Rozkłady prawdopodobieństwa

SW (na podstawie materiałów W. Kotłowskiego)

Rozkłady prawdopodobieństwa

- **Dwupunktowy** $B(p)$, dla zmiennej $X \in \{0, 1\}$.

  $$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p, \quad E[X] = p, \quad D^2[X] = p(1-p).$$

- **Dwumianowy** $B(n; p)$:

  $$X = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \text{gdzie} \;\; X_k \sim B(p).$$

  Suma n niezależnych zmiennych dwupunktowych. Zachodzi:

  $$E[X] = np, \qquad D^2[X] = np(1-p).$$

Użyteczne własności

Niech $X_1, \ldots, X_n$ – **i.i.d.**[1] oraz $E[X_k] = \mu$, $D^2[X_k] = \sigma^2$.

- Dla sumy $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$:

$$E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_n] = n\mu,$$
$$D^2[X] = D^2[X_1] + \ldots + D^2[X_n] = n\sigma^2.$$

- Dla średniej $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}X$:

$$E[\overline{X}] = \frac{1}{n}E[X] = \mu,$$
$$D^2[\overline{X}] = \frac{1}{n^2}D^2[X] = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad \text{czyli} \quad D[\overline{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

[1] i.i.d.: *independent and identically distributed* – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie

Rozkład jednostajny

$X \sim U(a, b)$ ma gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad D^2[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rozkład normalny

$X \sim N(\mu, \sigma)$ ma gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Uwaga: dowolna kombinacja liniowa zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny!

Centralne Twierdzenie Graniczne

$X_1, \ldots, X_n$ – i.i.d., $E[X_k] = \mu$, $D^2[X_k] = \sigma^2$.

Zdefiniujmy **ustandaryzowaną** średnią $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$.

$$E[Z] = 0, \qquad D^2[Z] = 1.$$

Zachodzi:

$$Z \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Przez CTW rozkład normalny występuje **powszechnie** (wszelkie uśrednianie)

Centralne Twierdzenie Graniczne

$X_1, \ldots, X_n$ – i.i.d., $E[X_k] = \mu$, $D^2[X_k] = \sigma^2$.

Zdefiniujmy **ustandaryzowaną** sumę $S = \frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

$$E[S] = 0, \qquad D^2[S] = 1.$$

Zachodzi:

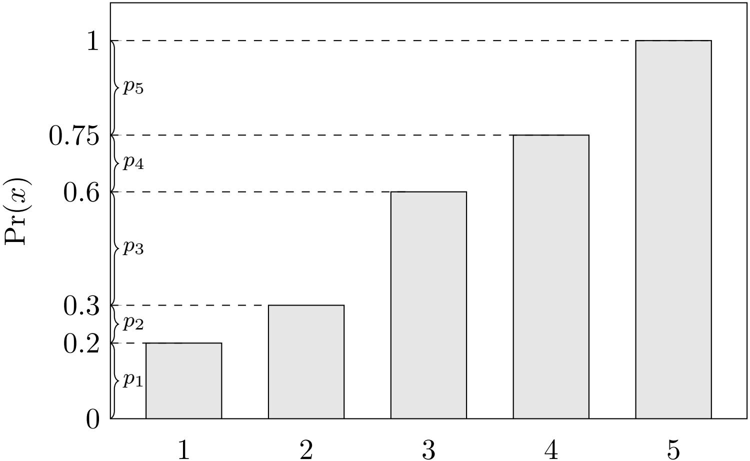
$$S \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu F mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0, 1]$ (jednostajny)?

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu F mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0,1]$ (jednostajny)?



Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu F mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0, 1]$ (jednostajny)?