Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

21.10.2020

Zadanie 1. *Niech A_1, A_2, A_3 oznaczają pewne zdarzenia losowe. Wyraź w jak najprostszy sposób za pomocą operacji teorio-mnogościowych zdarzenia:*

1. *B_1: „zaszły wszystkie trzy zdarzenia”*
2. *B_2: „zaszły dokładnie dwa zdarzenia”*
3. *B_3: „zaszło co najmniej jedno zdarzenie”*
4. *B_4: „zaszło co najwyżej jedno zdarzenie”*
5. *B_5: „zaszło tylko zdarzenie A_1”*
6. *B_6: „nie zaszło żadne ze zdarzeń”*

Odpowiedź:

1. $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$
2. $B_2 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3)$
3. $B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$
4. $B_4 = (A_1 \cap A_2' \cap A_3') \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1' \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1' \cap A_2' \cap A_3')$
5. $B_5 = A_1 \setminus (A_2 \cup A_3) = A_1 \cap A_2' \cap A_3'$
6. $B_6 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)'$

Zadanie 2. *Udowodnij, że jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ to również $A \setminus B \in \mathcal{F}$.*

Odpowiedź: Wykorzystamy tutaj fakt, że $A \setminus B = A \cap B'$ (wystarczy narysować diagram Venna, aby się o tym przekonać). Ponieważ $B \in \mathcal{F}$ to z własności 2 algebry zdarzeń mamy $B' \in \mathcal{F}$. Z wykładu wiemy, że iloczyn dwóch zdarzeń z $\mathcal{F}$ również należy do $\mathcal{F}$. Ponieważ $A \in \mathcal{F}$, mamy więc $A \cap B' \in \mathcal{F}$, co kończy dowód.

Zadanie 3.

1. *Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sprawdź, czy $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ jest σ-ciałem*
2. *Dla dowolnego Ω i $A \subset \Omega$, wyznacz* najmniejsze *σ-ciało zawierające zdarzenie A*

Odpowiedź:

1. Tak, $\mathcal{F}$ spełnia wszystkie trzy aksjomaty:
   (a) $\Omega \in \mathcal{F}$ (oczywiste)
   (b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$ (wystarczy zauważyć, że dopełnienie każdego zbioru z $\mathcal{F}$ jest również w $\mathcal{F}$)

(c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$ – biorąc dowolne sumy zbiorów z $\mathcal{F}$ zawsze otrzymamy element $\mathcal{F}$

2. Oznaczmy najmniejsze σ-ciało zawierające A jako $\mathcal{F}$. Oczywiście musimy mieć $\Omega \in \mathcal{F}$ z pierwszego aksjomatu. Z drugiego aksjomatu, dopełnienia zbiorów muszą być w $\mathcal{F}$, czyli $\emptyset, A' \in \mathcal{F}$. Okazuje się, że trzeci aksjomat jest już wtedy spełniony, a więc:
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A'\}$$

Zadanie 4. *Niech $\Omega = \mathbb{N}$. Rozważ rodzinę $\mathcal{F}$ zawierającą wszystkie podzbiory Ω, które są skończone, lub których dopełnienia są skończone:*
$$\mathcal{F} \;=\; \{A \subseteq \Omega \colon A \textit{ skończony} \vee A' \textit{ skończony}\}$$
Sprawdź czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem.

Odpowiedź: $\mathcal{F}$ nie jest σ-ciałem. O ile pierwsze dwa aksjomaty są spełnione, trzeci aksjomat:
$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$$
nie jest. Weźmy podzbiory $A_n = \{2n\}$, tzn. A_n jest jedno-elementowym podzbiorem zawierającym liczbę $2n$. Oczywiście $A_n \in \mathcal{F}$, ale $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ to zbiór naturalnych liczb parzystych. Jest on nieskończony, ale jego dopełnienie (zbiór naturalnych liczb nieparzystych) również jest nieskończone.

Zadanie 5. *Pokaż, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_n$ mamy $P(A_1 \cup \ldots A_n) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.*

Odpowiedź: Wykorzystamy fakt z wykładu mówiący, że dla dowolnych A i B zachodzi $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Ponieważ prawdopodobieństwo jest zawsze nieujemne, $P(A \cap B) \geqslant 0$, a tym samym $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

Dowód jest przez indukcję dla $n = 2, 3, \ldots$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ zbiorów właśnie pokazaliśmy. Załóżmy teraz, że własność zachodzi dla $n-1$ i pokażemy, że zachodzi wtedy również dla n (krok indukcji). Weźmy zbiór A jako $A = A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, a zbiór B jako A_n. Mamy:
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n) = P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B) = P(A_1 \cup \ldots A_{n-1}) + P(A_n). \tag{1}$$
Teraz wystarczy wykorzystać założenie indukcyjne:
$$P(A_1 \cup \ldots A_{n-1}) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_{n-1}),$$
które po wstawieniu do prawej strony (1) daje:
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_n),$$
co kończy dowód.

Zadanie 6 *Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, A_2, A_3 \in \Omega$:*
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \;=\; P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$
Wskazówka: wykorzystaj udowodnione wcześniej: $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Odpowiedź:
$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \\
&\overset{(*)}{=} P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&\overset{(\dagger)}{=} P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&\overset{(*)}{=} P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) + \\
&\quad - \big(P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\big) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \\
&\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3),
\end{aligned}$$
gdzie w wierszach oznaczonych $(*)$ wykorzystaliśmy własność $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$, a w wierszu oznaczonym $(\dagger)$ wykorzystaliśmy prosty fakt $(B \cup C) \cap D = (B \cap D) \cup (C \cap D)$.

Zadanie 7*. *Pokaż, że jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest zstępujący i $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ to:*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Odpowiedź: Można to zadanie zrobić podobnie, jak to dla ciągu *wstępującego*. Pójdziemy tu jednak na skróty i wykorzystamy to, że udowodniliśmy już analogiczną własność dla ciągu wstępującego i pokażemy, że wynika z tego powyższa własność dla ciągu zstępującego.

Zdefiniujemy sobie $C_n = A_n'$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Zauważmy, że jeśli $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ jest zstępujący, to wtedy $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ jest wstępujący (wystarczy narysować diagram Venna, aby się o tym przekonać). Zdefiniujemy sobie $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$. Z twierdzenia o ciągach wstępujących:

$$P(C) \;=\; \lim_{n\to\infty} P(C_n).$$

Ale zauważmy, że z prawa De Morgana:

$$C' \;=\; (C_1 \cup C_2 \cup \ldots)' \;=\; (A_1' \cup A_2' \cup \ldots)' \;=\; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \;=\; A.$$

Tym samym:

$$P(A) \;=\; P(C') \;=\; 1 - P(C) \;=\; 1 - \lim_{n\to\infty} P(C_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \big(1 - P(C_n)\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

co należało dowieść.

Zadanie 8. *Pokaż, że prawdopodobieństwo na dyskretnej przestrzeni zdarzeń spełnia aksjomaty Kołmogorowa*

Odpowiedź: Przypomnijmy, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ jest zbiorem przeliczalnym, a rozważana rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów Ω, tzn. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Każdemu ω_n przypisujemy liczbę $p_n \geqslant 0$ taką, że $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ definiujemy jako $P(A) = \sum_{n\colon\, \omega_n \in A} p_n$.

Sprawdzimy teraz wszystkie trzy aksjomaty Kołmogorowa:

1. *Nieujemność* $P(A) \geqslant 0$: ponieważ $p_n \geqslant 0$ dla każdego n, to również każda ich suma będzie nieujemna.

2. *Normalizacja* $P(\Omega) = 1$:

   $$P(\Omega) = \sum_{n\colon\, \omega_n \in \Omega} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1,$$

   gdzie ostatnia równość wynika z warunku, jaki nałożyliśmy na sumę p_n.

3. *Addytywność*: mając ciąg $A_1, A_2, \ldots$ zdarzeń rozłącznych, tj. takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$, musimy pokazać, że $P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Mamy:

   $$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{n\colon\, \omega_n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} p_n \overset{(*)}{=} \sum_{n\colon\, \omega_n \in A_1} p_n + \sum_{n\colon\, \omega_n \in A_2} p_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

   gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy fakt, że zbiory A_i są rozłączne, więc może sumować po każdym ze zbiorów z osobna.