Metody nieparametryczne

Na podstawie materiałów W. Kotłowskiego[1]

[1] Poprawne treści są autorstwa WK, niepoprawne – mojego (SW)

Metody nieparametryczne

- Dotychczasowe testy działają poprawnie tylko przy pewnych **założeniach o populacji**, np. test T wymaga rozkładu normalnego
- Złamanie tych założeń powoduje, że prawdopodobieństwo błędu I rodzaju może nie być na poziomie istotności α
- **Metody nieparametryczne** czynią znacznie mniej założeń o populacji.
  - $\uparrow$ Ogólniejsze – stosowalne w szerszym zakresie
  - $\downarrow$ Słabsze – moc testu jest niższa

Test znaków

- Brak założeń o rozkładach X i Y
- Odpowiednik testu **sparowanego** T dla dwóch populacji

Test znaków

- Brak założeń o rozkładach X i Y
- Odpowiednik testu **sparowanego** T dla dwóch populacji

Zamiast różnicy $X - Y$, testujemy jej **znak**

$$S = \operatorname{sgn}(X - Y),$$

przy czym przypadki $X = Y$ pomijamy (n - liczba znaczących porównań)

X	Y	S
4	6	$-$
7	7	pomijamy
3	2	$+$
1	1.5	$-$
2	9	$-$
6	2	$+$

Test znaków

- Brak założeń o rozkładach X i Y
- Odpowiednik testu **sparowanego** T dla dwóch populacji

Zamiast różnicy $X - Y$, testujemy jej **znak**

$$S = \mathrm{sgn}(X - Y),$$

przy czym przypadki $X = Y$ pomijamy (n - liczba znaczących porównań)

Niezależnie od oryginalnego rozkładu $X - Y$, zmienna S ma rozkład **dwupunktowy** z parametrem sukcesu:

$$p = P(S = +)$$

Test znaków

- Brak założeń o rozkładach X i Y
- Odpowiednik testu **sparowanego** T dla dwóch populacji

Zamiast różnicy $X - Y$, testujemy jej **znak**

$$S = \operatorname{sgn}(X - Y),$$

przy czym przypadki $X = Y$ pomijamy (n - liczba znaczących porównań)

Niezależnie od oryginalnego rozkładu $X - Y$, zmienna S ma rozkład **dwupunktowy** z parametrem sukcesu:

$$p \;=\; P(S = +) \;=\; P(X > Y | X \neq Y)$$

Przy odpowiednich założeniach ($n \cdot p_0 \geq 5$, $n \cdot (1 - p_0) \geq 5$) można wykorzystać test Z dla rozkładu dwumianowego!

Test znaków

- **Układ hipotez**:
  $p = P(S = +) = P(X > Y|X \neq Y)$, $p_0 = 0.5$

$H_0:$	$p = 0.5$	$p \geq 0.5$	$p \leq 0.5$
$H_1:$	$p \neq 0.5$	$p < 0.5$	$p > 0.5$

Test znaków

- **Układ hipotez**:
  $p = P(S = +) = P(X > Y | X \neq Y)$, $p_0 = 0.5$

$H_0:$	$p = 0.5$	$p \geq 0.5$	$p \leq 0.5$
$H_1:$	$p \neq 0.5$	$p < 0.5$	$p > 0.5$

- **Statystyka testowa** (mała próba):

$$T = S_n \text{ (liczba znaków +)}$$

- **Zbiór krytyczny:**
  - Przybliżone wartości krytyczne – C i C_1 dla testu jedno- i dwustronnego (dopasowanie do α lub $\frac{\alpha}{2}$)
  - $C_{\mathrm{kr}} = [0, C_1] \cup [C_2 = n - C_1, n]$ dla testu dwustronnego
  - $C_{\mathrm{kr}} = [0, C]$ dla lewostronnego
  - $C_{\mathrm{kr}} = [n - C, n]$ dla prawostronnego

  $T \in C_{\mathrm{kr}} \Longrightarrow$ **odrzucamy** H_0 **i przyjmujemy** H_1

Test znaków

- **Układ hipotez**:
  $p = P(S = +) = P(X > Y | X \neq Y)$, $p_0 = 0.5$

$H_0:$	$p = 0.5$	$p \geq 0.5$	$p \leq 0.5$
$H_1:$	$p \neq 0.5$	$p < 0.5$	$p > 0.5$

- **Statystyka testowa** (duża próba):

$$Z = \frac{S_n - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \sim N(0, 1)$$

- **Zbiór krytyczny**:
  Ustalane na podstawie α w taki sam sposób, jak w testach poznanych wcześniej

Test Wilcoxona

- Odpowiednik testu **sparowanego** T dla dwóch populacji
- Silniejszy od testu znaków, ale słabszy od testu T
- Zakłada jedynie, że różnice $X - Y$ można ze sobą porównywać (większa/mniejsza/równa)

Układ hipotez:

$H_0:$	$\text{median}(X-Y) = 0$	≥ 0	≤ 0
$H_1:$	$\text{median}(X-Y) \neq 0$	< 0	> 0

Wymaga dość skomplikowanych obliczeń na **rangach modułów różnic**, które najlepiej przeprowadzić na przykładzie

Test Wilcoxona

X, Y, n - liczba znaczących porównań (różnica $\neq 0$)

- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\mathrm{median}(X - Y) = 0$	≥ 0	≤ 0
$H_1:$	$\mathrm{median}(X - Y) \neq 0$	< 0	> 0

- **Statystyka testowa**:
  - $T = \min\{\Sigma_+, \Sigma_-\}$ dla testu dwustronnego
  - $T = \Sigma_+$ dla testu lewostronnego
  - $T = \Sigma_-$ dla testu prawostronnego
- **Zbiór krytyczny**:
  - Wartość krytyczna T_{kr} z tablic, np. tutaj
  - $C_{\mathrm{kr}} = [0, T_{\mathrm{kr}}]$ (zawsze $\leq T_{\mathrm{kr}}$)

$T \leq T_{\mathrm{kr}} \implies$ **odrzucamy** H_0 **i przyjmujemy** H_1

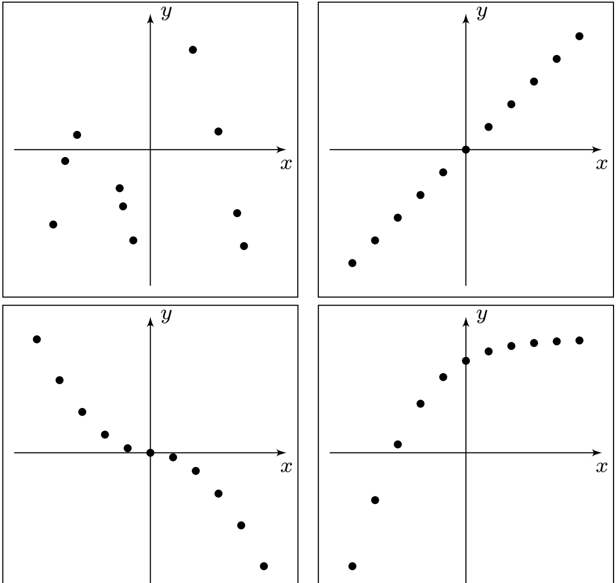
Współczynnik korelacji rangowej Spearmana

- Nieparametryczny współczynnik korelacji

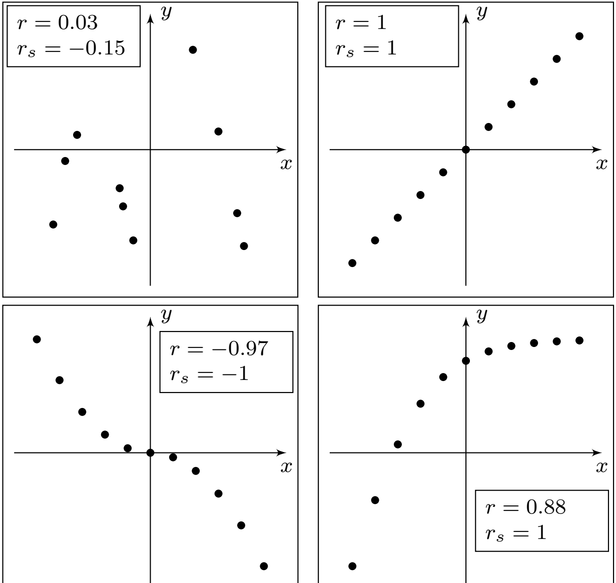
$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

  gdzie d_i to różnica rang X_i i Y_i ($d_i = R(X_i) - R(Y_i)$)
- Zasada obliczania: zamień X i Y na **rangi** i policz na tym zwykły współczynnik korelacji Pearsona

Wsp. korelacji Pearsona vs. Spearmana



Wsp. korelacji Pearsona vs. Spearmana



Test na istotność korelacji Spearmana

- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\rho_s = 0$	≥ 0	≤ 0
$H_1:$	$\rho_s \neq 0$	< 0	> 0

- **Statystyka testowa**:
  - $T = r_s$
  - $T = \frac{r_s}{\sqrt{1-r_s^2}}\sqrt{n-2} \ \sim \ t(n-2)$ (dla $n > 10$)
- **Wartość krytyczna**:
  - Odczytana z tablic, np. tutaj
  - Wyznaczona z rozkładu t-Studenta z $n-2$ stopniami swobody