Testy dla dwóch zbiorowości (Z, t i F)

SW (na podstawie materiałów W. Kotłowskiego)[1]

[1] Poprawne treści są autorstwa WK, za błędy odpowiada SW

Test sparowany

- **Założenia**: $X_{1,1}, \ldots, X_{1,n}$, $X_{2,1}, \ldots, X_{2,n}$.

  taki sam rozmiar próby!
  obserwacje **zależne** parami

- Testujemy **różnice** $\Delta_i = X_{1,i} - X_{2,i}$.
  Efektywnie test dla jednej populacji – **populacji różnic**.

X_1	X_2
0.5	1
-1	-2
0	2.5
1.5	0.5

$\Longrightarrow$

Δ
-0.5
1
-2.5
1

Test sparowany

- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\mu_\Delta = 0$	$\mu_\Delta \geq 0$	$\mu_\Delta \leq 0$
$H_1:$	$\mu_\Delta \neq 0$	$\mu_\Delta < 0$	$\mu_\Delta > 0$

- **Statystyka testowa** – ustandardyzowana **średnia z różnic**:

$$Z = t = \frac{\overline{\Delta}}{s_\Delta}\sqrt{n} \sim \begin{cases} N(0,1) & n \geq 30, \\ t(n-1) & n < 30. \end{cases}$$

Test sparowany

- **Układ hipotez**:

$H_0:$	μ_Δ	$= \geq \leq$	$\mu_{\Delta 0}$
$H_1:$	μ_Δ	$\neq < >$	$\mu_{\Delta 0}$

- **Statystyka testowa** – ustandardyzowana **średnia z różnic**:

$$Z = t = \frac{\overline{\Delta} - \mu_{\Delta 0}}{s_\Delta}\sqrt{n} \sim \begin{cases} N(0,1) & n \geq 30, \\ t(n-1) & n < 30. \end{cases}$$

Test niesparowany, różne wariancje, duża próba $(n_1, n_2 \geq 30)$

- **Założenia**: $$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$ $$X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$
- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 \leq \mu_2$
$H_1:$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$

- **Statystyka testowa**: ustandaryzowana różnica $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

$$E[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = \mu_1 - \mu_2 = 0, \qquad \text{(gdy } H_0 \text{ prawdziwe)}$$

$$D^2[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = D^2[\overline{X}_1] + D^2[\overline{X}_2] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

Test niesparowany, różne wariancje, duża próba $(n_1, n_2 \geq 30)$

- **Założenia**: $$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$ $$X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$
- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 \leq \mu_2$
$H_1:$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$

- **Statystyka testowa**: ustandaryzowana różnica $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

Test niesparowany, różne wariancje, duża próba ($n_1, n_2 \geq 30$)

- **Założenia**: $$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$ $$X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$
- **Układ hipotez**:

H_0 :	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 \leq \mu_2$
H_1 :	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$

- **Statystyka testowa**: ustandaryzowana różnica $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.
Jeśli σ_1^2 i σ_2^2 – nieznane, estymujemy je z danych (s_1^2 i s_2^2):
$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \approx N(0, 1).$$

Test niesparowany, różne wariancje, duża próba $(n_1, n_2 \ \geq 30)$

- **Założenia**: $$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$ $$X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$
- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\mu_1 - \mu_2$	$= \geq \leq$	$(\mu_1 - \mu_2)_0$
$H_1:$	$\mu_1 - \mu_2$	$\neq < >$	$(\mu_1 - \mu_2)_0$

- **Statystyka testowa**: ustandaryzowana różnica $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.
$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Test niesparowany, różne wariancje, mała próba

- Wzór na statystykę testową pozostaje bez zmian, ale ma ona rozkład t-Studenta

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- Liczba stopni swobody wyznaczana jest zgodnie ze wzorem Welch'a–Satterthwaite'a – zaokrąglenie w dół do najbliższej liczby całkowitej (Aczel - rozdz. 8.3)

$$df = \left\lfloor \frac{\left(s_1^2/n_1 - s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}} \right\rfloor$$

Test niesparowany, różne wariancje, mała próba

- W praktyce można wyznaczyć liczbę stopni swobody na podstawie liczności mniejszej próby (OpenIntro Statistics - rozdz. 7.3.1 i 7.3.2.)

$$df = \min(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- Rozkład t-Studenta można też zastosować w przypadku dużych prób (jako alternatywę dla testu Z i rozkładu normalnego)

Test niesparowany, równe wariancje

- **Założenia**: $$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2),$$ $$X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2).$$ równe wariancje!

- Estymator **wariancji łącznej**:

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1,i} - \overline{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2,i} - \overline{X}_2)^2\right)$$

Test niesparowany, równe wariancje

- **Założenia**:
$$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2),$$
$$X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2).$$
równe wariancje!

- Estymator **wariancji łącznej**:
$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Test niesparowany, równe wariancje

- **Założenia**:
$$X_{1,1},\ldots,X_{1,n_1} \sim N(\mu_1,\sigma^2),$$
$$X_{2,1},\ldots,X_{2,n_2} \sim N(\mu_2,\sigma^2).$$
równe wariancje!

- Estymator **wariancji łącznej**:
$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

- **Statystyka testowa**: ustandaryzowana różnica $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.
$$E[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = \mu_1 - \mu_2 = 0, \qquad \text{(gdy } H_0 \text{ prawdziwe)}$$
$$D^2[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = D^2[\overline{X}_1] + D^2[\overline{X}_2] = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Test niesparowany, równe wariancje

- **Założenia**: $$X_{1,1}, \dots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2),$$ $$X_{2,1}, \dots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2).$$ równe wariancje!

- Estymator **wariancji łącznej**:
$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- **Statystyka testowa**: ustandaryzowana różnica $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.
$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

Test niesparowany, równe wariancje

- **Założenia**: $$X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2),$$ $$X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2).$$

  równe wariancje!

- Estymator **wariancji łącznej**:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- **Statystyka testowa**: ustandaryzowana różnica $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

Testowanie wariancji

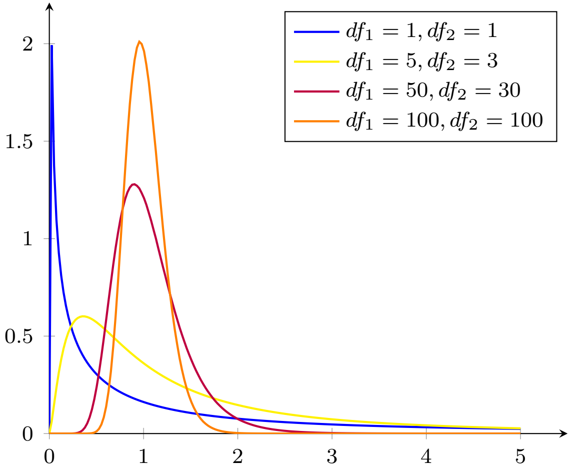
- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$
$H_1:$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

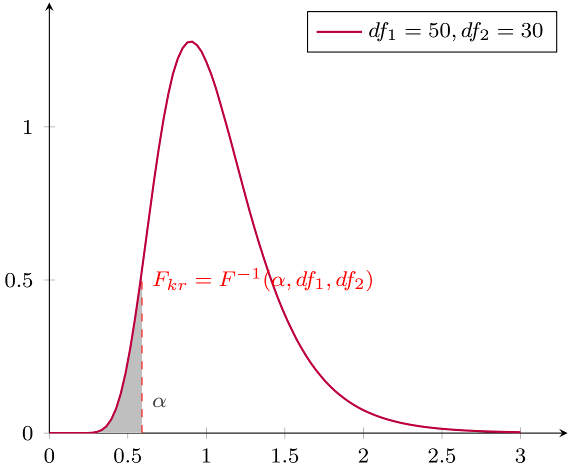
- **Statystyka testowa**: iloraz wariancji (rozkład Fishera-Snedecora o dwóch stopniach swobody)

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

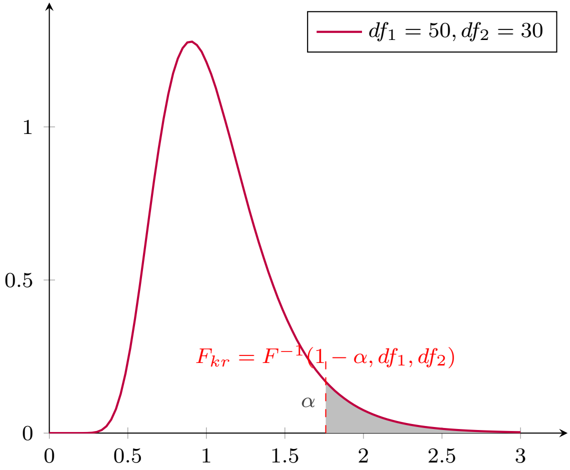
Rozkład Fishera-Snedecora (F)



Rozkład Fishera-Snedecora (F)



Rozkład Fishera-Snedecora (F)



Rozkład Fishera-Snedecora (F)