0) + (1 - EX)^2 P(X = 1)$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego $B(p)$

$$X \in \{0, 1\}, \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = p$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= (0 - EX)^2 P(X = 0) + (1 - EX)^2 P(X = 1) \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p \end{aligned}$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego $B(p)$

$$X \in \{0, 1\}, \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = p$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= (0 - EX)^2 P(X = 0) + (1 - EX)^2 P(X = 1) \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p \\ &= p(1 - p) \underbrace{(p + (1 - p))}_{=1} = p(1 - p) \end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$D^2(X) = E((X - EX)^2)$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E((X - EX)^2) \\ &= E(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2) \end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E((X - EX)^2) \\ &= E(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - E(\underbrace{2(EX)X}_{\text{stała}}) + E(\underbrace{(EX)^2}_{\text{stała}}) \end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E((X - EX)^2) \\ &= E(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - E(\underbrace{2(EX)X}_{\text{stała}}) + E(\underbrace{(EX)^2}_{\text{stała}}) \\ &= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2 \end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E((X - EX)^2) \\ &= E(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - E(\underbrace{2(EX)X}_{\text{stała}}) + E(\underbrace{(EX)^2}_{\text{stała}}) \\ &= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2 \end{aligned}$$

Wariancja rozkładu Poissona $\text{Pois}(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad X \in \{0, 1, \dots\}$$

Wariancja rozkładu Poissona $\text{Pois}(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad X \in \{0, 1, \dots\}$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = \lambda$

Wariancja rozkładu Poissona $\text{Pois}(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad X \in \{0, 1, \dots\}$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = \lambda$

Ze wzoru skróconego mnożenia:

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - \lambda^2$$

Musimy więc tylko policzyć $E(X^2)$

Wariancja rozkładu Poissona $\text{Pois}(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad X \in \{0, 1, \dots\}$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = \lambda$

Ze wzoru skróconego mnożenia:

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - \lambda^2$$

Musimy więc tylko policzyć $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \dots = \lambda + \lambda^2$$

Zadanie 6

Uzupełnij brakującą część wyprowadzenia

Wariancja rozkładu Poissona $\text{Pois}(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad X \in \{0, 1, \dots\}$$

Z poprzednich slajdów wiemy, że $EX = \lambda$

Ze wzoru skróconego mnożenia:

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - \lambda^2$$

Musimy więc tylko policzyć $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \dots = \lambda + \lambda^2$$

Zadanie 6

Uzupełnij brakującą część wyprowadzenia

$$\text{Stąd } D^2(X) = E(X^2) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Wariancja rozkładu geometrycznego i dwumianowego

Zadanie 7*

Pokaż, że dla rozkładu geometrycznego:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

wariancja wynosi $D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

(krótszy sposób pokazany na następnym slajdzie)

Zadanie 8*

Pokaż, że dla rozkładu dwumianowego:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

wariancja wynosi $D^2(X) = np(1 - p)$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad EX = \frac{1}{p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad EX = \frac{1}{p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Z jednej strony:

$$E(X^2) = E((Y + 1)^2) = E(Y^2) + 2E(Y) + 1 = E(Y^2) + \frac{2}{p} - 1$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad EX = \frac{1}{p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Z jednej strony:

$$E(X^2) = E((Y + 1)^2) = E(Y^2) + 2E(Y) + 1 = E(Y^2) + \frac{2}{p} - 1$$

Z drugiej strony:

$$E(Y^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^k p = (1-p) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} p}_{=E(X^2)}$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad EX = \frac{1}{p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Czyli:

$$E(X^2) = E(Y^2) + \frac{2}{p} - 1 \quad \text{oraz} \quad E(Y^2) = (1 - p)E(X^2)$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad EX = \frac{1}{p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Czyli:

$$E(X^2) = E(Y^2) + \frac{2}{p} - 1 \quad \text{oraz} \quad E(Y^2) = (1 - p)E(X^2)$$

Stąd:

$$E(X^2) = (1 - p)E(X^2) + \frac{2}{p} - 1 \quad \implies \quad E(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad EX = \frac{1}{p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Czyli:

$$E(X^2) = E(Y^2) + \frac{2}{p} - 1 \quad \text{oraz} \quad E(Y^2) = (1 - p)E(X^2)$$

Stąd:

$$E(X^2) = (1 - p)E(X^2) + \frac{2}{p} - 1 \quad \implies \quad E(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1 - p}{p^2}$$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geq 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednopunktowy

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geq 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednopunktowy

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x) \quad (*)$$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geq 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednopunktowy

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x) \quad (*)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geq 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednopunktowy

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x) \quad (*)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2:

⇐ Jeśli X ma r. jednopunktowy w x to:

$$E(X) = x \cdot 1 = x, \quad D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = x^2 \cdot 1 - x^2 = 0$$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geq 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednopunktowy

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x) \quad (*)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2:

⇐ Jeśli X ma r. jednopunktowy w x to:

$$E(X) = x \cdot 1 = x, \quad D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = x^2 \cdot 1 - x^2 = 0$$

⇒ Jeśli $D^2(X) = 0$, to **wszystkie wyrazy w (*) muszą być = 0**

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geq 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednopunktowy

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x) \quad (*)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2:

⇐ Jeśli X ma r. jednopunktowy w x to:

$$E(X) = x \cdot 1 = x, \quad D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = x^2 \cdot 1 - x^2 = 0$$

⇒ Jeśli $D^2(X) = 0$, to **wszystkie wyrazy w (*) muszą być = 0**

A więc dla wszystkich x (o niezerowym prawdopodobieństwie) zachodzi $x = EX$, czyli jest tylko jeden taki x , z $P(X = x) = 1$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geq 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednopunktowy

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x) \quad (*)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2:

⇐ Jeśli X ma r. jednopunktowy w x to:

$$E(X) = x \cdot 1 = x, \quad D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = x^2 \cdot 1 - x^2 = 0$$

⇒ Jeśli $D^2(X) = 0$, to **wszystkie wyrazy w (*) muszą być = 0**

A więc dla wszystkich x (o niezerowym prawdopodobieństwie) zachodzi $x = EX$, czyli jest tylko jeden taki x , z $P(X = x) = 1$

Zadanie 9

Pokaż, że jeśli $E(X^2) = 0$, X ma rozkład jednopunktowy w zerze.

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy **translacji** o stałą i **przemnaża się przez a^2** przy przemnożeniu zmiennej przez **a** .

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy **translacji** o stałą i **przemnaża się przez a^2** przy przemnożeniu zmiennej przez **a** .

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy **translacji** o stałą i **przemnaża się przez a^2** przy przemnożeniu zmiennej przez a .

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$Y - EY = aX + b - \underbrace{E(aX + b)}_{=aEX+b} = aX - aEX = a(X - EX)$$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy **translacji** o stałą i **przemnaża się przez a^2** przy przemnożeniu zmiennej przez a .

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$Y - EY = aX + b - \underbrace{E(aX + b)}_{=aEX+b} = aX - aEX = a(X - EX)$$

$$(Y - EY)^2 = a^2(X - EX)^2$$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy **translacji** o stałą i **przemnaża się przez a^2** przy przemnożeniu zmiennej przez a .

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$Y - EY = aX + b - \underbrace{E(aX + b)}_{=aEX+b} = aX - aEX = a(X - EX)$$

$$(Y - EY)^2 = a^2(X - EX)^2$$

$$E((Y - EY)^2) = E(a^2(X - EX)^2) = a^2 E((X - EX)^2)$$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy **translacji** o stałą i **przemnaża się przez a^2** przy przemnożeniu zmiennej przez a .

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$Y - EY = aX + b - \underbrace{E(aX + b)}_{=aEX+b} = aX - aEX = a(X - EX)$$

$$(Y - EY)^2 = a^2(X - EX)^2$$

$$\underbrace{E((Y - EY)^2)}_{D^2(Y)} = E(a^2(X - EX)^2) = a^2 \underbrace{E((X - EX)^2)}_{=D^2(X)}$$

Wartość oczekiwana i wariancja – podsumowanie

rozkład X	EX	$D^2(X)$
$B(p)$	p	$p(1-p)$
$B(n, p)$	np	$np(1-p)$
$G_1(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$NB(r, p)$	$\frac{rp}{1-p}$	$\frac{rp}{(1-p)^2}$
$Pois(\lambda)$	λ	λ

Odchylenie standardowe

Wariancja ma inną „skalę” niż zmienna losowa

- Jeśli wartości X byłyby wyrażone np. w zł, to jaka jest jednostka wariancji?

Odchylenie standardowe

Wariancja ma inną „skalę” niż zmienna losowa

- Jeśli wartości X byłyby wyrażone np. w zł, to jaka jest jednostka wariancji?

Odchylenie standardowe

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

Odchylenie standardowe

Wariancja ma inną „skalę” niż zmienna losowa

- Jeśli wartości X byłyby wyrażone np. w zł, to jaka jest jednostka wariancji?

Odchylenie standardowe

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

O ile wariancją łatwiej operuje się w wyprowadzeniach wzorów, to odchylenie standardowe jest miarą rozkładu podawaną w statystykach

Odchylenie często (szczególnie w statystyce) oznacza się za pomocą symbolu σ , stąd wariancja oznaczana jest przez σ^2

Momenty zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$m_k = E(X^k)$$

nazywamy **momentem rzędu k** zmiennej losowej X

Momenty zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$m_k = E(X^k)$$

nazywamy **momentem rzędu k** zmiennej losowej X

- $m_1 = EX$
- $m_2 = E(X^2)$
- $m_3 = E(X^3)$
- ...

Momenty centralne zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$\mu_k = E((X - EX)^k)$$

nazywamy **momentem centralnym rzędu k** zmiennej losowej X

Momenty centralne zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$\mu_k = E((X - EX)^k)$$

nazywamy **momentem centralnym rzędu k** zmiennej losowej X

- $\mu_1 = E(X - EX) = EX - EX = 0$
- $\mu_2 = E((X - EX)^2) = D^2(X)$
- $\mu_3 = E((X - EX)^3)$
- ...

Nierówność Markowa

Niech X będzie **nieujemną** zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie **nieujemną** zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$EX = \sum_x x P(X = x)$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie **nieujemną** zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_x x P(X = x) \\ &= \underbrace{\sum_{x < a} x P(X = x)}_{\geq 0} + \sum_{x \geq a} x P(X = x) \end{aligned}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie **nieujemną** zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_x x P(X = x) \\ &= \underbrace{\sum_{x < a} x P(X = x)}_{\geq 0} + \sum_{x \geq a} x P(X = x) \\ &\geq 0 + \sum_{x \geq a} a P(X = x) \end{aligned}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie **nieujemną** zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_x x P(X = x) \\ &= \underbrace{\sum_{x < a} x P(X = x)}_{\geq 0} + \sum_{x \geq a} x P(X = x) \\ &\geq 0 + \sum_{x \geq a} a P(X = x) \\ &= a \sum_{x \geq a} P(X = x) = aP(X \geq a) \end{aligned}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie **nieujemną** zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_x x P(X = x) \\ &= \underbrace{\sum_{x < a} x P(X = x)}_{\geq 0} + \sum_{x \geq a} x P(X = x) \\ &\geq 0 + \sum_{x \geq a} a P(X = x) \\ &= a \sum_{x \geq a} P(X = x) = a P(X \geq a) \end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie przez a kończymy dowód.

Nierówność Czebyszewa

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawdopodobieństwo znacznego odchylenia się od wartości oczekiwanej jest niewielkie.

Nierówność Czebyszewa

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawdopodobieństwo znacznego odchylenia się od wartości oczekiwanej jest niewielkie.

Dowód: Weźmy **nieujemną** zmienną losową $Y = (X - EX)^2$

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) = P((X - EX)^2 \geq \epsilon^2) = P(Y \geq \epsilon^2)$$

Nierówność Czebyszewa

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawdopodobieństwo znacznego odchylenia się od wartości oczekiwanej jest niewielkie.

Dowód: Weźmy **nieujemną** zmienną losową $Y = (X - EX)^2$

$$\begin{aligned} P(|X - EX| \geq \epsilon) &= P((X - EX)^2 \geq \epsilon^2) = P(Y \geq \epsilon^2) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{EY}{\epsilon^2} = \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}, \end{aligned}$$

gdzie w (*) skorzystaliśmy z nierówności Markowa

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P(|X - EX| \geq kD(X)) \leq \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyłeń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P(|X - EX| \geq kD(X)) \leq \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyżeń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Przykład: Zmienna X ma wartość oczekiwaną 0 i odchylenie standardowe σ . Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wartości $|X| \geq 3\sigma$?

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P(|X - EX| \geq kD(X)) \leq \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyżeń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Przykład: Zmienna X ma wartość oczekiwaną 0 i odchylenie standardowe σ . Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wartości $|X| \geq 3\sigma$? $\leq \frac{1}{9}$

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P(|X - EX| \geq kD(X)) \leq \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyżeń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Przykład: Zmienna X ma wartość oczekiwaną 0 i odchylenie standardowe σ . Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wartości $|X| \geq 3\sigma$? $\leq \frac{1}{9}$

Uwaga: Nierówność Czebyszewa działa dla dowolnego rozkładu, przez co może być dość słaba. W szczególnych przypadkach napotkamy na znacznie lepsze nierówności.