

Testy statystyczne, test frakcji

SW (na podstawie materiałów W. Kotłowskiego)

Testy statystyczne

- Testujemy **hipotezę zerową** H_0 przeciwko **hipotezie alternatywnej** H_1 .

Hipotezy dotyczą jakiegoś parametru rozkładu.

(zwykle: H_0 – brak „efektu”, H_1 – istnieje jakiś „efekt”)

- Dowód „nie wprost”: zakładamy, że H_0 jest prawdziwe i odrzucamy je na rzecz H_1 , tylko jeśli *przy założeniu prawdziwości H_0 dane dają wynik niezgodny z oczekiwaniami.*

Niezgodny z oczekiwaniami = przy założeniu H_0 , wynik uzyskany z danych jest **mało prawdopodobny**.

Przykłady

- 1 Testujemy, czy moneta jest uczciwa. Co, jeśli:
 - Rzucamy 12 razy i otrzymujemy 12 orłów?
 - Rzucamy 20 razy i otrzymujemy 11 orłów?
- 2 Na egzaminie inżynierskim jest lista 100 znanych studentowi pytań i chcemy sprawdzić, czy student zna odpowiedź na ponad 50% z nich. Na 10 wylosowanych pytań student udziela poprawnej odpowiedzi tylko na jedno.

Ogólna postać testów

■ Układ hipotez:

$H_0 :$	$\theta = \theta_0$	$(\theta \geq \theta_0)$	$(\theta \leq \theta_0)$
$H_1 :$	$\theta \neq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$\theta > \theta_0$
	(dwustronny)	(lewostronny)	(prawostronny)

■ Statystyka testowa $Z = Z(X_1, \dots, X_n)$

■ Obszar (zbiór) krytyczny C_{kr}

test	dwustronny	lewostronny	prawostronny
C_{kr}	$(-\infty, -z_{kr}) \cup (z_{kr}, \infty)$	$(-\infty, -z_{kr})$	(z_{kr}, ∞)

■ Decyzja:

Jeśli $Z \in C_{kr}$, odrzucamy H_0 na rzecz H_1 .

Jeśli $Z \notin C_{kr}$, brak podstaw do odrzucenia H_0 .

Błąd pierwszego i drugiego rodzaju

	prawdziwe H_0	prawdziwe H_1
$Z \notin C_{kr}$ (nie odrzucamy H_0)	✓	błąd II rodzaju
$Z \in C_{kr}$ (odrzucamy H_0)	błąd I rodzaju	✓

Błąd pierwszego i drugiego rodzaju

	prawdziwe H_0	prawdziwe H_1
$Z \notin C_{kr}$ (nie odrzucamy H_0)	✓	błąd II rodzaju
$Z \in C_{kr}$ (odrzucamy H_0)	błąd I rodzaju	✓

W testach statystycznych kontrolujemy błąd I rodzaju:

$$\Pr_{H_0}(Z \in C_{kr}) = \alpha \quad (\alpha \text{ — poziom istotności}),$$

równocześnie wpływając na błąd II rodzaju: $\Pr_{H_1}(Z \notin C_{kr}) = \beta$.

Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 ,
gdy jest ona fałszywa ($1 - \beta$).

Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 , gdy jest ona fałszywa ($1 - \beta$).

Moc testu zależy od:

- odległości między wartością parametru w H_0 a prawdziwą wartością dla populacji ($\uparrow \implies \uparrow$),
- odchylenia standardowego w populacji σ ($\downarrow \implies \uparrow$),
- liczebności próby n ($\uparrow \implies \uparrow$),
- poziomu istotności α ($\uparrow \implies \uparrow$).

Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 , gdy jest ona fałszywa ($1 - \beta$).

Moc testu zależy od:

- odległości między wartością parametru w H_0 a prawdziwą wartością dla populacji ($\uparrow \implies \uparrow$),
- odchylenia standardowego w populacji σ ($\downarrow \implies \uparrow$),
- liczebności próby n ($\uparrow \implies \uparrow$),
- poziomu istotności α ($\uparrow \implies \uparrow$).

Test dla frakcji (prawostronny)

$$H_0 : \hat{P} \leq p_0$$

$$H_1 : \hat{P} > p_0$$

- Obserwujemy dane X_1, \dots, X_n o wartościach w $\{0, 1\}$ (rozkład dwupunktowy).
- Jeśli H_0 prawdziwe – spodziewamy się $\hat{p} = \frac{\#\text{sukcesów}}{n} \lesssim p_0$.
- Jeśli $\hat{p} \gg p_0$, dane niezgodne z H_0 – odrzucamy na rzecz H_1 .

Wniosek: jeśli $\hat{p} - p_0 > c$, odrzucamy H_0 . Jak wyznaczyć próg c ?

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr(\text{błąd I rodz.}) = \Pr_{H_0}(\hat{p} - p_0 > c) \\ &= \Pr_{H_0} \left(\underbrace{\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}}_Z > \underbrace{\frac{c}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}}_{z_{\text{kr}}} \right) \end{aligned}$$

Test dla frakcji (prawostronny)

$$H_0 : \hat{P} \leq p_0$$

$$H_1 : \hat{P} > p_0$$

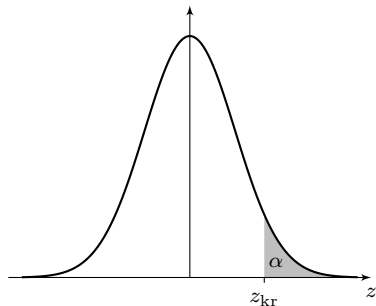
$$\text{Statystyka testowa: } Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n} = \frac{S_n - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}.$$

Jeśli H_0 prawdziwe, z CTG[†] przybliżamy $Z \sim N(0, 1)$.

$$\alpha = \Pr_{H_0}(Z > z_{\text{kr}}) = 1 - \Phi(z_{\text{kr}}),$$

$$z_{\text{kr}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

$$C_{\text{kr}} = (z_{\text{kr}}, \infty).$$



[†]Centralne Tw. Graniczne, dla $np_0 \geq 5, n(1-p_0) \geq 5$

Test dla frakcji (dwustronny)

$$H_0 : \hat{P} = p_0$$

$$H_1 : \hat{P} \neq p_0$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \sqrt{n}, \quad C_{kr} = (-\infty, -z_{kr}) \cup (z_{kr}, \infty).$$

$$\alpha = \Pr_{H_0}(Z > z_{kr}) + \Pr_{H_0}(Z < -z_{kr})$$

$$\alpha = 2(1 - \Phi(z_{kr}))$$

$$z_{kr} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$$

