

Metody probabilistyczne

5. Zmienne losowe: wprowadzenie

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
<http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/>

9.11.2020

Motywacja

Często bardziej niż same zdarzenia losowe interesują nas pewne **wartości liczbowe** z nimi związane:

- Rzucamy n razy monetą, ale interesuje nas tylko liczba wyrzuconych orłów
- Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki; interesuje nas liczba wykonanych rzutów
- Strzelamy do tarczy na strzelnicy; interesuje nas nie tyle dokładna pozycja lotki na tarczy, co liczba zdobytych punktów
- Ania i Bartek umawiają się na spotkanie; interesuje nas czas oczekiwana na siebie

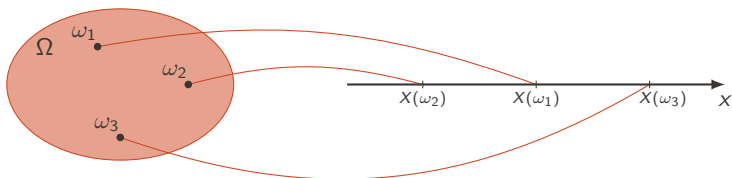
Interesuje więc nas nie tyle przestrzeń Ω , co pewne wartości z \mathbb{R} przypisane zdarzeniom elementarnym

Zmienne losowe

Zmienne losowe to funkcje z Ω do \mathbb{R} , przyporządkowujące zdarzeniom elementarnym **liczby**.

W probabilistyce zmienne losowe oznacza się dużymi literami, np. X, Y, Z .

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

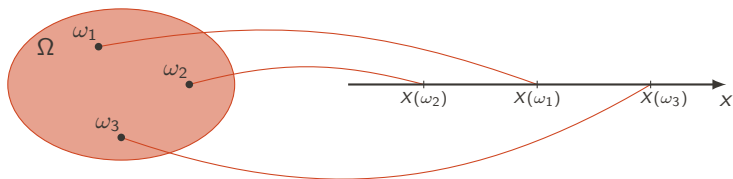


Zmienne losowe

Zmienne losowe to funkcje z Ω do \mathbb{R} , przyporządkowujące zdarzeniom elementarnym **liczby**.

W probabilistyce zmienne losowe oznacza się dużymi literami, np. X, Y, Z .

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



Interesują nas tylko wartości przyjmowane przez X oraz ich prawdopodobieństwa

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko **liczba orłów**:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko **liczba orłów**:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} X(OOO) &= 3, & X(OOR) &= 2, & X(ORO) &= 2, & X(ORR) &= 1, \\ X(ROO) &= 2, & X(ROR) &= 1, & X(RRO) &= 1, & X(RRR) &= 0 \end{aligned}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko **liczba orłów**:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} X(OOO) &= 3, & X(OOR) &= 2, & X(ORO) &= 2, & X(ORR) &= 1, \\ X(ROO) &= 2, & X(ROR) &= 1, & X(RRO) &= 1, & X(RRR) &= 0 \end{aligned}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym **zdarzeniem** w Ω :

- $\{X = 3\} = \{\omega: X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{X = 2\} = \{\omega: X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{X = 1\} = \{\omega: X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$
- $\{X = 0\} = \{\omega: X(\omega) = 0\} = \{RRR\}$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko **liczba orłów**:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} X(OOO) = 3, & \quad X(OOR) = 2, & \quad X(ORO) = 2, & \quad X(ORR) = 1, \\ X(ROO) = 2, & \quad X(ROR) = 1, & \quad X(RRO) = 1, & \quad X(RRR) = 0 \end{aligned}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym **zdarzeniem** w Ω :

- $\{X = 3\} = \{\omega: X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{X = 2\} = \{\omega: X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{X = 1\} = \{\omega: X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$
- $\{X = 0\} = \{\omega: X(\omega) = 0\} = \{RRR\}$

Możemy zatem zapytać o **prawdopodobieństwo** uzyskania danego wyniku.

$$\text{np. } P(\{X = 2\}) = \frac{3}{8}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko **liczba orłów**:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} X(OOO) &= 3, & X(OOR) &= 2, & X(ORO) &= 2, & X(ORR) &= 1, \\ X(ROO) &= 2, & X(ROR) &= 1, & X(RRO) &= 1, & X(RRR) &= 0 \end{aligned}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym **zdarzeniem** w Ω :

- $\{X = 3\} = \{\omega: X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{X = 2\} = \{\omega: X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{X = 1\} = \{\omega: X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$
- $\{X = 0\} = \{\omega: X(\omega) = 0\} = \{RRR\}$

Możemy zatem zapytać o **prawdopodobieństwo** uzyskania danego wyniku.

$$\text{np. } P(\{X = 2\}) = \frac{3}{8}$$

Podobnie możemy spytać o dowolny **podzbiór wyników**, np:

$$P(\{X \leq 1\}) = P(\{RRR, ORR, ROR, RRO\}) = \frac{4}{8}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko **liczba orłów**:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{aligned} X(OOO) &= 3, & X(OOR) &= 2, & X(ORO) &= 2, & X(ORR) &= 1, \\ X(ROO) &= 2, & X(ROR) &= 1, & X(RRO) &= 1, & X(RRR) &= 0 \end{aligned}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym **zdarzeniem** w Ω :

- $\{X = 3\} = \{\omega: X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{X = 2\} = \{\omega: X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{X = 1\} = \{\omega: X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$

często opuszczamy klamry, zapisując: $\{RR\}$

$$P(X = 2), P(X \leq 1), \text{ itp.}$$

prawdopodobieństwo uzyskania danego wyniku.

$$\text{np. } P(\{X = 2\}) = \frac{3}{8}$$

Podobnie możemy spytać o dowolny **podzbiór wyników**, np:

$$P(\{X \leq 1\}) = P(\{RRR, ORR, ROR, RRO\}) = \frac{4}{8}$$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas **suma oczek**

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas **suma oczek**

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$X : \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$X(i, j) = i + j$$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas **suma oczek**

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$X(i, j) = i + j$$

- $P(X = 3) = P(\{\omega : X(\omega) = 3\}) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas **suma oczek**

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$X(i, j) = i + j$$

- $P(X = 3) = P(\{\omega : X(\omega) = 3\}) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}$
- $P(9 \leq X \leq 11) = \underbrace{P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11)}_{\text{zdarzenia rozłączne}} = \frac{4+3+2}{36}$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas **suma oczek**

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$X(i, j) = i + j$$

- $P(X = 3) = P(\{\omega : X(\omega) = 3\}) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}$
- $P(9 \leq X \leq 11) = \underbrace{P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11)}_{\text{zdarzenia rozłączne}} = \frac{4+3+2}{36}$
- $P(X < 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1+2+3}{36}$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p , a reszka z prawd. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedyńki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_n) : b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p , a reszka z prawd. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedyńki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_n) : b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$X((b_1, \dots, b_n)) =$$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p , a reszka z praw. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedyńki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_n) : b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$X((b_1, \dots, b_n)) = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p , a reszka z praw. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedyńki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_n) : b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$X((b_1, \dots, b_n)) = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$P(X = k) =$$

Przykład

Rzucamy n **nieuczciwymi** monetami, w których orzeł wypada z prawd. p , a reszka z praw. $1 - p$; interesuje nas tylko **liczba orłów**

Dla uproszczenia kodujemy orły jako **jedynki** i reszki jako **zera**

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_n) : b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$X((b_1, \dots, b_n)) = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

$$P(X = 1) =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6},$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko **liczba rzutów**

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6), (4, 2, 6), (5, 5, 2, 4, 3, 6), \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) : b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k, b_k = 6, k = 1, 2, \dots\}$$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$X(b_1, \dots, b_k) = k$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

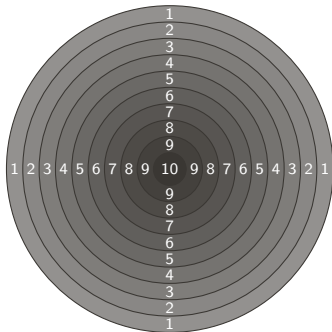
$$P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko
liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa
geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\}$

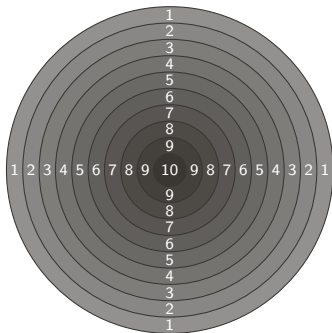


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko
liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa
geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\}$
- $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$

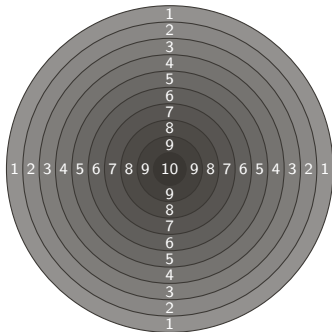


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko
liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa
geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\}$
- $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10$

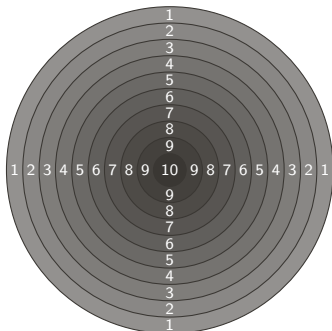


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko
liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa
geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\}$
- $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10$
- $X(x, y) = 2$ jeśli $8 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9$

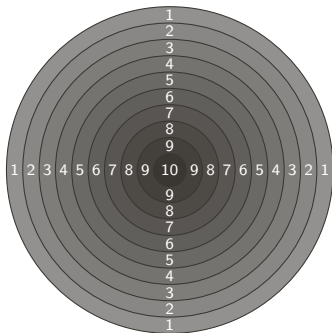


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko
liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa
geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\}$
- $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10$
- $X(x, y) = 2$ jeśli $8 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9$
- $X(x, y) = k$ jeśli $10 - k \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 11 - k$



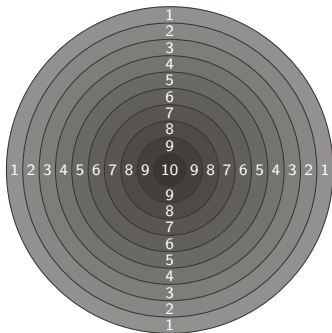
Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko
liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa
geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\}$
- $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10$
- $X(x, y) = 2$ jeśli $8 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9$
- $X(x, y) = k$ jeśli $10 - k \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 11 - k$

$$P(X = k) = \frac{|K(0, 11 - k)| - |K(0, 10 - k)|}{|K(0, 10)|}$$

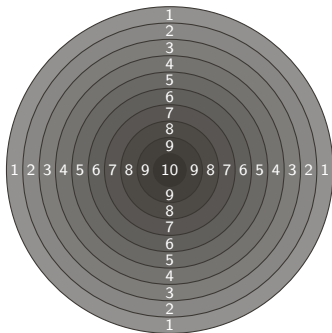


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko
liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa
geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\}$
- $X : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10$
- $X(x, y) = 2$ jeśli $8 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9$
- $X(x, y) = k$ jeśli $10 - k \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 11 - k$



$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{|K(0, 11 - k)| - |K(0, 10 - k)|}{|K(0, 10)|} \\ &= \frac{\pi(11 - k)^2 - \pi(10 - k)^2}{100\pi} = \frac{21 - 2k}{100} \end{aligned}$$

Przykład

Ania i Bartek przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00. Interesuje nas tylko czas oczekiwania na siebie.

Zdarzenia elementarne: pary (a, b) określające czas przybycia Ani i Bartka licząc od 10:00; $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

Przykład

Ania i Bartek przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00. Interesuje nas tylko czas oczekiwania na siebie.

Zdarzenia elementarne: pary (a, b) określające czas przybycia Ani i Bartka licząc od 10:00; $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$$X(a, b) = |a - b|$$

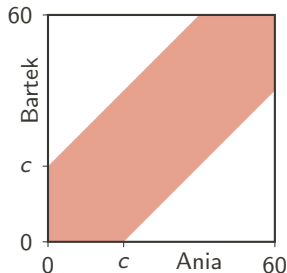
Przykład

Ania i Bartek przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00. Interesuje nas tylko czas oczekiwania na siebie.

Zdarzenia elementarne: pary (a, b) określające czas przybycia Ani i Bartka licząc od 10:00; $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$$X(a, b) = |a - b|$$

Wyznaczmy $P(X < c)$ dla dowolnego $c \in [0, 60]$



Zdarzenie $\{X < c\} = \{(a, b) \in \Omega : |a - b| < c\}$
oznaczone kolorem czerwonym

$$\begin{aligned} P(X < c) &= 1 - P(X \geq c) \\ &= 1 - \frac{(60 - c) \cdot (60 - c)}{60 \cdot 60} \\ &= \frac{c}{30} - \left(\frac{c}{60}\right)^2 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

$$P(X \in A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\})$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w Ω ,
składającego się ze zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$,
dla których $X(\omega) \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$$P(X \in A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\})$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w Ω ,
składającego się ze zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$,
dla których $X(\omega) \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$

przeciwobraz

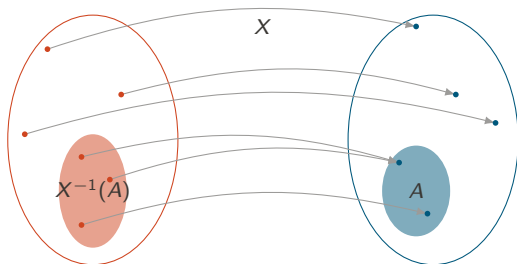
$$P(X \in A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = P(X^{-1}(A))$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w Ω ,
składającego się ze zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$,
dla których $X(\omega) \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$

przeciwobraz

$$P(X \in A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = P(X^{-1}(A))$$



Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na \mathbb{R}

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na \mathbb{R}

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ nie jest zdarzeniem, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie \mathcal{F} to σ -ciało zdarzeń w Ω

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem **zbiorów borelowskich** na \mathbb{R}

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ **nie jest zdarzeniem**, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie \mathcal{F} to σ -ciało zdarzeń w Ω

Aby temu zapobiec, zakładamy, że jeśli $A \in \mathcal{B}$ (A jest zbiorem borelowskim), to $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem **zbiorów borelowskich** na \mathbb{R}

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ **nie jest zdarzeniem**, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie \mathcal{F} to σ -ciało zdarzeń w Ω

Aby temu zapobiec, zakładamy, że jeśli $A \in \mathcal{B}$ (A jest zbiorem borelowskim), to $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Funkcje spełniające ten warunek nazywamy **mierzalnymi**.

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem **zbiorów borelowskich** na \mathbb{R}

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ **nie jest zdarzeniem**, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie \mathcal{F} to σ -ciało zdarzeń w Ω

Aby temu zapobiec, zakładamy, że jeśli $A \in \mathcal{B}$ (A jest zbiorem borelowskim), to $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Funkcje spełniające ten warunek nazywamy **mierzalnymi**.

Z własności σ -ciała wynika, że **wystarczającym** warunkiem mierzalności jest, aby dla dowolnego przedziału $(-\infty, a]$ zachodziło $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.

Definicja zmiennej losowej

Definicja

Zmienną losową nazywamy dowolną mierzalną funkcję $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

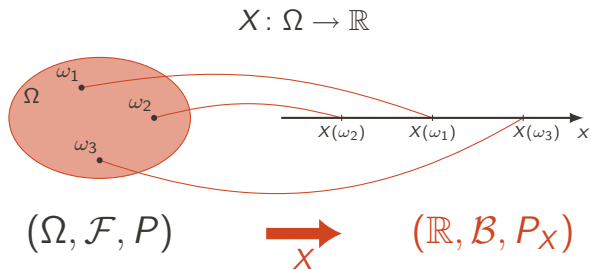
Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X nazywamy miarę prawdopodobieństwa P_X zdefiniowaną jako:

$$P_X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A))$$

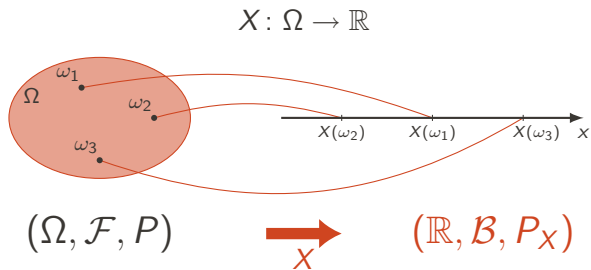
dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \in \mathcal{B}$

Uwaga: będziemy używali zapisu $X \sim P_X$ aby oznaczyć, że zmienna X ma rozkład P_X

Zmienne losowe a odwzorowanie przestrzeni probabilistycznej



Zmienne losowe a odwzorowanie przestrzeni probabilistycznej



Mierzalność X gwarantuje, że każde zdarzenie w przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest **przeciwobrazem** pewnego zdarzenia w przestrzeni (Ω, \mathcal{F}, P) .

Dwie równoważne notacje

$$\begin{array}{lll} P_X(A) & \iff & P(X \in A) \\ P_X(\{a\}) & \iff & P(X = a) \\ P_X((-\infty, a]) & \iff & P(X \leq a) \\ P_X([a, b)) & \iff & P(a \leq X < b) \\ & \dots & \end{array}$$

- Notacja **niebieska** dotyczy przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ indukowanej przez zmienną losową X
- Skrótowa notacja **czerwona** odwołuje się do bazowej przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) ; jest dużo wygodniejsza, stąd prawie zawsze będziemy jej używać

P_X spełnia aksjomaty Kołmogorowa

Zadanie 1*

Niech P będzie miarą prawdopodobieństwa na Ω , a $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zmienną losową. Pokaż, że miara P_X przyporządkowująca każdemu podzbiorowi $A \subseteq \mathbb{R}$ liczbę:

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

spełnia aksjomaty Kołmogorowa na przestrzeni \mathbb{R} .

Wskazówka: trzeba wykorzystać fakt, że P spełnia aksjomaty Kołmogorowa

Dystrybuanta zmiennej losowej

Definicja

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowaną jako:

$$F(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

Dystrybuanta zmiennej losowej







Definicja

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowaną jako:







$$F(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

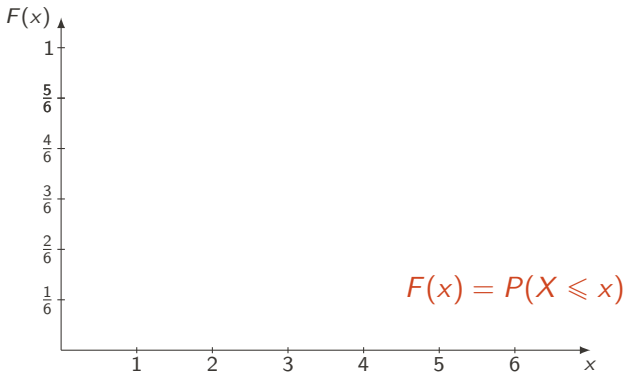
- Dystrybuanta jest funkcją **niemalejącą**
- Mamy $P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$
- $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ jest **prawostronnie ciągła**

Przykład: rzut kostką







						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

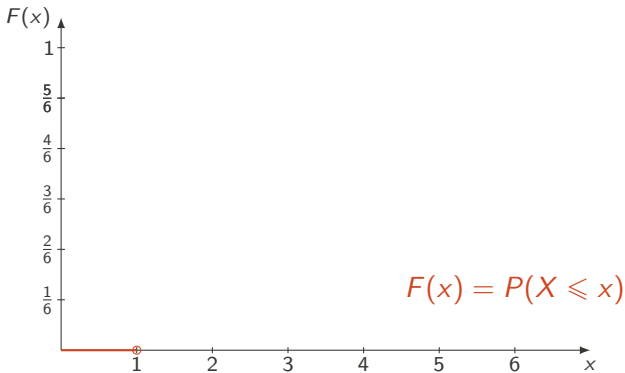
Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$









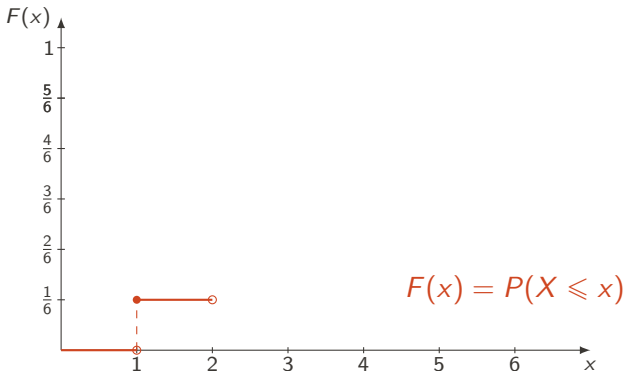
Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$









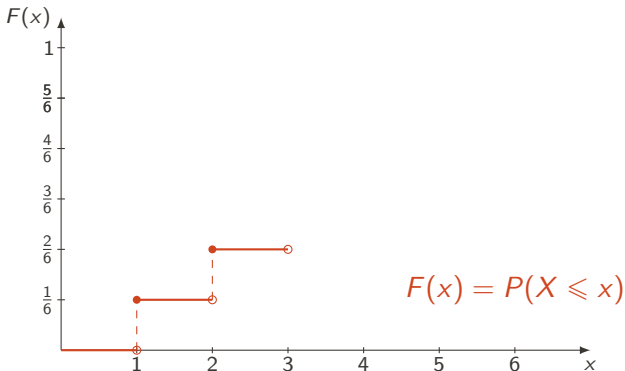
Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$









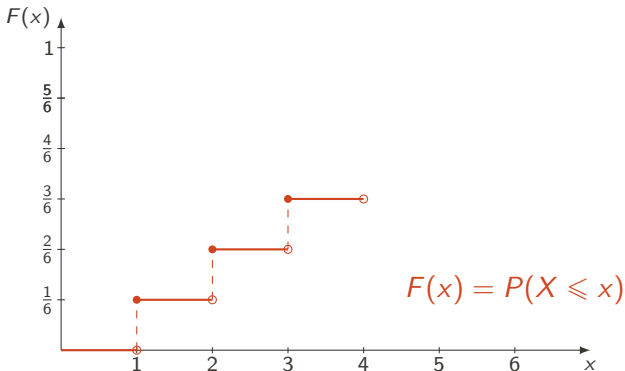
Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$









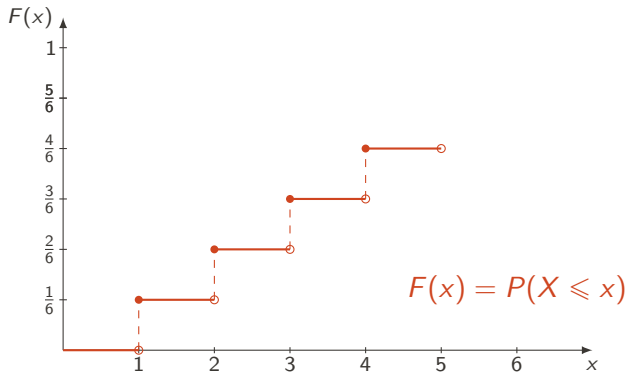
Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$









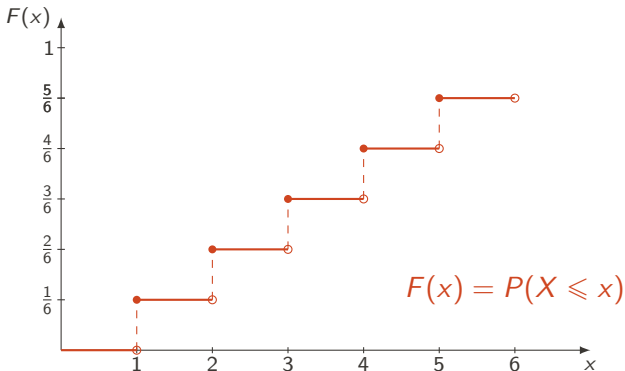
Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$









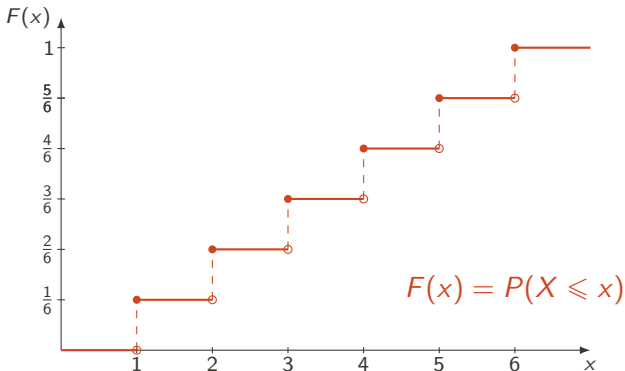
Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Przykład: rzut kostką

						
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0, 1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) = |A|, \quad \text{dla } A \subseteq [0, 1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a, b]) = b - a$)

Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0, 1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) = |A|, \quad \text{dla } A \subseteq [0, 1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a, b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leq x) = 0$

Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0, 1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) = |A|, \quad \text{dla } A \subseteq [0, 1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a, b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leq x) = 0$
- Jeśli $x \in [0, 1]$ to $F(x) = \underbrace{P(X < 0)}_{=0} + \underbrace{P(X \in [0, x])}_{=x} = x$

Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0, 1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) = |A|, \quad \text{dla } A \subseteq [0, 1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a, b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leq x) = 0$
- Jeśli $x \in [0, 1]$ to $F(x) = \underbrace{P(X < 0)}_{=0} + \underbrace{P(X \in [0, x])}_{=x} = x$
- Jeśli $x > 1$ to $F(x) = \underbrace{P(X \leq 1)}_{=1} + \underbrace{P(X \in (1, x])}_{=0} = 1$

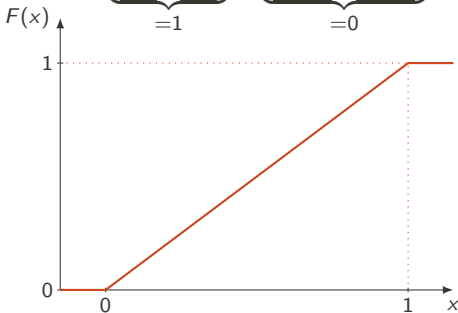
Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0, 1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) = |A|, \quad \text{dla } A \subseteq [0, 1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a, b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leq x) = 0$
- Jeśli $x \in [0, 1]$ to $F(x) = \underbrace{P(X < 0)}_{=0} + \underbrace{P(X \in [0, x])}_{=x} = x$
- Jeśli $x > 1$ to $F(x) = \underbrace{P(X \leq 1)}_{=1} + \underbrace{P(X \in (1, x])}_{=0} = 1$



Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Zmienną losową X przyjmującą co najwyżej **przeliczalną** liczbę możliwych wartości $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ nazywamy **zmienną dyskretną (typu skokowego)**

Dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$ zachodzi:

$$P(X \in A) = \sum_{i: x_i \in A} P(X = x_i),$$

lub w „zdarzeniowej” notacji:

$$P_X(A) = \sum_{i: x_i \in A} P_X(\{x_i\})$$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej dyskretnej jest więc w pełni zdefiniowany poprzez określenie prawdopodobieństw $P(X = x_i) = P_X(\{x_i\})$ dla wszystkich $x_i \in \mathcal{X}$

Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Troszkę ogólniejsza definicja:

Mówimy, że zmienna losowa X jest **dyskretna (typu skokowego)** jeśli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ taki, że $P(X \in \mathcal{X}) = 1$

Czyli prawdopodobieństwo przyjęcia wartości spoza \mathcal{X} wynosi **zero**.

Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Troszkę ogólniejsza definicja:

Mówimy, że zmienna losowa X jest **dyskretna (typu skokowego)** jeśli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ taki, że $P(X \in \mathcal{X}) = 1$

Czyli prawdopodobieństwo przyjęcia wartości spoza \mathcal{X} wynosi **zero**.

Przykład: Zmienna X przyjmująca **dowolne** wartości z \mathbb{R} taka, że:

$$P(X \in A) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Czyli $P(X = 0) = 1$

Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Troszkę ogólniejsza definicja:

Mówimy, że zmienna losowa X jest **dyskretna (typu skokowego)** jeśli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ taki, że $P(X \in \mathcal{X}) = 1$

Czyli prawdopodobieństwo przyjęcia wartości spoza \mathcal{X} wynosi **zero**.

Przykład: Zmienna X przyjmująca **dowolne** wartości z \mathbb{R} taka, że:

$$P(X \in A) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Czyli $P(X = 0) = 1$

Konwencja: dla zmiennej losowej dyskretnej będziemy odtąd pomijać wartości przyjmowane z prawdopodobieństwem zero!
(tzn. tak, jakby zmienna losowa ich po prostu nie przyjmowała)

Zadanie

Zadanie 2

Z talii 52 kart ciągniemy 6 i zliczamy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

Zadanie 3

Mamy dwie monety: jedną uczciwą (szansa orła i reszki po 50%) i jedną nieuczciwą (szansa orła 80%, reszki 20%). Wybieramy losową jedną z nich i rzucamy nią 3 razy. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę orłów. Wyznacz rozkład X .

Zadanie 4

Wybieramy losową permutację liczb $\{1, 2, \dots, 10\}$. Niech X oznacza pozycję (licząc od 1), na której pojawi się pierwsza liczba parzysta. Podaj rozkład X .

(np. dla permutacji $\{1, 3, 10, 2, 5, 8, 9, 7, 4, 6\}$ mamy $X = 3$)

Rozkład jednopunktowy

Zmienna X ma rozkład **jednopunktowy**, jeśli istnieje taki $x \in \mathbb{R}$, że $P(X = x) = 1$

Cały rozkład zmiennej X jest **skoncentrowany w jednym punkcie**

Taka zmienna losowa to efektywnie **stała**

Rozkład jednostajny

Zmienna X ma rozkład **jednostajny**, jeśli $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ oraz:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

Rozkład jednostajny

Zmienna X ma rozkład **jednostajny**, jeśli $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ oraz:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

Przykład: wynik rzutu kostką, $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$P(X = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6$$

Rozkład dwupunktowy

Zmienna X ma rozkład **dwupunktowy** jeśli $X \in \{x_0, x_1\}$

Oznaczamy:

$$p = P(X = x_1), \quad \text{a więc } P(X = x_0) = 1 - p$$

Zwykle przyjmuje się $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$, wtedy $p = P(X = 1)$ jest **prawdopodobieństwem sukcesu**

Rozkład dwupunktowy oznaczamy przez **$B(p)$**

Rozkład dwupunktowy

Zmienna X ma rozkład **dwupunktowy** jeśli $X \in \{x_0, x_1\}$

Oznaczamy:

$$p = P(X = x_1), \quad \text{a więc } P(X = x_0) = 1 - p$$

Zwykle przyjmuje się $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$, wtedy $p = P(X = 1)$ jest **prawdopodobieństwem sukcesu**

Rozkład dwupunktowy oznaczamy przez $B(p)$

Przykład: wynik rzutu nieuczciwą monetą dla której orzeł ($X = 1$) wypada z prawdopodobieństwem p , a reszka ($X = 0$) z prawd. $1 - p$.

Uwaga: jeśli $p = 0$ lub $p = 1$, to X ma rozkład **jednopunktowy**

Rozkład dwumianowy

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ma rozkład **dwumianowy** z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Rozkład dwumianowy

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ma rozkład **dwumianowy** z parametrem p jeśli:

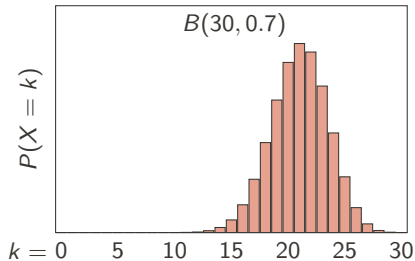
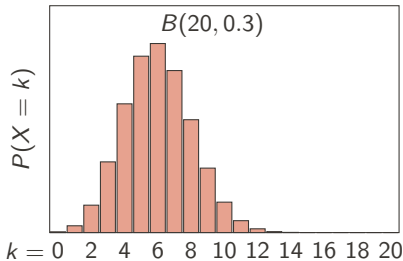
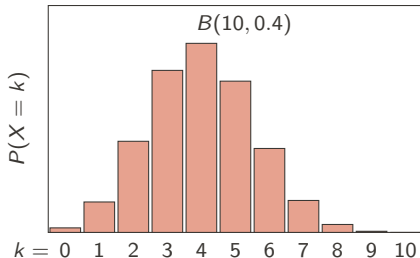
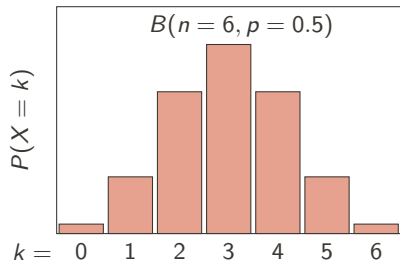
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Zmienna X określa więc liczbę sukcesów w n próbach, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p (schemat Bernoulliego).

Rozkład dwumianowy oznaczamy przez $B(n, p)$

Uwaga: jeśli $n = 1$, to X ma rozkład **dwupunktowy**

Rozkład dwumianowy



Rozkład dwumianowy – przykład

Zadanie 5

Mamy urnę z 10 białymi i 20 czarnymi kulami. Wybieramy losowo **ze zwracaniem** 9 kul. Niech X określa liczbę wylosowanych białych kul. Jaki rozkład ma X ?

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład geometryczny z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład **geometryczny** z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zmienna X określa więc **liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu** w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p .

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład **geometryczny** z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zmienna X określa więc **liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu** w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p .

Rozkład geometryczny oznaczamy przez $G_1(p)$

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład **geometryczny** z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zmienna X określa więc **liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu** w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p .

Rozkład geometryczny oznaczamy przez $G_1(p)$

Przykład: rzucamy kostką aż do uzyskania szóstki. Liczba rzutów X ma rozkład $G_1(p = \frac{1}{6})$

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \dots\}$ ma rozkład **geometryczny** z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zmienna X określa więc **liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu** w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p .

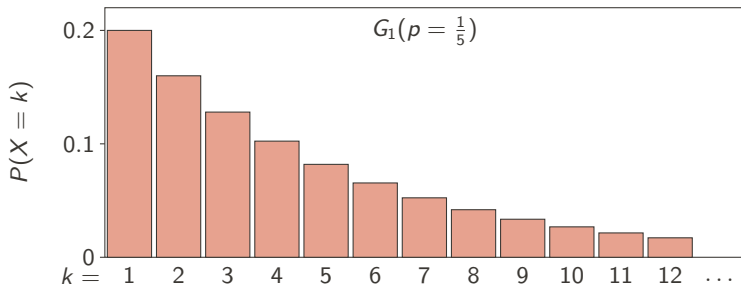
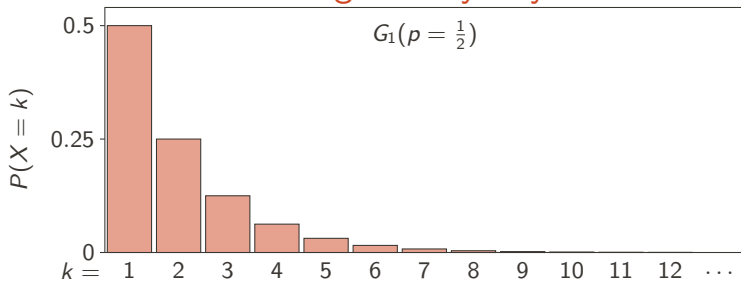
Rozkład geometryczny oznaczamy przez $G_1(p)$

Przykład: rzucamy kostką aż do uzyskania szóstki. Liczba rzutów X ma rozkład $G_1(p = \frac{1}{6})$

Uwaga: Istnieje wersja rozkładu geometrycznego $G_0(p)$ określająca **liczbę porażek do uzyskania pierwszego sukcesu**:

$$P(X = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Rozkład geometryczny



Rozkład geometryczny – przykłady

Kupujemy losy na loterii, dopóki nie wygramy. Szansa wygrania wynosi $p = 1/1000$. Niech X określa liczbę kupionych losów na loterii: X ma rozkład $G_1(p)$.

Rozkład geometryczny – przykłady

Kupujemy losy na loterii, dopóki nie wygramy. Szansa wygrania wynosi $p = 1/1000$. Niech X określa liczbę kupionych losów na loterii; X ma rozkład $G_1(p)$.

Na lotnisku próbujemy złapać wolną taksówkę, ale 9 na 10 taksówek przyjeżdża już zarezerwowana/zajęta. Niech X określa liczbę zajętych taksówek, które zaobserwujemy; X ma rozkład $G_0(1/10)$.

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba **co najmniej** k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p ?

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba **co najmniej** k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p ?

X ma rozkład $G_1(p)$

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots$$

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba **co najmniej** k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p ?

X ma rozkład $G_1(p)$

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} (1 - p)^{i-1} p \end{aligned}$$

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba **co najmniej** k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p ?

X ma rozkład $G_1(p)$

$$\begin{aligned}P(X \geq k) &= P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots \\&= \sum_{i=k}^{\infty} (1 - p)^{i-1} p \\&= (1 - p)^{k-1} p \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i\end{aligned}$$

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba **co najmniej** k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p ?

X ma rozkład $G_1(p)$

$$\begin{aligned}P(X \geq k) &= P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots \\&= \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \\&= (1-p)^{k-1} p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\&= (1-p)^{k-1} p \frac{1}{p} = (1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1)$ dla $\ell \geq 1$
(„pierwszy sukces pojawił się po co najmniej $k + \ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach”)

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1)$ dla $\ell \geq 1$ („pierwszy sukces pojawił się po co najmniej $k + \ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach”)

$$P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1) = \frac{P(\{X \geq k + \ell\} \cap \{X \geq k + 1\})}{P(\{X \geq k + 1\})}$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1)$ dla $\ell \geq 1$ („pierwszy sukces pojawił się po co najmniej $k + \ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach”)

$$\begin{aligned} P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1) &= \frac{P(\{X \geq k + \ell\} \cap \{X \geq k + 1\})}{P(\{X \geq k + 1\})} \\ &= \frac{P(\{X \geq k + \ell\})}{P(\{X \geq k + 1\})} \end{aligned}$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1)$ dla $\ell \geq 1$ („pierwszy sukces pojawił się po co najmniej $k + \ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach”)

$$\begin{aligned} P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1) &= \frac{P(\{X \geq k + \ell\} \cap \{X \geq k + 1\})}{P(\{X \geq k + 1\})} \\ &= \frac{P(\{X \geq k + \ell\})}{P(\{X \geq k + 1\})} \\ &= \frac{(1 - p)^{k + \ell - 1}}{(1 - p)^k} = (1 - p)^{\ell - 1} = P(X \geq \ell) \end{aligned}$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1)$ dla $\ell \geq 1$ („pierwszy sukces pojawił się po co najmniej niż $k + \ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach”)

$$\begin{aligned}P(X \geq k + \ell | X \geq k + 1) &= \frac{P(\{X \geq k + \ell\} \cap \{X \geq k + 1\})}{P(\{X \geq k + 1\})} \\&= \frac{P(\{X \geq k + \ell\})}{P(\{X \geq k + 1\})} \\&= \frac{(1 - p)^{k+\ell-1}}{(1 - p)^k} = (1 - p)^{\ell-1} = P(X \geq \ell)\end{aligned}$$

Brak pamięci: jeśli sukces nie pojawił się w pierwszych k próbach, możemy zapomnieć o przeszłości i wyznaczyć prawdopodobieństwa jakbyśmy dopiero zaczęli losować

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p .
Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa
zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p .
Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa
zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne (b_1, b_2, \dots, b_n) , $n = 1, 2, \dots$,
zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p .
Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa
zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne (b_1, b_2, \dots, b_n) , $n = 1, 2, \dots$,
zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \dots, b_n) = (1 - p)^r p^{n-r}$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p .
Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa
zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne (b_1, b_2, \dots, b_n) , $n = 1, 2, \dots$,
zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \dots, b_n) = (1 - p)^r p^{n-r}$$

Ile jest takich ciągów o długości n ?

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p . Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne (b_1, b_2, \dots, b_n) , $n = 1, 2, \dots$, zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \dots, b_n) = (1 - p)^r p^{n-r}$$

Ile jest takich ciągów o długości n ? $\binom{n-1}{r-1}$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p . Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne (b_1, b_2, \dots, b_n) , $n = 1, 2, \dots$, zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \dots, b_n) = (1 - p)^r p^{n-r}$$

Ile jest takich ciągów o długości n ? $\binom{n-1}{r-1}$

Stąd prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów do momentu uzyskania r porażek:

$$\binom{n-1}{r-1} (1-p)^r p^{n-r} = \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **ujemny dwumianowy** z parametrami r i p jeśli:

$$P(X = k) = \binom{r + k - 1}{r - 1} (1 - p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **ujemny dwumianowy** z parametrami r i p jeśli:

$$P(X = k) = \binom{r + k - 1}{r - 1} (1 - p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy oznaczamy przez **$NB(r, p)$**

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **ujemny dwumianowy** z parametrami r i p jeśli:

$$P(X = k) = \binom{r + k - 1}{r - 1} (1 - p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy oznaczamy przez **$NB(r, p)$**

Przykład: Bezzałogowy samolot wraca z misji rozpoznawczej z prawdopodobieństwem p . Ile misji uda się nam wykonać mając do dyspozycji r samolotów?

Podsumowanie

- Rozkład **dwupunktowy** modeluje prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie
- Rozkład **dwumianowy** modeluje prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach
- Rozkład **geometryczny** modeluje prawdopodobieństwo k prób do uzyskania pierwszego sukcesu
- Rozkład **ujemny dwumianowy** modeluje prawdopodobieństwo k sukcesów przed uzyskaniem r porażek

Rozkład Poissona

*Life is good for only two things,
discovering mathematics and teaching
mathematics*



Siméon Denis Poisson
(1781-1840)

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p , gdzie:

- n jest **bardzo duże**,
- p jest **bardzo małe** (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest **umiarkowane** (ani małe, ani duże)

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p , gdzie:

- n jest **bardzo duże**,
- p jest **bardzo małe** (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest **umiarkowane** (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p , gdzie:

- n jest **bardzo duże**,
- p jest **bardzo małe** (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest **umiarkowane** (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
- Mamy artykuł z $n = 8\ 000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p , gdzie:

- n jest **bardzo duże**,
- p jest **bardzo małe** (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest **umiarkowane** (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
- Mamy artykuł z $n = 8\,000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.
- DNA człowieka składa się z $n = 6.4 \times 10^9$ par zasad (w pojedynczej komórce). Szansa mutacji na parę zasad na rok wynosi $p = 0.5 \times 10^{-9}$. Wyznacz rozkład liczby mutacji w ciągu roku.

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p , gdzie:

- n jest **bardzo duże**,
- p jest **bardzo małe** (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest **umiarkowane** (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
- Mamy artykuł z $n = 8\ 000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.
- DNA człowieka składa się z $n = 6.4 \times 10^9$ par zasad (w pojedynczej komórce). Szansa mutacji na parę zasad na rok wynosi $p = 0.5 \times 10^{-9}$. Wyznacz rozkład liczby mutacji w ciągu roku.
- Szansa katastrofy lotniczej wynosi **1 na 11 mln lotów** (rocznie). Wyznacz rozkład liczby katastrof na rok, jeśli w ciągu roku odbywa się $n = 16$ mln lotów.

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Bierzemy **granicę** $n \rightarrow \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \rightarrow 0$)

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \rightarrow \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \rightarrow 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \rightarrow \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \rightarrow \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \rightarrow \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy **granice** $n \rightarrow \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy **granice** $n \rightarrow \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **Poissona** z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **Poissona** z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona oznaczamy przez **Pois**(λ)

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **Poissona** z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona oznaczamy przez **Pois**(λ)

Sprawdzamy, czy rozkład poprawnie się normalizuje:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \dots\}$ ma rozkład **Poissona** z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona oznaczamy przez **Pois(λ)**

Sprawdzamy, czy rozkład poprawnie się normalizuje:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

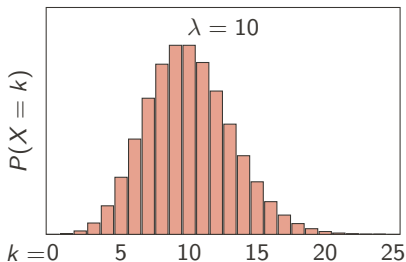
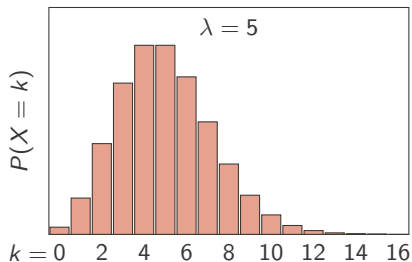
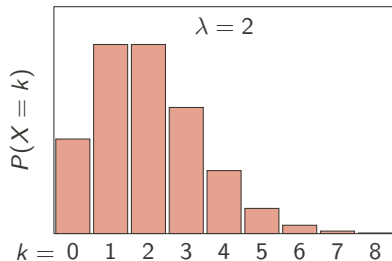
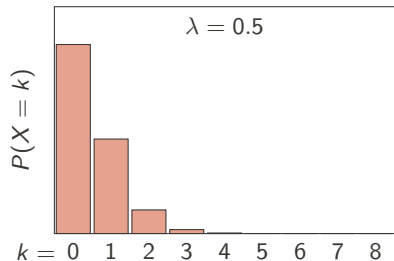
Zadanie 6

Odszukaj dlaczego $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

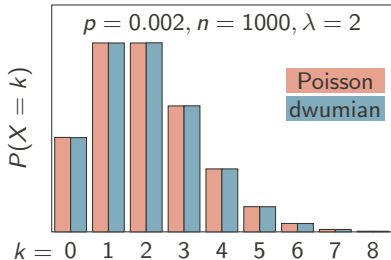
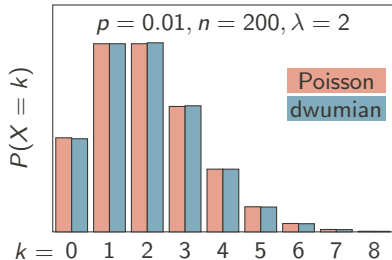
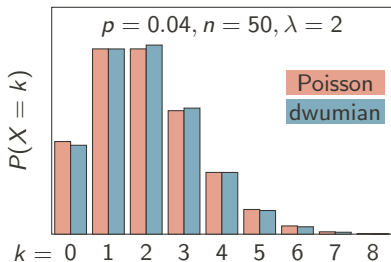
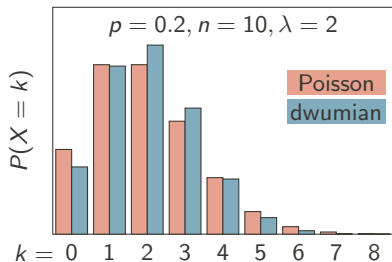
Zadanie 7

Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla wszystkich wymienionych poprzednio przykładów. Oblicz kilka pierwszych prawdopodobieństw.

Rozkład Poissona



Rozkład Poissona a dwumianowy



Rozkład Poissona a dwumianowy

