Testy Z i t

Na podstawie materiałów WK

Test Z

- **Założenia** $(n \geq 30)$: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\mu = \mu_0$	$(\mu \geq \mu_0)$	$(\mu \leq \mu_0)$
$H_1:$	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
	(dwustronny)	(lewostronny)	(prawostronny)

- **Statystyka testowa**: $Z = Z(X_1, \ldots, X_n)$
- **Obszar (zbiór) krytyczny**:

test	dwustronny	lewostronny	prawostronny
C_{kr}	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}}) \cup (z_{\mathrm{kr}}, \infty)$	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}})$	$(z_{\mathrm{kr}}, \infty)$

- **Decyzja**:

Jeśli $Z \in C_{\mathrm{kr}}$, odrzucamy H_0 na rzecz H_1.
Jeśli $Z \notin C_{\mathrm{kr}}$, brak podstaw do odrzucenia H_0.

Test Z – znana wariancja

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \ \sim \ N(0,1).$$

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- Test dwustronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

Test Z – nieznana wariancja

Wariancja σ^2 nieznana, więc estymujemy:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \;\sim\; N(0,1).$$

(przybliżenie, ale bardzo dokładne dla $n \geq 30$)

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- Test dwustronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

Test t – mała próba $(n < 30)$

Statystyka testowa:

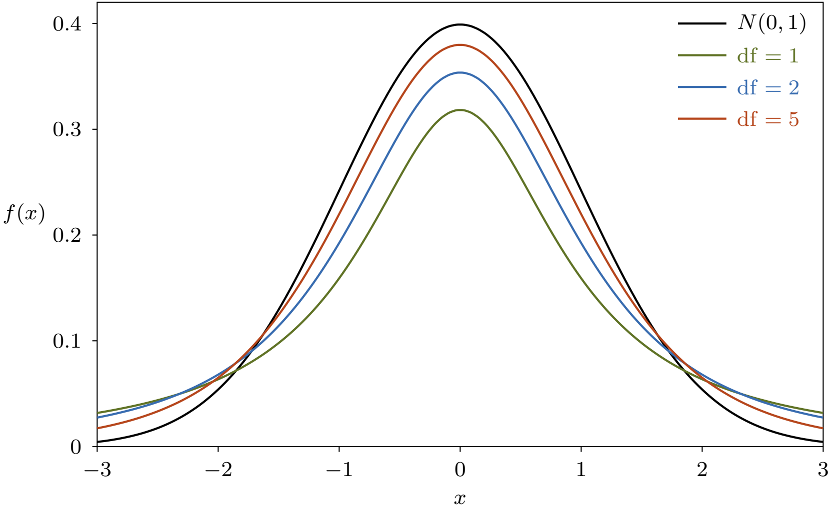
$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \ \sim \ t(n-1), \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

gdzie $t(n-1)$ – rozkład **t-Studenta z** $n-1$ **stopniami swobody**.

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $t_{\mathrm{kr}} = t^{-1}(1-\alpha;\ n-1)$
- Test dwustronny: $t_{\mathrm{kr}} = t^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2};\ n-1\right)$

Rozkład t



p-wartość

z

α

p-wartość

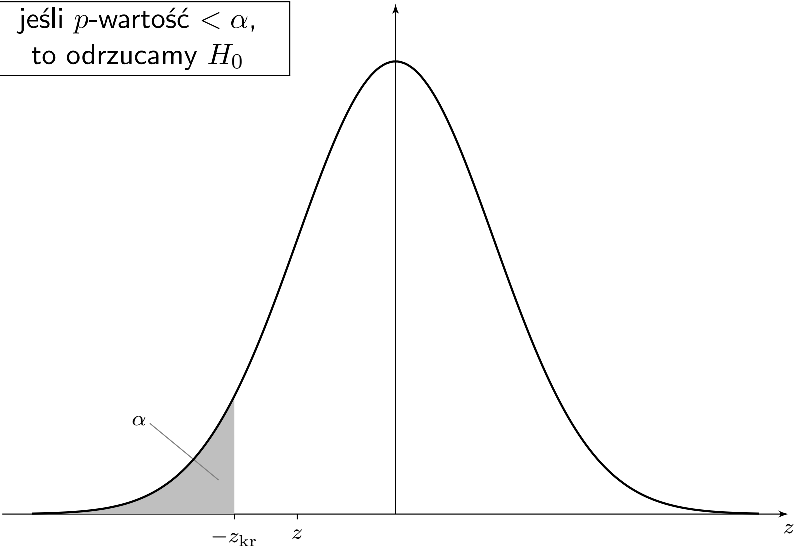
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{z} & \lessgtr & \boxed{z_{\mathrm{kr}}} \\
& & \boxed{\alpha} \arrow[u, "\Phi^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

p-wartość

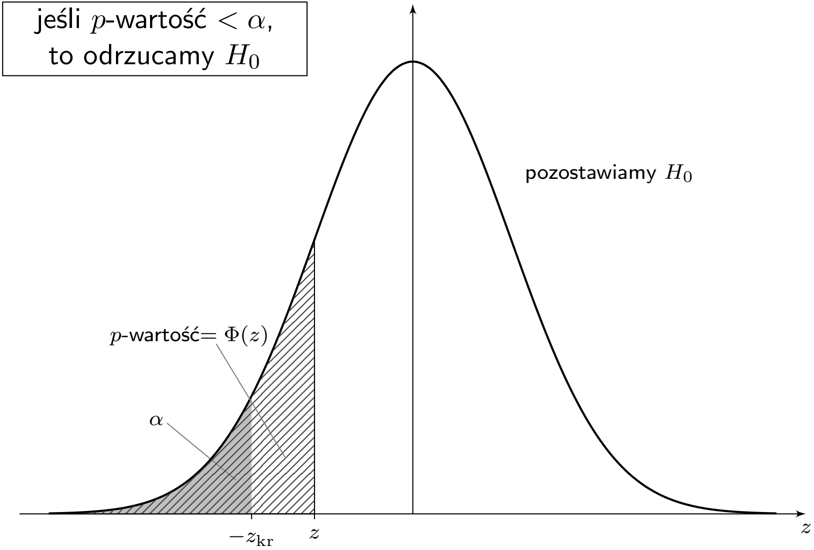
$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[d, "\Phi"] & \lesseqgtr & z_{\mathrm{kr}} \\
p\text{-wartość} & < & \alpha \arrow[u, "\Phi^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



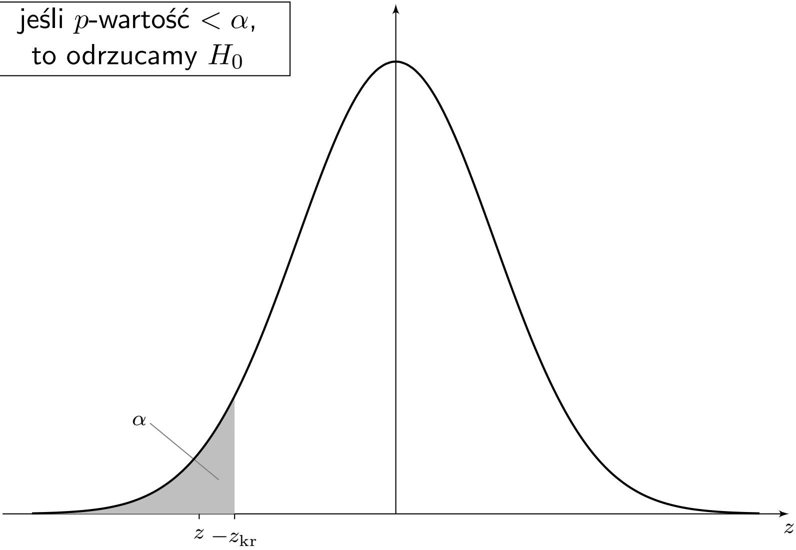
p-wartość



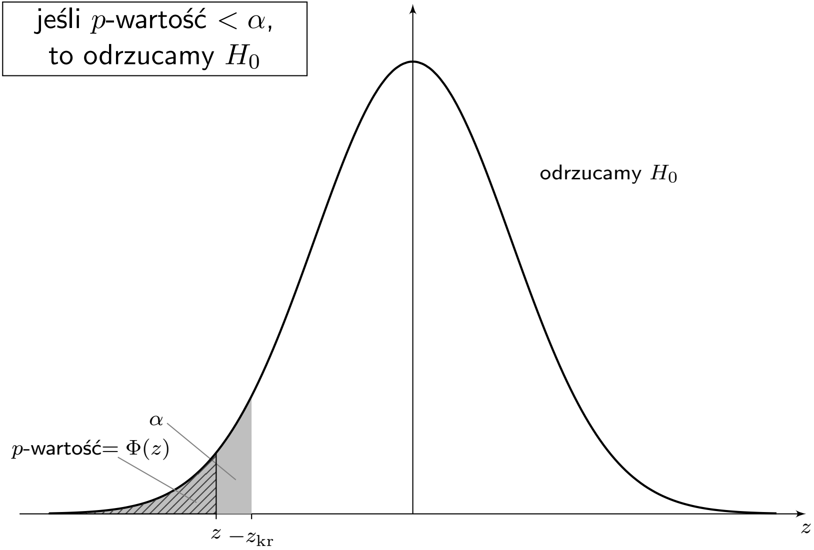
jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0
pozostawiamy H_0
p-wartość$= \Phi(z)$
α
$-z_{\mathrm{kr}}$
z
z

p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0

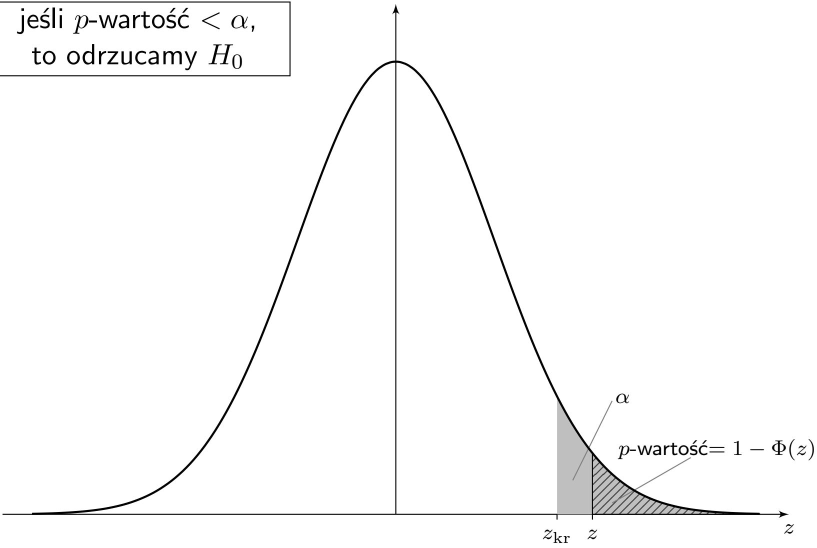


p-wartość


jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0
odrzucamy H_0
α
p-wartość$= \Phi(z)$
z
$-z_{\mathrm{kr}}$
z

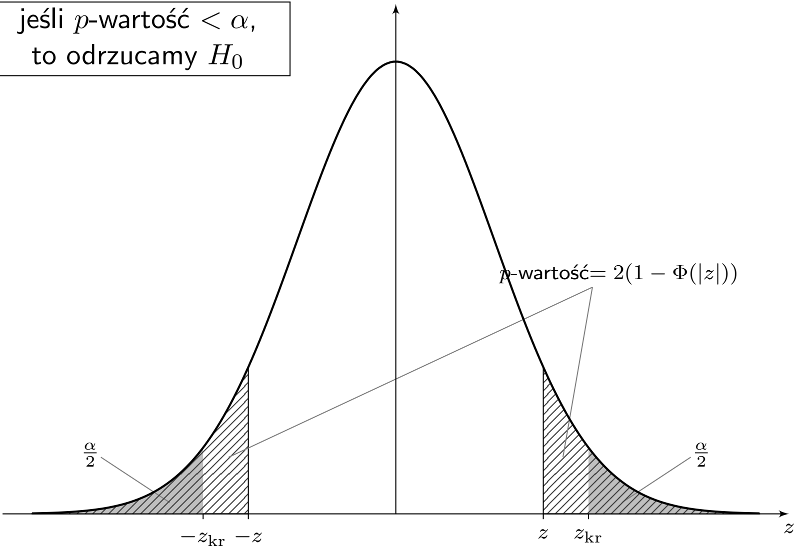
p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



p-wartość

Definicja:

- W teście **lewostronnym**: p-wartość $= \Phi(z)$
- W teście **prawostronnym**: p-wartość $= 1 - \Phi(z)$
- W teście **dwustronnym**: p-wartość $= 2(1 - \Phi(|z|))$

$$\boxed{\text{Jeśli } p\text{-wartość} < \alpha, \text{ odrzucamy } H_0}$$