Materiały wykładowe
(fragmenty)

Robert Susmaga

Instytut Informatyki

ul. Piotrowo 2

Poznań

kontakt mail'owy

Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL

kontakt osobisty

Centrum Wykładowe, „blok informatyki", pok. 7

Techniki optymalizacji

Cz. 1

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

Autor

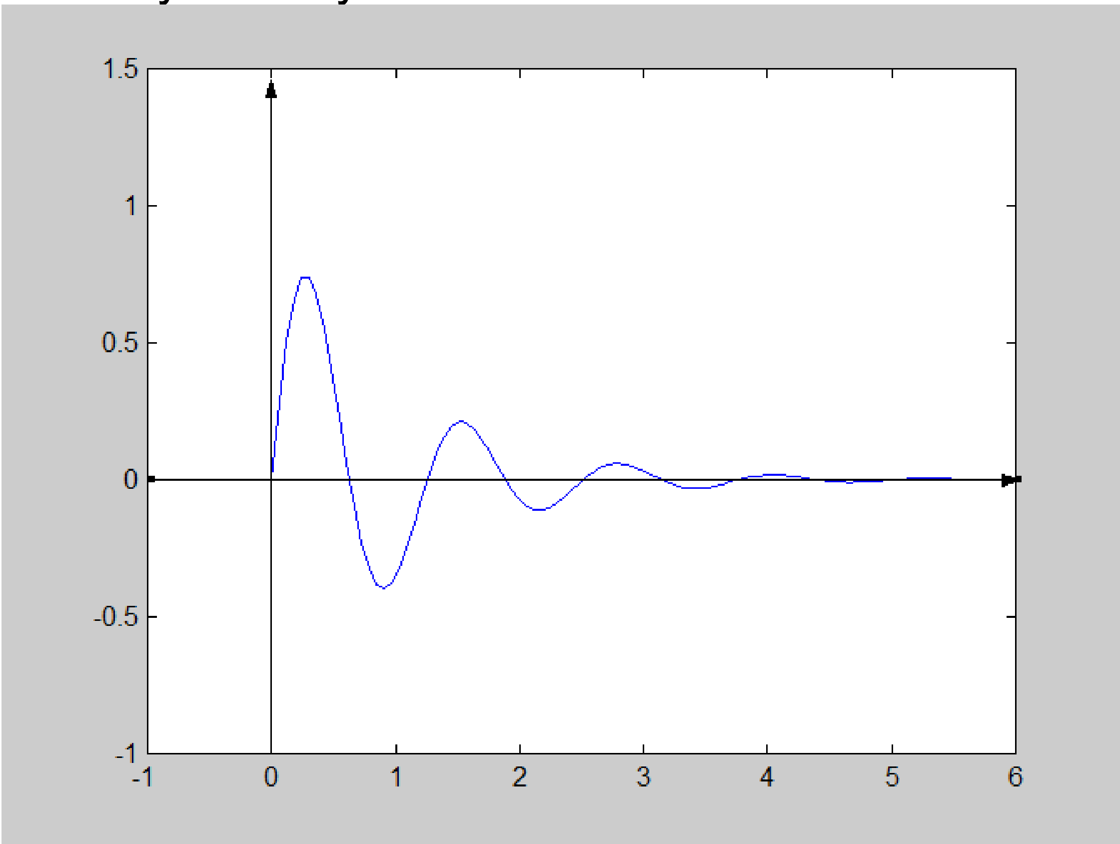
…

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Problem wizualizacji funkcji
  - Funkcje/argumenty rzeczywiste
    (zbiór liczb rzeczywistych jest obrazowany jako oś liczbowa)
    - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub argument skalarny): dwa wymiary
    - argument wektorowy o rozmiarze 2×1: trzy wymiary
    - argument wektorowy o rozmiarze 3×1: cztery wymiary
    - …

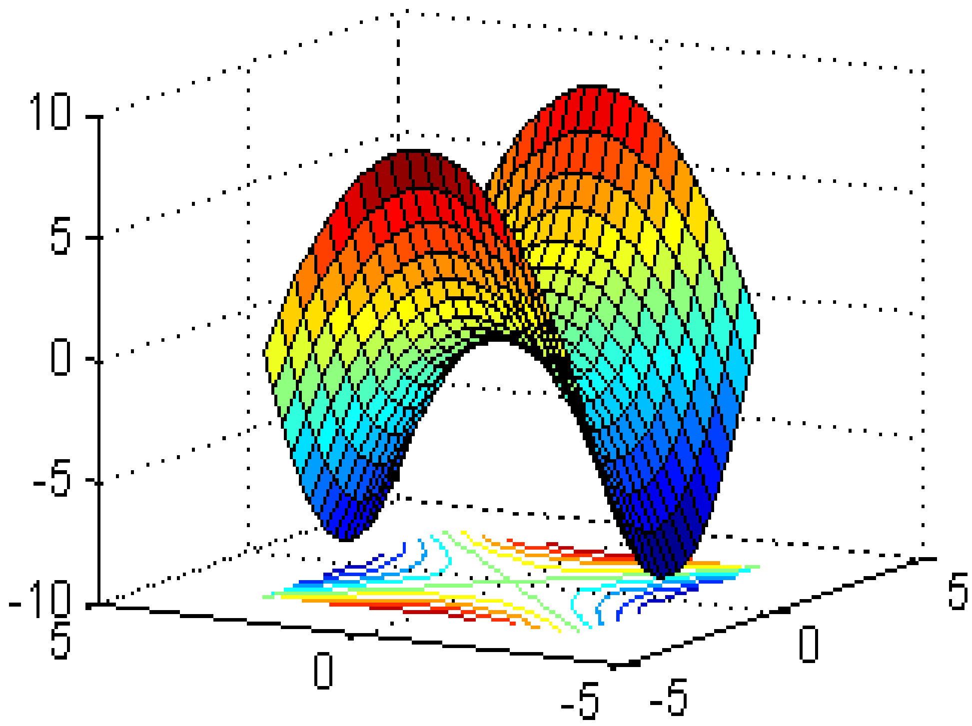
Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji rzeczywistych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub argument skalarny): dwa wymiary
  - wykres dwuwymiarowy



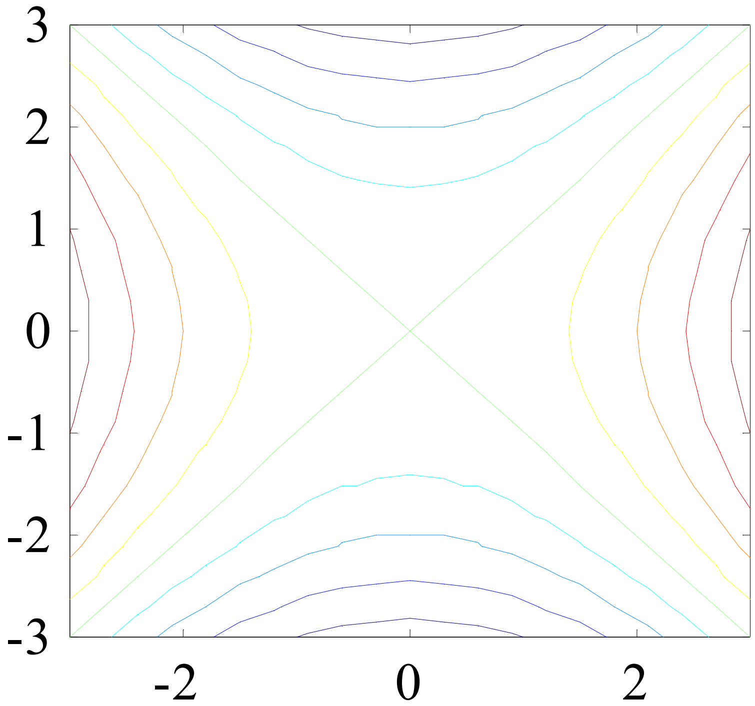
Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji rzeczywistych
  - argument wektorowy o rozmiarze 2×1: trzy wymiary
  - wykres trójwymiarowy



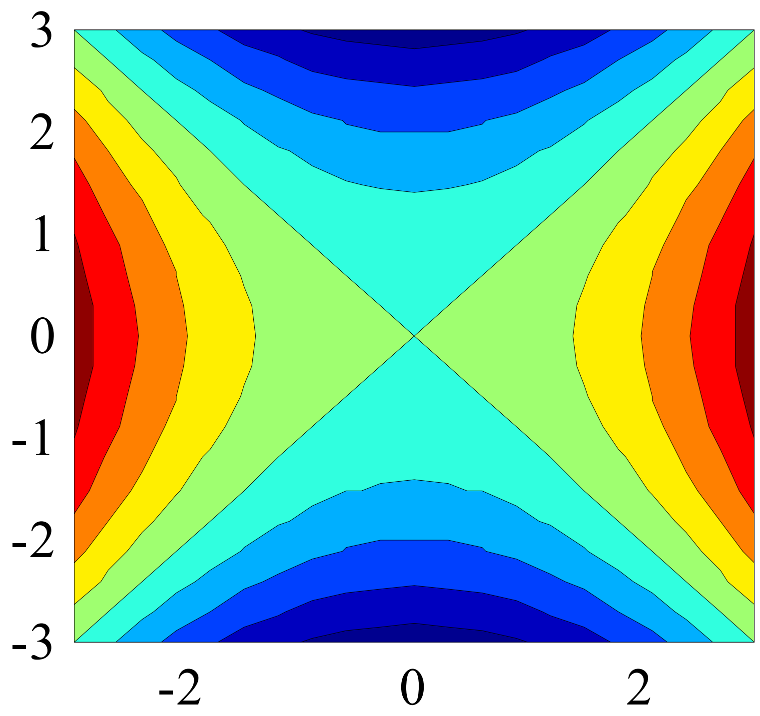
Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji rzeczywistych
  - argument wektorowy o rozmiarze 2×1: trzy wymiary
  - wykres konturowy (bez tła)



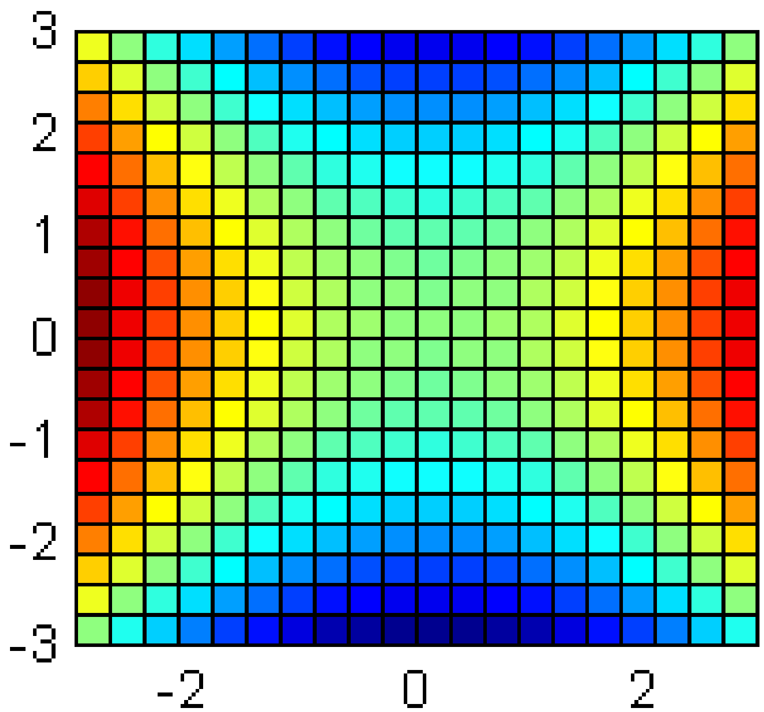
Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji rzeczywistych
  - argument wektorowy o rozmiarze 2×1: trzy wymiary
  - wykres konturowy (z tłem)



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji rzeczywistych
  - argument wektorowy o rozmiarze 2×1: trzy wymiary
  - obraz dwuwymiarowy (ostatnio popularna nazwa ang.: „heat map”)



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji rzeczywistych
  - argument wektorowy o rozmiarze 3×1: cztery wymiary
  - …

???

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Problem wizualizacji funkcji
  - Funkcje/argumenty zespolone
    (zbiór liczb zespolonych jest obrazowany jako płaszczyzna liczbowa)
    - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub argument skalarny): cztery wymiary
    - argument wektorowy o rozmiarze 2×1 (czyli skalarny): sześć wymiarów
    - argument wektorowy o rozmiarze 3×1 (czyli skalarny): osiem wymiarów
    - …

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

  - np.

Część rzeczywista wartości zespolonej	Część urojona wartości zespolonej

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1$\times$1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

  - albo np.

Moduł wartości zespolonej	Faza wartości zespolonej

  - …

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

  - liczba zespolona x
    - czyli $x = [x_{re}, x_{im}]$
    - dwa wymiary – wizualizacja na płaszczyźnie

  - wykorzystujemy definicje
    - moduł: $m = abs(x) = sqrt((x_{re})^2 + (x_{im})^2)$
    - faza: $f = angle(x) = arctan(x_{im} / x_{re})$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

  - funkcja zespolona dla argumentu zespolonego: $y = f(x)$
    - zarówno x jak i y są liczbami zespolonymi
      - czyli $x = [\ x_{re},\ x_{im}\ ]$ oraz $y = [\ y_{re},\ y_{im}\ ]$
      - może być traktowana jak dwie, dwuargumentowe funkcje rzeczywiste:
        - » $y_{re} = f_1(x_{re},x_{im})$, $y_{im} = f_2(x_{re},x_{im})$
      - jeżeli wynik chcemy przedstawiać w postaci pary moduł-faza, to po zastosowaniu f(x) trzeba dodatkowo obliczyć moduł i fazę:
        - » $y_{re} = f_1(x_{re},x_{im})$, $y_{im} = f_2(x_{re},x_{im})$
        - » $m = abs(y_{re},y_{im})$, $f = angle(y_{re},y_{im})$

        łącznie:
        - » $m = abs(f_1(x_{re},x_{im}), f_2(x_{re},x_{im}))$, $f = angle(f_1(x_{re},x_{im}), f_2(x_{re},x_{im}))$

  - w obu przypadkach wymagane są cztery wymiary (a więc wizualizacja wymaga dwóch płaszczyzn)

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

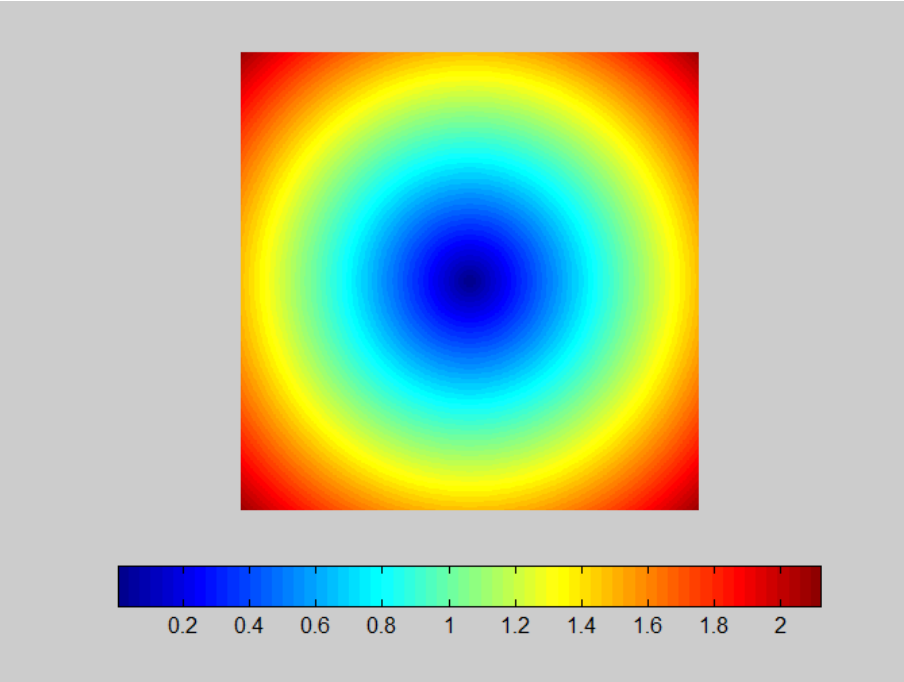
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

$$f(x) = x$$

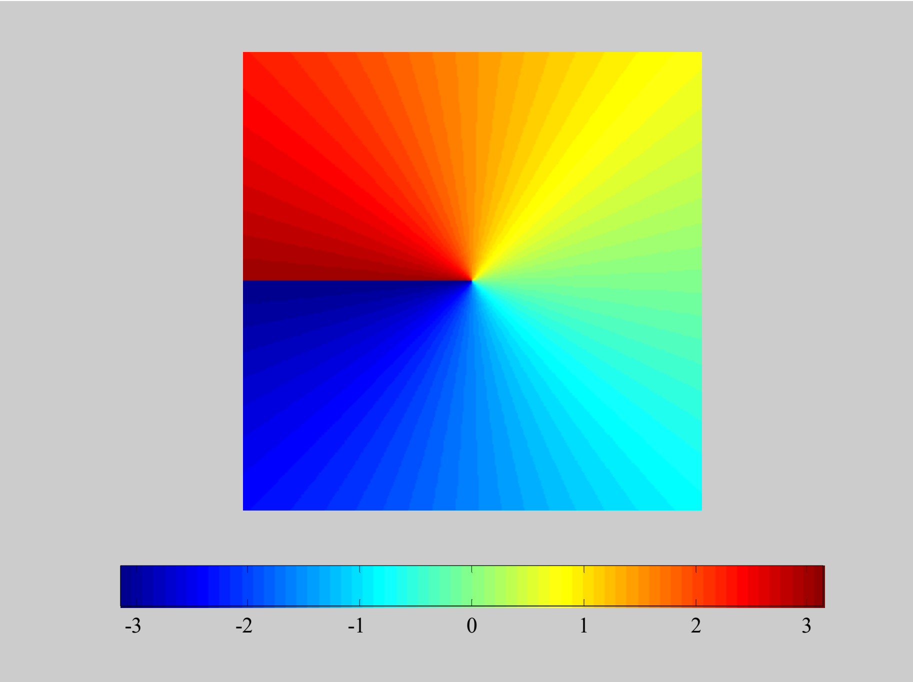
Moduł? Faza?

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych



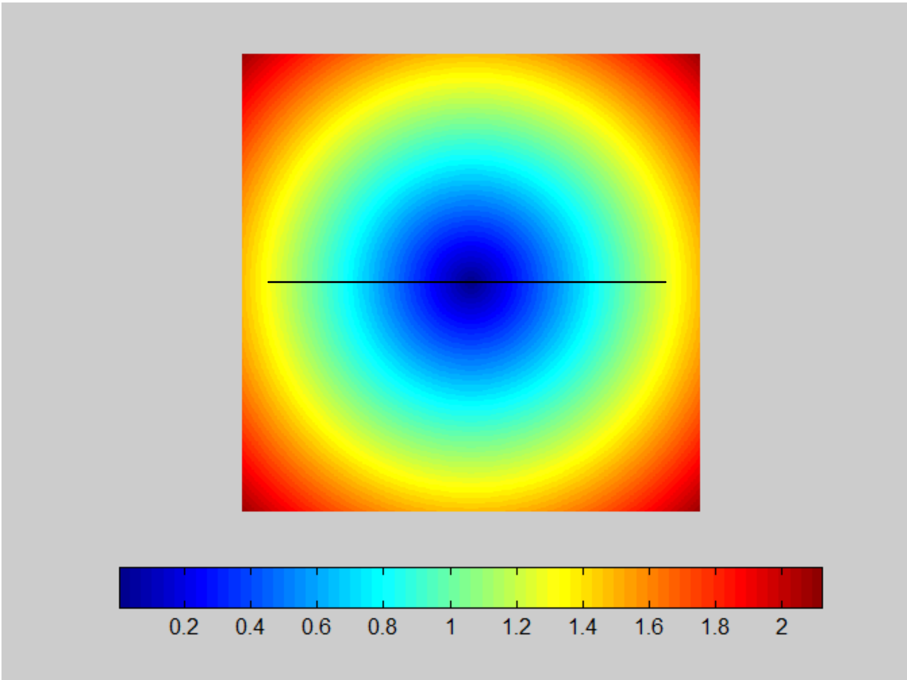
Moduł f(x) = x

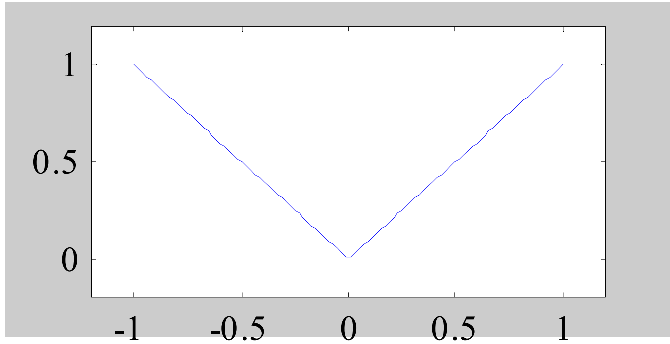


Faza f(x) = x

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

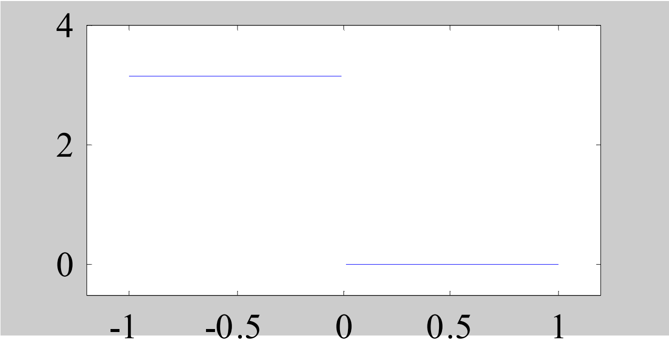
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

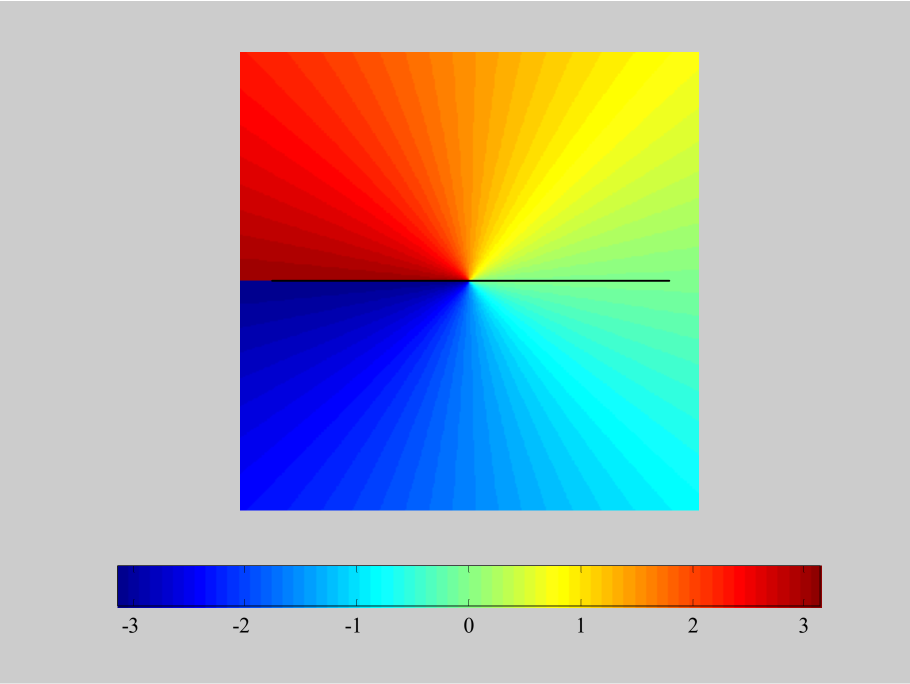




Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych





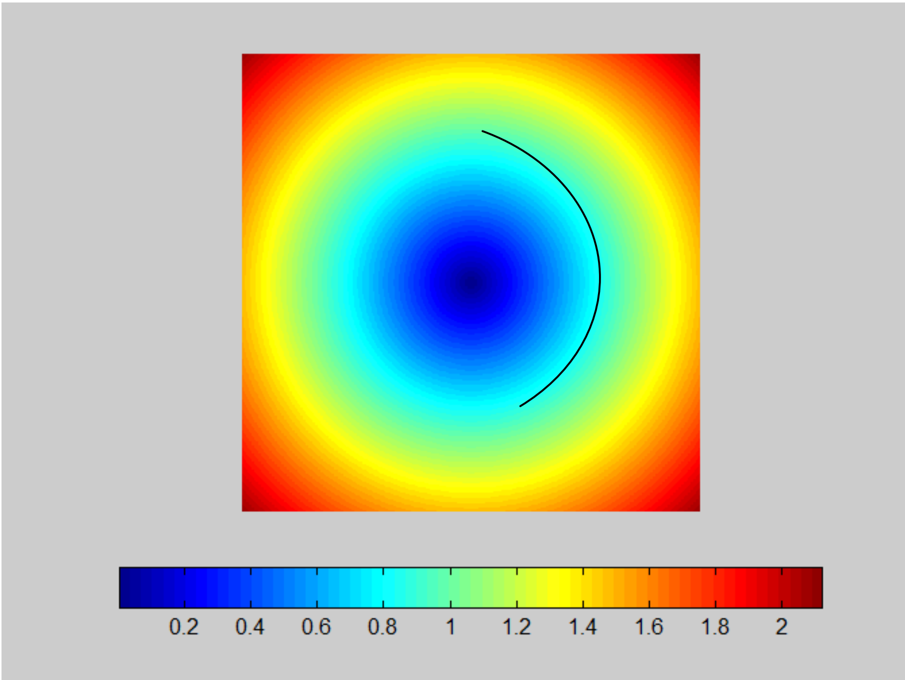
Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

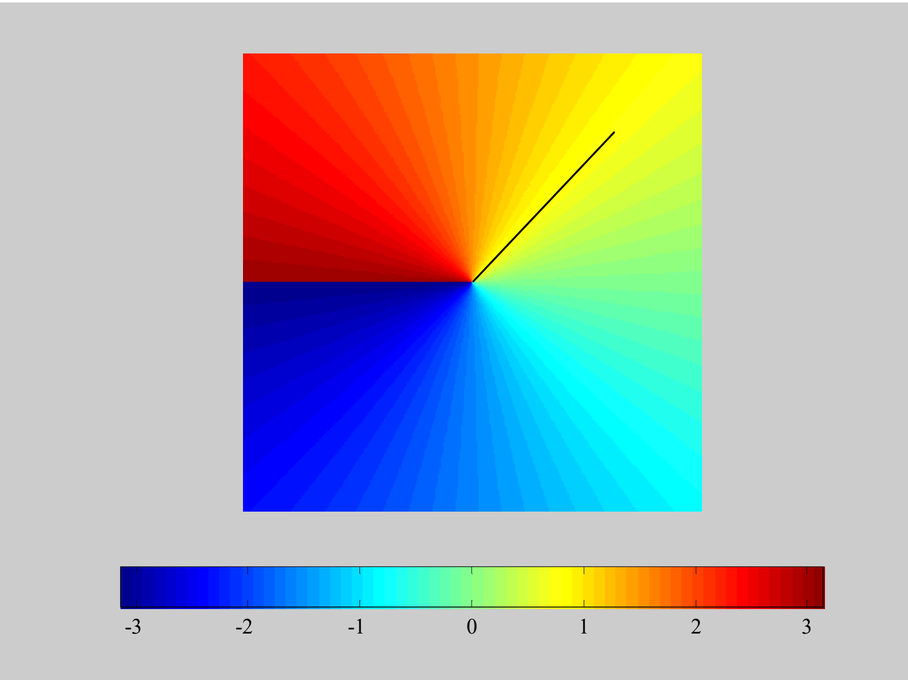
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

Jaki jest kształt izokwant tych funkcji?

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych





Moduł f(x) = x

Faza f(x) = x

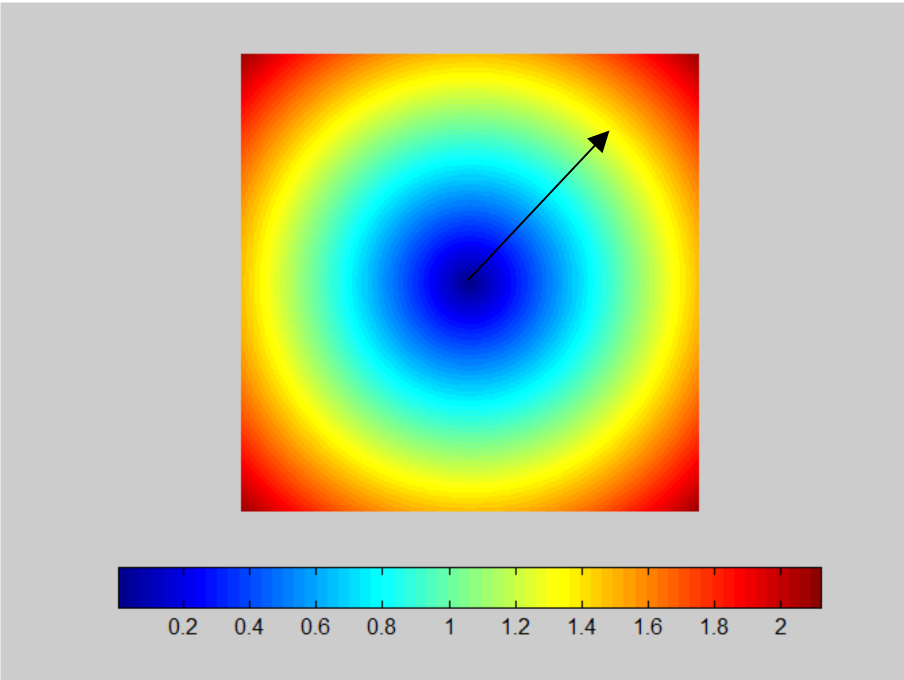
Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

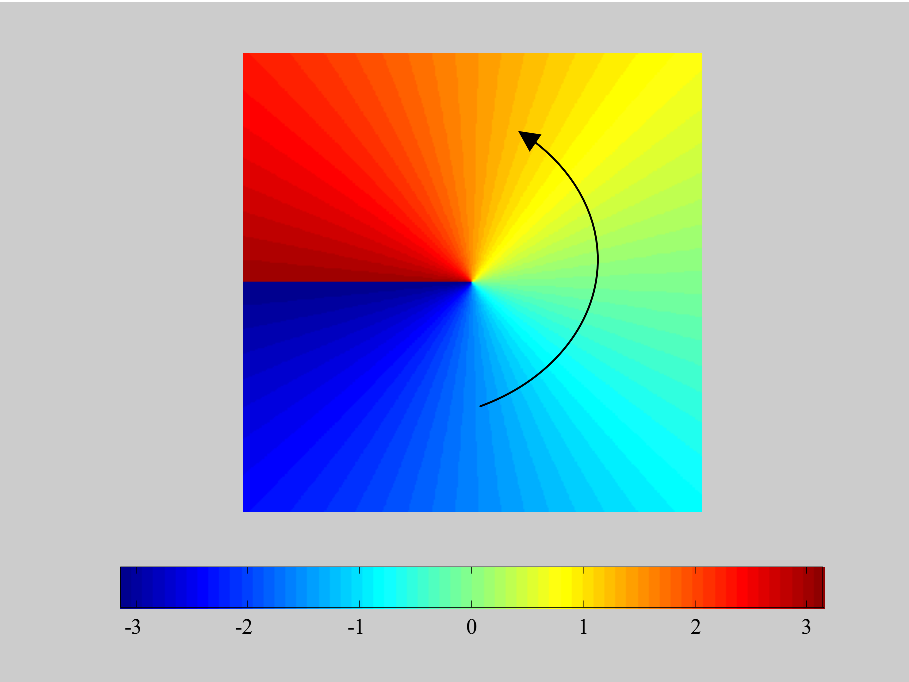
Jaki jest kierunek wzrostu tych funkcji?

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

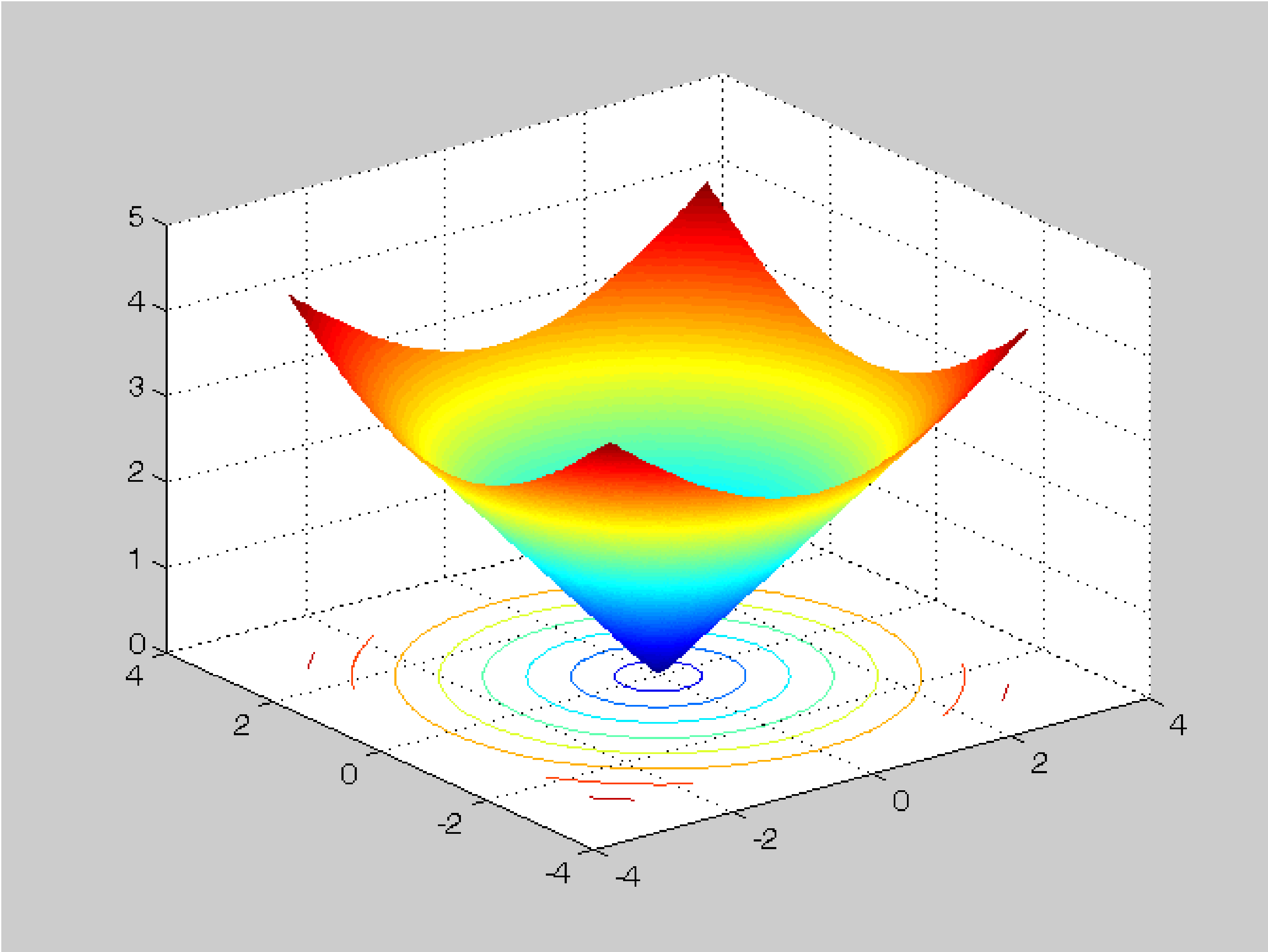


Moduł f(x) = x

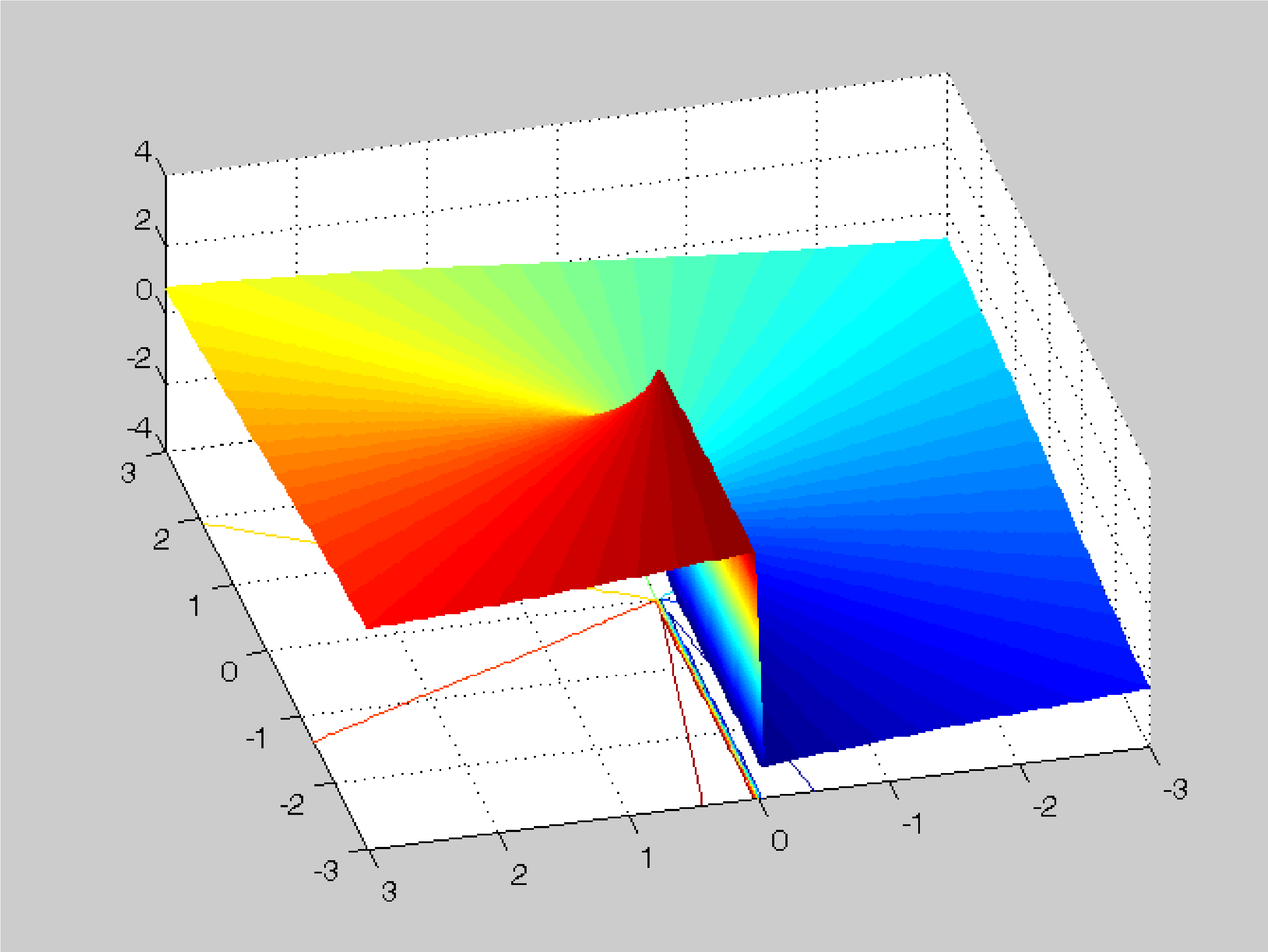


Faza f(x) = x

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

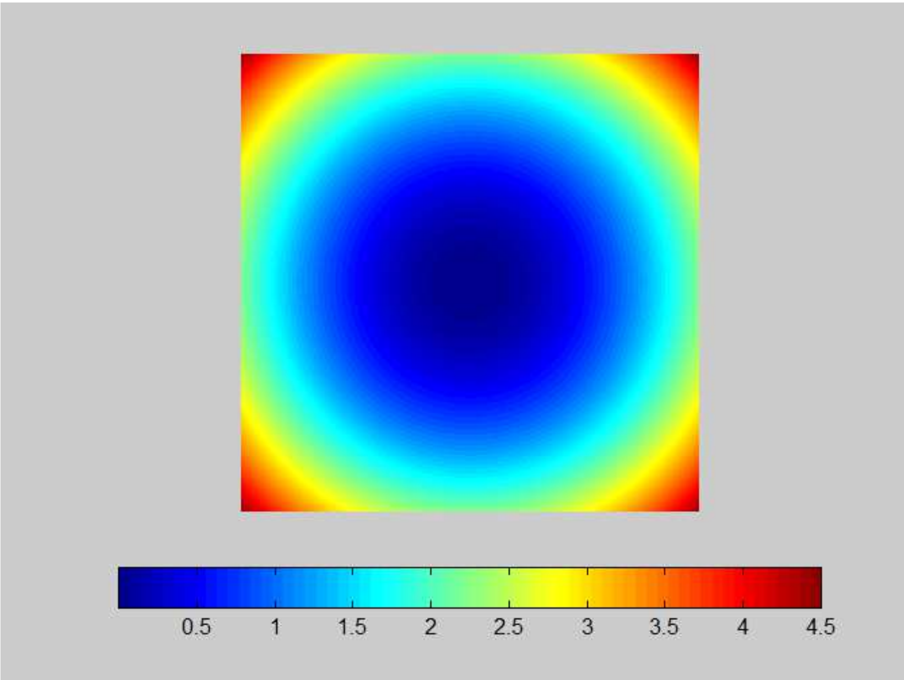
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

$$f(x) = x^2$$

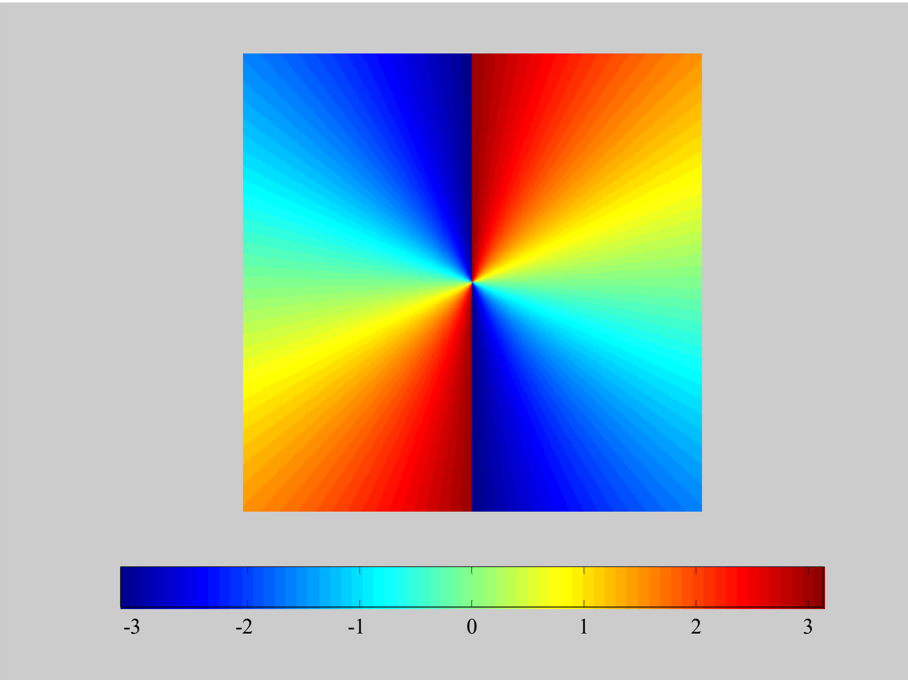
Moduł? Faza?

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych



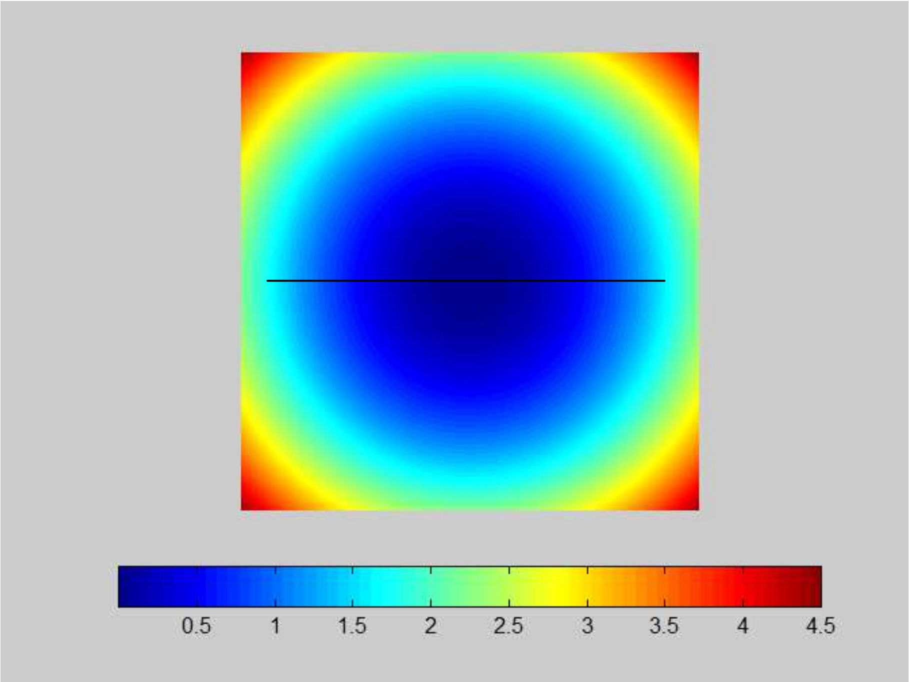
Moduł $f(x) = x^2$

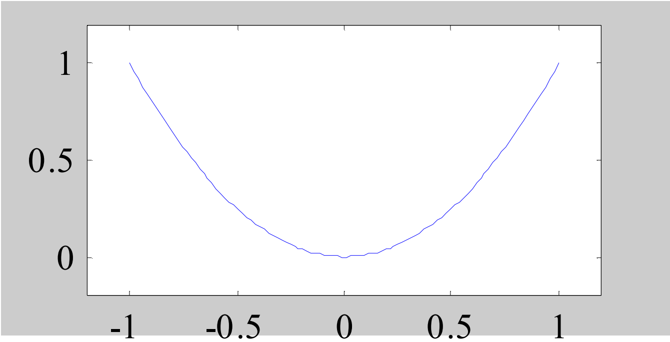


Faza $f(x) = x^2$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

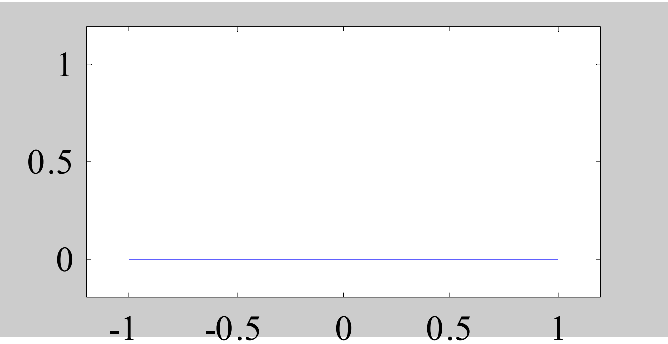
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

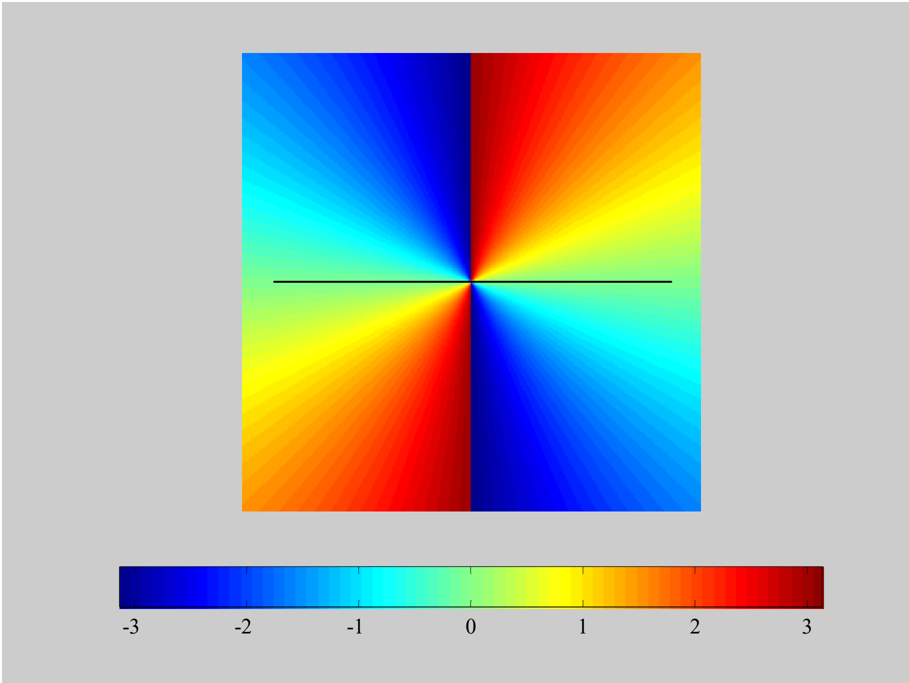




Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

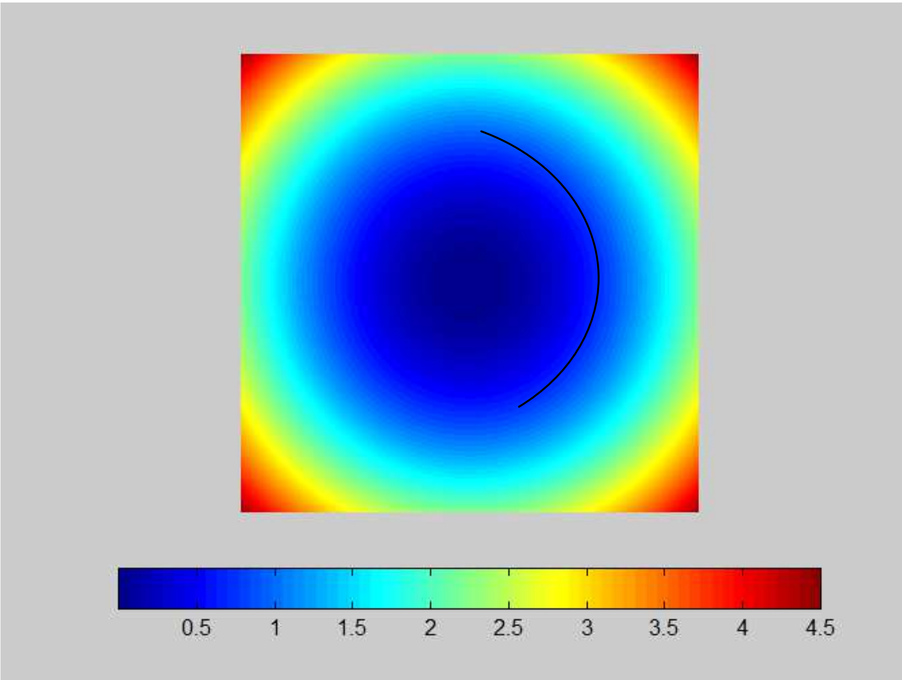
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych



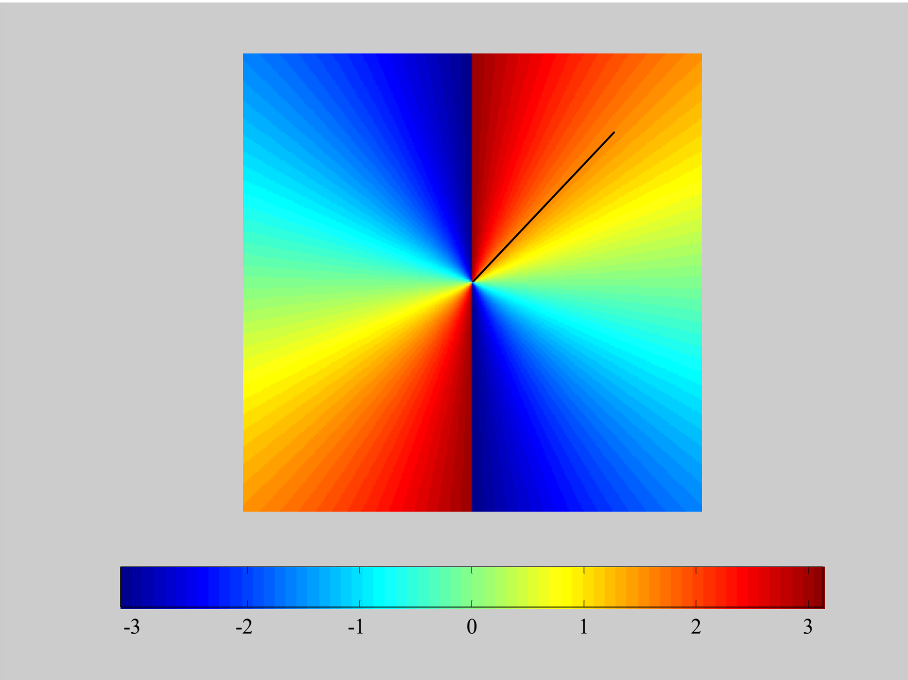


Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych



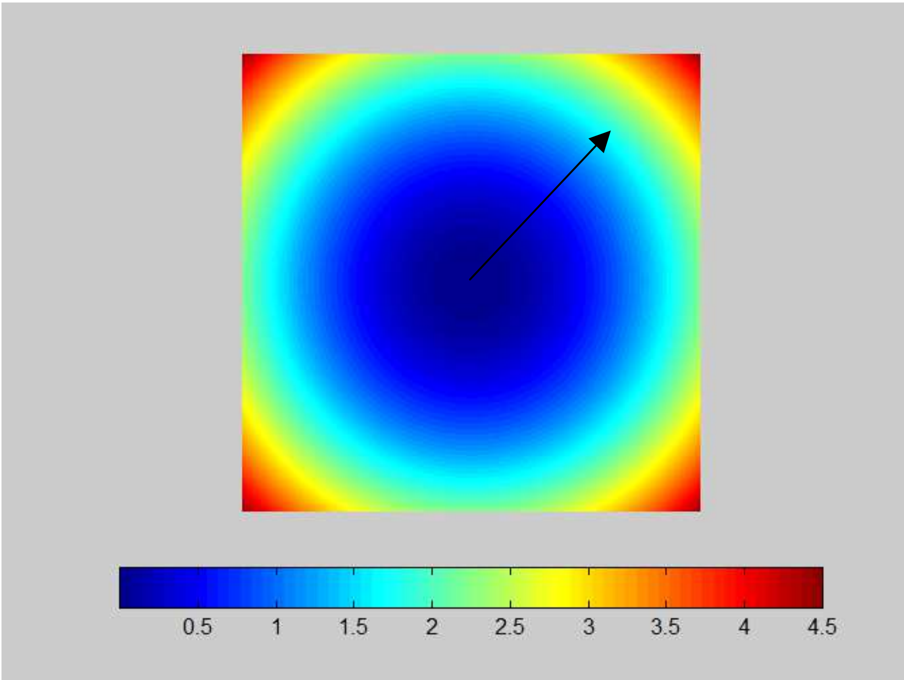
Moduł $f(x) = x^2$



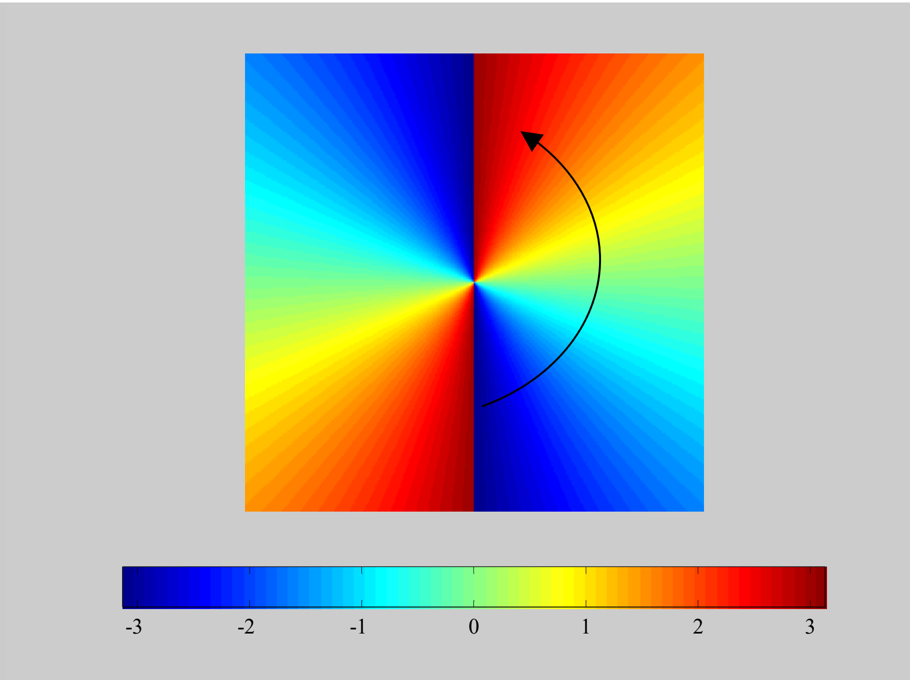
Faza $f(x) = x^2$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

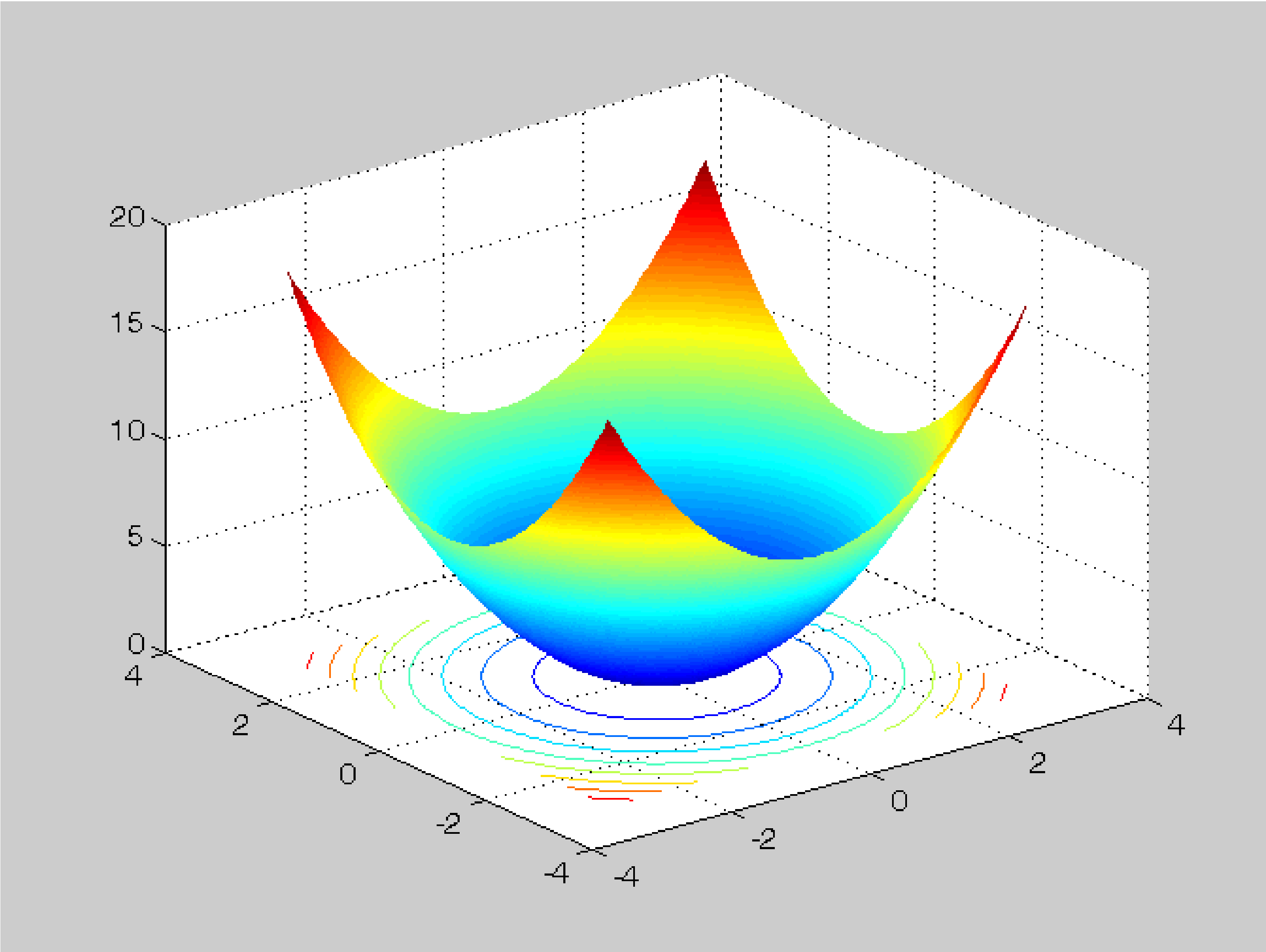


Moduł $f(x) = x^2$

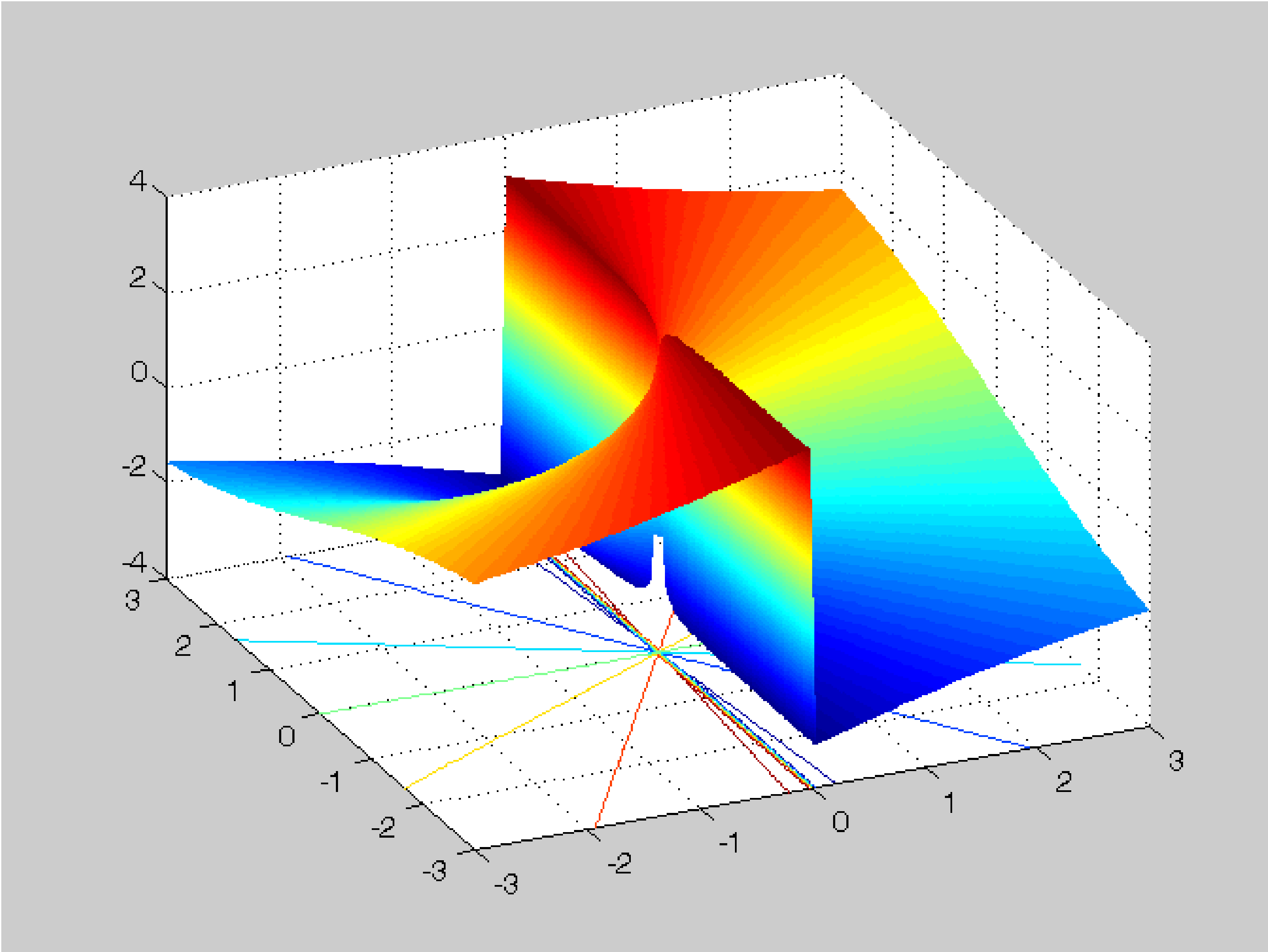


Faza $f(x) = x^2$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

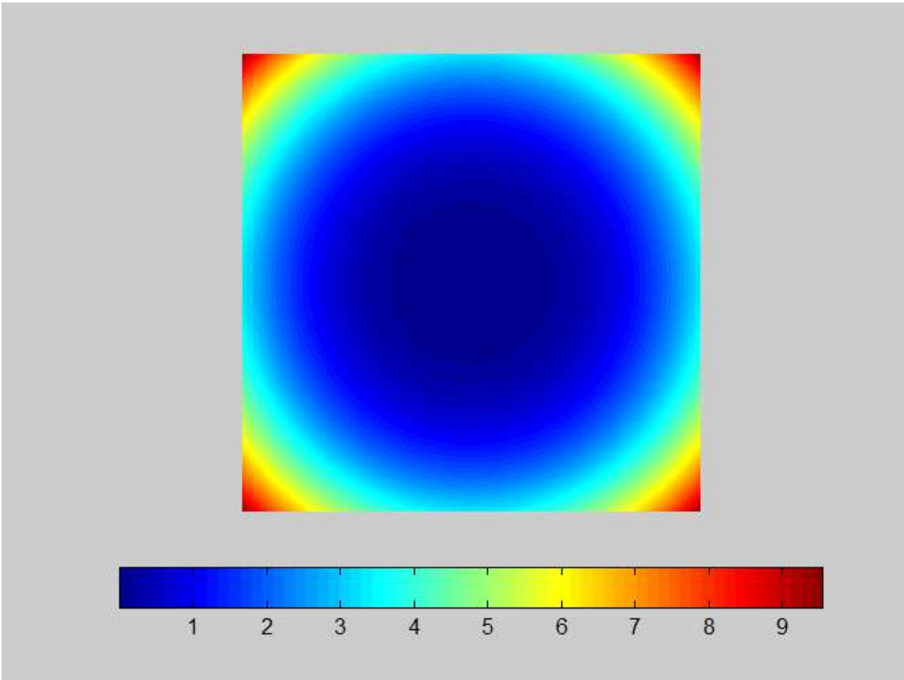
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

$$f(x) = x^3$$

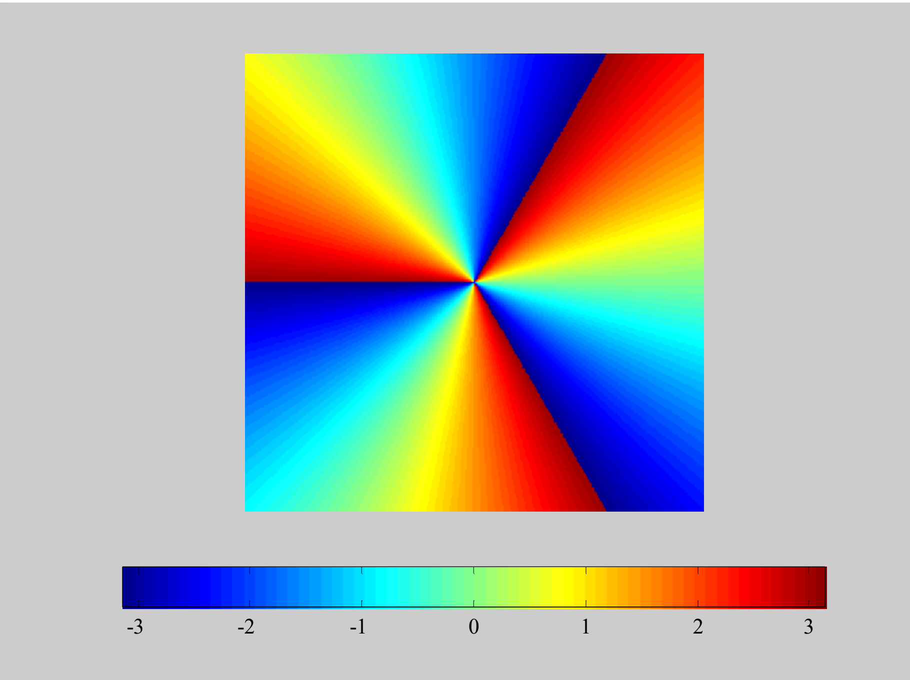
Moduł? Faza?

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych



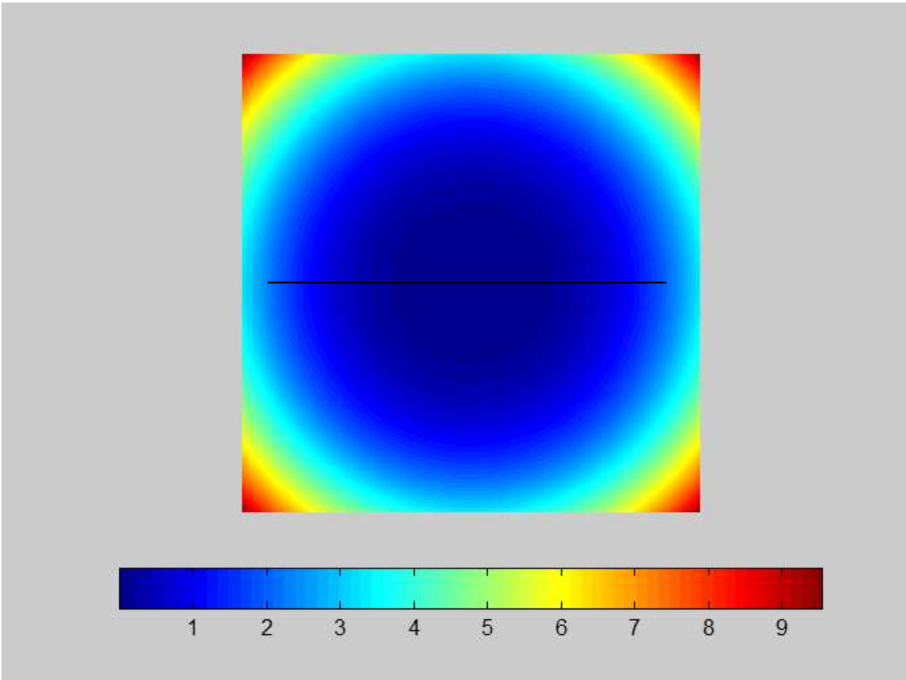
Moduł $f(x) = x^3$



Faza $f(x) = x^3$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

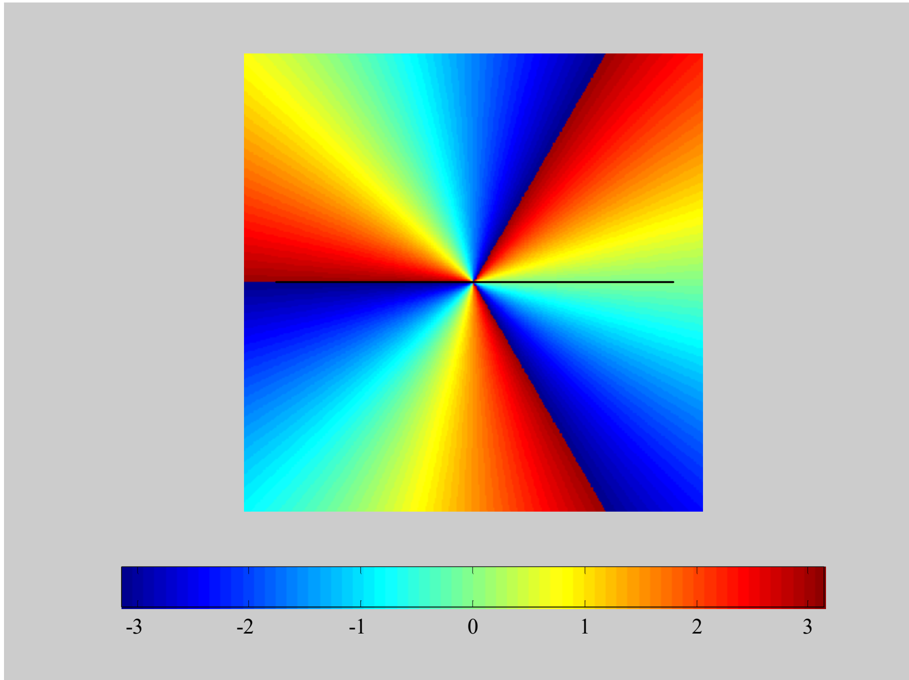


?

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

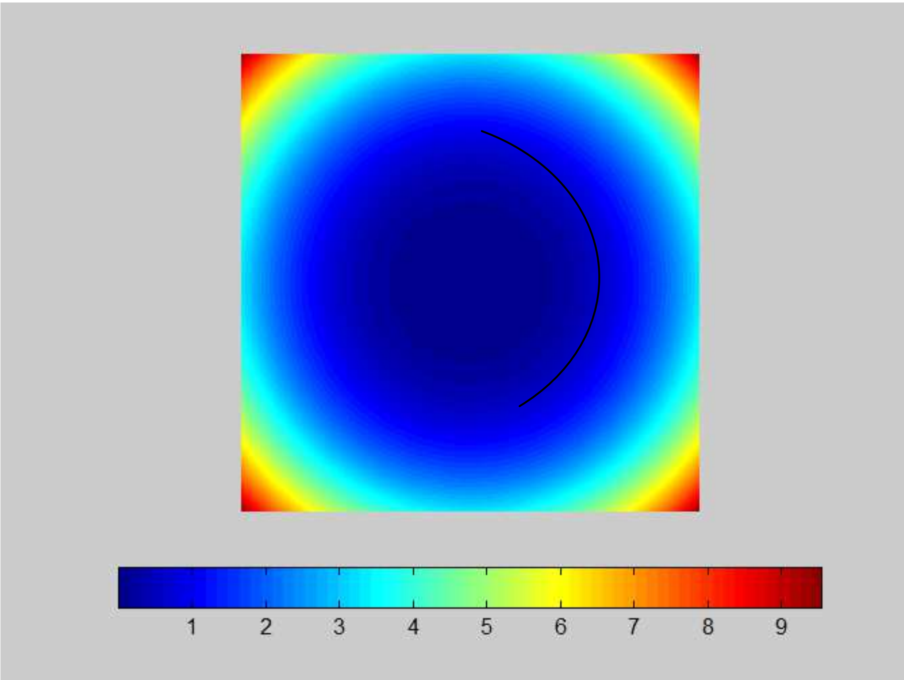
- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

?

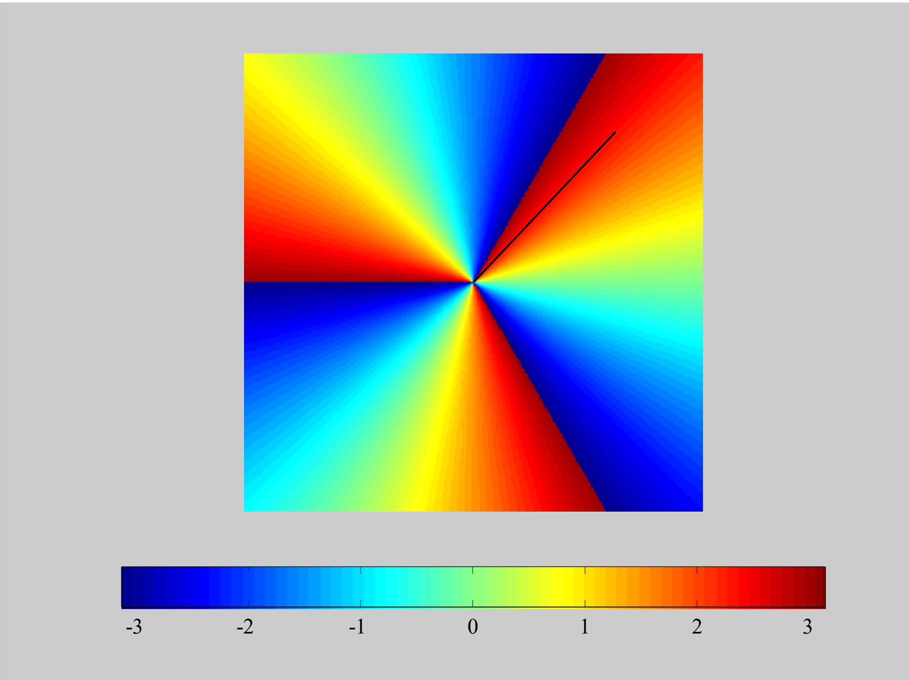


Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych



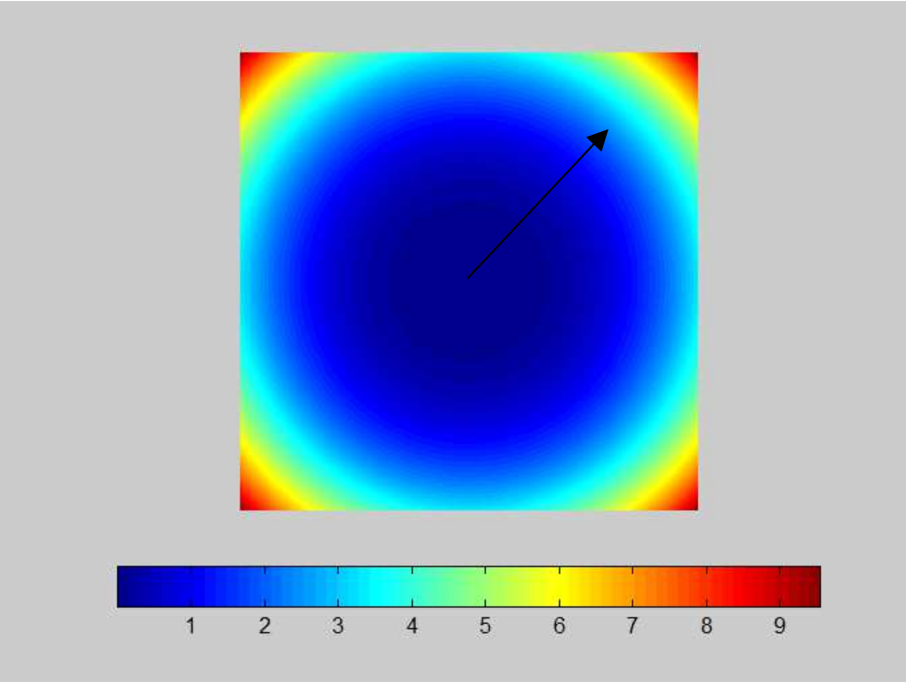
Moduł $f(x) = x^3$



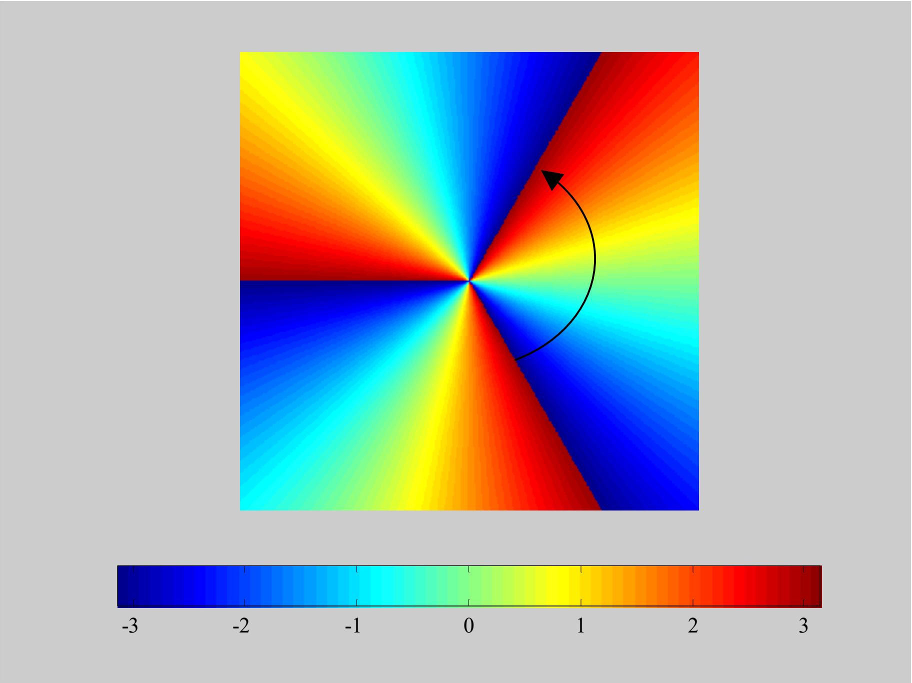
Faza $f(x) = x^3$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

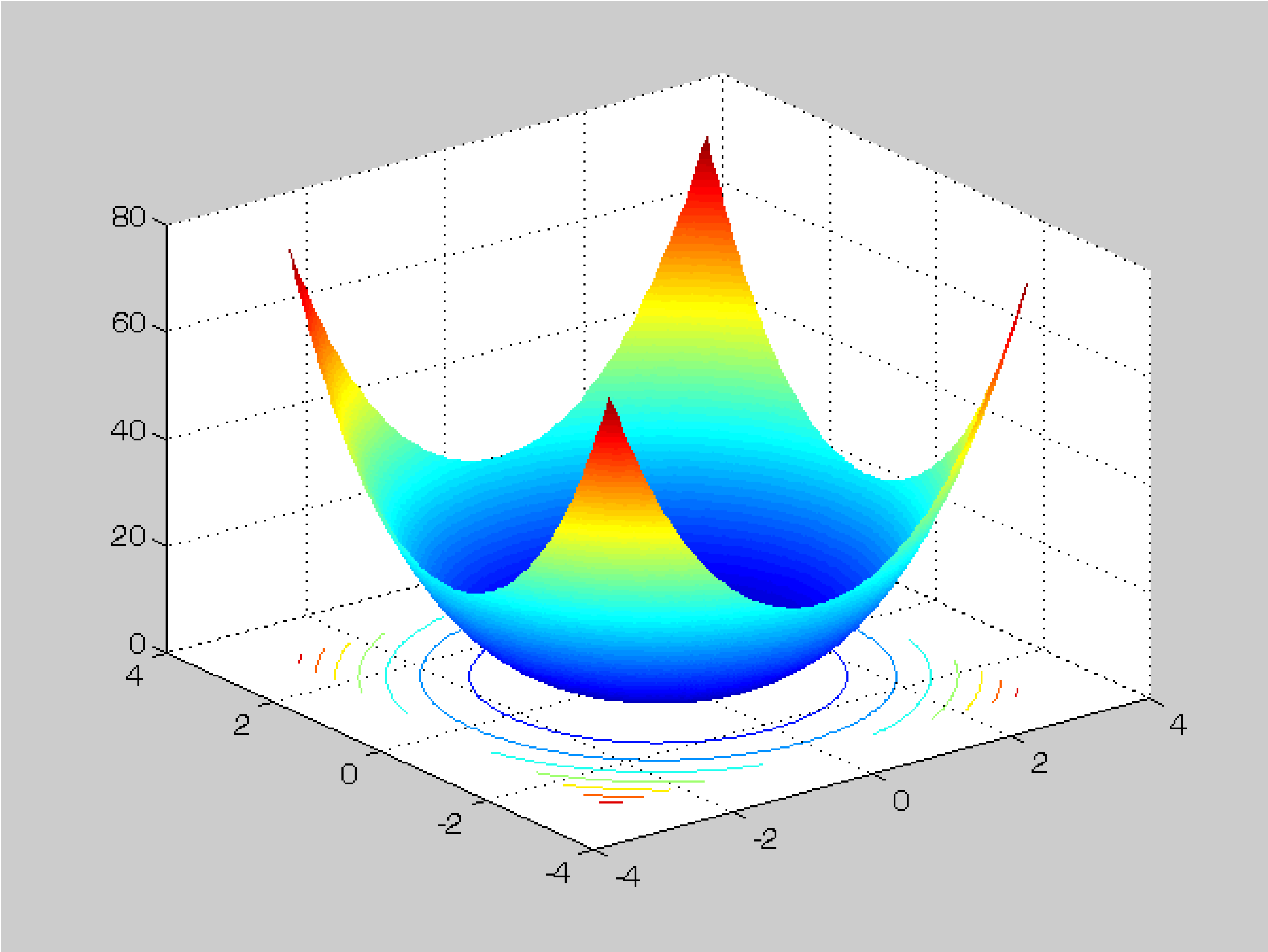


Moduł $f(x) = x^3$

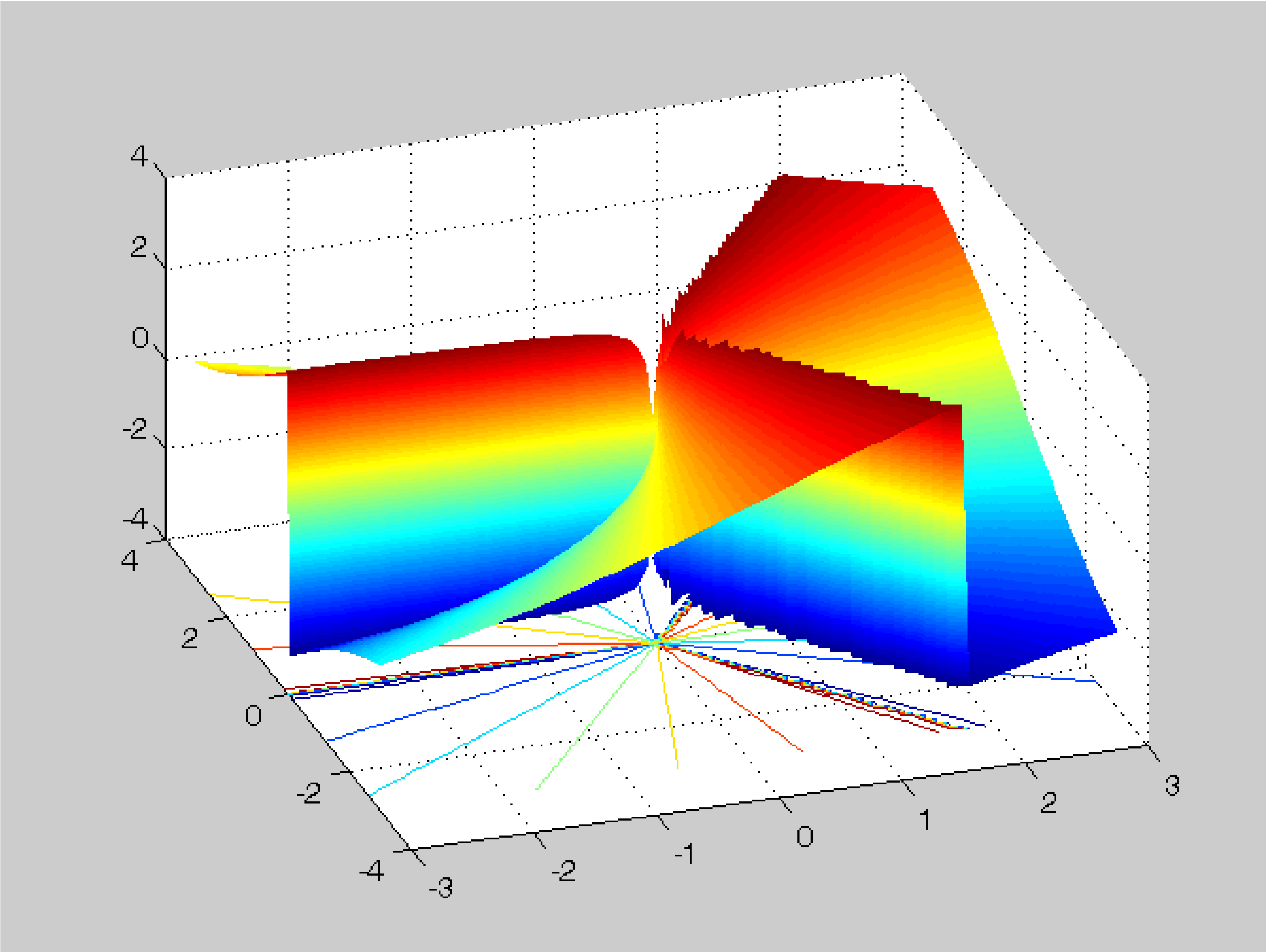


Faza $f(x) = x^3$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

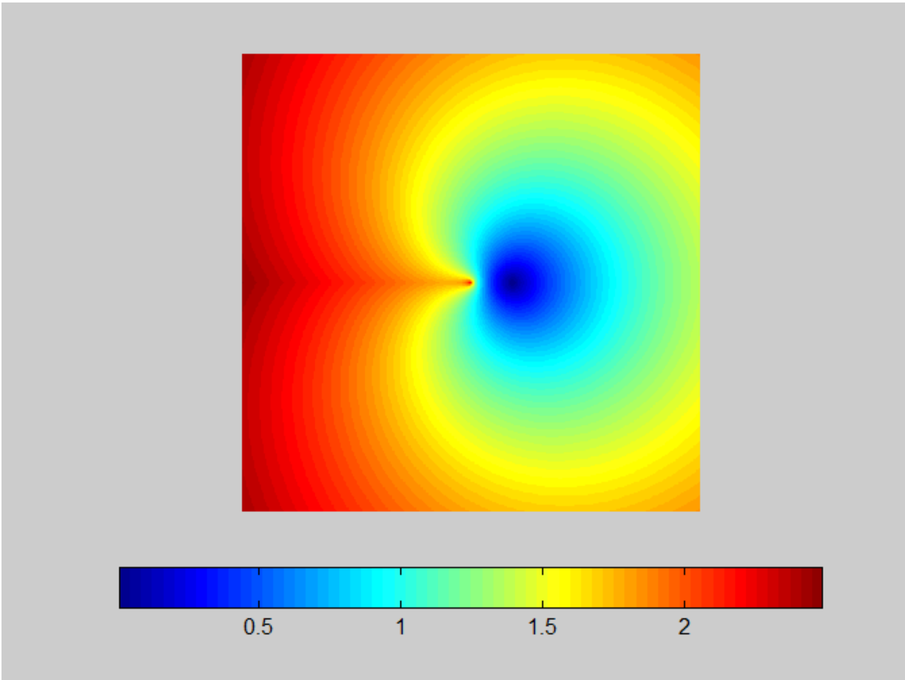
$$f(x) = x^{1/2} + \log(x)/2.5$$

(log: podstawa e, tylko wartości główne)

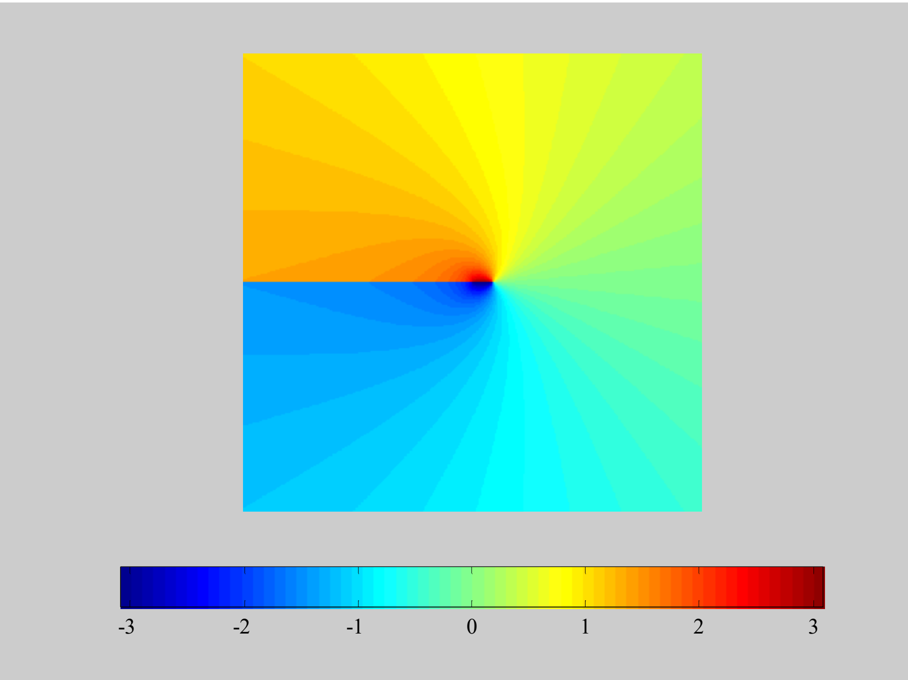
Moduł? Faza?

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

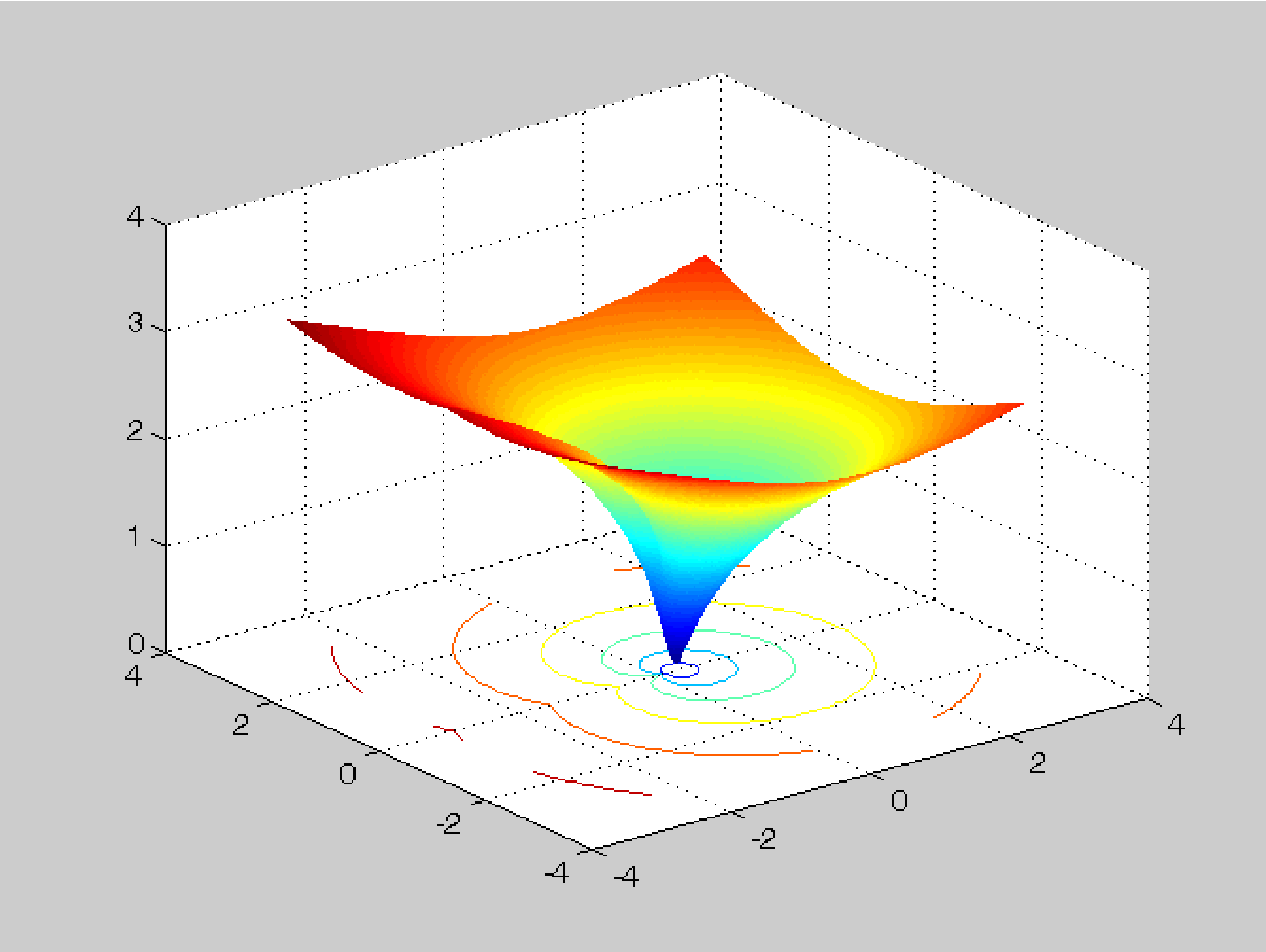


Moduł $f(x) = x^{1/2} + \log(x)/2.5$

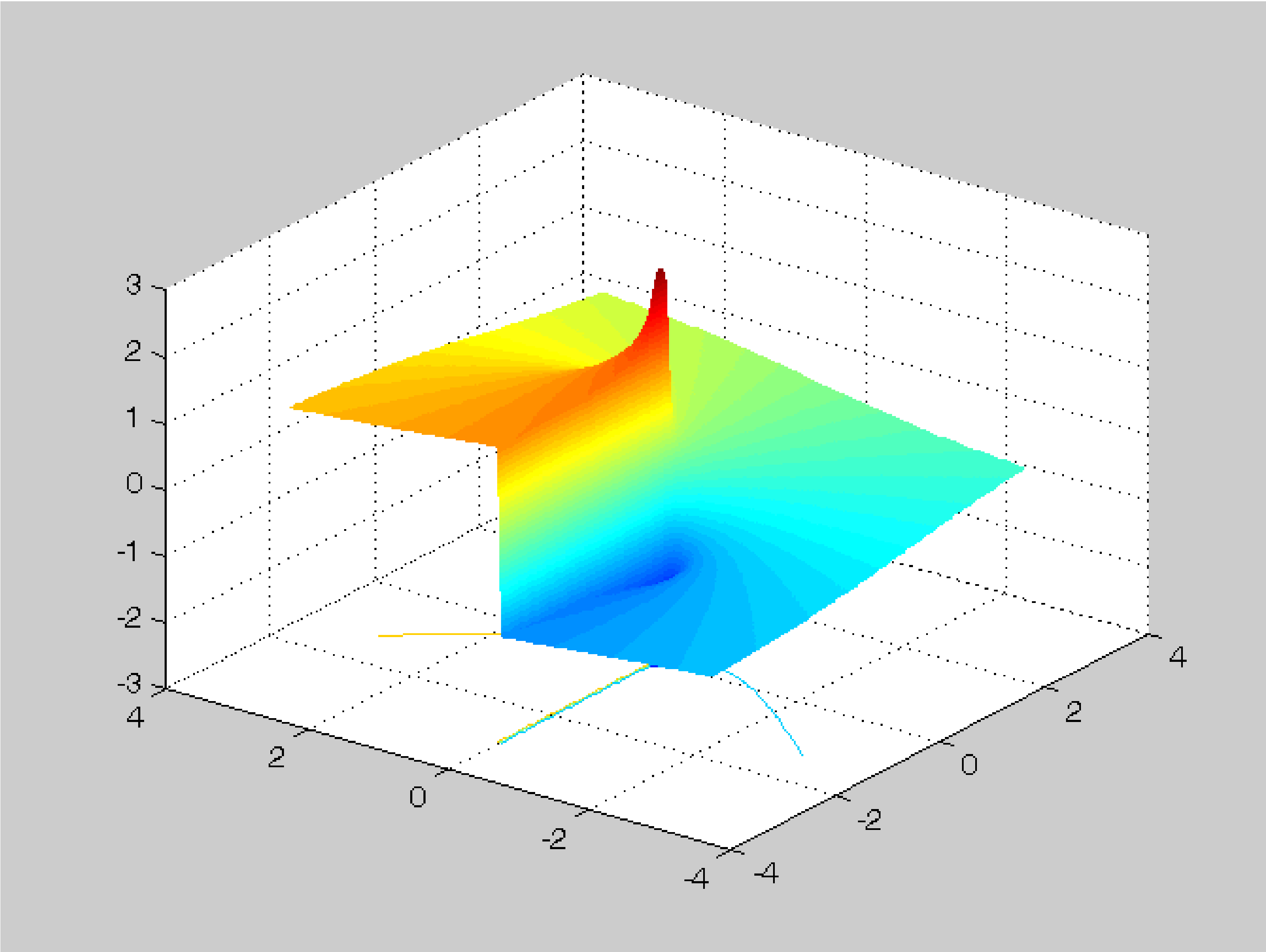


Faza $f(x) = x^{1/2} + \log(x)/2.5$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

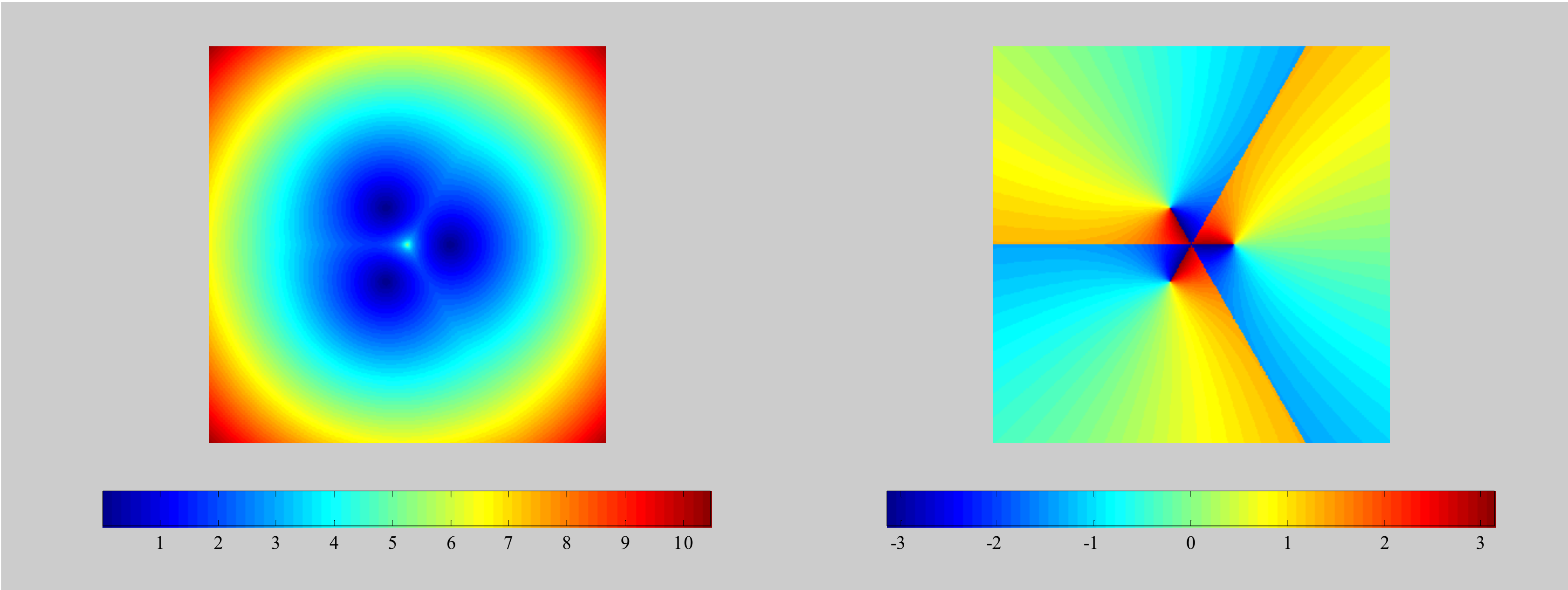
$$f(x) = x^{3/2} + \log(x^3)/2.5$$

(log: podstawa e, tylko wartości główne; sqrt: tylko wartości główne)

Moduł? Faza?

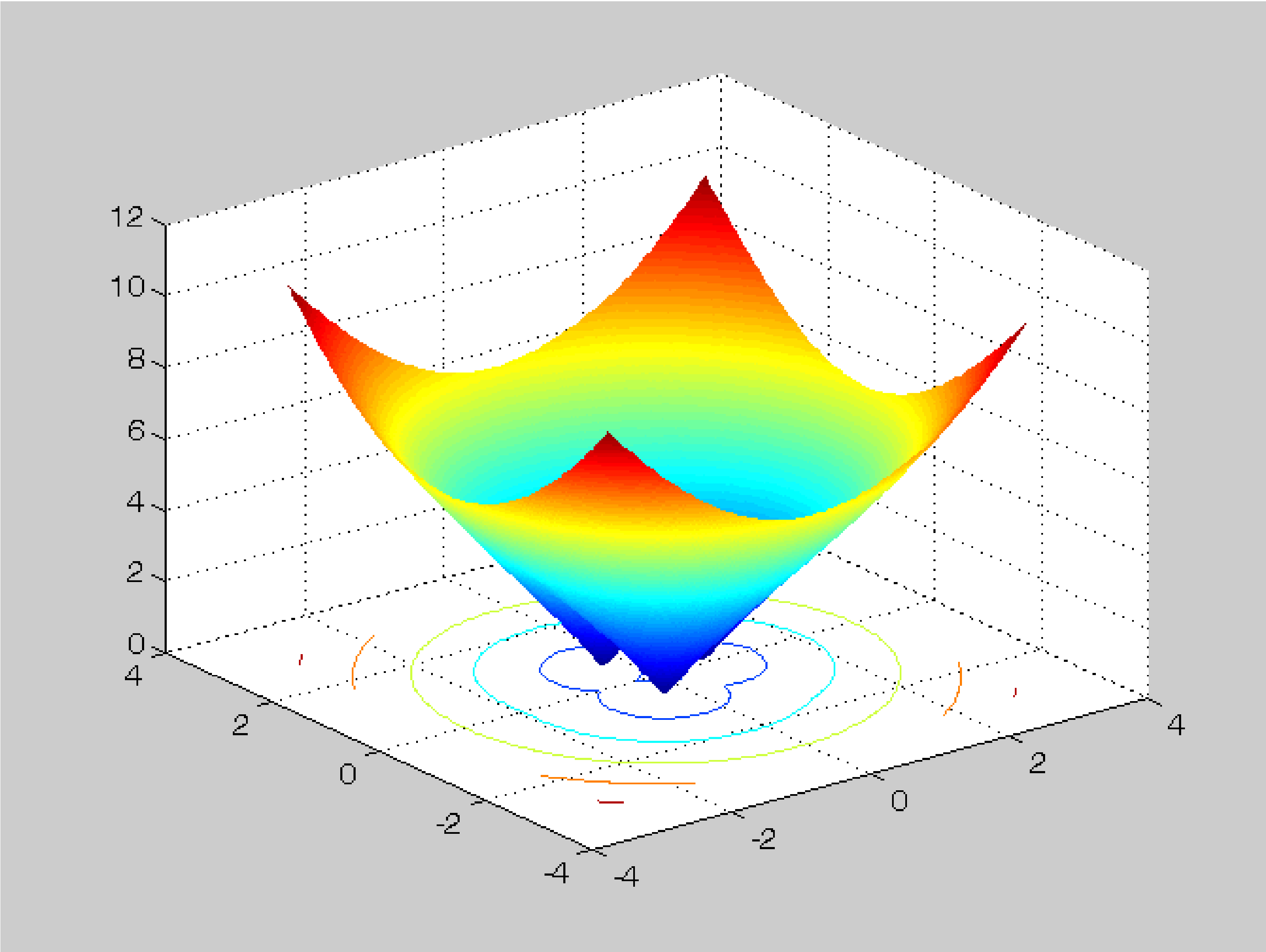
Wizualizacja funkcji wielowymiarowych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych

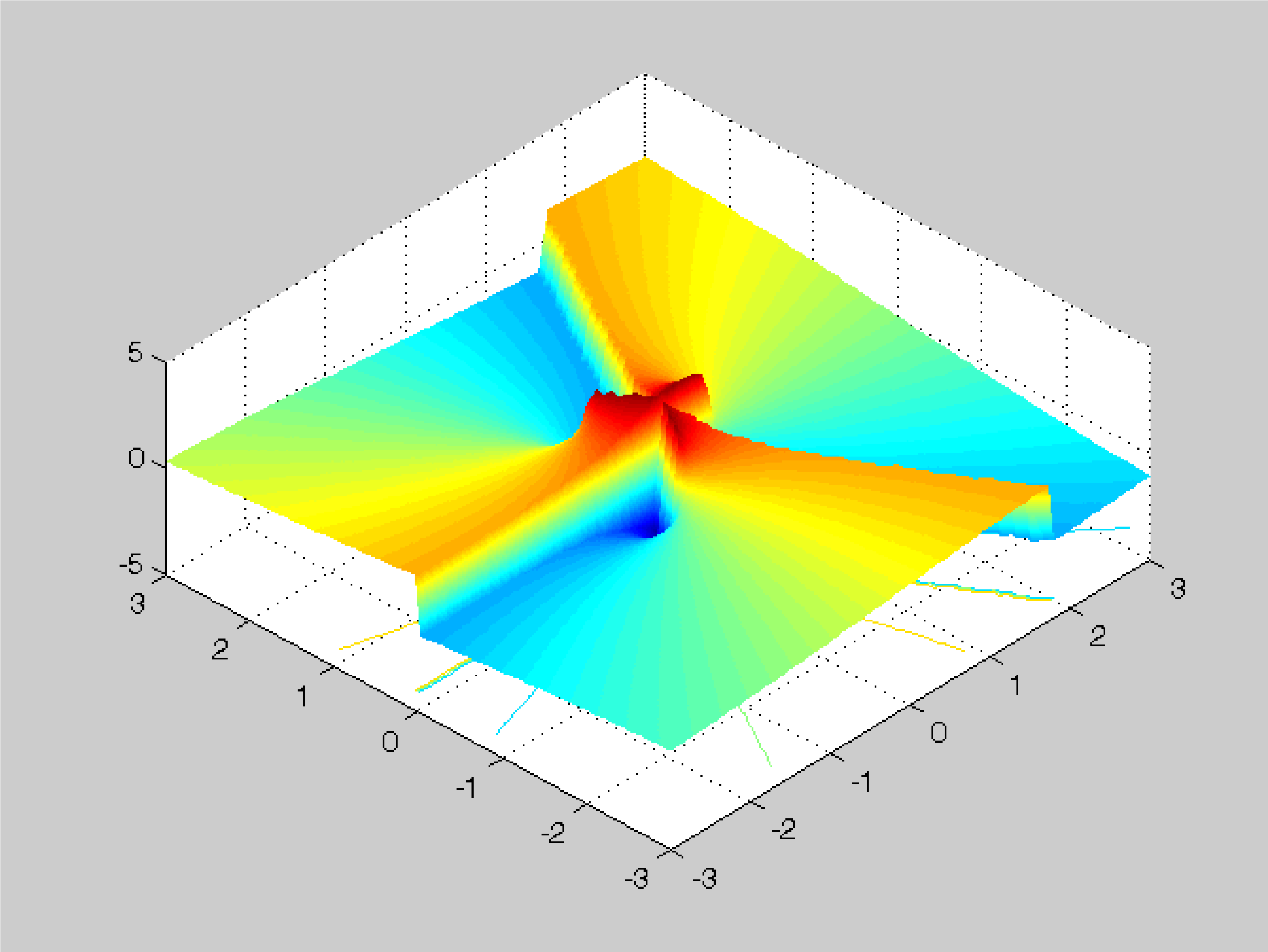


Moduł $f(x) = x^{3/2}+\log(x^3)/2.5$ Faza $f(x) = x^{3/2}+\log(x^3)/2.5$

Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



Wizualizacja funkcji wielowymiarowych



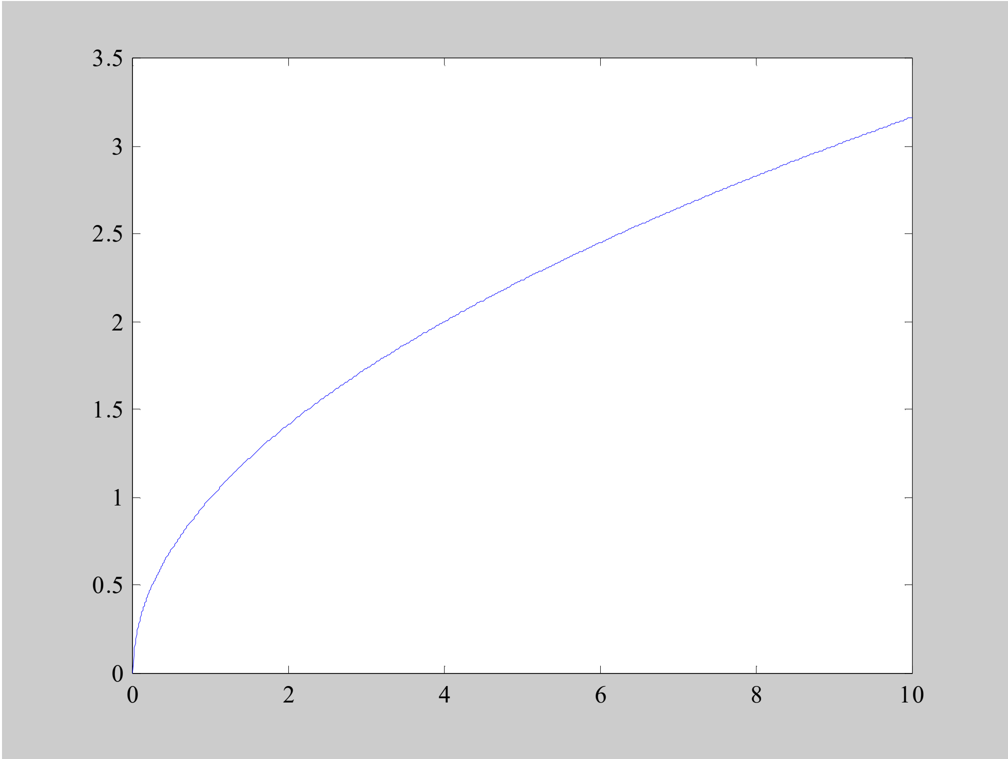
…

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

- Popularne (rzeczywiste) funkcje pierwiastkowe...

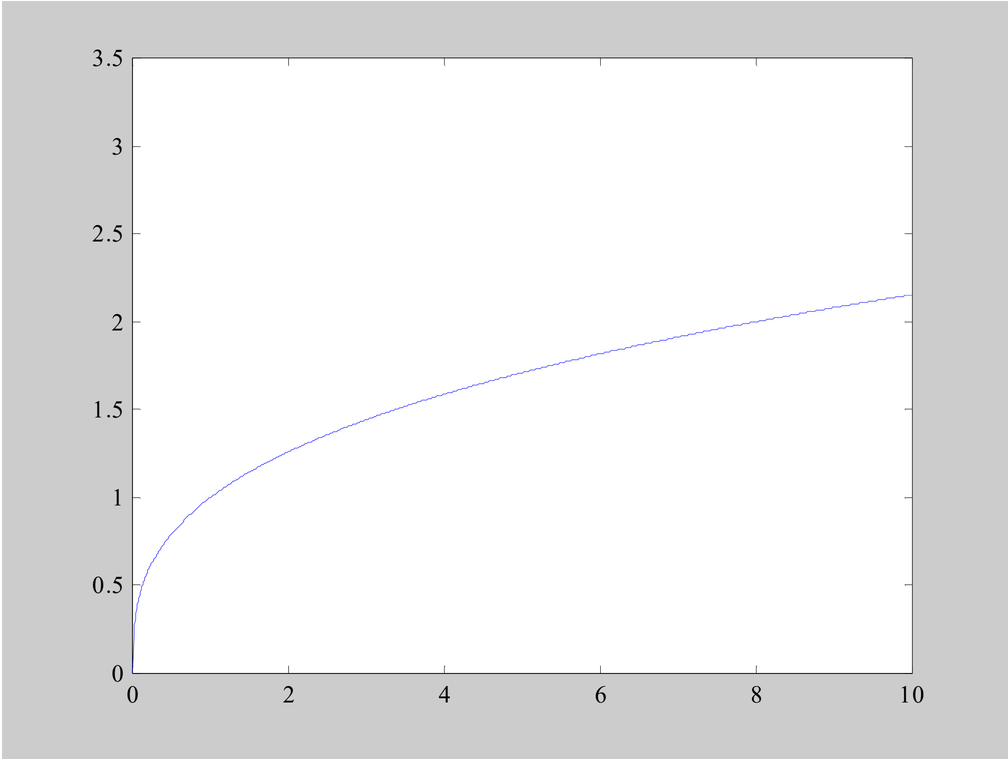
Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

- $y = x^{1/2}$



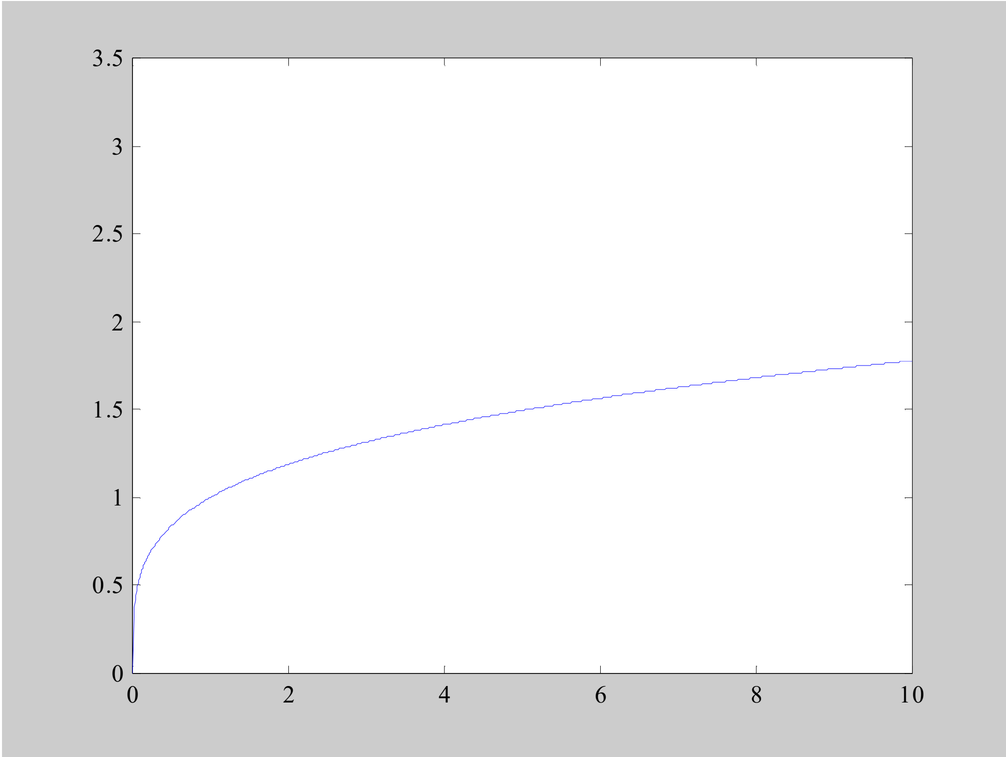
Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

- $y = x^{1/3}$



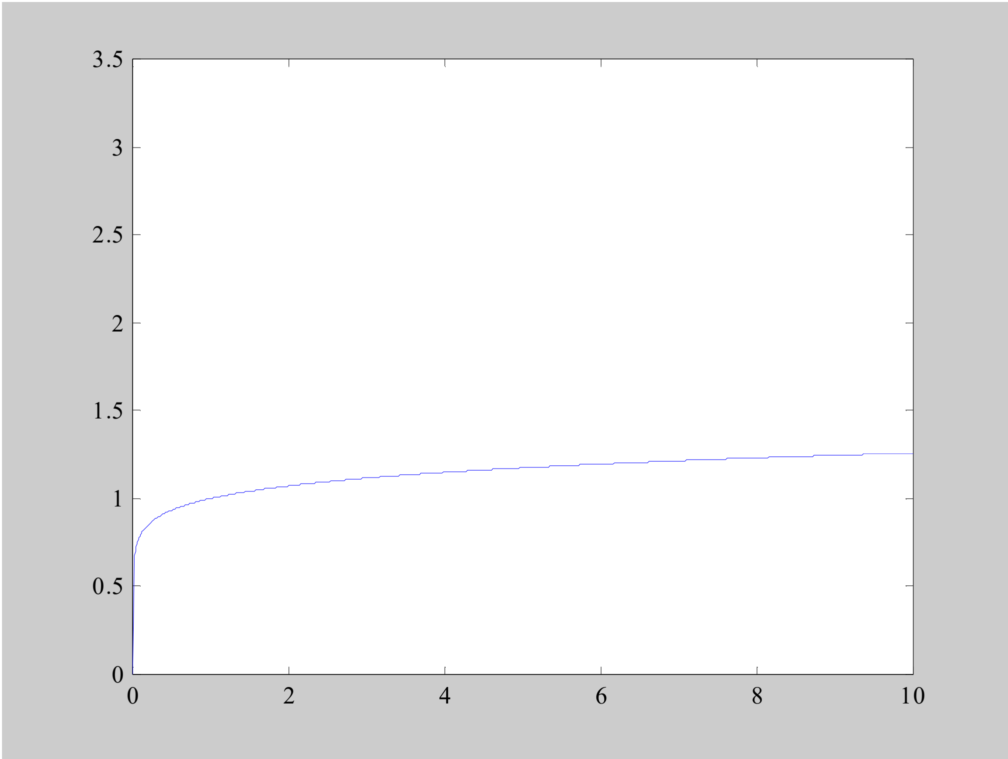
Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

- $y = x^{1/4}$



Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

- $y = x^{1/10}$

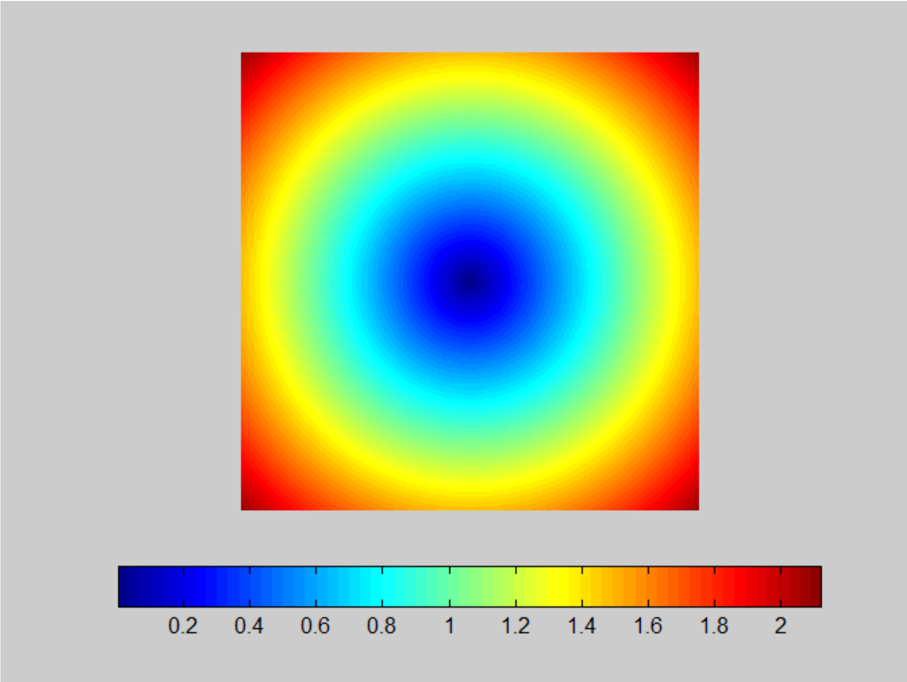


Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

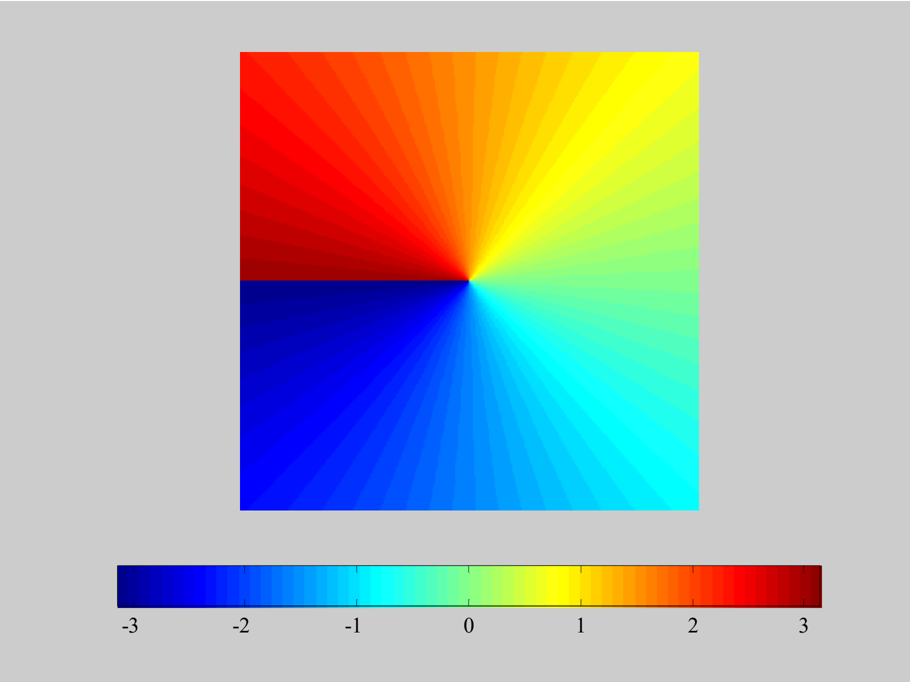
- Popularne wyrażenia, które w dziedzinie liczb rzeczywistych „generują” znane funkcje, np. $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$, $f(x) = x^{1/4}$, itp., w dziedzinie liczb zespolonych generują odwzorowania, które... nie są funkcjami!

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

- Wizualizacja (wielowymiarowych) funkcji zespolonych
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - para obrazów dwuwymiarowych



Moduł f(x) = x

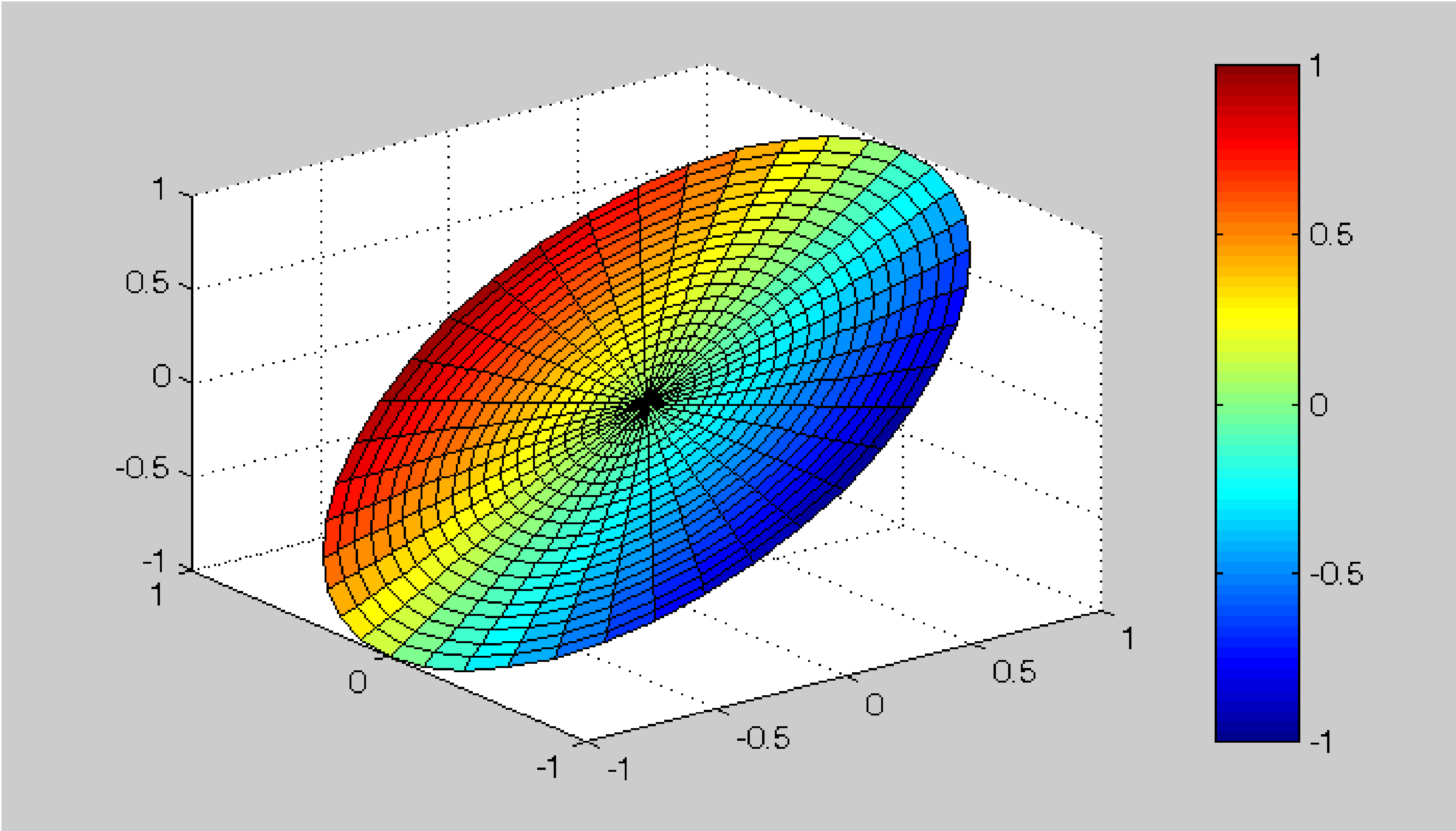


Faza f(x) = x

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

- Inna postać wizualizacji funkcji zespolonych (postać biegunowa)
  - argument wektorowy o rozmiarze 1×1 (lub arg. skalarny): cztery wymiary
  - powierzchnia trójwymiarowa (osie: x, y i z) z kolorem
    - część rzeczywista f(x): jako wartość na osi z (pionowej)
    - część urojona f(x): jako kolor

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

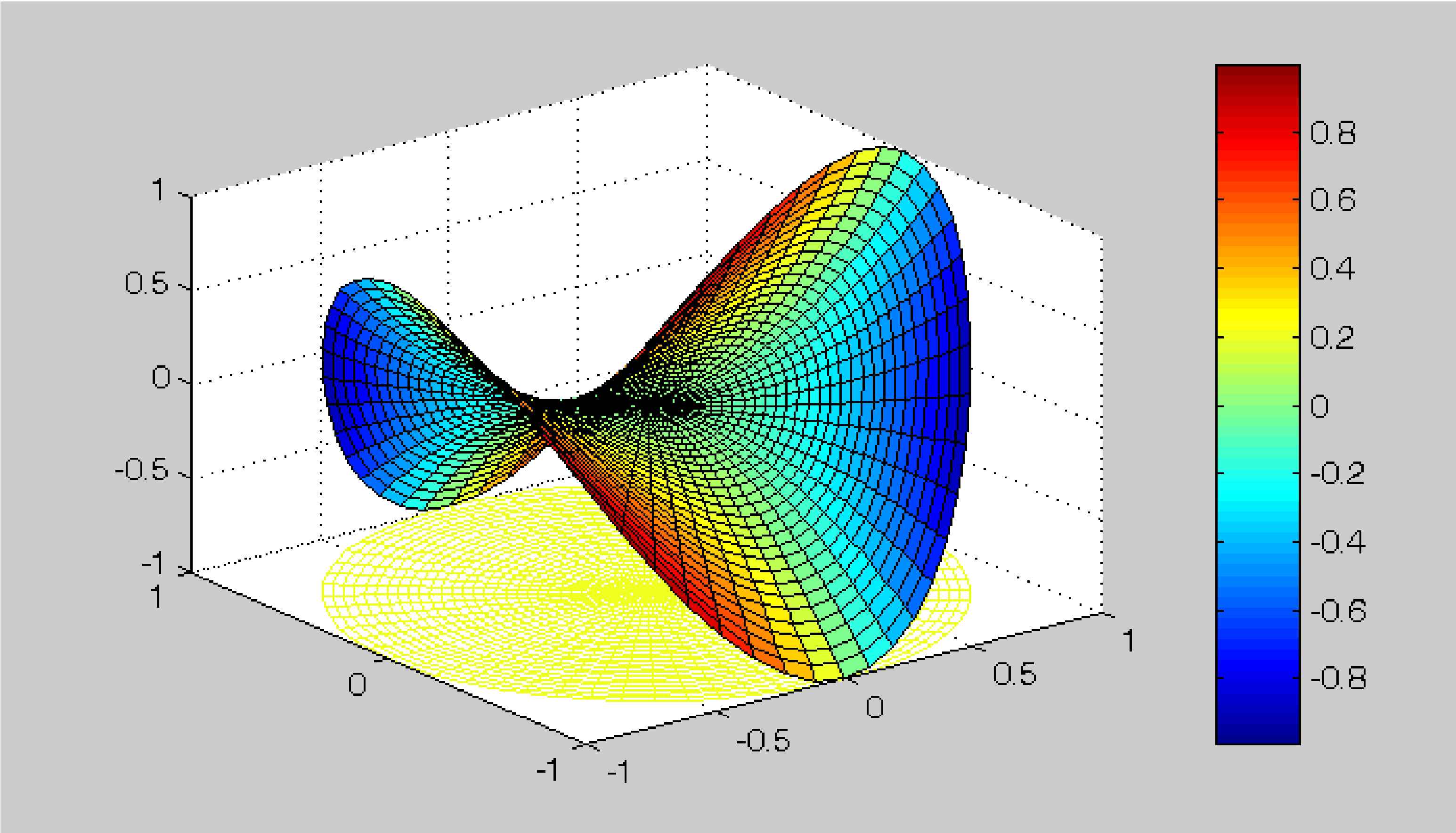


- „stara” funkcja f(x) = x (w „nowej” wizualizacji)

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

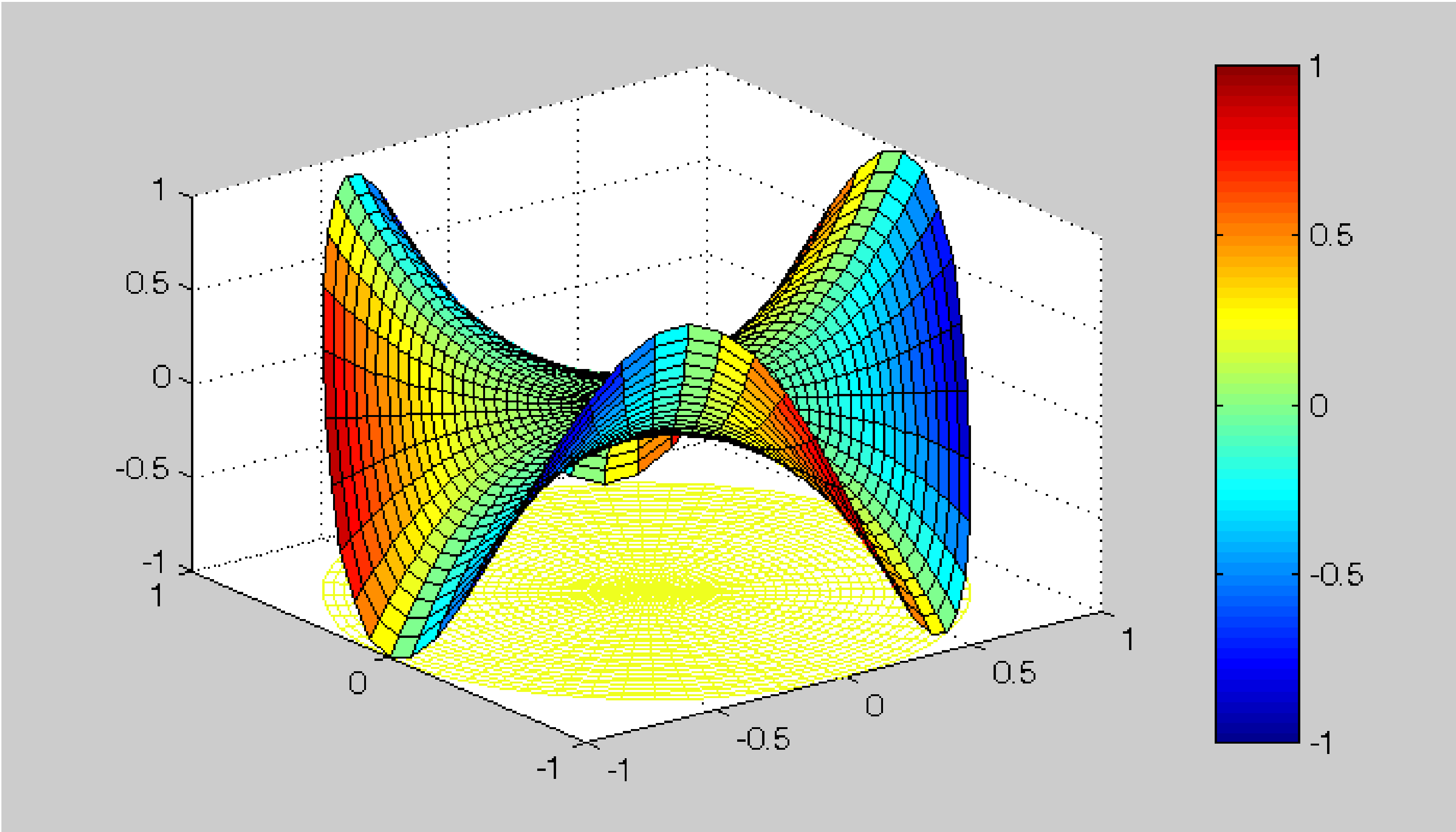
- Znane funkcje postaci $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, itd.,
  w nowej wizualizacji

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych



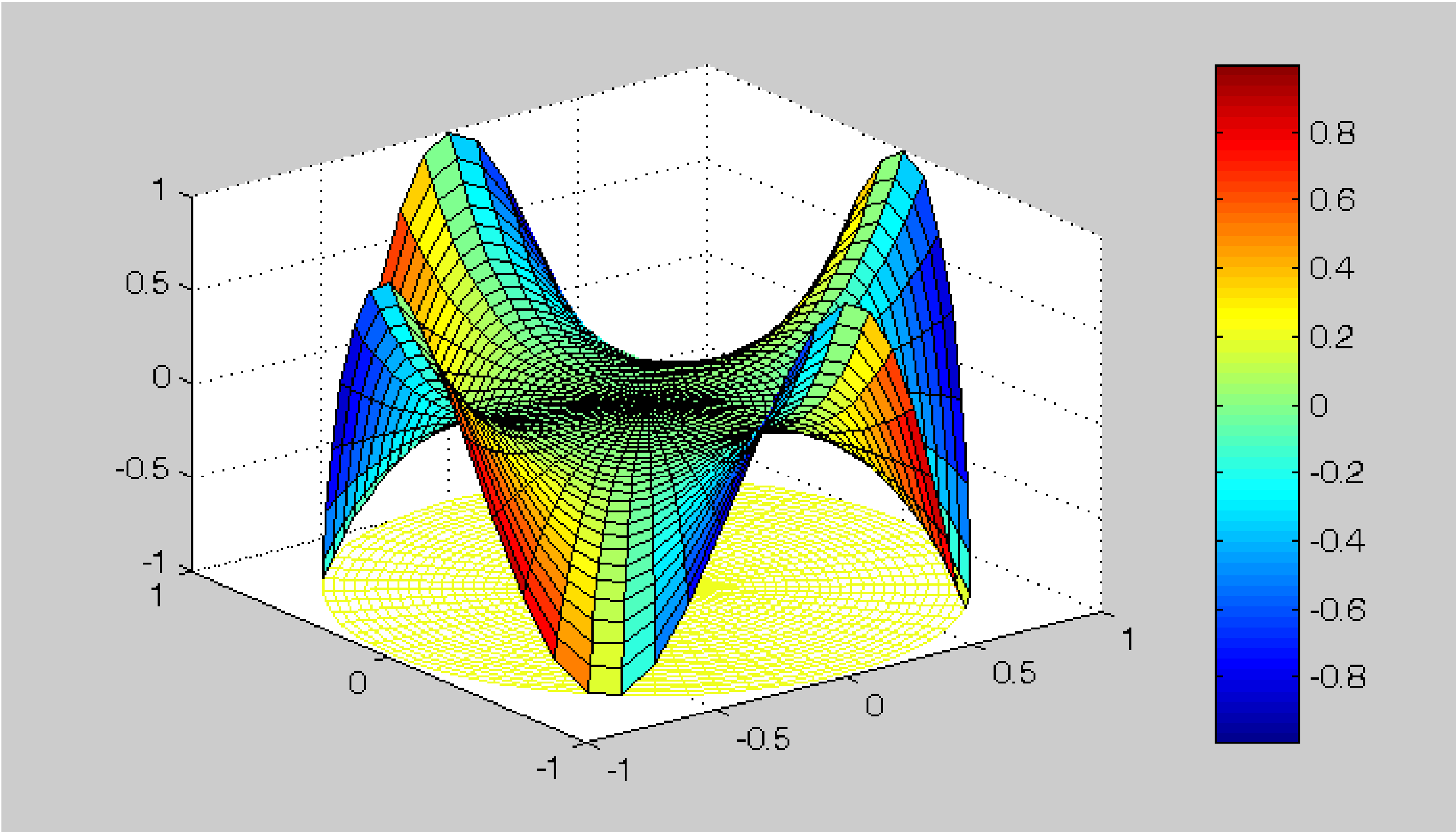
- „stara" funkcja $f(x) = x^2$ (w „nowej" wizualizacji)

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych



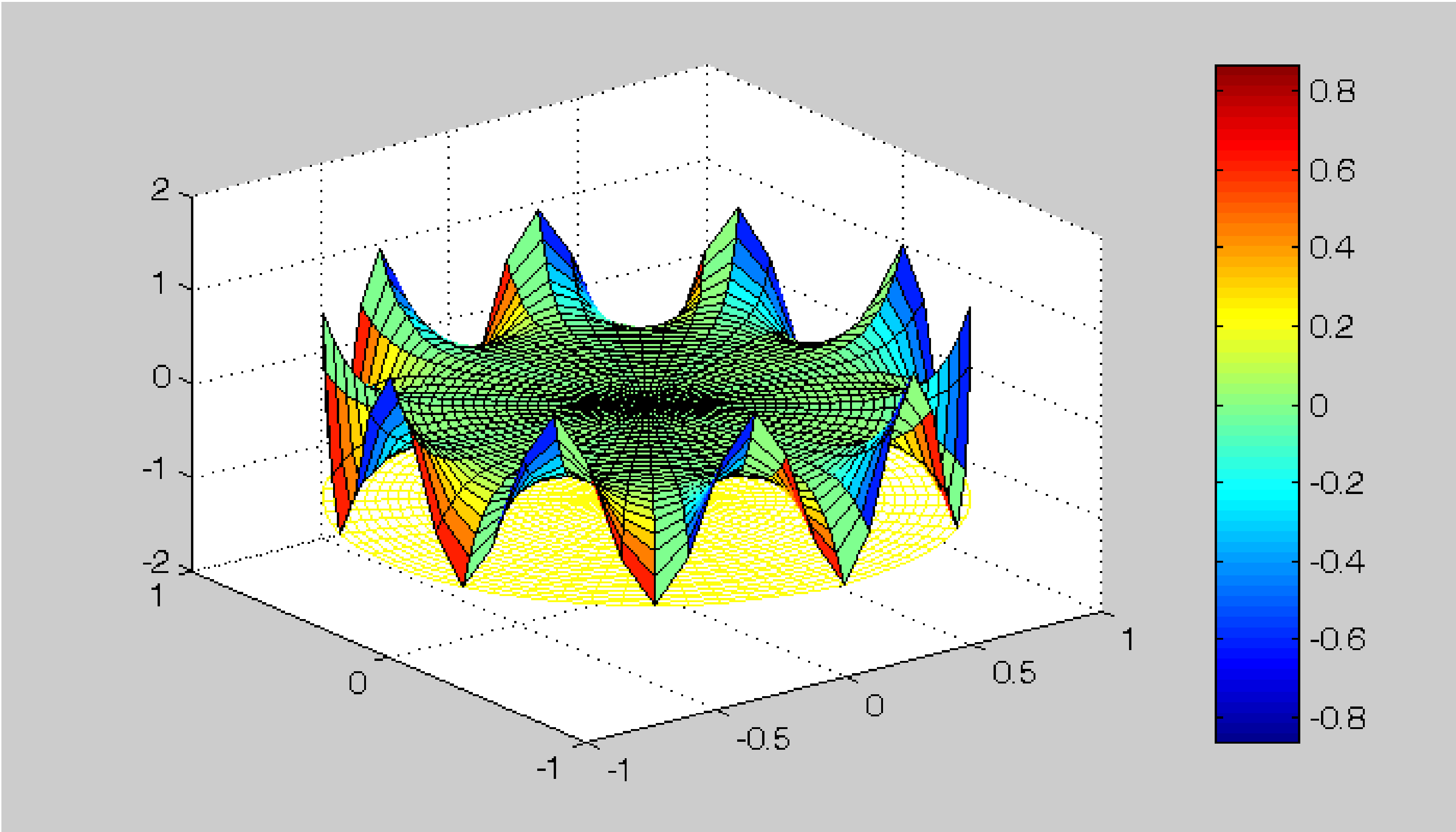
- „stara” funkcja $f(x) = x^3$ (w „nowej” wizualizacji)

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych



- „stara” funkcja $f(x) = x^4$ (w „nowej” wizualizacji)

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

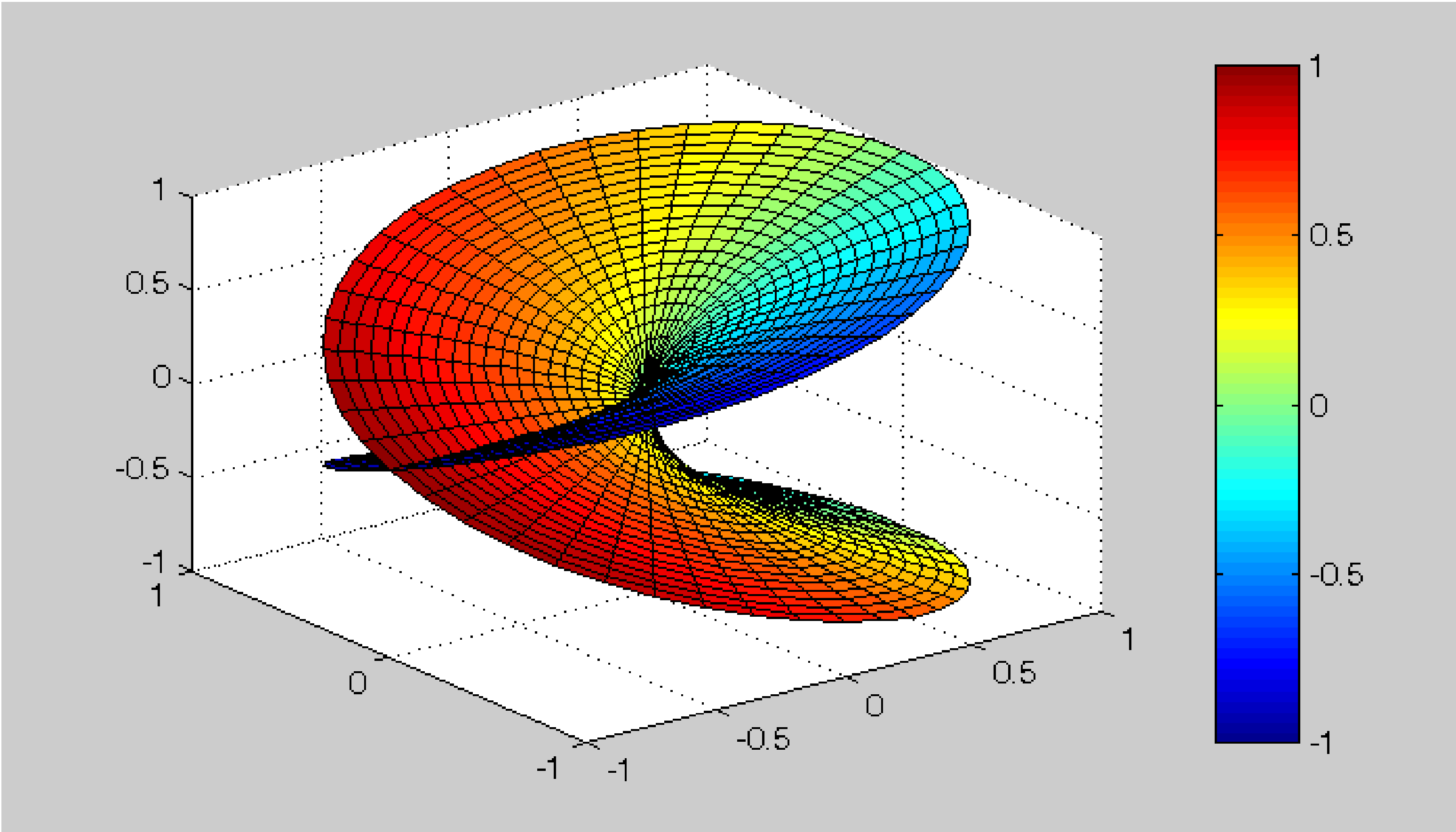


- „stara” funkcja $f(x) = x^{10}$ (w „nowej” wizualizacji)

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych

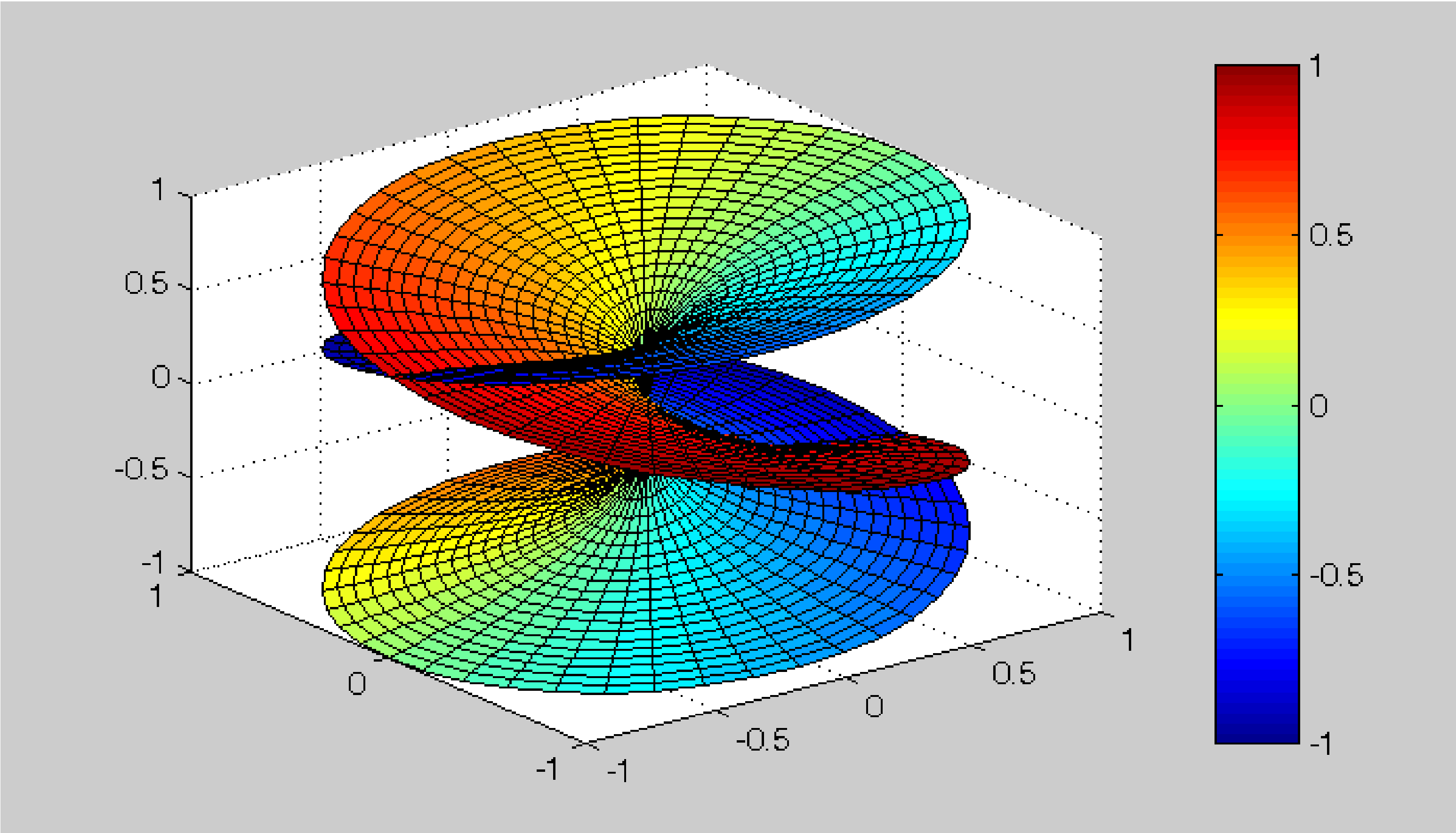
- A teraz:
  Znane odwzorowania (funkcje?) postaci $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$, itd.,
  w nowej wizualizacji

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych



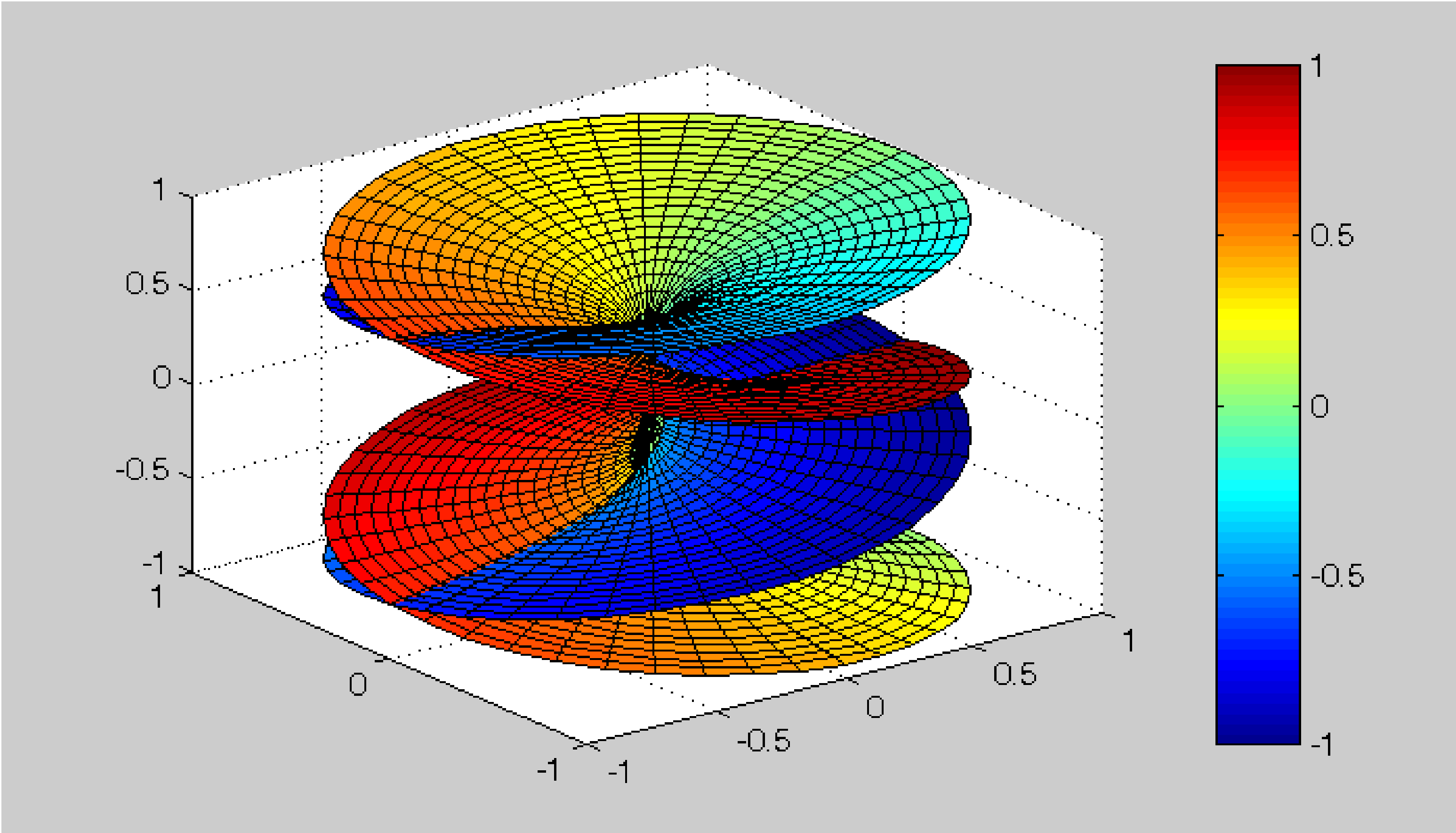
- $f(x) = x^{1/2}$

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych



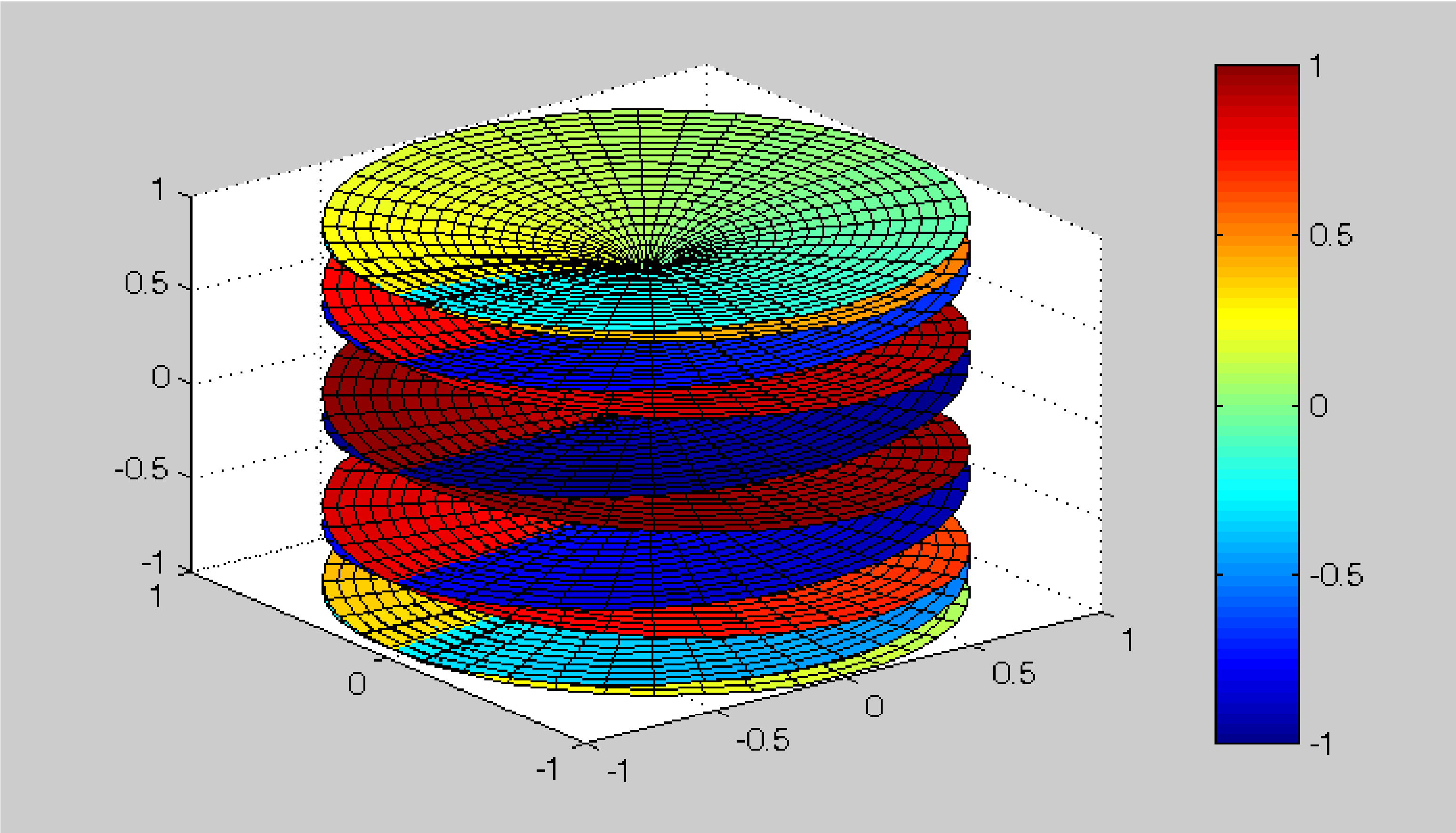
- $f(x) = x^{1/3}$

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych



- $f(x) = x^{1/4}$

Jeszcze jeden (ciekawy) problem dotyczący funkcji zespolonych



- $f(x) = x^{1/10}$

…

Funkcje wielowymiarowe

Funkcje wielowymiarowe

- Przykłady funkcji
  - sformułowania skalarne
    - $f([x_1,x_2,x_3,x_4]^T) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2$
    - $f([x_1,x_2,x_3]^T) = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 3x_1$
    - $f([x_1,x_2]^T) = e^{x_1} + e^{x_2}$

Funkcje wielowymiarowe

- Przykłady funkcji, c.d
  - sformułowania wektorowe/macierzowe
    - $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}/||\mathbf{a}||/||\mathbf{x}||$, gdzie
      - **a** jest ustalonym wektorem niezerowym

      (korelacja wektorów)
    - $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ gdzie
      - **A** jest ustaloną macierzą

      (współczynnik Rayleigh'a)
    - $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$, gdzie
      - **A** jest ustaloną niezerową macierzą nieujemnie określoną
      - **b** jest ustalonym wektorem
      - c jest ustalonym skalarem

      (postać macierzowej funkcji kwadratowej)

Funkcje wielowymiarowe

- Rozwinięcia z postaci wektorowo/macierzowej do skalarnej, np.:
  - $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + b$
    - dla $\mathbf{a} = [3\ 4]^T$, $b = 5$
    - $f([x_1\ x_2]^T) = [3\ 4][x_1\ x_2]^T + 5 = 3x_1 + 4x_2 + 5$
  - $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$
    - dla $\mathbf{A} = [1\ 2;\ 3\ 4]$
    - $f([x_1\ x_2]^T) = [x_1\ x_2][1\ 2;\ 3\ 4][x_1\ x_2]^T =$

$$
\begin{aligned}
&= [x_1\ x_2]([1\ 2;\ 3\ 4][x_1\ x_2]^T) = \\
&= [x_1\ x_2][1x_1 + 2x_2,\ 3x_1 + 4x_2]^T = \\
&= x_1(1x_1 + 2x_2) + x_2(3x_1 + 4x_2) = \\
&= 1(x_1)^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_2 + 4(x_2)^2 = \\
&= 1(x_1)^2 + 5x_1x_2 + 4(x_2)^2
\end{aligned}
$$

Funkcje wielowymiarowe

- Jednowymiarowa funkcja kwadratowa:
  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Wielowymiarowa funkcja kwadratowa
  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$
  - założenia:
    $\mathbf{A} > 0$ (macierz dodatnio określona – odpowiednik $a > 0$)
    $\mathbf{A} < 0$ (macierz ujemnie określona – odpowiednik $a < 0$)

...