Materiały wykładowe
(fragmenty)

Robert Susmaga

Instytut Informatyki

ul. Piotrowo 2

Poznań

kontakt mail'owy

Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL

kontakt osobisty

Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

Techniki optymalizacji

Cz. 1

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

Autor

…

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Rzeczywiste pierwiastki z jedynki
  - pierwszego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji rzeczywistej f(x) o argumencie rzeczywistym x danej wzorem $f(x) = x^1 – 1$?
    - odpowiedź: $x = 1$ (istnieje jedno zero tej funkcji)
  - drugiego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji rzeczywistej f(x) o argumencie rzeczywistym x danej wzorem $f(x) = x^2 – 1$?
    - odpowiedź: $x = 1$ oraz $x = –1$ (istnieją dwa zera tej funkcji)
  - trzeciego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji rzeczywistej f(x) o argumencie rzeczywistym x danej wzorem $f(x) = x^3 – 1$?
    - odpowiedź: $x = 1$ (istnieje jedno zero tej funkcji)
  - czwartego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji rzeczywistej f(x) o argumencie rzeczywistym x danej wzorem $f(x) = x^4 – 1$?
    - odpowiedź: $x = 1$ oraz $x = –1$ (istnieją dwa zera tej funkcji)
  - …

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Zespolone pierwiastki z jedynki
  - pierwszego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji zespolonej f(x) o argumencie zespolonym x danej wzorem $f(x) = x^1 - 1$?
    - odpowiedź: x = 1+0i (istnieje jedno zero tej funkcji)
  - drugiego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji zespolonej f(x) o argumencie zespolonym x danej wzorem $f(x) = x^2 - 1$?
    - odpowiedź: x = 1+0i oraz x = –1+0i (istnieją dwa zera tej funkcji)
  - trzeciego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji zespolonej f(x) o argumencie zespolonym x danej wzorem $f(x) = x^3 - 1$?
    - odpowiedź: x = 1+0i, $x = (-1+3^{1/2}i)/2$ oraz $x = (-1-3^{1/2}i)/2$ (istnieją trzy zera tej funkcji)
  - czwartego stopnia
    - pytanie: czy istnieją i jakie są zera jednowymiarowej funkcji zespolonej f(x) o argumencie zespolonym x danej wzorem $f(x) = x^4 - 1$?
    - odpowiedź: x = 1+0i, x = 0+i, x = –1+0i oraz x = 0–i (istnieją cztery zera tej funkcji)
  - …

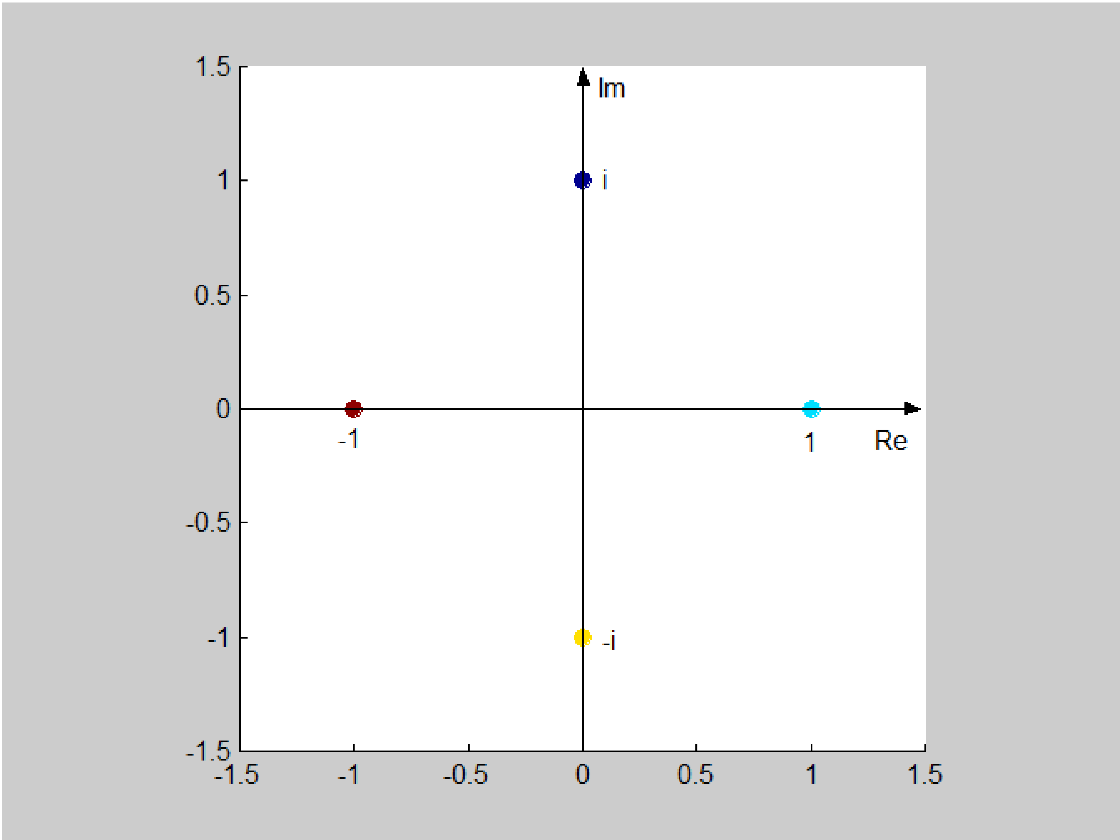
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Zespolone pierwiastki z jedynki stopnia czwartego oczywiście spełniają
  - $x = 1+0i$:
    $x^4 = (1+0i)^4 = 1^4 = 1$
  - $x = 0+i$:
    $x^4 = (0+i)^4 = i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
  - $x = -1+0i$:
    $x^4 = (-1+0i)^4 = (-1)^4 = 1$
  - $x = 0-i$:
    $x^4 = (0-i)^4 = (-i)^4 = ((-i)^2)^2 = ((-1)^2 \cdot i^2)^2 = (1 \cdot i^2)^2 = (1 \cdot (-1))^2 = (-1)^2 = 1$

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Także zespolone pierwiastki z jedynki stopnia trzeciego spełniają
  - $x = 1+0i$:
    $x^3 = (1+0i)^3 = ...$?
  - $x = (-1+3^{1/2}i)/2$:
    $x^3 = ((-1+3^{1/2}i)/2)^3 = ...$?
  - $x = (-1-3^{1/2}i)/2$:
    $x^3 = ((-1-3^{1/2}i)/2)^3 = ...$?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



Cztery zera funkcji zespolonej $f(x) = x^4 - 1$

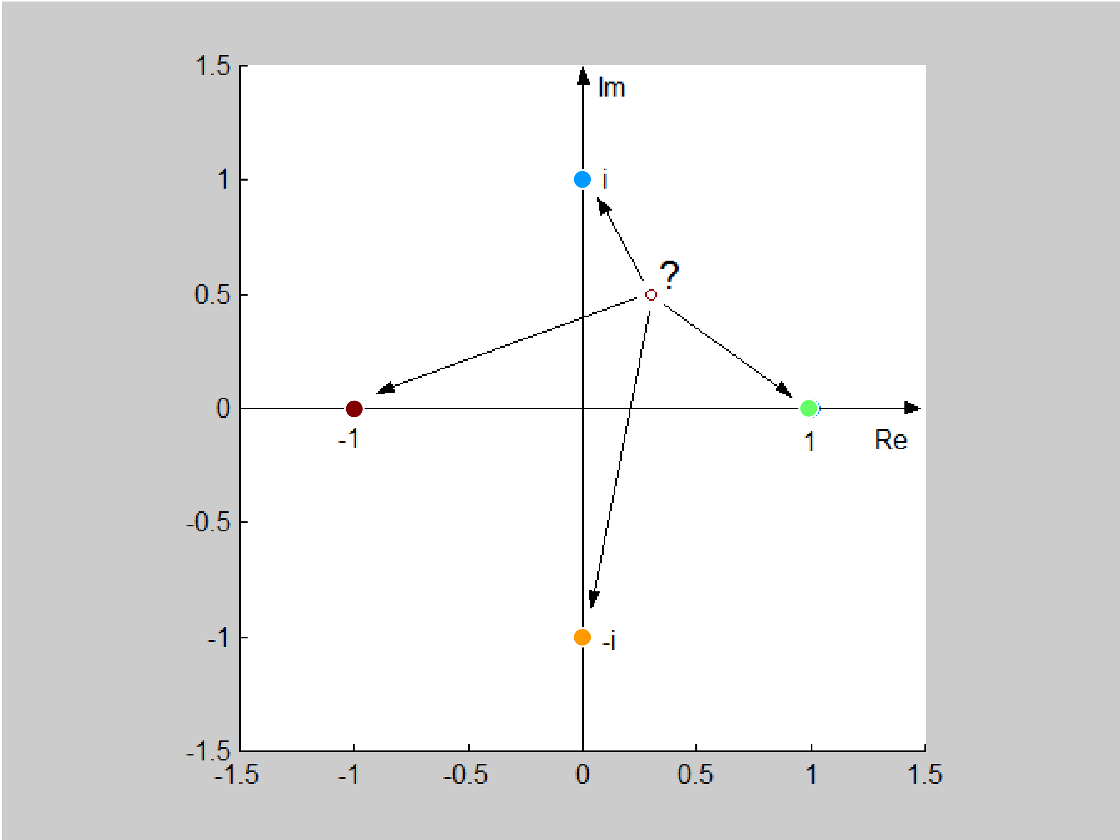
(i dwa zera funkcji rzeczywistej $f(x) = x^4 - 1$)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Aproksymacyjna metoda Newtona w poszukiwaniu pierwiastków z jedynki n-tego stopnia
  - wyprowadzenie (aproksymacyjnego) schematu iteracyjnego
    - funkcja: $f(x) = x^n - 1$
    - pochodna: $f'(x) = nx^{n-1}$
    - schemat: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) = x_k - ((x_k)^n - 1)/(n(x_k)^{n-1}) =$
      $= x_k - (x_k)^n/(n(x_k)^{n-1}) + 1/(n(x_k)^{n-1}) =$
      $= x_k - x_k/n + 1/(n(x_k)^{n-1}) =$
      $= (n-1)/n \cdot x_k + 1/n \cdot 1/(x_k)^{n-1}$
  - wobec istnienia wielu zer funkcji (wielu pierwiastków z jedynki) aproksymacyjna metoda Newtona może znaleźć dowolne z nich
  - to, które rozwiązanie zostanie znalezione, zależy od punktu początkowego (x_0 w schemacie iteracyjnym)
  - zachodzi pytanie:

    Jaka jest zależność pomiędzy położeniem punktów początkowych a znajdowanymi pierwiastkami?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



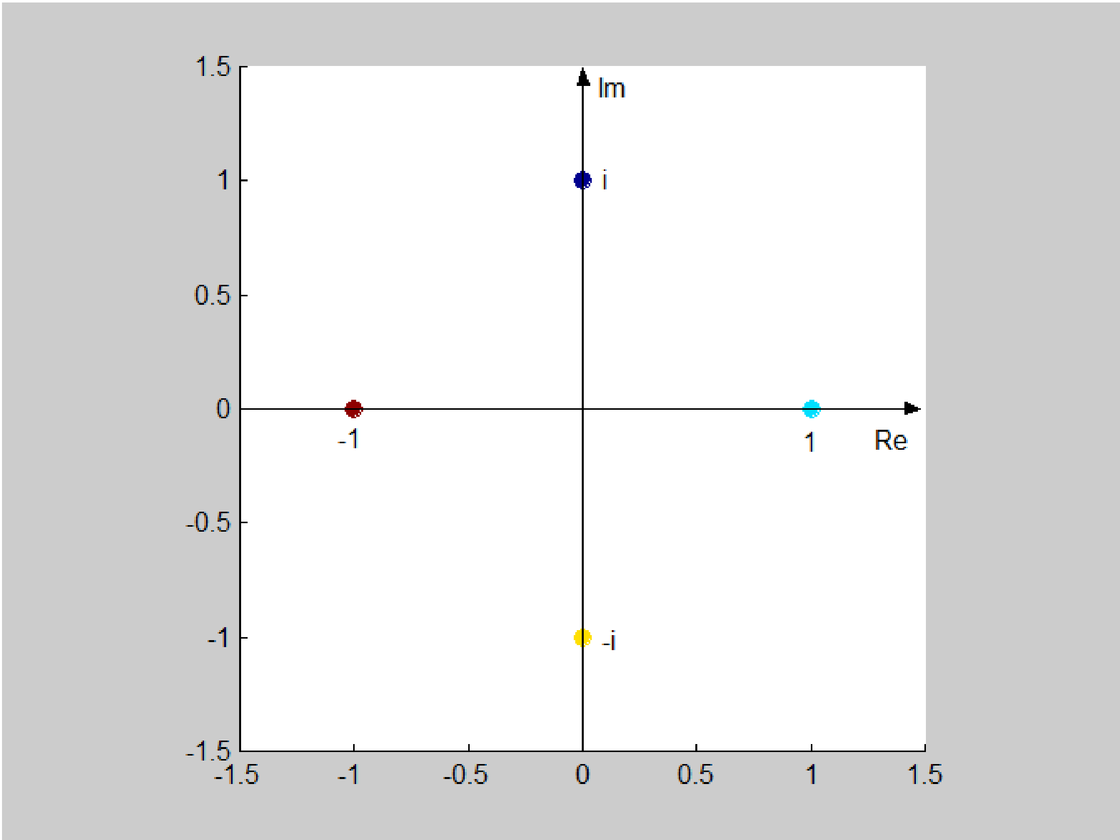
Który pierwiastek znajdzie metoda Newtona startując z tego punktu?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Baseny przyciągania
  - w przypadku problemu poszukiwania pierwiastków z jedynki czwartego stopnia każdy możliwy punkt początkowy (czyli – w praktyce – każdą liczbę zespoloną) można przydzielić do jednego z pięciu rozłącznych podzbiorów
    - podzbiór punktów, dla których znaleziony zostaje pierwiastek 1
    - podzbiór punktów, dla których znaleziony zostaje pierwiastek –1
    - podzbiór punktów, dla których znaleziony zostaje pierwiastek i
    - podzbiór punktów, dla których znaleziony zostaje pierwiastek –i
    - podzbiór punktów, dla których nie znaleziony zostaje żaden pierwiastek
  - podzbiory te noszą nazwę „basenów przyciągania”
  - pytanie o zależność pomiędzy położeniem punktów początkowych a znajdowanymi pierwiastkami przyjmuje postać:

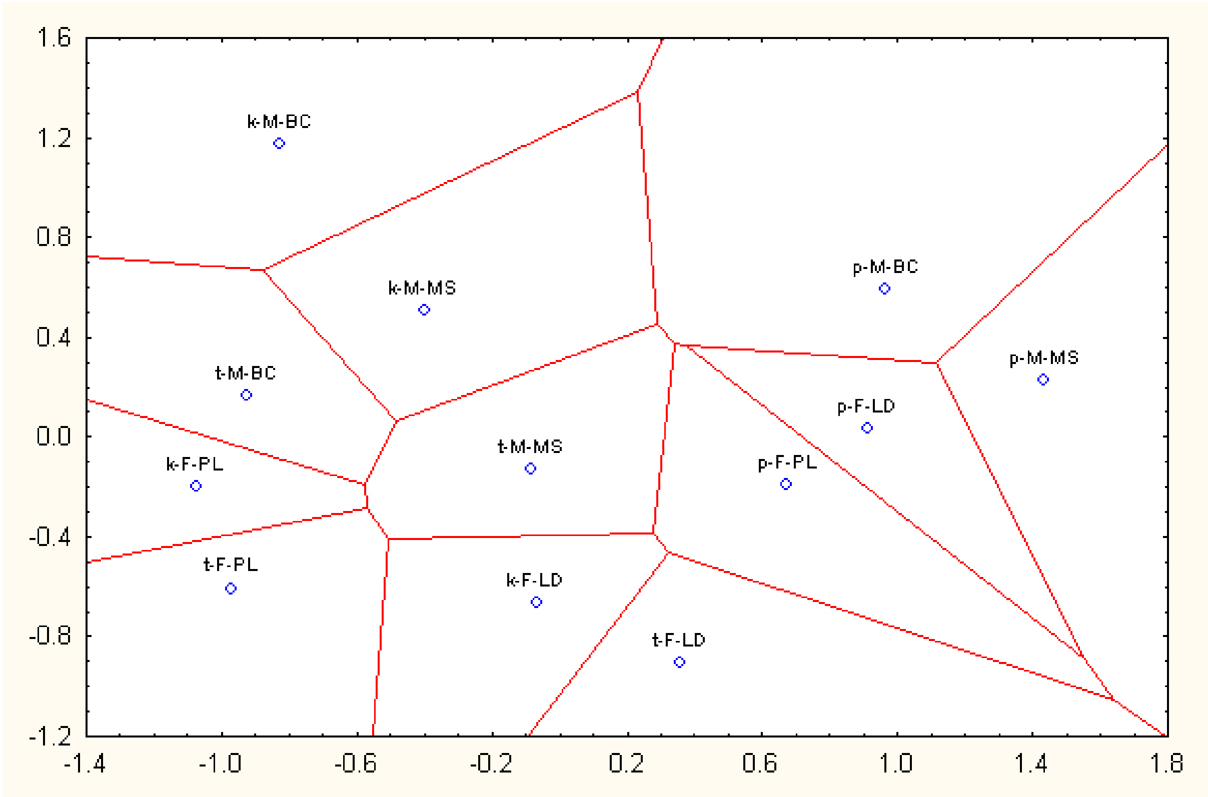
    Jakie kształty mają baseny przyciągania?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



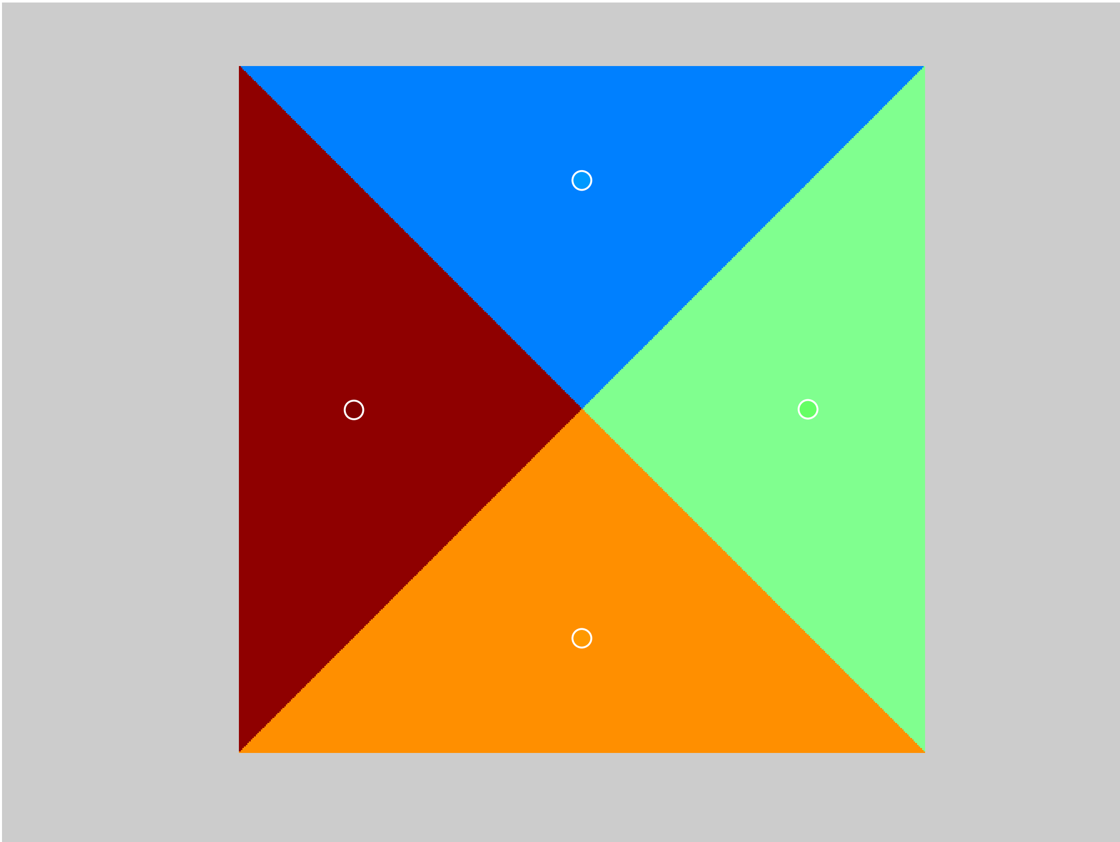
Baseny przyciągania?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



Obszary Woronoja

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

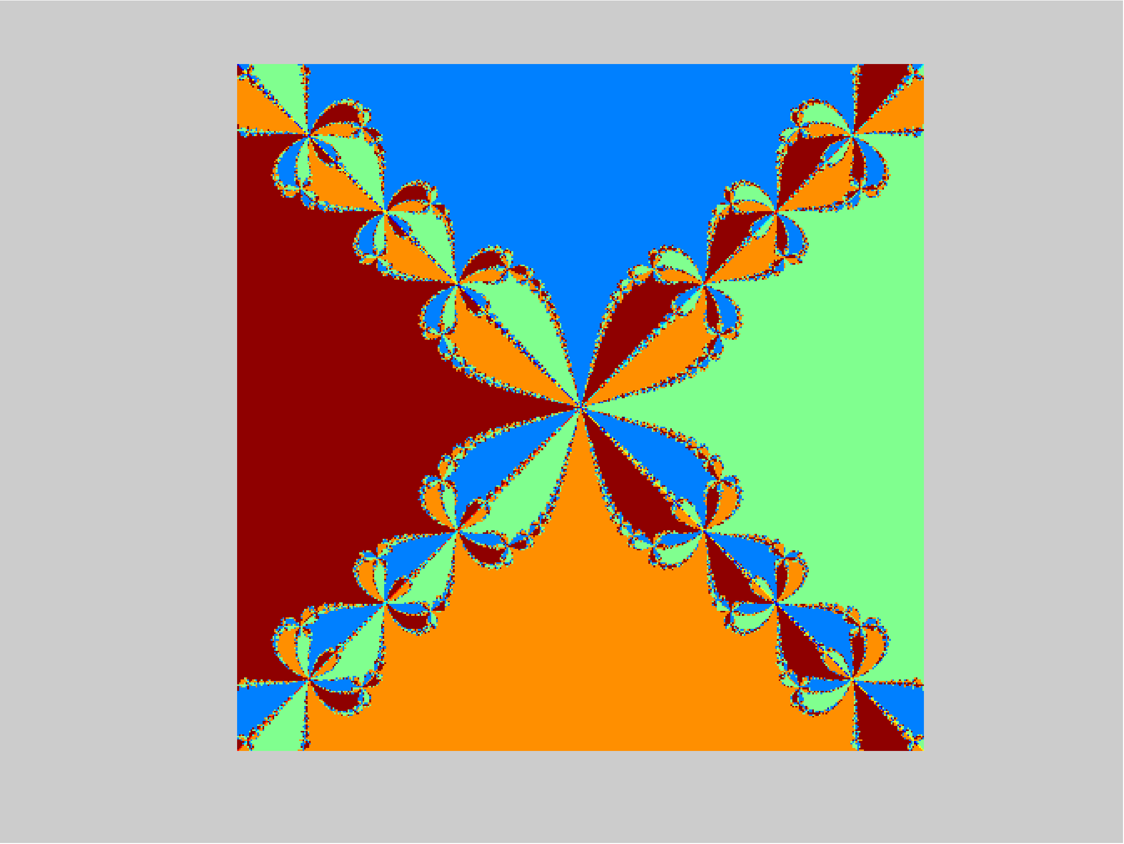


- Obszary Woronoja dla pierwiastków z jedynki czwartego stopnia. Czy są to jednocześnie baseny przyciągania metody Newtona?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

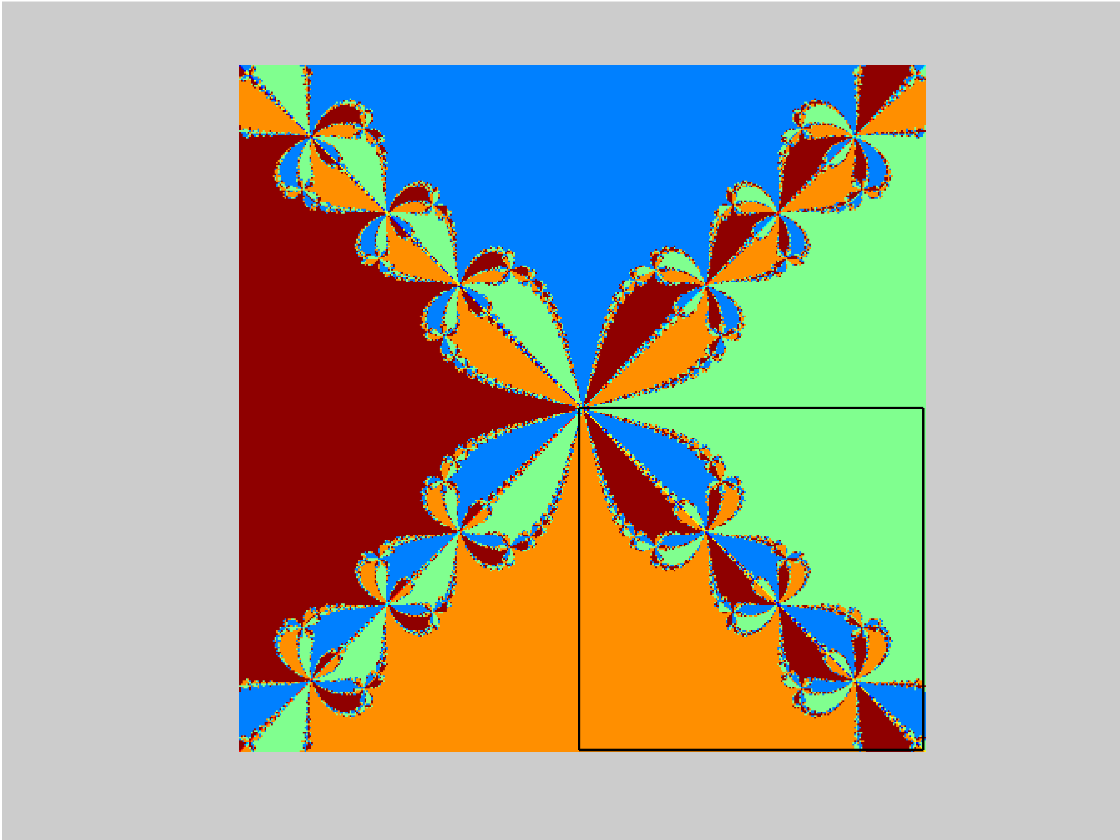
- Czy obszary Woronoja są basenami przyciągania dla pierwiastków z jedynki czwartego stopnia?
  - nie!
- Jak więc wyglądają te baseny?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



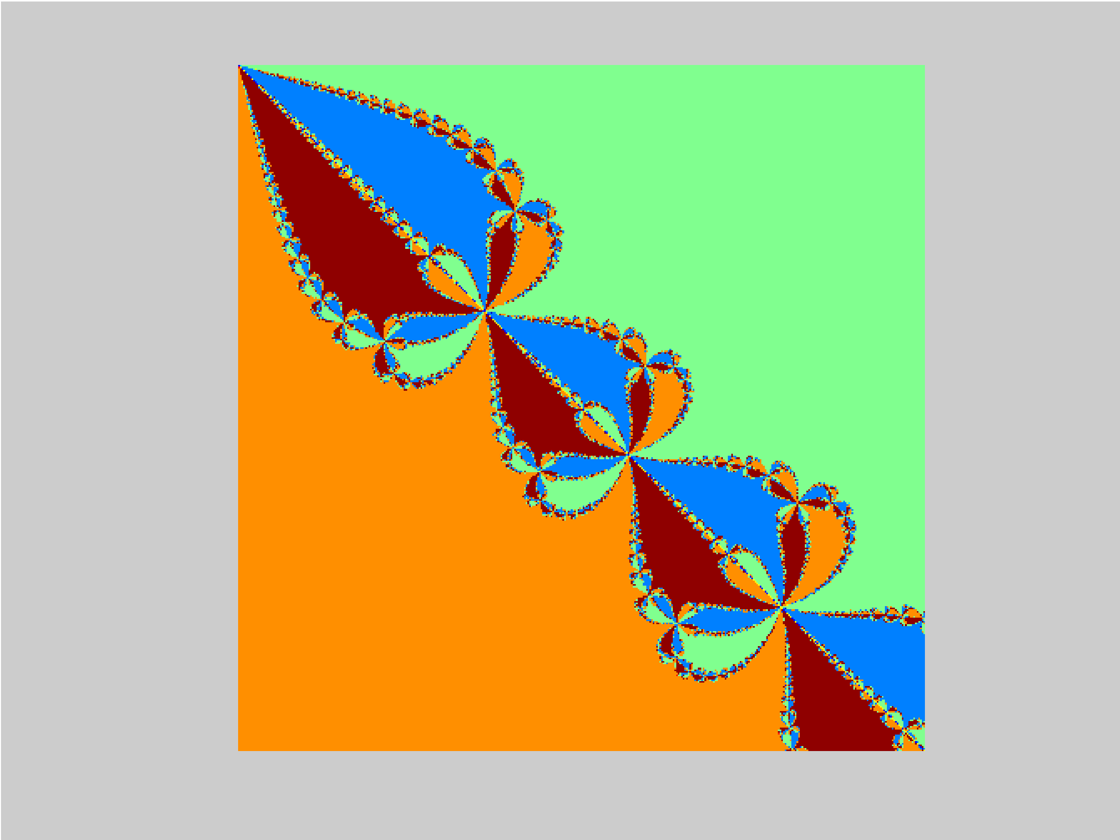
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



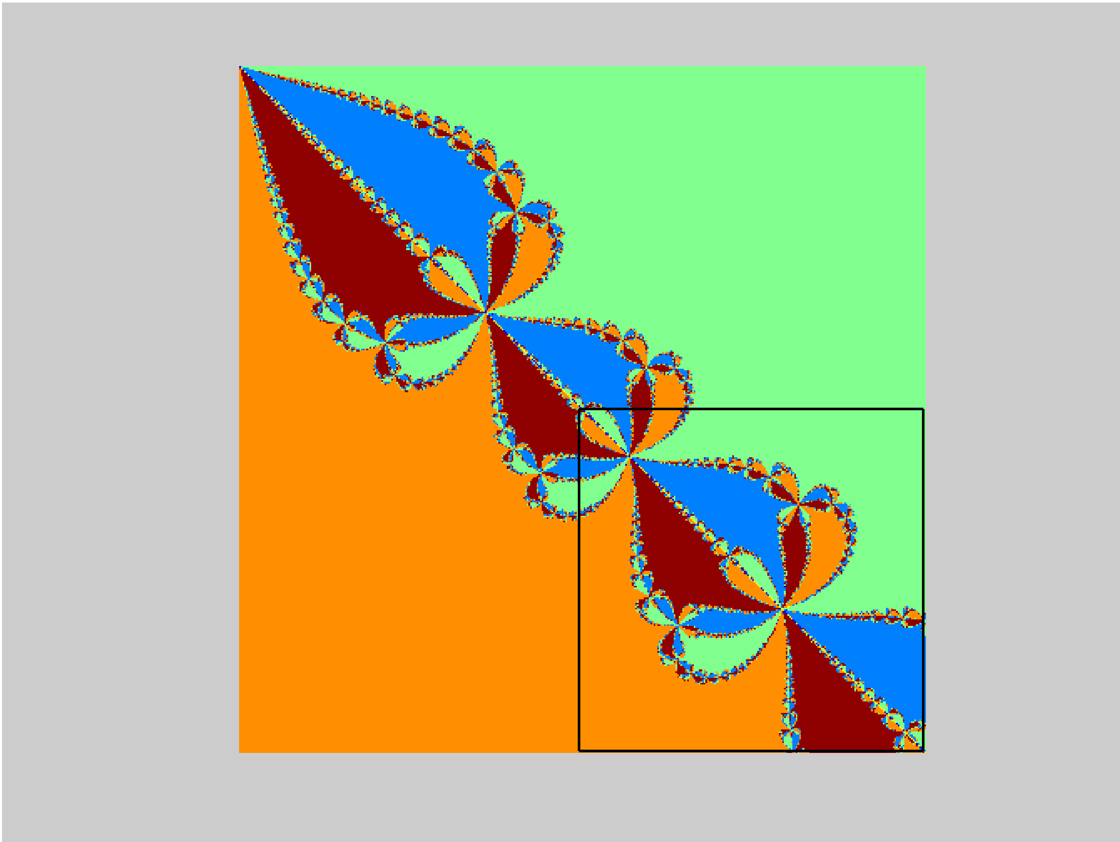
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



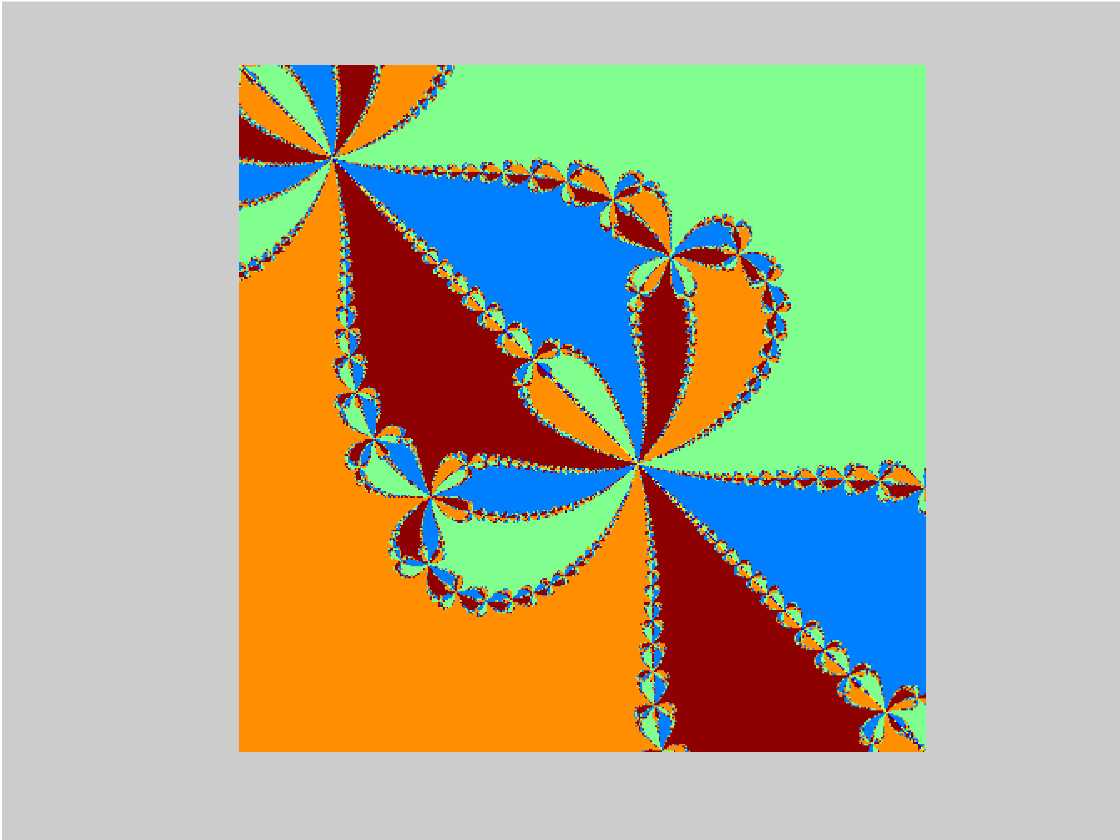
- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 2 (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



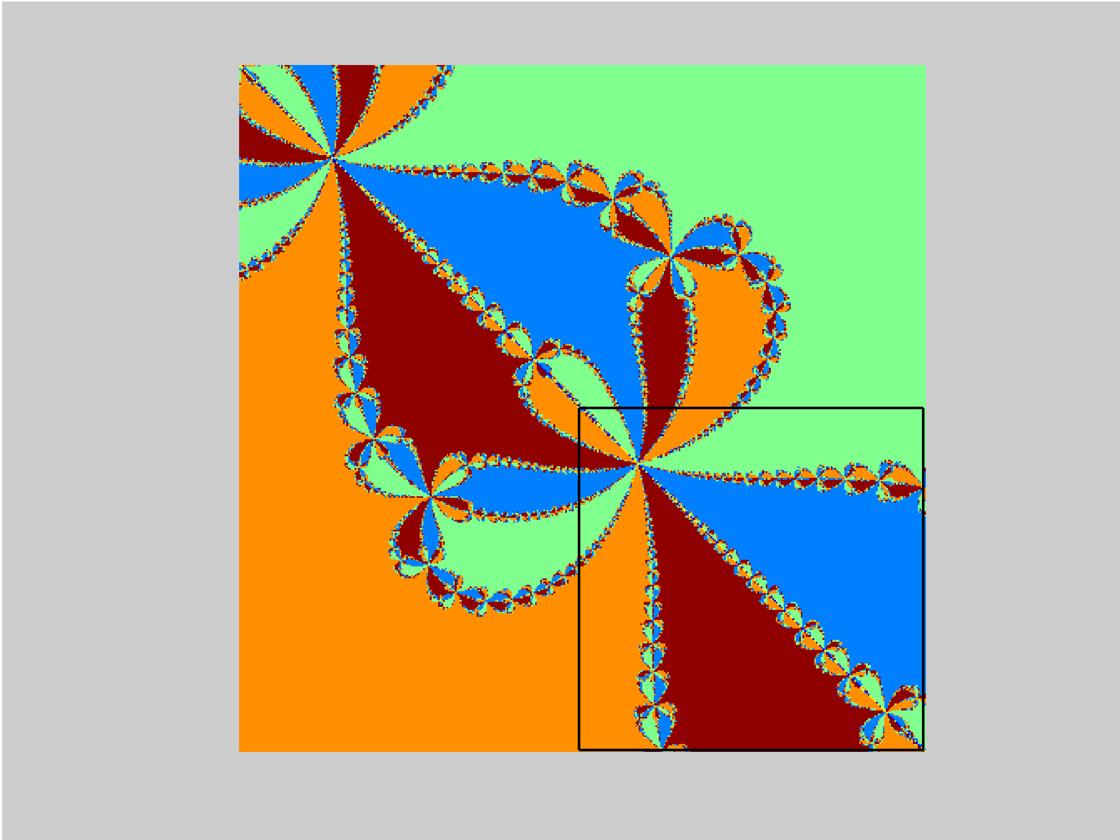
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



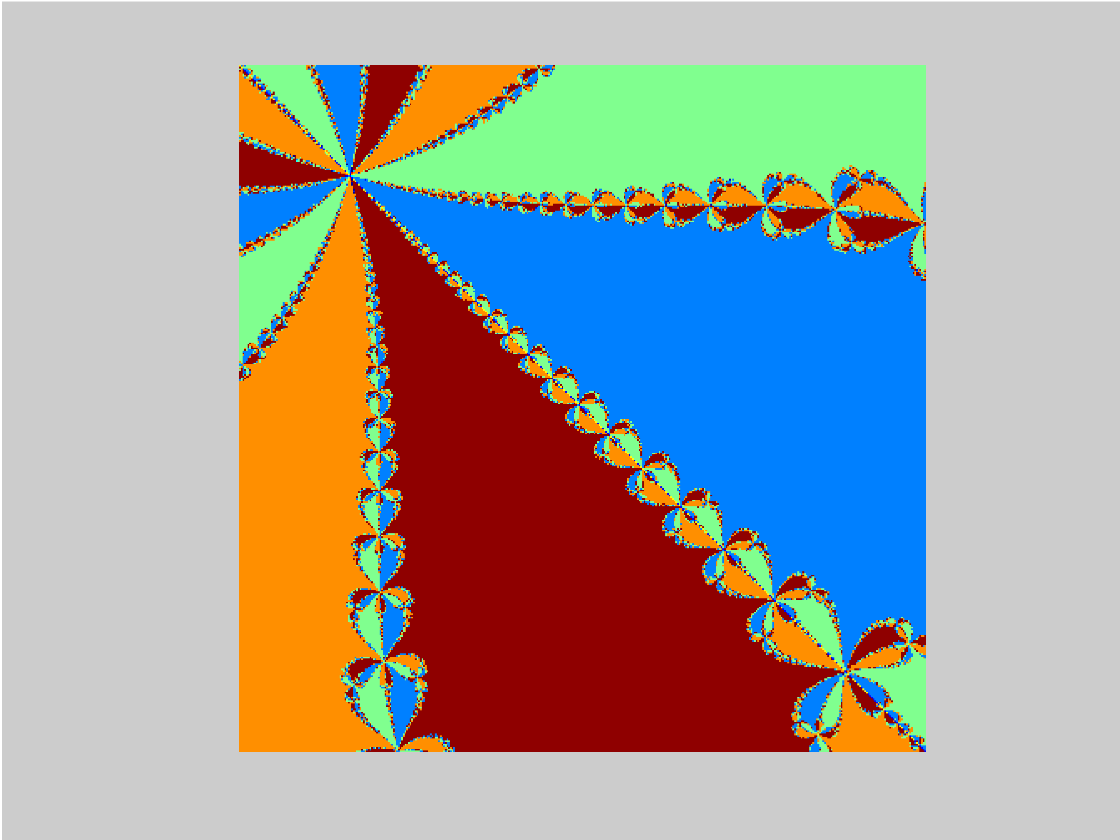
- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 4
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



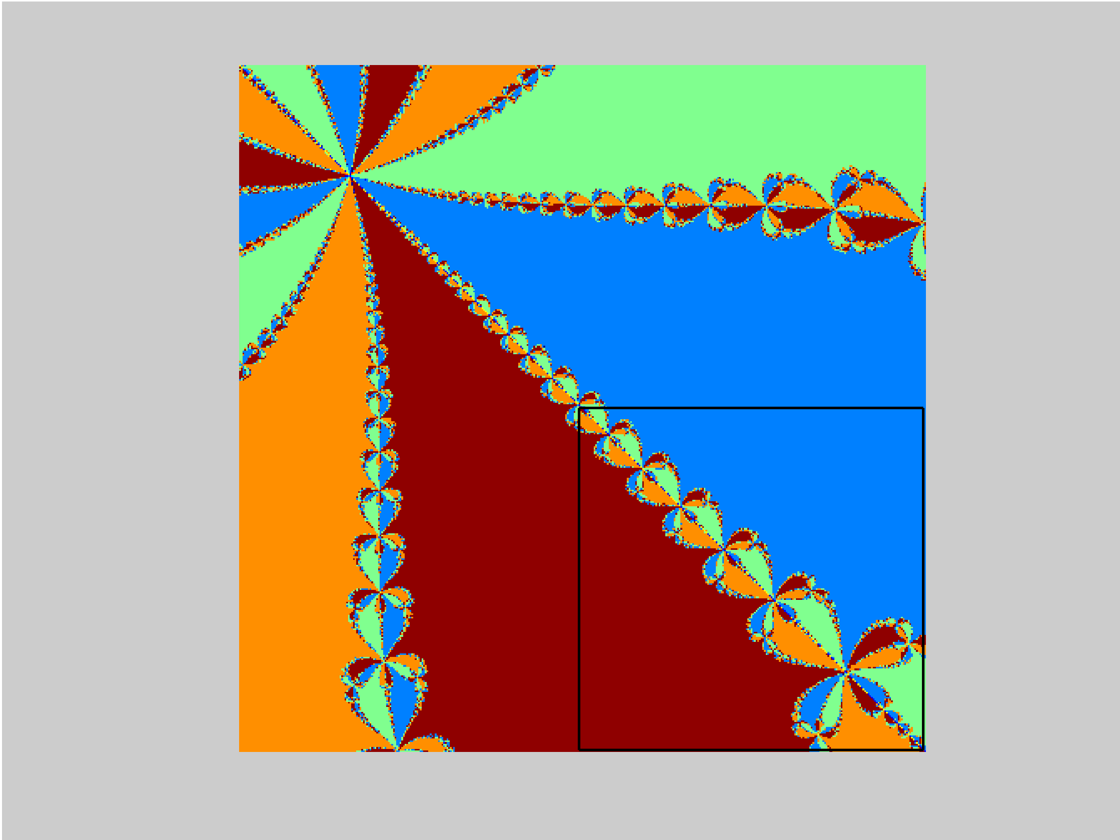
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



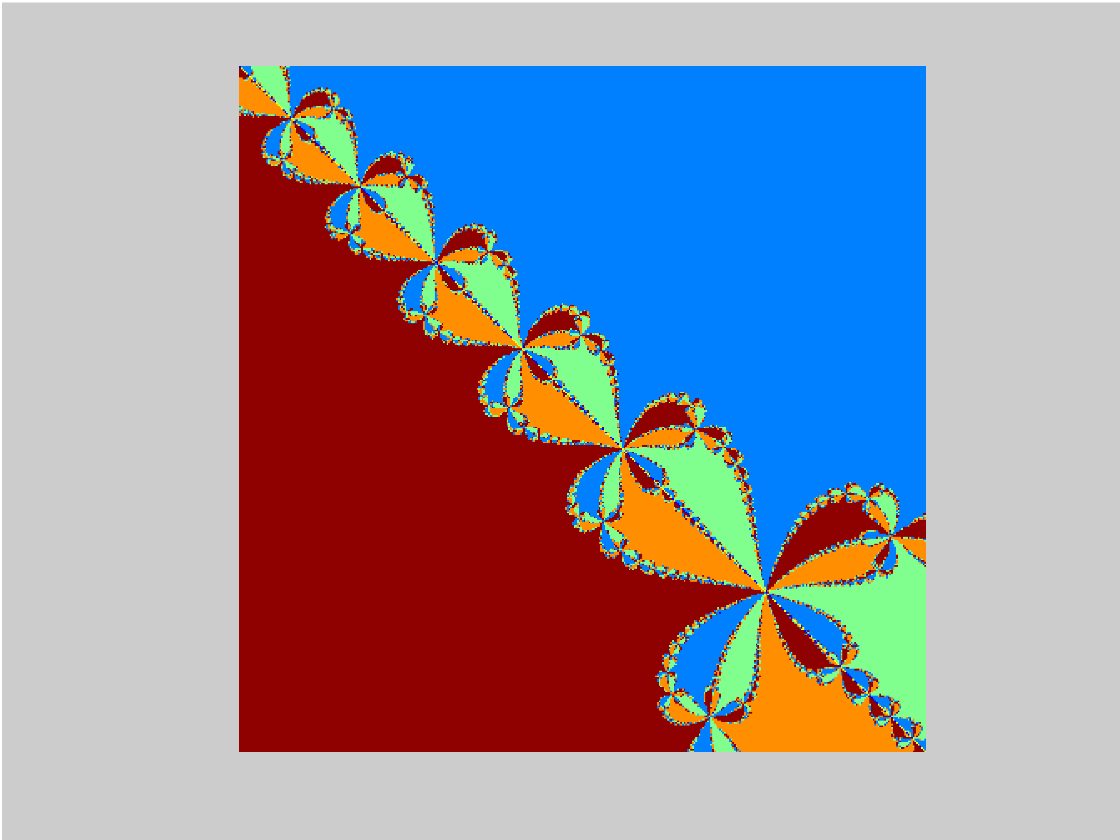
- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 8 (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



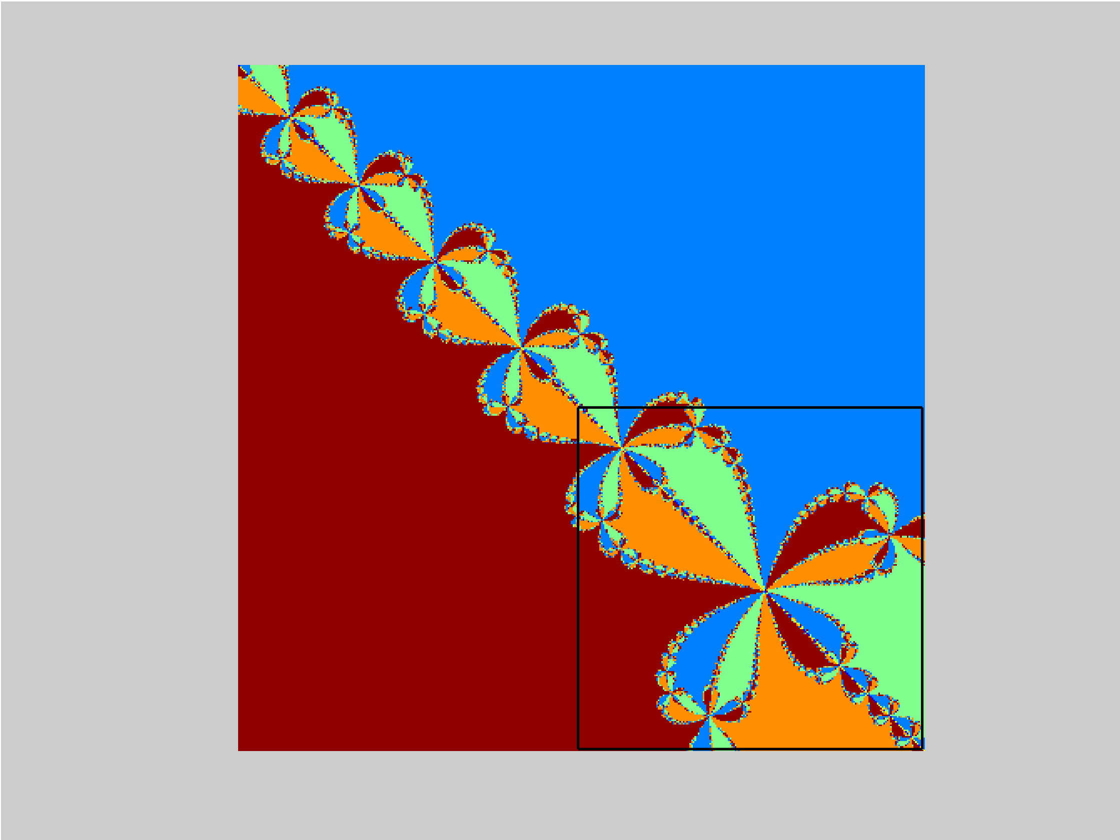
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



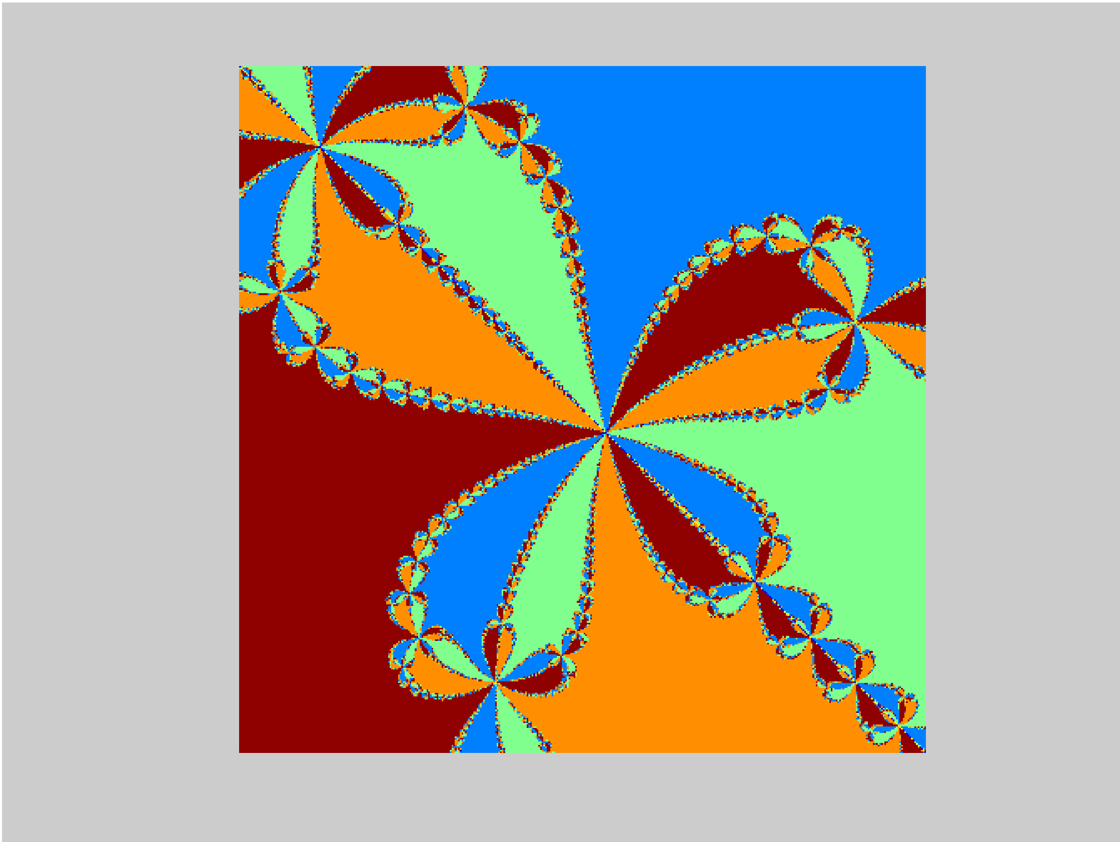
- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 16
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



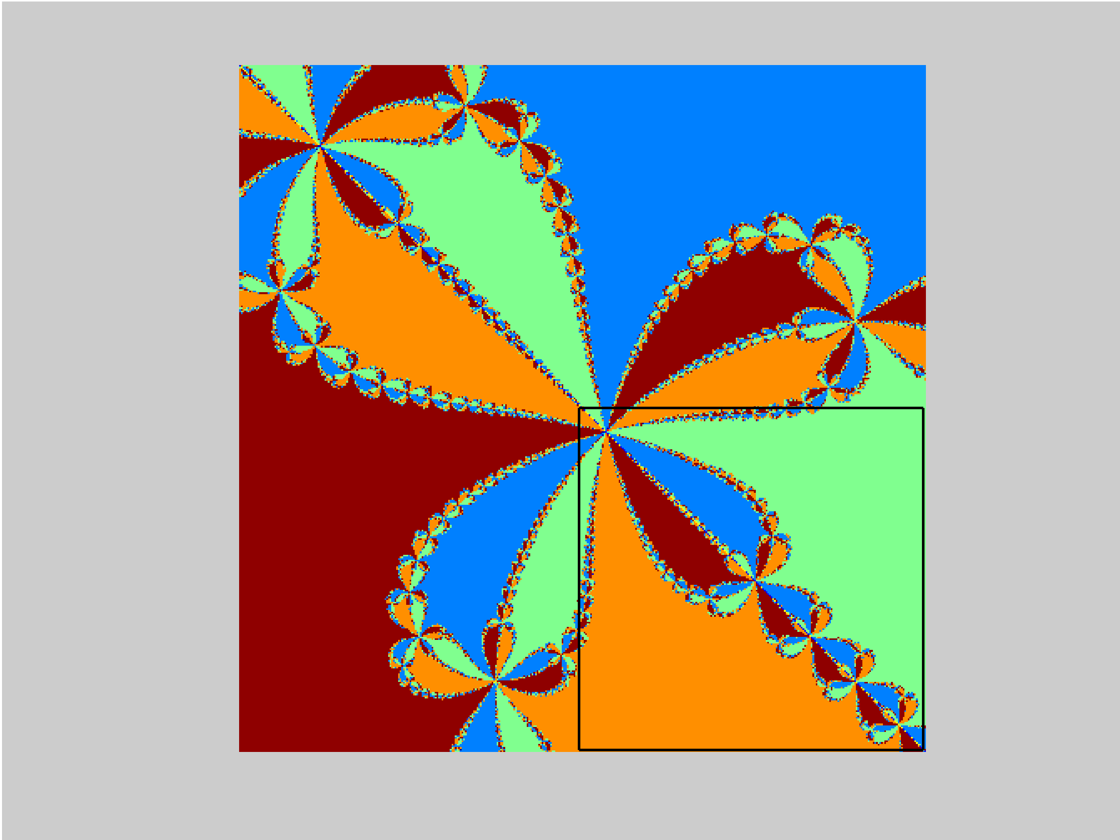
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



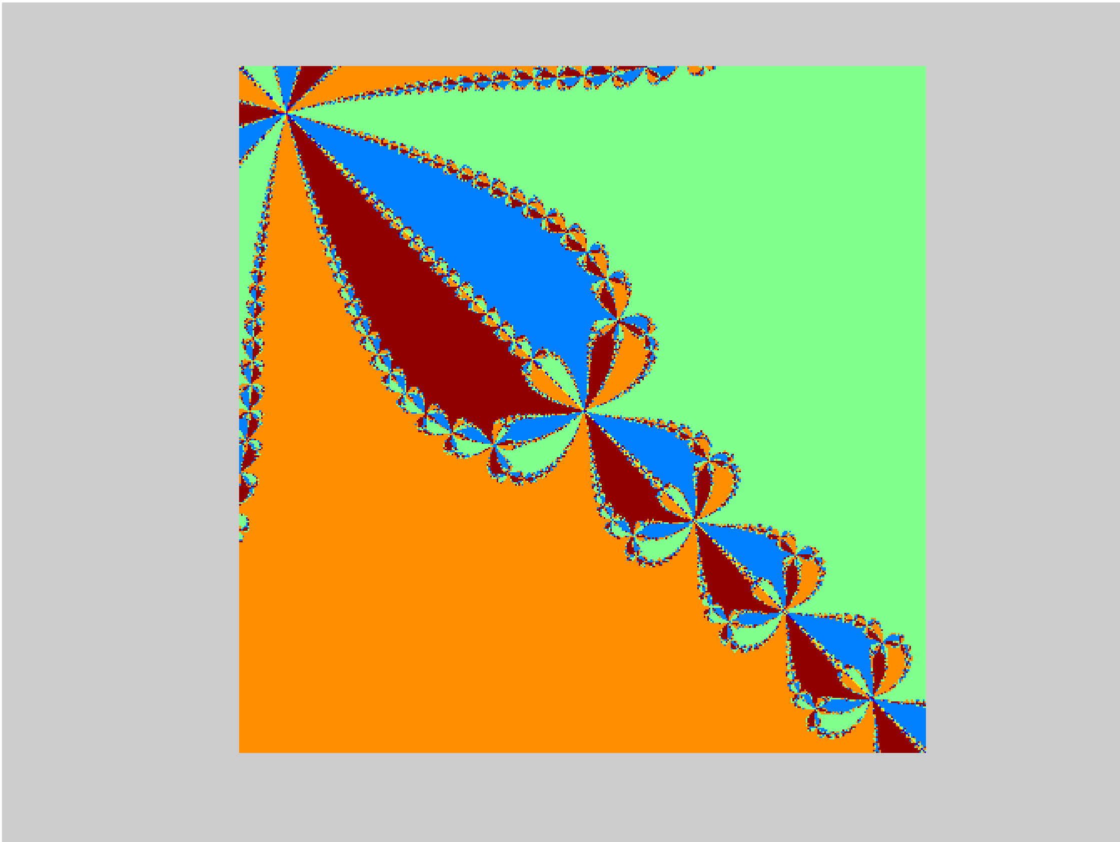
- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 32 (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



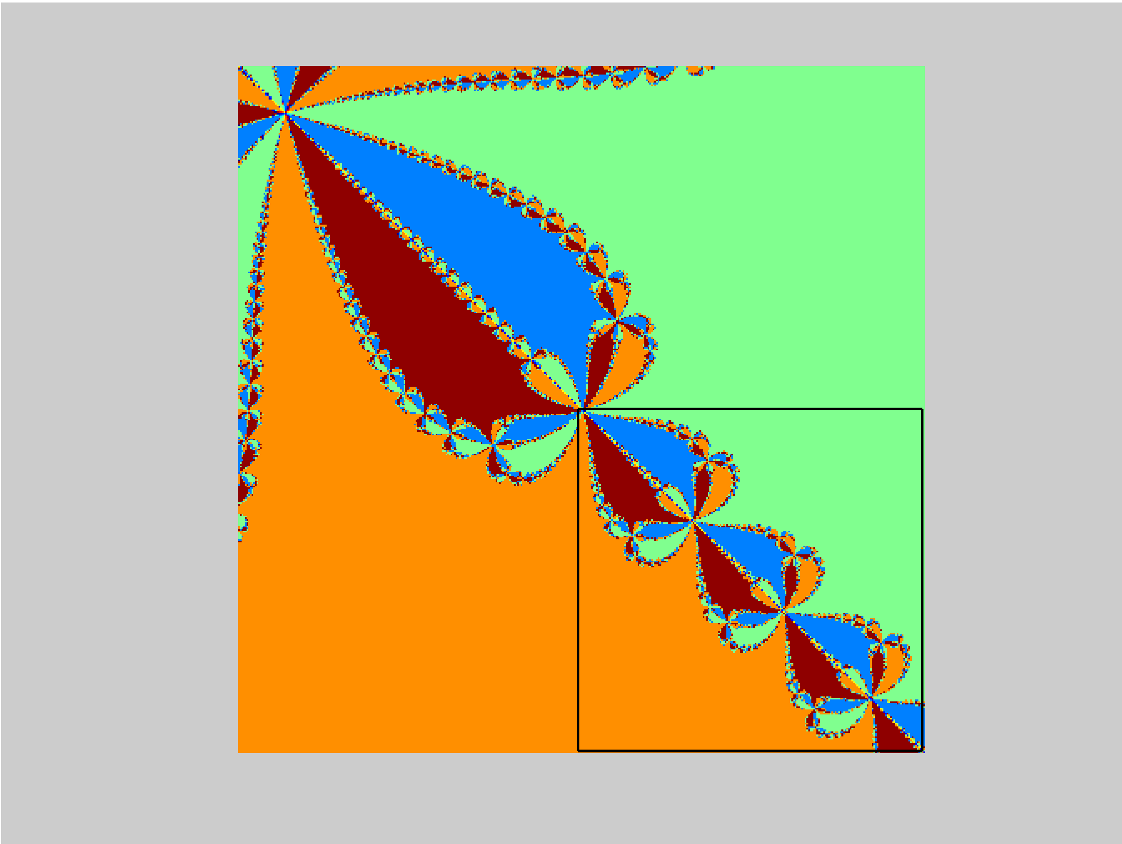
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



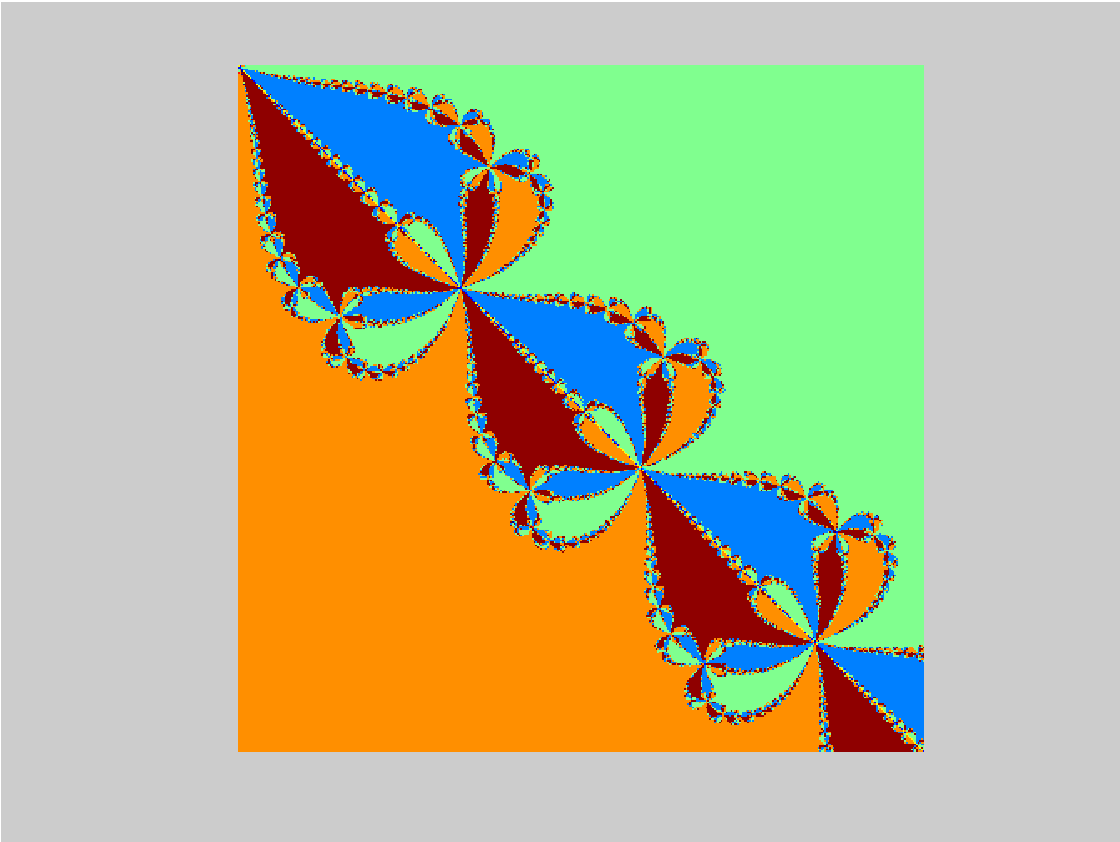
- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 64
(w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



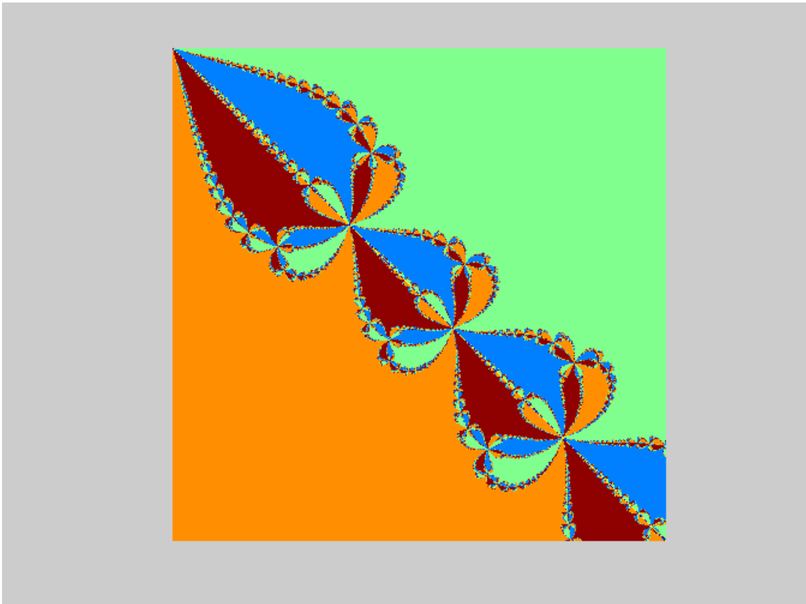
- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 128 (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

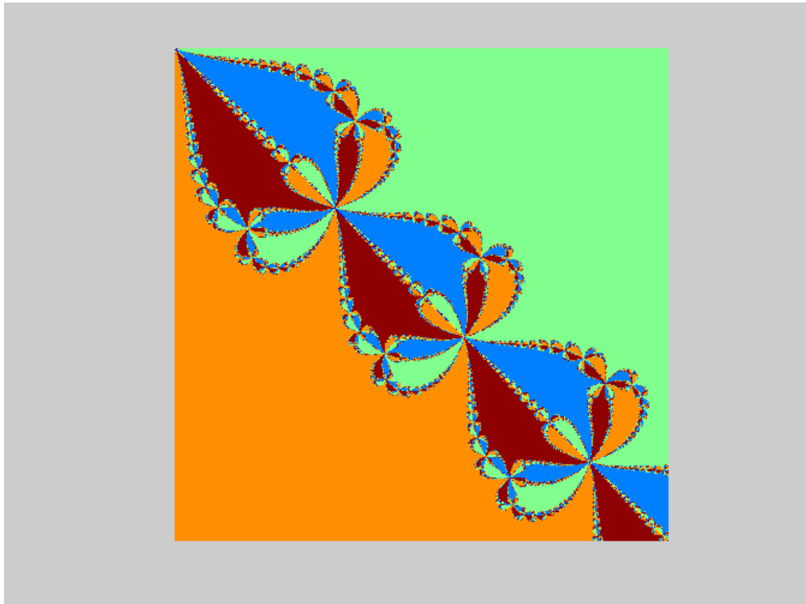
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

???

- Baseny przyciągania metody Newtona; powiększenie * 256
  (w problemie pierwiastków z jedynki czwartego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona





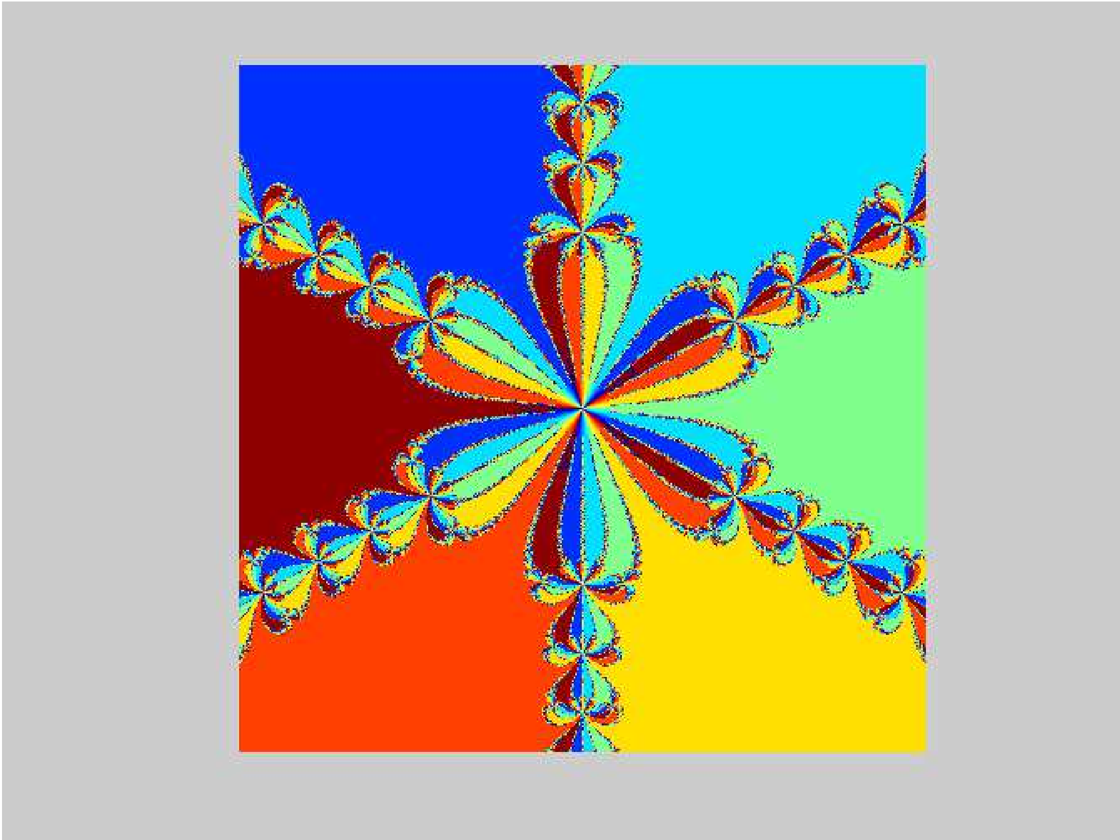
powiększenie * 2 powiększenie * 128

(porównanie)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

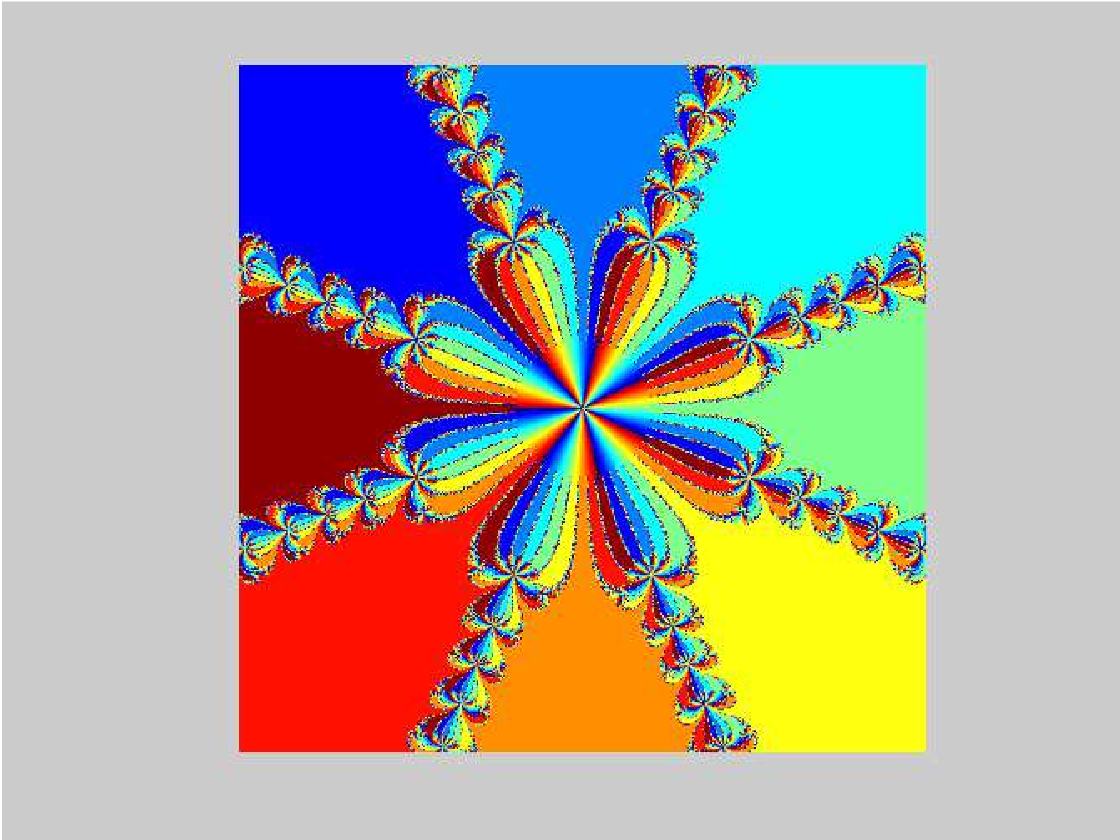
- A jak wyglądają baseny przyciagania dla pierwiastków z jedynki wyższych, parzystych stopni? (szóstego, ósmego, …)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki szóstego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki ósmego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

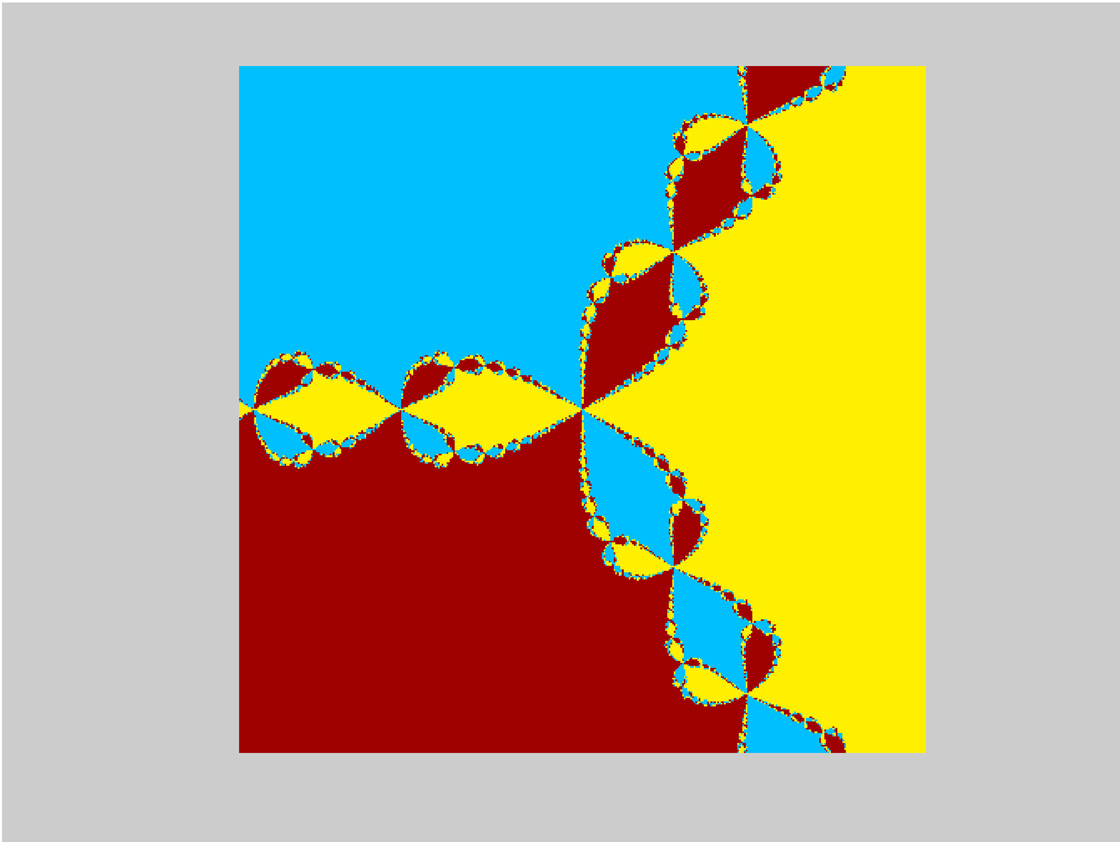
???

- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki dziesiątego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

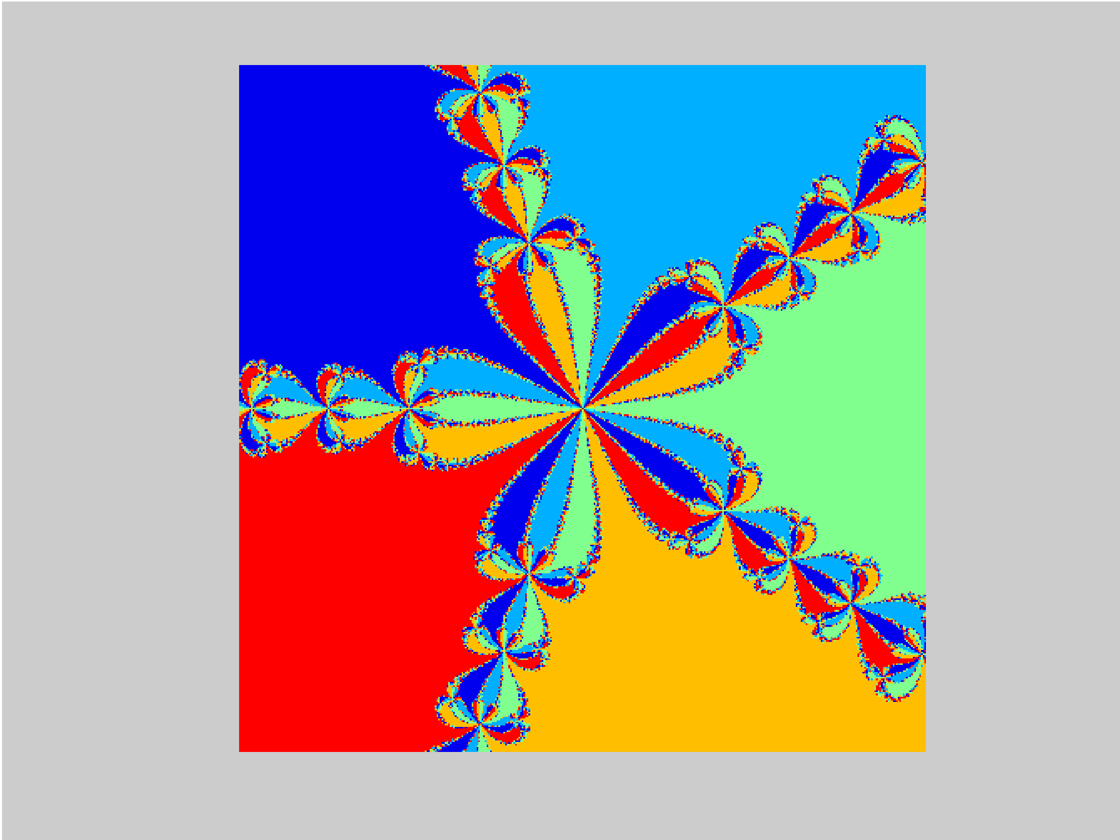
- A jak wyglądają baseny przyciagania dla pierwiastków
  z jedynki nieparzystych stopni? (trzeciego, piątego, …)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



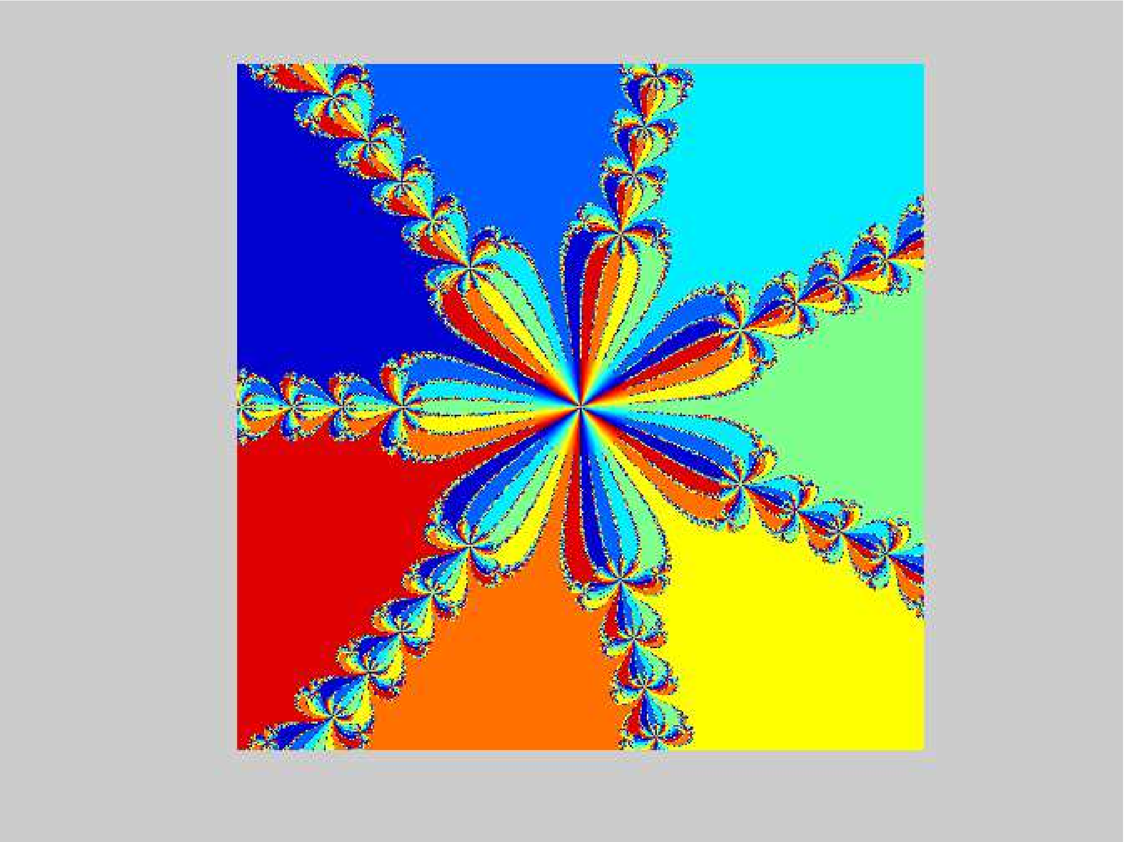
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki trzeciego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



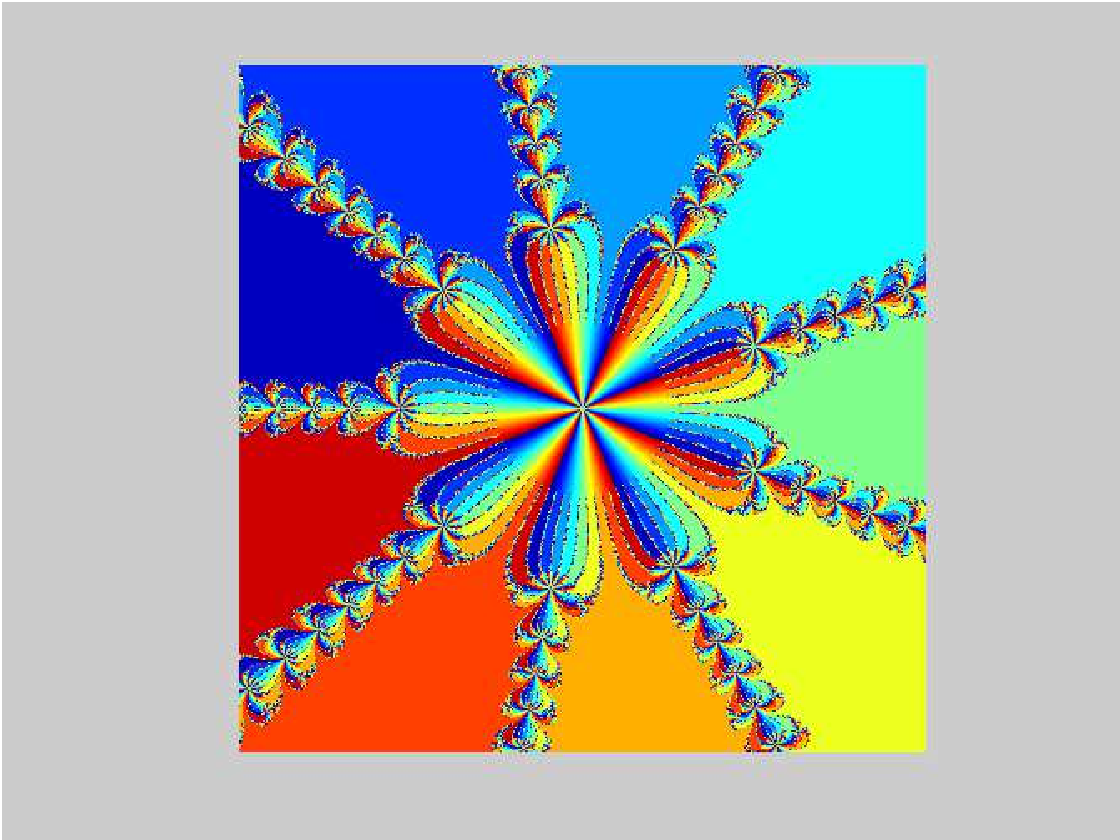
- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki piątego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki siódmego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



- Baseny przyciągania metody Newtona
  (w problemie pierwiastków z jedynki dziewiątego stopnia)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

Przypomnienie szczegółów poprzedniego problemu:
pierwiastki z jedynki n-tego stopnia to miejsca zerowe
funkcji zespolonej $f(x) = x^n - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

- Następny problem: jak wyglądają baseny przyciągania dla miejsc zerowych innych, potencjalnie dużo bardziej skomplikowanych, funkcji zespolonych?
- Np.:
  - $f(x) = x^n - 1$ dla
    - $n = 5.5$?
    - $n = -5.0$?
    - $n = -5.5$?
  - $f(x)$ będącej dowolnym wielomianem ?
  - $f(x)$ będącej ilorazem dowolnych wielomianów?
  - $f(x)$ będącej dowolną funkcją?

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Skrypt Matlab’a generujący przedstawione obrazy
  - całość (11 linii kodu + 3 linie komentarza)

```
% inicjalizacja danych
x = linspace(-1.5,+1.5,2000);
y = linspace(-1.5,+1.5,2000);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = X + i*Y;
n = 9;
% iteracja metody Newtona (uproszczona, bez warunków stopu)
for k = 1:50;
        Z = ((n-1)/n)*Z + (1/n)*1./(Z.^(n-1));
end
% wyświetlenie wyniku
imagesc(angle(Z));
axis square;
axis off;
```

…

Podsumowanie metod „newtonowskich”

- Skuteczne
  - uzasadnienie: niespotykanie wysoki rząd zbieżności
- Proste
  - uzasadnienie: trywialność programów implementujących
- Ciekawe
  - uzasadnienie: zastosowania w generowaniu obrazów fraktalnych

…