...

Robert Susmaga
Instytut Informatyki
ul. Piotrowo 2
Poznań

kontakt mail'owy
Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL
kontakt osobisty
Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

Autor

…

Parametryczna reprezentacja zbiorów

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zbiory a figury
  - w geometrii klasycznej stosuje się aksjomatyczne definicje figur (np. okrąg)
  - w algebrze liniowej zbiory reprezentuje się za pomocą warunków numerycznych (wzorów), mających postać równań i/lub nierówności (względnie ich układów)

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Przykładowe definicje algebry liniowej:
  - zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne x_1 i x_2 spełniają:
    - równanie: $(x_1–a)^2+(x_2–b)^2=r^2$ stanowi okrąg o promieniu równym r i środku w punkcie o współrzędnych (a, b)
    - równanie: $2x_1–x_2=0$ stanowi prostą przechodzącą przez punkty o współrzędnych (0,0) oraz (1,2)
    - układ równań: $2x_1+x_2=4$, $x_1\geq0$, $x_1\leq2$ stanowi odcinek, którego końcami są punkty o współrzędnych (0,4) oraz (2,0)

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- W przypadku niektórych zbiorów/figur reprezentacja figur w postaci układów równań i/lub nierówności jest mało intuicyjna (z zapisu warunku spełnianego przez punkty figury trudno wywnioskować, jakie punkty do niej należą)
  - Podstawowy problem: czy prosta zdefiniowana warunkiem: $2x_1–x_2=0$ zawiera punkt o współrzędnych (35,70)?
    - oczywiście na tak podstawione pytanie łatwo jest odpowiedzieć podstawiając liczby 35 i 70 pod zmienne x_1 i x_2 w równaniu i sprawdzając, czy jest ono spełnione
  - Trudniejszy problem: czy punkt (1,2) jest końcem odcinka zdefiniowanego poprzez zbiór warunków: $2x_1+x_2=4$, $x_1\geq 0$, $x_1\leq 2$
    - metoda podstawienia ujawnia jedynie, że punkt (1,2) należy do odcinka, ale nie odpowiada na pytanie, czy punkt ten jest jego końcem

Parametryczna reprezentacja zbiorów

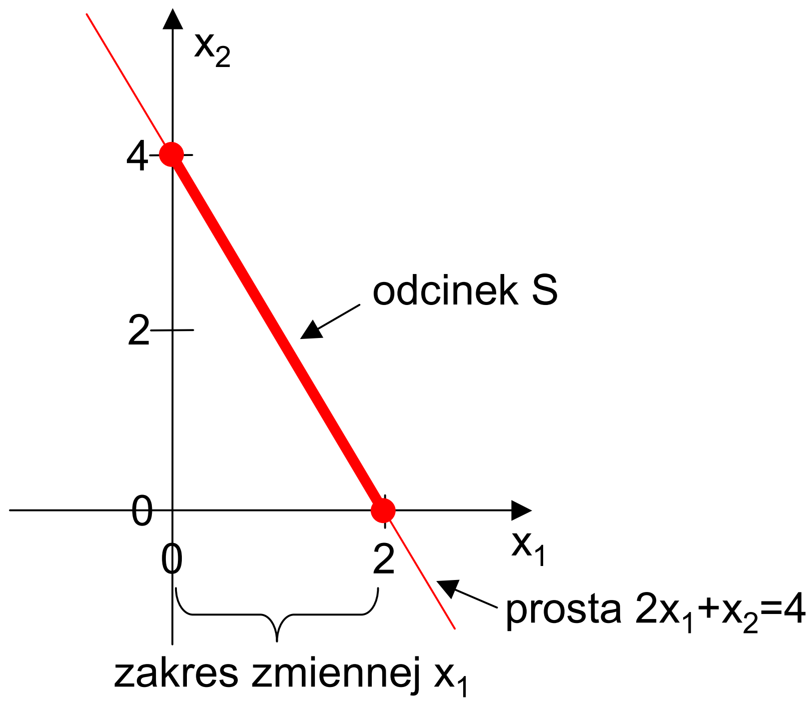
- Dlatego w takich sytuacjach warto używać zapisu parametrycznego, który jest także wzorem numerycznym charakteryzującym (wszystkie) punkty danego zbioru
- Uwagi:
  - zapis parametryczny nie ma postaci układu równań/nierówności, w których zmiennymi były współrzędne punktów
    - do tak sformułowanych równań/nierówności można podstawić współrzędne dowolnego punktu, uzyskując odpowiedź na pytanie, czy dany punkt należy do figury
  - zapis parametryczny ma postać kombinacji liniowej pewnych wektorów, w której zmiennymi są współczynniki kombinacji
    - do tak sformułowanej kombinacji podstawia się wartości współczynników kombinacji, co (przy odpowiednim dobraniu ich wartości) pozwala na wyznaczenie wszystkich punktów figury

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Do parametrycznego definiowania figur stosuje się kombinacje liniowe wektorów $\mathbf{x}_i$ (czyli wyrażenia postaci $\mathbf{y} = \Sigma\lambda_i\mathbf{x}_i$), przy można stosować:
  - kombinacje stożkowe
    - współczynniki λ_j kombinacji ograniczone warunkiem $\lambda_j \geq 0$
  - kombinacje afiniczne
    - współczynniki λ_j kombinacji ograniczone warunkiem $\Sigma\lambda_j=1$
  - <u>kombinacje wypukłe</u> (jednocześnie stożkowe i afiniczne)
    - współczynniki λ_j kombinacji ograniczone warunkami $\lambda_j \geq 0$ oraz $\Sigma\lambda_j=1$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Przykład: dany jest odcinek S zadany w postaci układu warunków: $2x_1+x_2=4$, $x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 2$
  - jak można wyrazić S w postaci parametrycznej?



Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Rozwiązanie wykorzystuje fakty, że:
  - odcinek jest wielościanem wypukłym (o dwóch wierzchołkach stanowiących końce odcinka)
  - końcami danego odcinka są punkty o współrzędnych: (0,4) oraz (2,0)

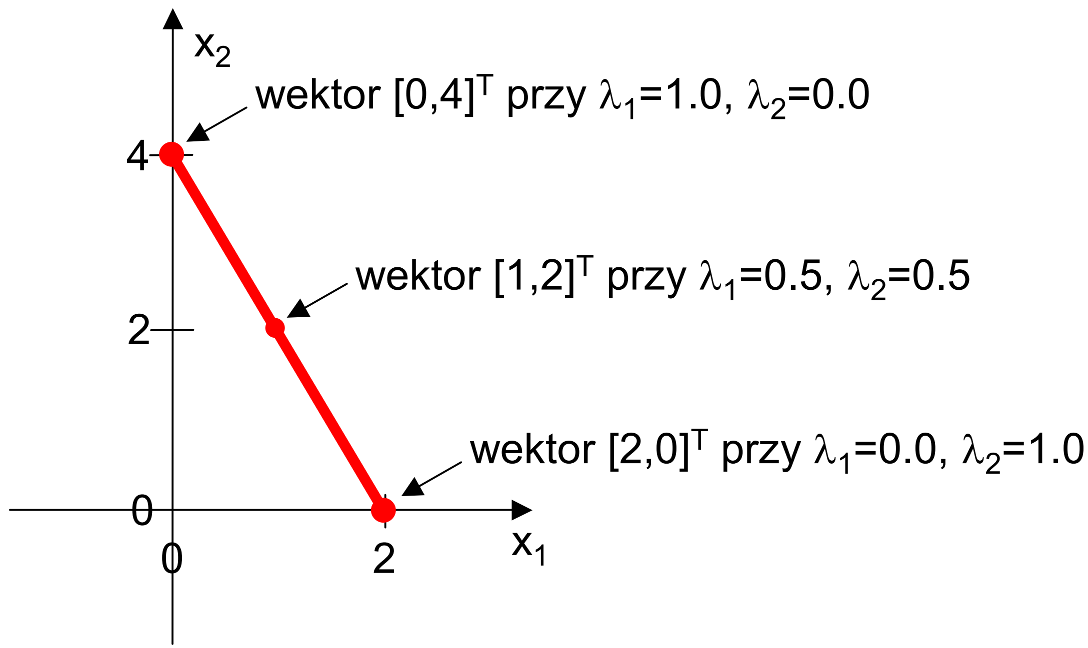
Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zapis parametryczny (kombinacja wypukła):

  $S = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[0,4]^T+\lambda_2[2,0]^T, \lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0, \lambda_1+\lambda_2=1 \}$
- Zapis ten jednoznacznie charakteryzuje odcinek jako odcinek, którego końcami są punkty o współrzędnych (0,4) oraz (2,0)
- Zapis parametryczny pozwala to na łatwe wygenerowanie charakterystycznych punktów odcinka
  - po wstawieniu $\lambda_1=1.0$, $\lambda_2=0.0$ otrzymujemy koniec: $[0,4]^T$ (ponieważ $1.0[0,4]^T+0.0[2,0]^T = [0,4]^T$)
  - po wstawieniu $\lambda_1=0.0$, $\lambda_2=1.0$ otrzymujemy koniec: $[2,0]^T$ (ponieważ $0.0[0,4]^T+1.0[2,0]^T = [2,0]^T$)
  - po wstawieniu $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=0.5$ otrzymujemy środek: $[1,2]^T$ (ponieważ $0.5[0,4]^T+0.5[2,0]^T = [1,2]^T$)

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Odcinek S postaci $\lambda_1[0,4]^T+\lambda_2[2,0]^T$
  z zaznaczonymi punktami charakterystycznymi

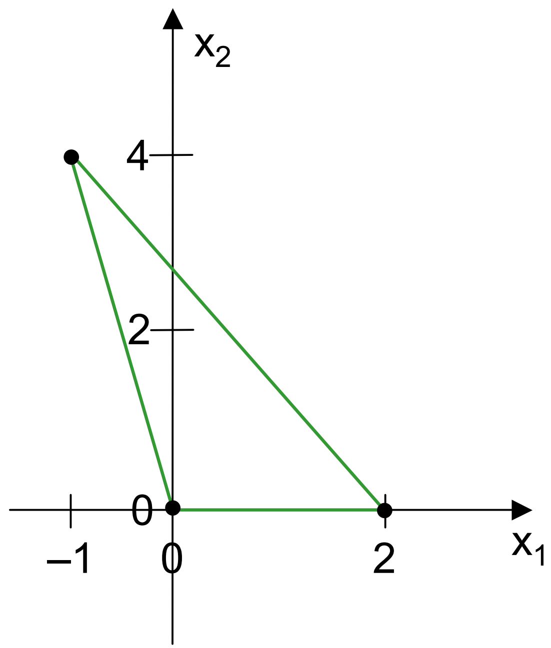


Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Wniosek:
  - zapis parametryczny przydaje się do przedstawiania tylko specyficznych figur, a mianowicie wielościanów wypukłych
    - tak się jednak składa, że w algebrze liniowej zbiory te odgrywają szczególną rolę, ponieważ można je definiować za pomocą równań/nierówności liniowych
  - zapis parametryczny jest metodą bardzo intuicyjną ze względu na fakt, że wiele figur definiuje się poprzez podanie ich punktów charakterystycznych, np.:
    - końców odcinka
    - wierzchołków trójkąta
    - itp.

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Inny przykład: trójkąt o wierzchołkach w punktach $[-1,4]^T$, $[2,0]^T$ oraz $[0,0]^T$

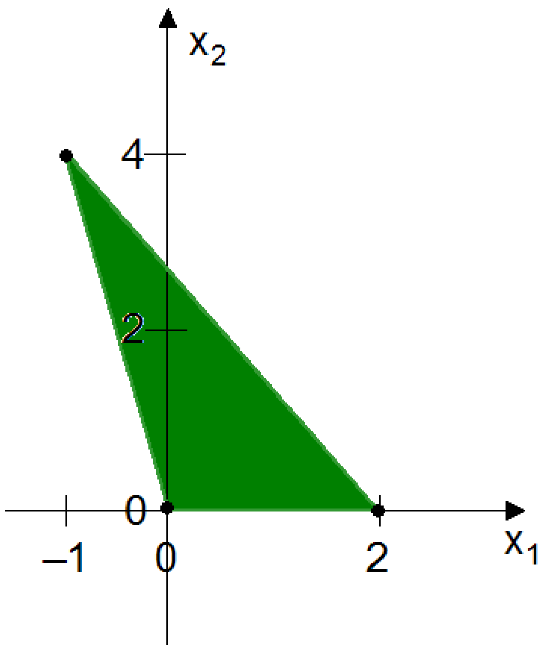


Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zapis parametryczny (tzw. powłoka wypukła):

  $T = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[-1,4]^T+\lambda_2[2,0]^T +\lambda_3[0,0]^T, \lambda_j \geq 0, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \}$

  – w tym przypadku wymagane są oczywiście trzy parametry



Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Powłoka wypukła
  - dane są
    - wektory $\mathbf{x}_i$ (i=1..n)
    - skalary λ_j (i=1..n) spełniające $\forall\lambda_j\geq 0$ oraz $\Sigma\lambda_j=1$
  - wektor $\mathbf{y} = \Sigma\lambda_i\mathbf{x}_i$ jest kombinacją wypukłą wektorów $\mathbf{x}_i$
    - kluczowa właściwość kombinacji wypukłej:
      jeżeli **y** jest kombinacją wypukłą wektorów $\mathbf{x}_i$,
      to **y** <u>leży „pomiędzy”</u> wektorami $\mathbf{x}_i$
    - zbiór wszystkich możliwych kombinacji wypukłych wektorów $\mathbf{x}_i$ nazywamy powłoką wypukłą wektorów $\mathbf{x}_i$
      - kluczowa właściwość powłoki wypukłej:
        jeżeli **Y** stanowi powłokę wypukłą,
        to jest wielościanem wypukłym (czyli: figurą wypukłą)
        - » właściwość ta wydaje się trywialna
          ze względu na powtarzające się nazewnictwo („wypukła”)

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Wybrane punkty charakterystyczne trójkąta postaci $T = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[-1,4]^T+\lambda_2[2,0]^T+\lambda_3[0,0]^T,\ \lambda_j \geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \}$
  - $\lambda_1 = 1.0$, $\lambda_2 = 0.0$, $\lambda_3 = 0.0$ — wierzchołek (wektor $[-1,4]^T$)
  - $\lambda_1 = 0.0$, $\lambda_2 = 1.0$, $\lambda_3 = 0.0$ — wierzchołek (wektor $[2,0]^T$)
  - $\lambda_1 = 0.0$, $\lambda_2 = 0.0$, $\lambda_3 = 1.0$ — wierzchołek (wektor $[0,0]^T$)
  - $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = 1/3$ — środek trójkąta (wektor $[1/3,4/3]^T$)
  - $\lambda_1 = 0.0$, $\lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 0.5$ — środek krawędzi łączącej wierzchołki $[2,0]^T$ oraz $[0,0]^T$ (wektor $[1,0]^T$)
  - $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 0.0$ — środek krawędzi łączącej wierzchołki $[-1,4]^T$ oraz $[2,0]^T$ (wektor $[1/2,2]^T$)
  - itp.

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- W szczególnym (i często występującym przypadku) kombinacja wypukła dotyczy wektorów o rozmiarze 1x1 (postaci [x], np. [x_1], [x_2] i [x_3])
  – czyli w praktyce:
    skalarów (inaczej: wartości liczbowych) x_1, x_2 i x_3
    - ponieważ (w rozważanych wyrażeniach) wektor [x] zachowuje się jak skalar x

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- W szczególnym (i często występującym przypadku) kombinacja wypukła dotyczy wektorów o rozmiarze 1x1 (postaci [x], np. $[x_1]$, $[x_2]$ i $[x_3]$)
  – zapis takiej kombinacji
    $T = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[x_1]+\lambda_2[x_2]+\lambda_3[x_3],\ \lambda_j \geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \}$
    może być uproszczony do
    $T = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3,\ \lambda_j \geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \}$
  – powstaje kombinacja wypukła nie wektorów, lecz wartości skalarnych x_1, x_2 i x_3
    - jej wynik jest wtedy oczywiście także wartością skalarną
    - (niezmiennie) współczynnikami tej kombinacji są (zawsze skalary) λ_1, λ_2, λ_3

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- W szczególnym (i często występującym przypadku) kombinacja wypukła dotyczy wektorów o rozmiarze 1x1 (postaci [x], np. $[x_1]$, $[x_2]$ i $[x_3]$)
  - z innego punktu widzenia, kombinacja taka jest po prostu <u>średnią ważoną</u> wartości x_1, x_2 i x_3
    - współczynniki kombinacji, tj. λ_1, λ_2, λ_3, odgrywają w tej średniej rolę wag
  - czyli:
    każda kombinacja wypukła wartości jest średnią ważoną, ale nie każda średnia ważona jest kombinacją wypukłą!
    - wymagany warunek dotyczy oczywiście wag i ma (w ogólności) postać: $\lambda_j \geq 0$ oraz $\Sigma\lambda_j = 1$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- W szczególnym (i często występującym przypadku) kombinacja wypukła dotyczy wektorów o rozmiarze 1x1 (postaci [x], np. $[x_1]$, $[x_2]$ i $[x_3]$)
  - jeżeli jakaś średnia ważona stanowi kombinację wypukłą, to zachowuje jej kluczową właściwość, czyli:
    - jeżeli $\mathbf{y}$ jest kombinacją wypukłą wektorów $\mathbf{x}_i$, to $\mathbf{y}$ leży „pomiędzy” wektorami $\mathbf{x}_i$

    (a w odniesieniu do wartości)

    - jeżeli y jest kombinacją wypukłą wartości x_i, to y leży „pomiędzy” wartościami x_i
      - dla wartości rzeczywistych powyższe „pomiędzy” jest bardzo konkretnie zdefiniowane: $\min(x_i) \leq y \leq \max(x_i)$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- W szczególnym (i często występującym przypadku) kombinacja wypukła dotyczy wektorów o rozmiarze 1x1 (postaci $[x]$, np. $[x_1]$, $[x_2]$ i $[x_3]$)
  - niech $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$
    - czyli: $\min(x_i) = 1$, $\max(x_i) = 3$
  - wtedy
    - dla $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 0$ mamy
      $y = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 1.50 \in [1,3]$
    - dla $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = 1/3$ mamy
      $y = 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 2 + 1/3 \cdot 3 = 2.00 \in [1,3]$
    - dla $\lambda_1 = 1/6$, $\lambda_2 = 2/6$, $\lambda_3 = 3/6$ mamy
      $y = 1/6 \cdot 1 + 2/6 \cdot 2 + 3/6 \cdot 3 \approx 2.33 \in [1,3]$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- W szczególnym (i często występującym przypadku) kombinacja wypukła dotyczy wektorów o rozmiarze 1x1 (postaci [x], np. $[x_1]$, $[x_2]$ i $[x_3]$)
  – niech $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$
    - czyli: $\min(x_i) = 1$, $\max(x_i) = 3$
  – (ogólnie)
    - dla wszystkich λ_1, λ_2, λ_3 spełniających $\lambda_j \geq 0$ oraz $\Sigma\lambda_j = 1$ otrzymamy:
      $y = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 3 \in [1,3]$

…