Materiały wykładowe
(fragmenty)

Robert Susmaga

Instytut Informatyki

ul. Piotrowo 2

Poznań

<u>kontakt mail'owy</u>

Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL

<u>kontakt osobisty</u>

Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

Techniki optymalizacji

Cz. 1

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

Autor

…

Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Skojarzenia
  - funkcja kwadratowa
  - parabola
  - wyróżnik (tzw. delta)
  - dwa pierwiastki
  - ...

  ale...
  - czy f(x) jest funkcją kwadratową?
  - czy f(x) jest funkcją liniową*?
  - czy f(x) jest funkcją stałą?

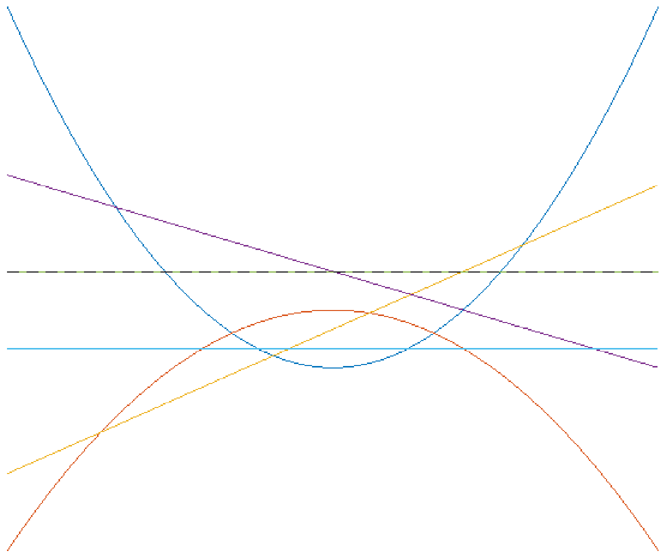
  (uwaga na inne relacje pomiędzy pojęciami (funkcja) „kwadratowa–liniowa” a (funkcja) „liniowa–stała”)

* na tym i kilku kolejnych slajdach:
„funkcja liniowa” to funkcja postaci $f(x) = ax + b$ (dla dowolnego a)
– czyli: funkcja afiniczna

Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Miejsca zerowe $f(x) = ax^2 + bx + c$ przy $a \neq 0$ (kwadratowa)
  - ...
- Miejsca zerowe $f(x) = ax^2 + bx + c$ przy $a = 0$ (liniowa)
  - miejsca zerowe $f(x) = 0x^2 + bx + c$ przy $b \neq 0$ (niestała)
    - ...
  - miejsca zerowe $f(x) = 0x^2 + bx + c$ przy $b = 0$ (stała)
    - miejsca zerowe $f(x) = 0x^2 + 0x + c$ przy $c \neq 0$
      - ...
    - miejsca zerowe $f(x) = 0x^2 + 0x + c$ przy $c = 0$
      - ...

Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$



…

Metody „newtonowskie”

- Mętlik terminologiczny
  - istnieje wiele metod noszących (pełną lub częściową) nazwę Newtona, z których jedne służą do poszukiwania ekstremów funkcji, a inne do poszukiwania miejsc zerowych funkcji
  - w ramach wykładu nazewnictwo tych metod będzie następujące
    - poszukiwanie ekstremów funkcji – metody optymalizacyjne
    - poszukiwanie miejsc zerowych funkcji – metody aproksymacyjne
  - uwaga:
    - nazywanie metod optymalizacyjnymi (w odróżnieniu od nazywania ich aproksymacyjnymi) jest nieco mylące, ponieważ także metody aproksymacyjne starają się znajdować rozwiązania optymalnie (ewentualnie w przybliżeniu optymalnie) i posługują się nieraz bardzo podobnymi technikami
    - lepszą praktyką byłoby nazywanie metod poszukujacych ekstremów funkcji metodami ekstremalizacyjnymi (lub – konkretnie, w zależności od specyfiki metody – minimalizacyjnymi względnie maksymalizacyjnymi)

Metody „newtonowskie”

- Mętlik terminologiczny, c.d.
  - optymalizacyjne metody newtonowskie (m.in.)
    - metoda jednowymiarowej optymalizacji Newtona (zwana także metodą Newtona-Raphsona)
    - metoda wielowymiarowej optymalizacji Newtona-Raphsona (zwana także metodą Newtona), jest naturalnym uogólnieniem metody (jednowymiarowej optymalizacji) Newtona na wiele wymiarów
    - metoda wielowymiarowej optymalizacji uogólniona Newtona (zwana także metodą Cauchy’ego), bezpośrednio wykorzystuje metodę (jednowymiarowej optymalizacji) Newtona
    - metoda wielowymiarowej optymalizacji Cauchyego
    - metoda wielowymiarowej optymalizacji Levenberga-Marquarda
    - …
  - aproksymacyjne metody newtonowskie (m.in.)
    - metoda jednowymiarowej aproksymacji Newtona
    - …

Metody „newtonowskie”

- W dalszej części wykładu
  - metoda Newtona
    - metoda aproksymacji jednowymiarowej
  - metoda Newtona
    - metoda optymalizacji jednowymiarowej
  - metoda Newtona-Raphsona
    - metoda optymalizacji wielowymiarowej
  - podstawowe modyfikacje metod Newtona-Raphsona (uogólniona metoda Newtona, metoda Cauchy’ego i metoda Levenberga-Marquarda)
    - metody optymalizacji wielowymiarowej
  - dalsze modyfikacje metod Newtona-Raphsona? (np. metoda Powella, metoda kierunków sprzężonych)
    - metody optymalizacji wielowymiarowej
  - inne metody? (np. metoda mnożników Lagrange’a)
    - metody optymalizacji wielowymiarowej

Metody „newtonowskie”

- Związek pomiędzy metodą (optymalizacyjną) Newtona a metodą (optymalizacyjną) Newtona-Raphsona
  - metoda Newtona-Raphsona jest naturalnym <u>uogólnieniem</u> metody Newtona na wiele wymiarów
      - nie mylić tego uogólnienia z metodą o nazwie „uogólniona metoda Newtona”!
    - a więc oczywiście może być stosowana w problemach jednowymiarowych
  - metoda Newtona jest naturalnym <u>uszczególnieniem</u> metody Newtona-Raphsona na jeden wymiar
    - a więc nie może może być stosowana w problemach wielowymiarowych

Metody „newtonowskie”

- Pytanie:
  w jakim sensie metoda Newtona-Raphsona
  jest „naturalnym” uogólnieniem metody Newtona?

- Odpowiedź:
  w takim samym, w jakim zapisany macierzowo układ równań
  z wieloma niewiadomymi jest uogólnieniem zapisanego skalarnie
  jednego równania z jedną niewiadomą
  - zapis skalarny: ax = b
  - zapis macierzowy: **Ax** = **b**

…

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Metoda (aproksymacyjna) Newtona
  - metoda aproksymacji jednowymiarowej bez ograniczeń (z ewentualnymi ograniczeniami na zakres zmienności zmiennej)
- Dane
  - jednowymiarowy obszar S
    - (obszar musi spełniać kilka dodatkowych założeń)
  - określona w obszarze S funkcja f(x)
    - (funkcja musi spełniać kilka dodatkowych założeń)
- Cel metody
  - znaleźć $x^0 \in S$ taki, że $f(x^0) = 0$ (poszukiwanie miejsc zerowych funkcji f(x) w obszarze S)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Idea metody Newtona (aproksymacji jednowymiarowej)
  - niech będzie dana analitycznie jednowymiarowa funkcja f(x), dla której poszukujemy miejsca zerowego w pewnym obszarze (w praktyce: w przedziale), i o której zakładamy, że w tym właśnie przedziale
    - jest ciągła
    - posiada pierwszą pochodną (daną analitycznie), która jest ciągła
  - uznaje się, że przebieg aproksymowanej, jednowymiarowej funkcji f(x) w otoczeniu pewnego ustalonego punktu x_0 jest taki sam, jak przebieg pewnej funkcji afinicznej, czyli funkcji postaci $g(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, o parametrach a i b tak dobranych, aby „dobrze" odzwierciedlały przebieg funkcji f(x)
    - do „jakości" takiego odzwierciedlenia przyczyniają się oczywiście powyższe założenia dotyczące funkcji f(x), które (nie przez przypadek, oczywiście) są także właściwościami funkcji afinicznej postaci $g(x) = ax+b$, gdzie $a \neq 0$
  - przybliżenie funkcji f(x) jest wykonywane z użyciem jej pochodnych

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Idea metody Newtona (aproksymacji jednowymiarowej), c.d.
  - za miejsce zerowe funkcji f(x) uznaje się miejsce zerowe funkcji g(x), przy czym:
    - jeżeli znaleziony punkt (czyli miejsce zerowe afinicznej funkcji g(x)) stanowi miejsce zerowe optymalizowanej funkcji f(x), to zadanie jest zakończone
      - powyższe sprawdzenie może nie być trywialne
      - ogólne rozwiązanie tego problemu stanowi osobne zagadnienie (warunek stopu)
    - jeżeli znaleziony punkt (czyli miejsce zerowe afinicznej funkcji g(x)) nie stanowi miejsca zerowego aproksymowanej funkcji f(x), to przyjmuje się, że stanowi on lepsze przybliżenie poszukiwanego miejsca zerowego i powtarza się całe postępowanie
      - powyższe przyjęcie może być błędne
      - ogólne rozwiązanie tego problemu stanowi osobne zagadnienie (niezbieżność)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Idea metody Newtona (aproksymacji jednowymiarowej), c.d.
  - funkcja afiniczna i jej pochodna
    - funkcja: $g(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$
    - jej pierwsza pochodna: $g'(x) = a$
  - położenie miejsca zerowego funkcji afinicznej
    - przyrównanie funkcji do zera: $ax + b = 0$
    - miejsce zerowe: $x = -b/a$
  - ponieważ (z założenia) $a \neq 0$, więc miejsce zerowe istnieje
    - uwaga: w zależności od a i b, funkcja $g(x) = ax + b$ może mieć różne liczby miejsc zerowych, a konkretnie:
      - ma jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$
      - nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$
      - ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b = 0$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przybliżanie funkcji $f(x)$ funkcją afiniczną z użyciem pochodnych
  - jeżeli odpowiednie pochodne funkcji $f(x)$ istnieją w pewnym obszarze S, to w tym obszarze możliwe jest przybliżenie tej funkcji wykorzystujące jej rozwinięcie w szereg Taylora
  - wykorzystując dwuelementowe przybliżenie $q(x)$ rozwinięcia funkcji $f(x)$ wokół punktu $y \in S$ mamy dla każdego $x \in S$

    $f(x) \approx q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
  - funkcja $q(x)$
    - stanowi przybliżenie funkcji $f(x)$
    - jest dwuelementowym rozwinięciem $f(x)$ w szereg Taylora wokół punktu x_0
    - ma postać $g(x) = ax + b$ ponieważ

      $q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$

      a więc: $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$
  - uwaga: metodę Newtona wykorzystującą n+1-elementowe rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Taylora nazywamy metodą stopnia n
    - w tym przypadku mamy więc do czynienia z metodą stopnia $n = 1$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Poszukiwanie przybliżenia miejsca zerowego
  - zakładamy, że dla każdego $x \in S$ spełniony jest warunek $f'(x) \neq 0$
  - powyższe założenie oraz zależności $a = f'(x_0)$ i $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ pozwalają na następujące określenie rozwiązania funkcji

    $x = -b/a =$
    $= -(f(x_0) - f'(x_0)x_0)/f'(x_0) =$
    $= (f'(x_0)x_0 - f(x_0))/f'(x_0) =$
    $= x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

  - jeżeli x_0 jest dowolnym punktem ustalonego obszaru S, to (zgodnie z zasadą przybliżania funkcji f(x) funkcją afiniczną) punkt $x = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ jest miejscem zerowym funkcji f(x) lub lepszym przybliżeniem tego miejsca zerowego niż punkt x_0

    (powyższe „działa" także w przypadku, gdy x_0 jest już miejscem zerowym funkcji f(x) /ale spełniającym $f'(x_0) \neq 0$/, ponieważ wtedy $x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = x_0 - 0/f'(x_0) = x_0 - 0 = x_0$)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Schemat iteracyjny metody
  - zasada ustalania następnego punktu na podstawie poprzedniego pozwala na sformułowanie następującego schematu iteracyjnego

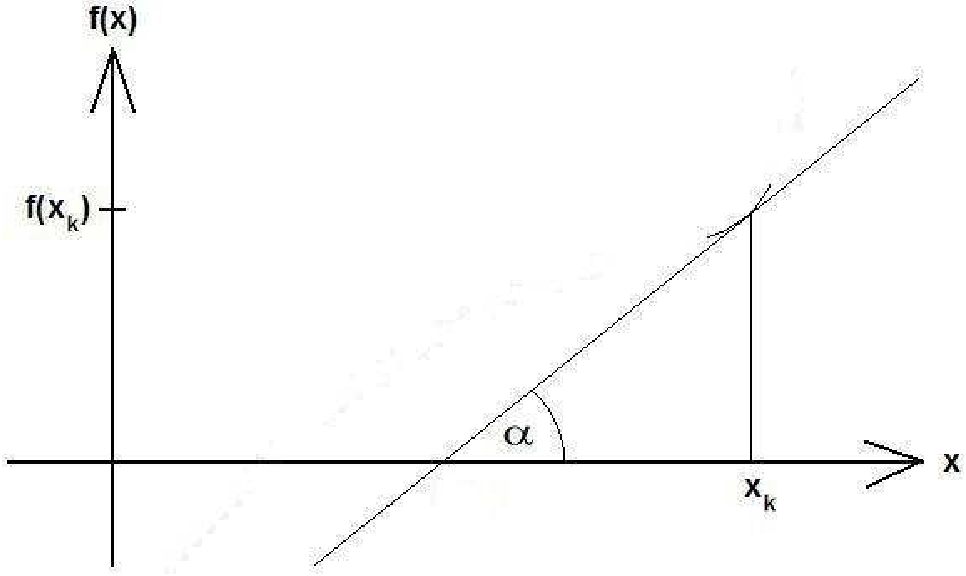
    $x_{k+1} = x_k – f(x_k)/f'(x_k)$

    <u>Algorytm</u>

    1. ustal punkt x_0 i podstaw $k = 0$
    2. dopóki nie zachodzi warunek stopu, wykonuj:
       - oblicz $x_{k+1} = x_k – f(x_k)/f'(x_k)$
       - podstaw $k = k + 1$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

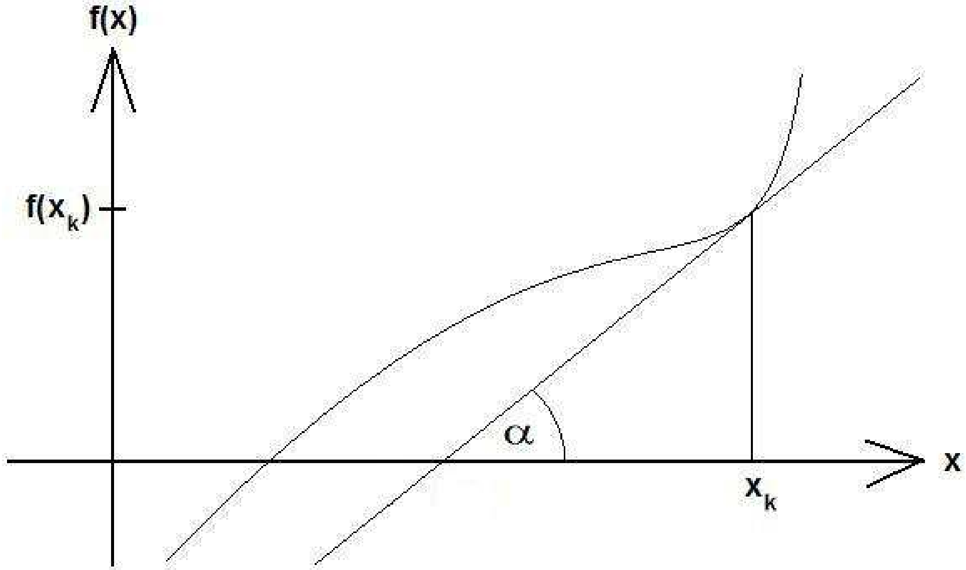
- Interpretacja geometryczna metody



- Dane: funkcja f(x) wraz z pochodną f'(x), a dla nich
  - x_k (punkt na osi poziomej)
  - $f(x_k)$ (punkt na osi pionowej)
  - $f'(x_k)$ (tangens kąta zawartego pomiędzy osią poziomą a prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie x_k)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

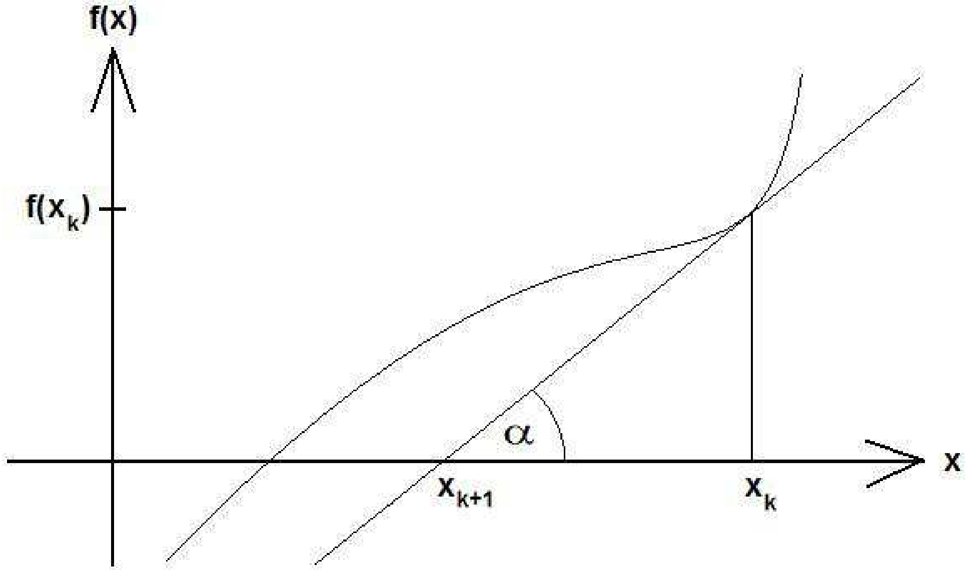
- Interpretacja geometryczna metody



- Więcej informacji o funkcji (w tym przypadku dość skomplikowanej)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

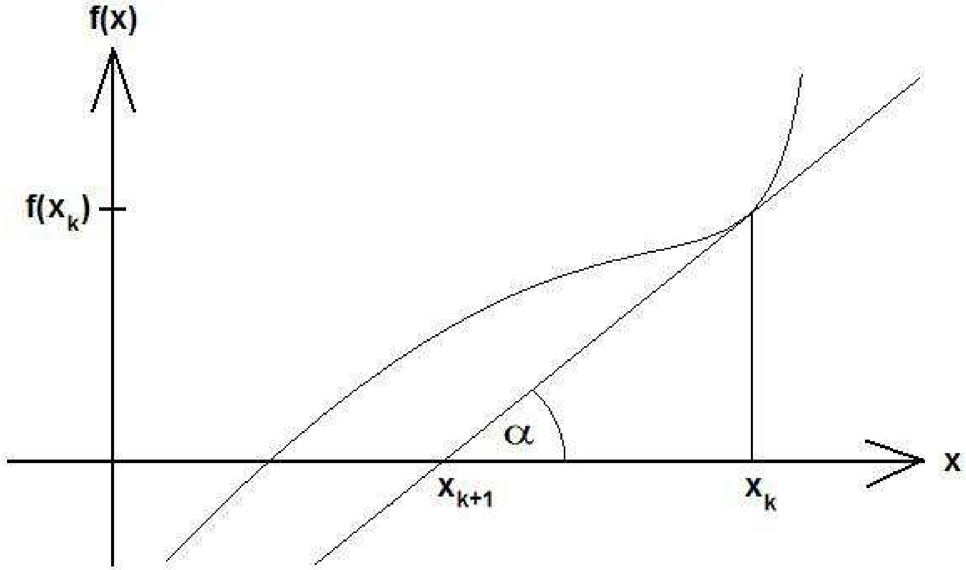
- Interpretacja geometryczna metody



- Poszukiwane: x_{k+1} (przybliżenie miejsca zerowego)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Interpretacja geometryczna metody

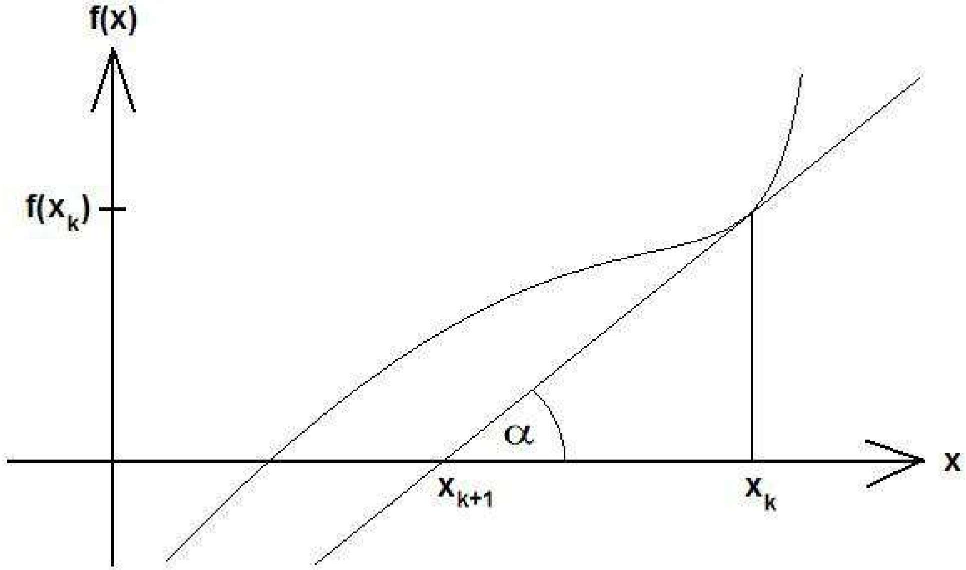


- Wykorzystując $f'(x_k) = tg(\alpha)$ oraz $tg(\alpha) = f(x_k)/(x_k - x_{k+1})$
  - założenie: $x_k - x_{k+1} \neq 0$

  otrzymujemy zależność $f(x_k)/(x_k - x_{k+1}) = f'(x_k)$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

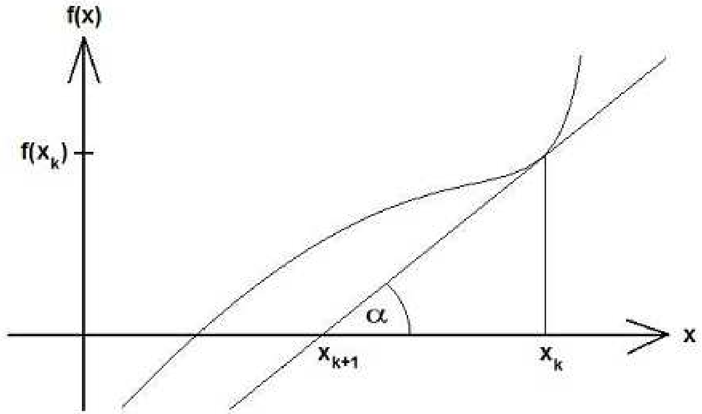
- Interpretacja geometryczna metody



- Przekształcenie zależności $f(x_k)/(x_k – x_{k+1}) = f'(x_k)$ prowadzi do $f(x_k)/f'(x_k) = x_k – x_{k+1}$, a więc ostatecznie
  $x_{k+1} = x_k – f(x_k)/f'(x_k)$
  – założenie: $f'(x_k) \neq 0$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Mocno uproszczona wersja metody (sytuacja $f'(x) \approx 1$)



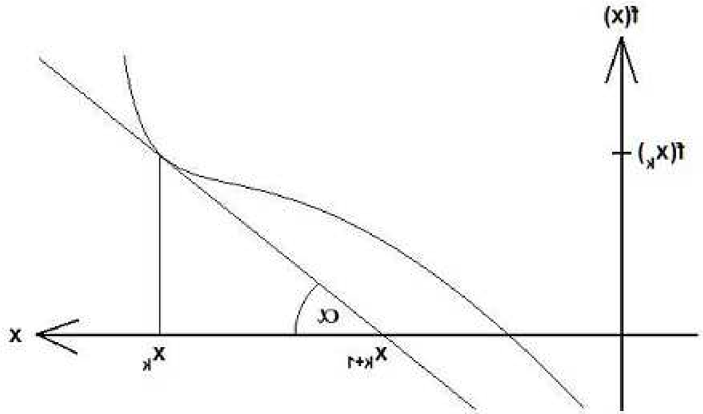
$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/1 = x_k - f(x_k)$

- wartość przesunięcia: zawsze o $f(x_k)$

– gdy $f(x_k) > 0$, to $x_{k+1} < x_k$ (przesunięcie w lewo)
– gdy $f(x_k) = 0$, to koniec
– gdy $f(x_k) < 0$, to $x_{k+1} > x_k$ (przesunięcie w prawo)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Mocno uproszczona wersja metody (sytuacja $f'(x) \approx -1$)



$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/(-1) = x_k + f(x_k)$$

  - wartość przesunięcia: zawsze o $f(x_k)$

– gdy $f(x_k) > 0$, to $x_{k+1} > x_k$ (przesunięcie w prawo)

– gdy $f(x_k) = 0$, to koniec

– gdy $f(x_k) < 0$, to $x_{k+1} < x_k$ (przesunięcie w lewo)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Mocno uproszczona wersja metody (sytuacja f’(x) $\approx$ 0)

???

$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/0 = ???$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Potencjalne warunki stopu metody
  - osiągnięcie miejsca zerowego
    - teoretycznie badamy: $f(x_k) = 0$
    - praktycznie badamy: $|f(x_k)| \leq \varepsilon$
  - ustabilizowanie wyniku
    - teoretycznie badamy: $x_{k+1} = x_k$
    - praktycznie badamy: $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$
  - przekroczenie maksymalnej liczby iteracji
    - $k > k_0$

gdzie

- ε jest (małą) dodatnią wartością rzeczywistą (dokładność obliczeń)
- k_0 jest (dużą) dodatnią wartością całkowitą (maksymalna liczba iteracji)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Zbieżność metody
  - metoda nie gwarantuje zbieżności dla każdego wektora początkowego
  - teoretyczne przyczyny ewentualnej niezbieżności
    - zerowość pierwszej pochodnej (a więc nie istnieje jej odwrotność)
      rezultat: nie można obliczyć x_{k+1}
    - niewłaściwy krok metody (choć prawidłowo obliczony)
      rezultat: $|f(x_{k+1})| \geq |f(x_k)|$
  - praktyczne przyczyny ewentualnej niezbieżności
    - ...
  - w (korzystnych) przypadkach zbieżnych: (w pobliżu rozwiązania) zbieżność rzędu drugiego (czyli wysoka!)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Czy są możliwe sytuacje, w których (aproksymacyjna) metoda Newtona nie działa wcale?
  - tak
  - przyczyny
    - pochodna nieokreślona (nie można zainicjować ciągu $\{x_k\}$)
    - pochodna dla pewnego x_k zerowa (nie można utworzyć elementu x_{k+1})
    - ciąg $\{x_k\}$ jest niezbieżny, a więc np.:
      - ciąg $\{x_k\}$ dąży do $+\infty$
      - ciąg $\{x_k\}$ dąży do $-\infty$
      - ciąg $\{x_k\}$ jest cykliczny
      - ciąg $\{x_k\}$ przejawia inne powody niezbieżności
        - » np.: +1, –2, +4, –8, +16, –32, +64, –128, +256, …

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Czy są możliwe sytuacje, w których (aproksymacyjna) metoda Newtona nie działa jednoznacznie (w jakimś sensie)?
  - tak
  - przyczyna
    - istnienie wielu miejsc zerowych
      - z których różne mogą zostać osiągnięte (zależnie od doboru punktu startowego)

…

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Pytanie:
  - czy istnieją, a jeżeli tak, to jak konstruować i jak wyglądają (już po skonstruowaniu) metody Newtona wyższych stopni?
- Odpowiedzi:
  - teoretycznie istnieją, w praktyce nie są używane (może z wyjątkiem metody stopnia 2)
  - konstrukcja analityczna staje się trudniejsza dla wyższych stopni

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Konstrukcja metod wyższych stopni
  - metoda stopnia 1 (powtórzenie)
    - wykorzystane rozwinięcie $f(x) \approx q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
    - traktując $y = x-x_0$ jako argument rozwinięcia, zapisujemy powyższą funkcję w postaci $q_y(y) = f(x_0) + f'(x_0)y$
    - wtedy $q_y(y) = 0$ dla $y = -f(x_0)/f'(x_0)$
    - czyli $x-x_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$
    - powstały schemat iteracyjny: $x = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Konstrukcja metod wyższych stopni
  - metoda stopnia 2 (/analogiczne/ wyprowadzenie)
    - wykorzystane rozwinięcie $f(x) \approx q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2$
    - traktując $y = x-x_0$ jako argument rozwinięcia, zapisujemy powyższą funkcję w postaci $q_y(y) = f(x_0) + f'(x_0)y + f''(x_0)y^2/2$
    - wtedy $q_y(y) = 0$ dla $y = -f(x_0)\pm((f'(x_0))^2-2f''(x_0)f(x_0))^{1/2}/f''(x_0)$
    - czyli dla $x-x_0 = -f(x_0)\pm((f'(x_0))^2-2f''(x_0)f(x_0))^{1/2}/f''(x_0)$
    - powstały schemat iteracyjny: $x = x_0 - f(x_0)\pm((f'(x_0))^2-2f''(x_0)f(x_0))^{1/2}/f''(x_0)$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Konstrukcja metod wyższych stopni
  - metoda stopnia 3 (idea /analogicznego/ wyprowadzenia)
    - wykorzystane rozwinięcie
      $f(x) \approx q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2 + f'''(x_0)(x-x_0)^3/6$
    - traktując $y = x-x_0$ jako argument rozwinięcia,
      zapisujemy powyższą funkcję w postaci
      $q_y(y) = f(x_0) + f'(x_0)y + f''(x_0)y^2/2 + f'''(x_0)y^3/6$
    - wtedy $q_y(y) = 0$ dla $y = \langle$wzór-na-miejsca-zerowe-q(x)$\rangle$
    - czyli dla $x-x_0 = \langle$wzór-na-miejsca-zerowe-q(x)$\rangle$
    - powstały schemat iteracyjny: $x = x_0 - \langle$wzór-na-miejsca-zerowe-q(x)$\rangle$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Konstrukcja metod wyższych stopni
  - metoda stopnia 4 (idea /analogicznego/ wyprowadzenia)
  - itd.., itp..

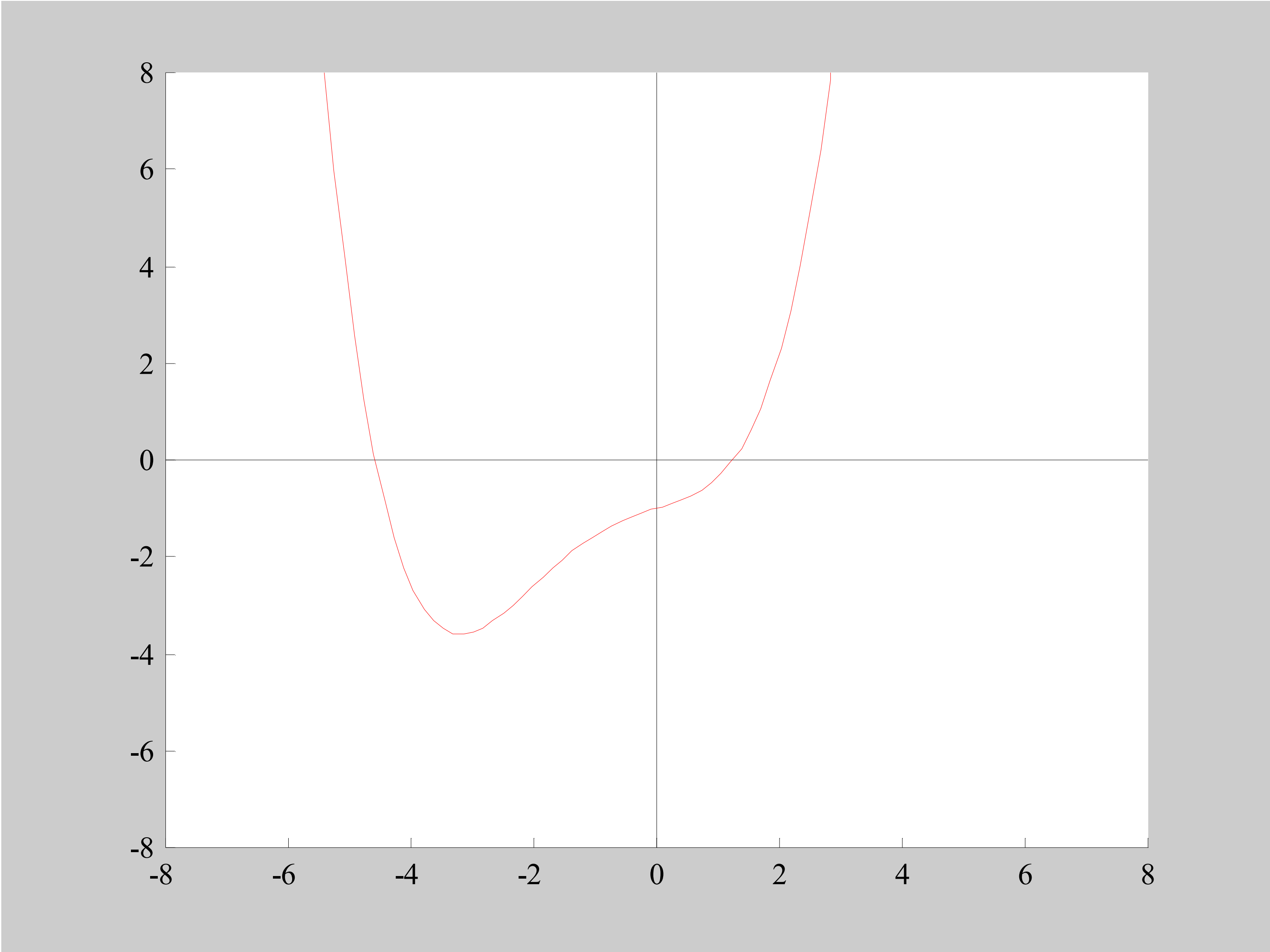
…

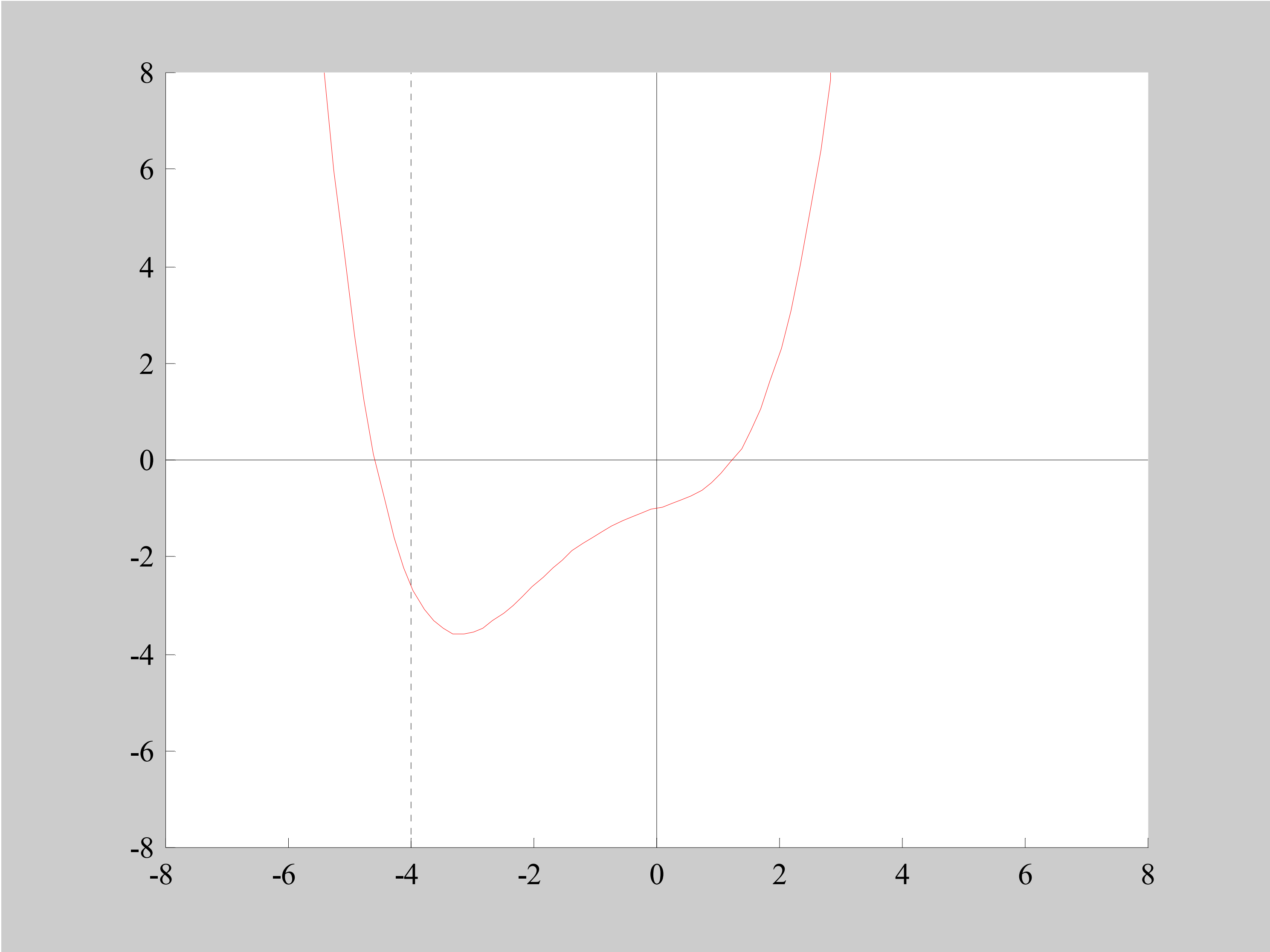
Metoda Newtona (aproksymacyjna)

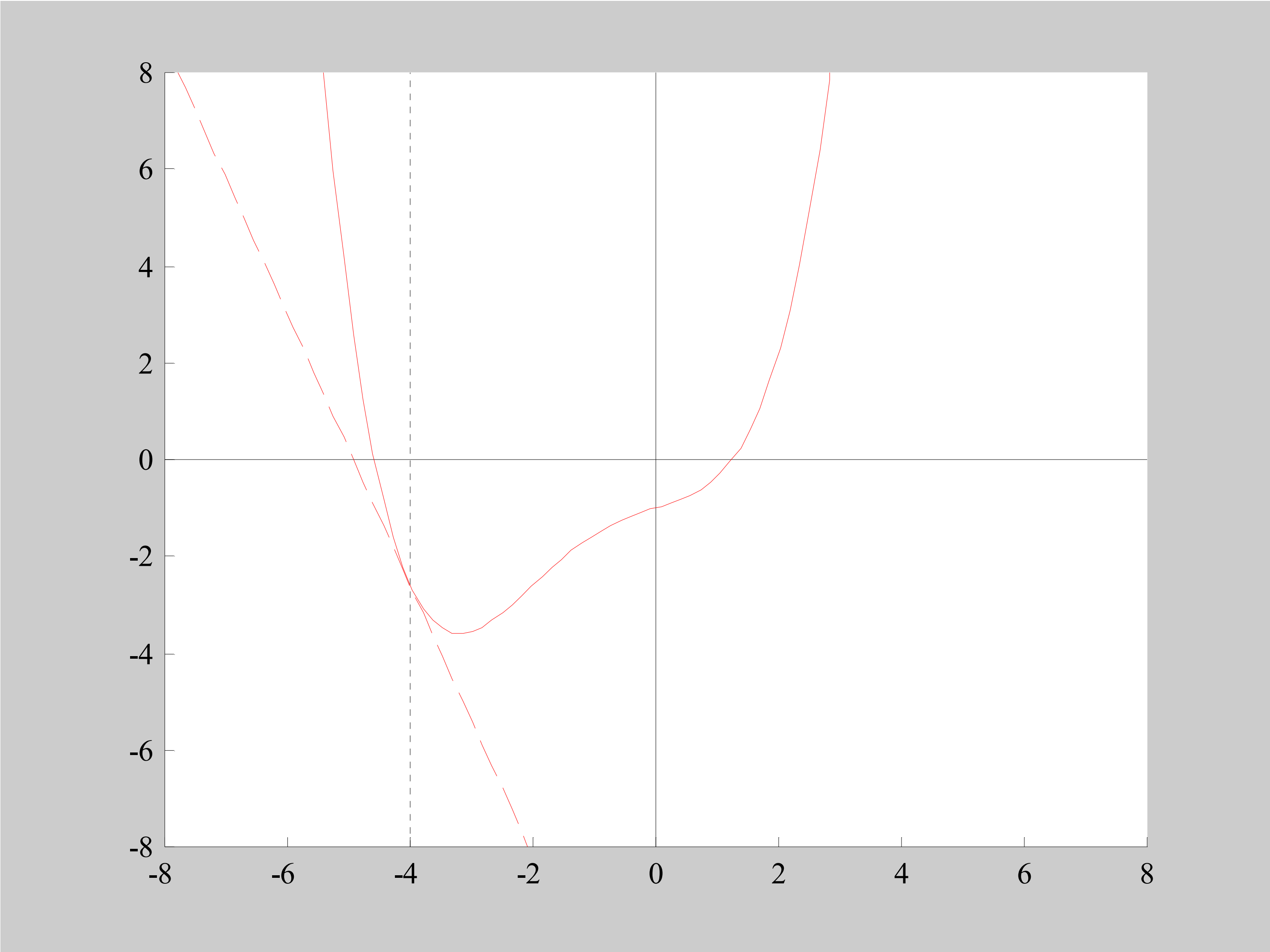
- Przykład przybliżania funkcji danej funkcją przybliżającą (liniową) /cel: znalezienie miejsca zerowego funkcji danej/
  - funkcja

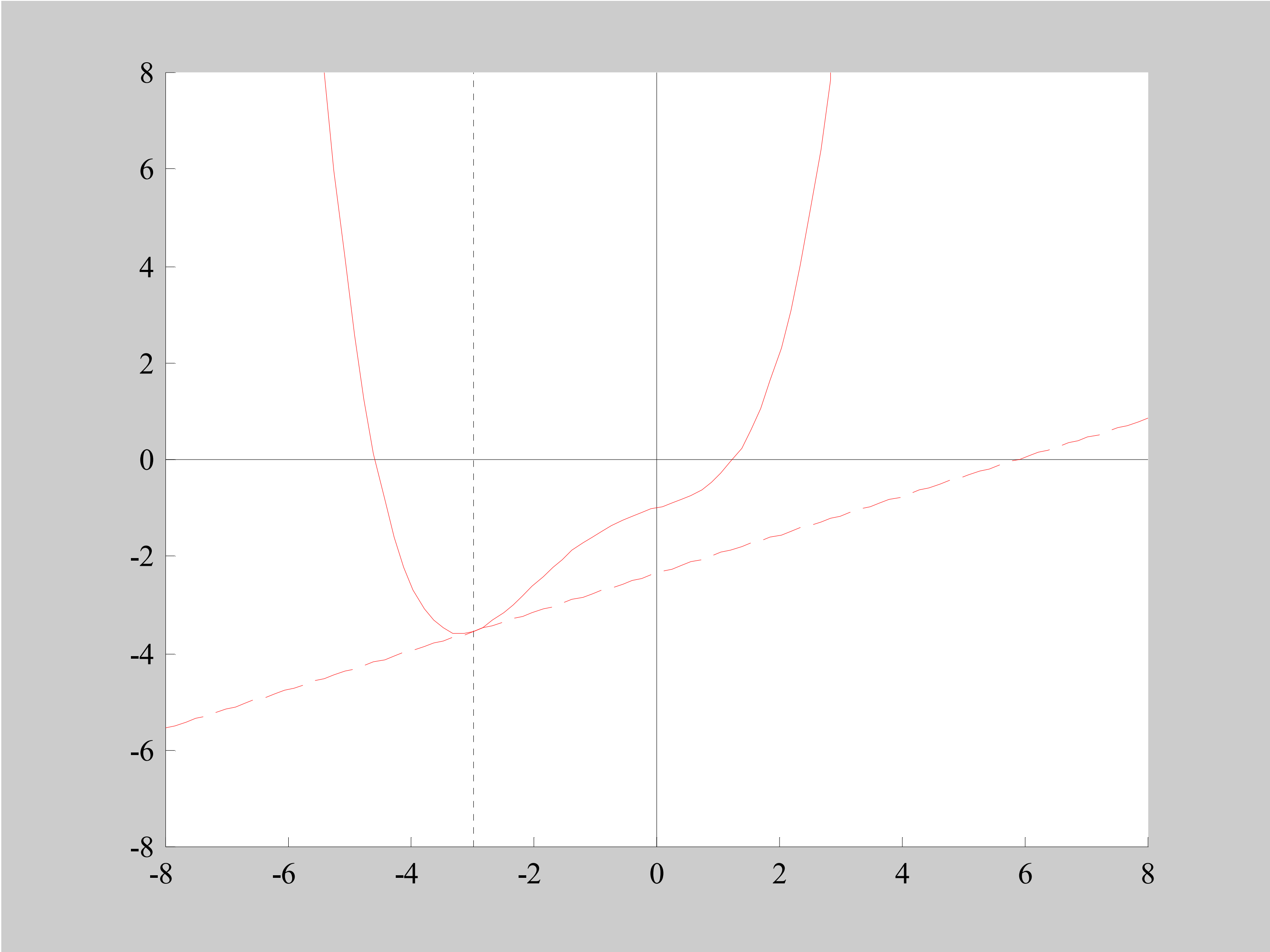
    $f(x) = 0.05x^4 + 0.2x^3 + 0x^2 + 0.4x - 1$
  - (przykładowe) punkty, w których znajdujemy przybliżenie

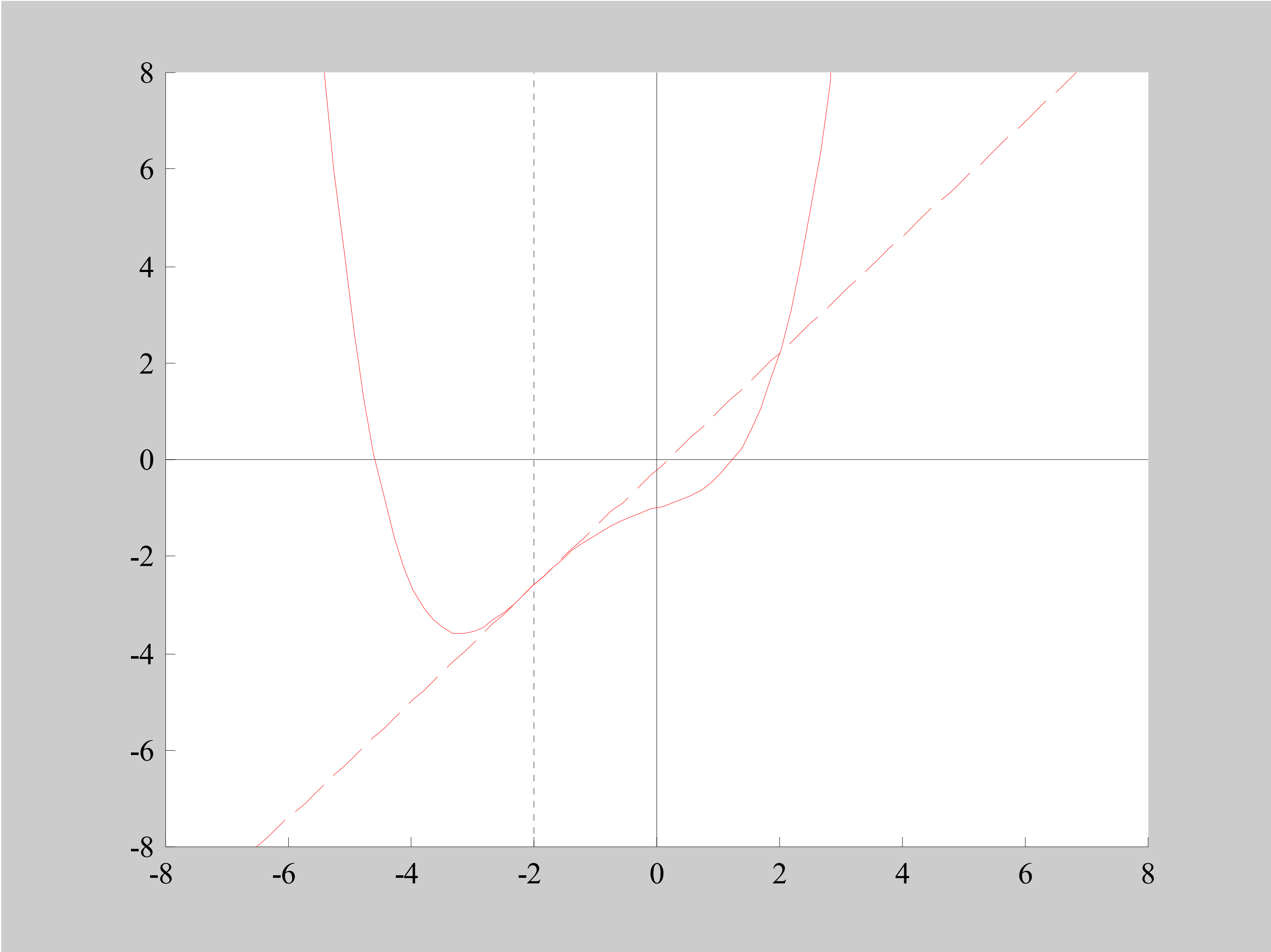
    x_0: –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4

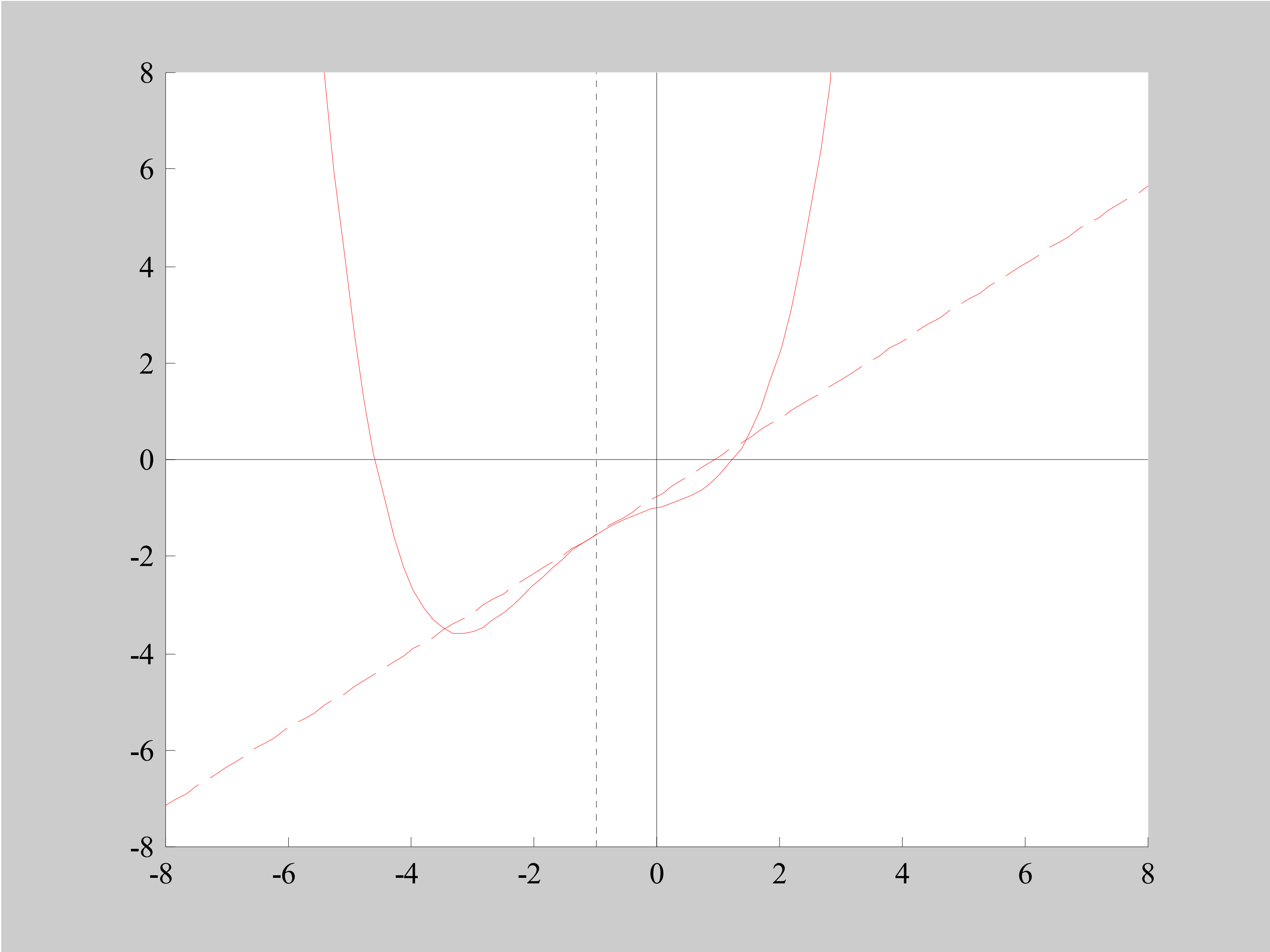

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

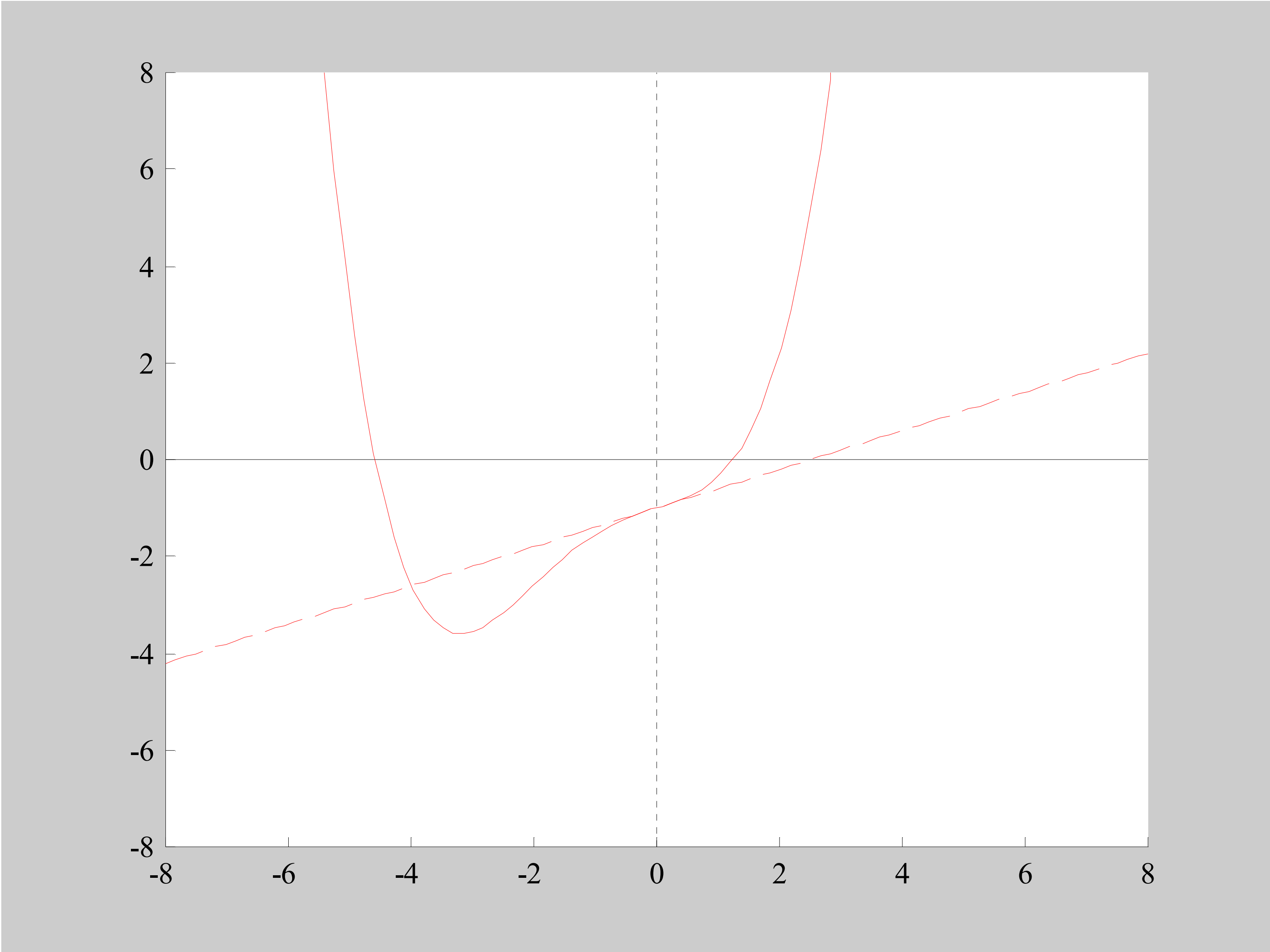

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

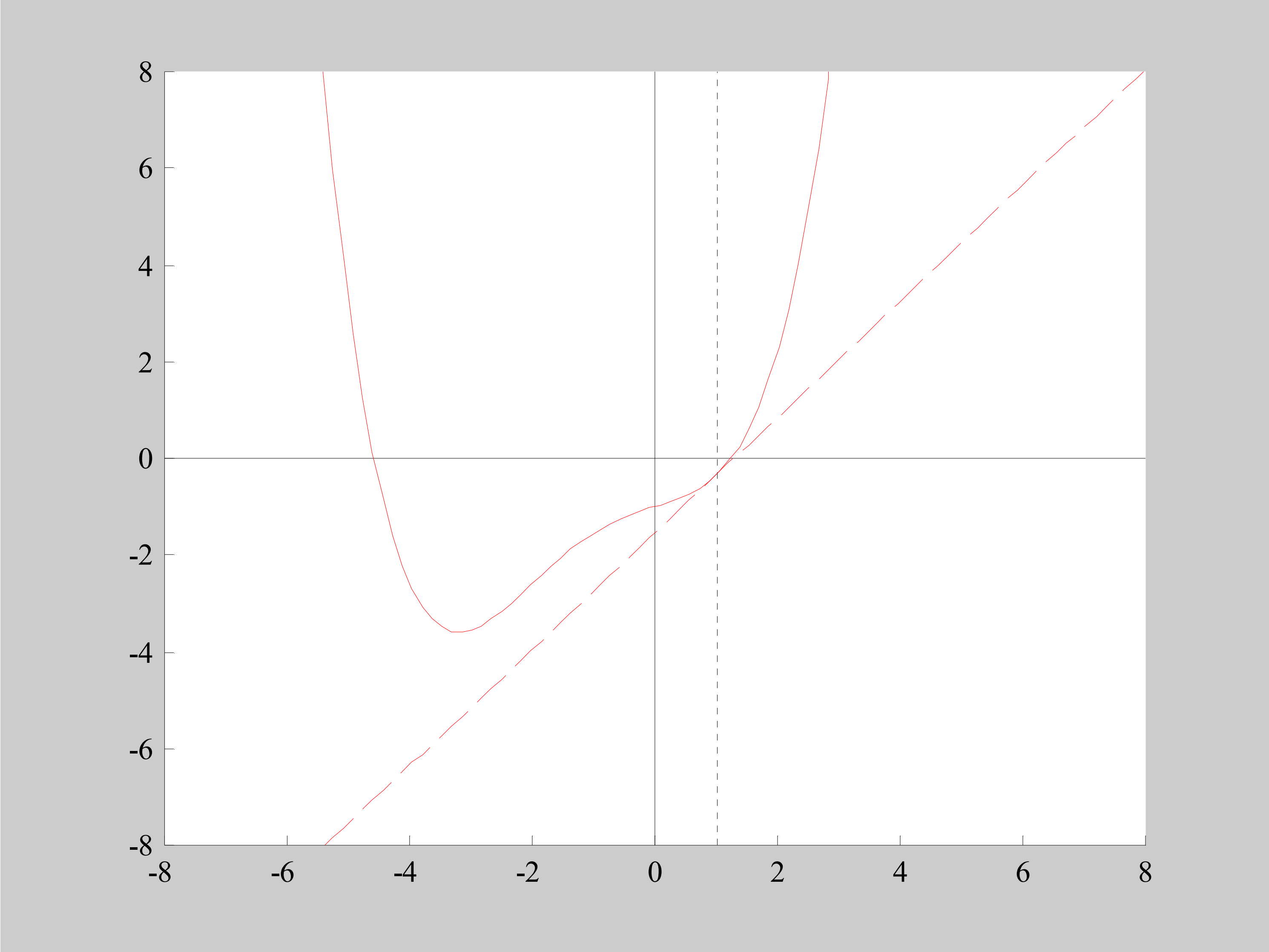

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

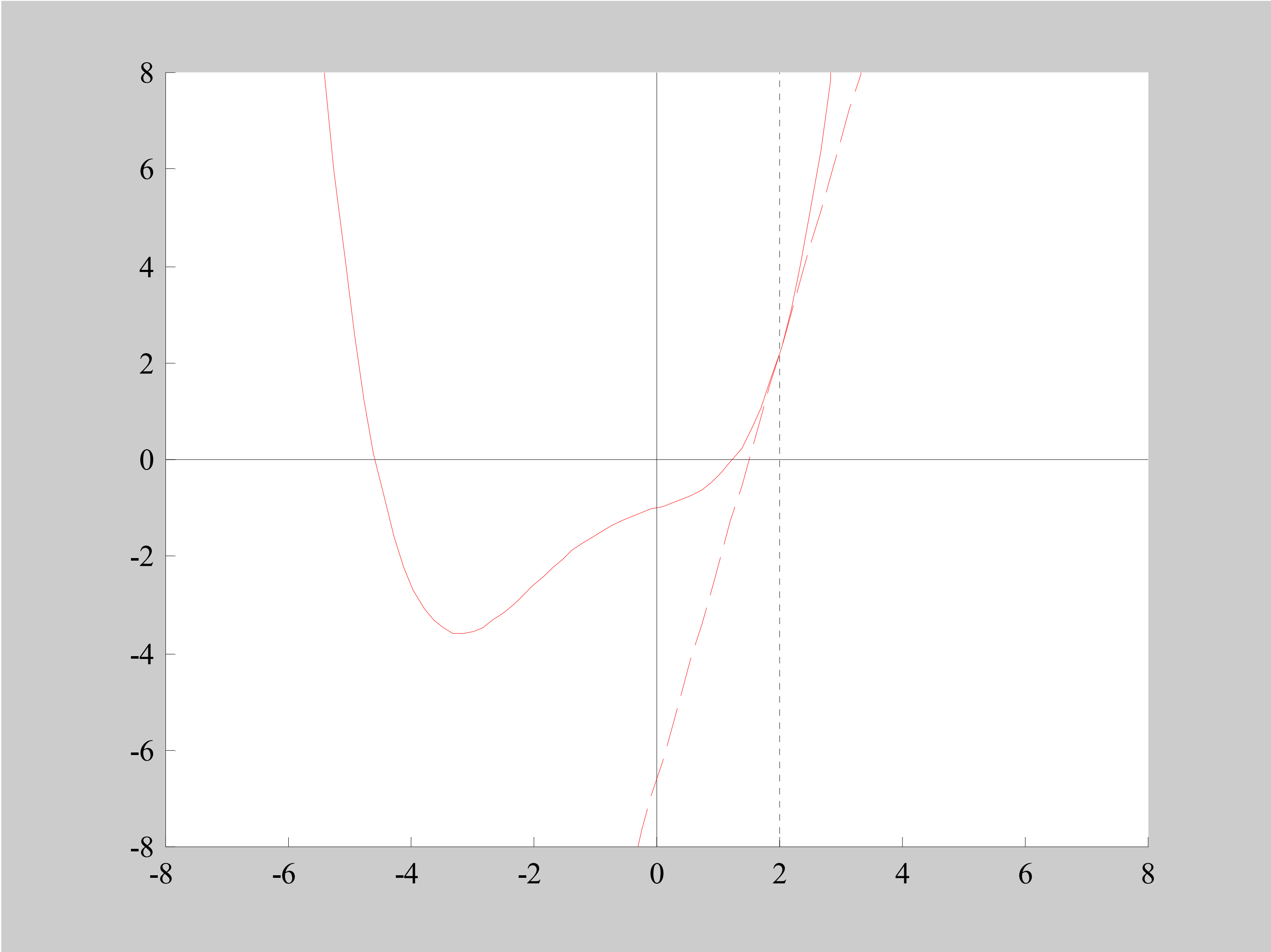

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

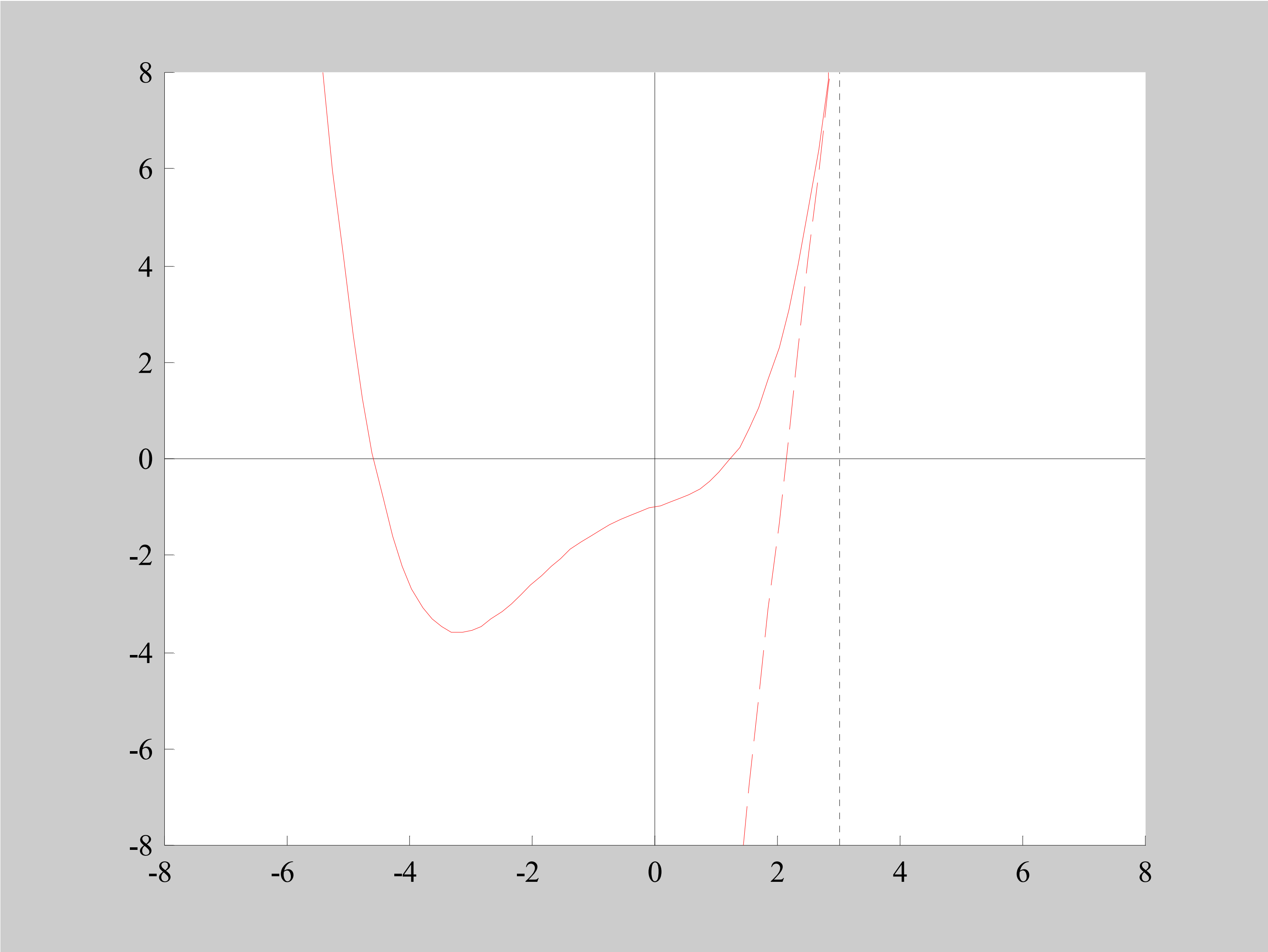

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8

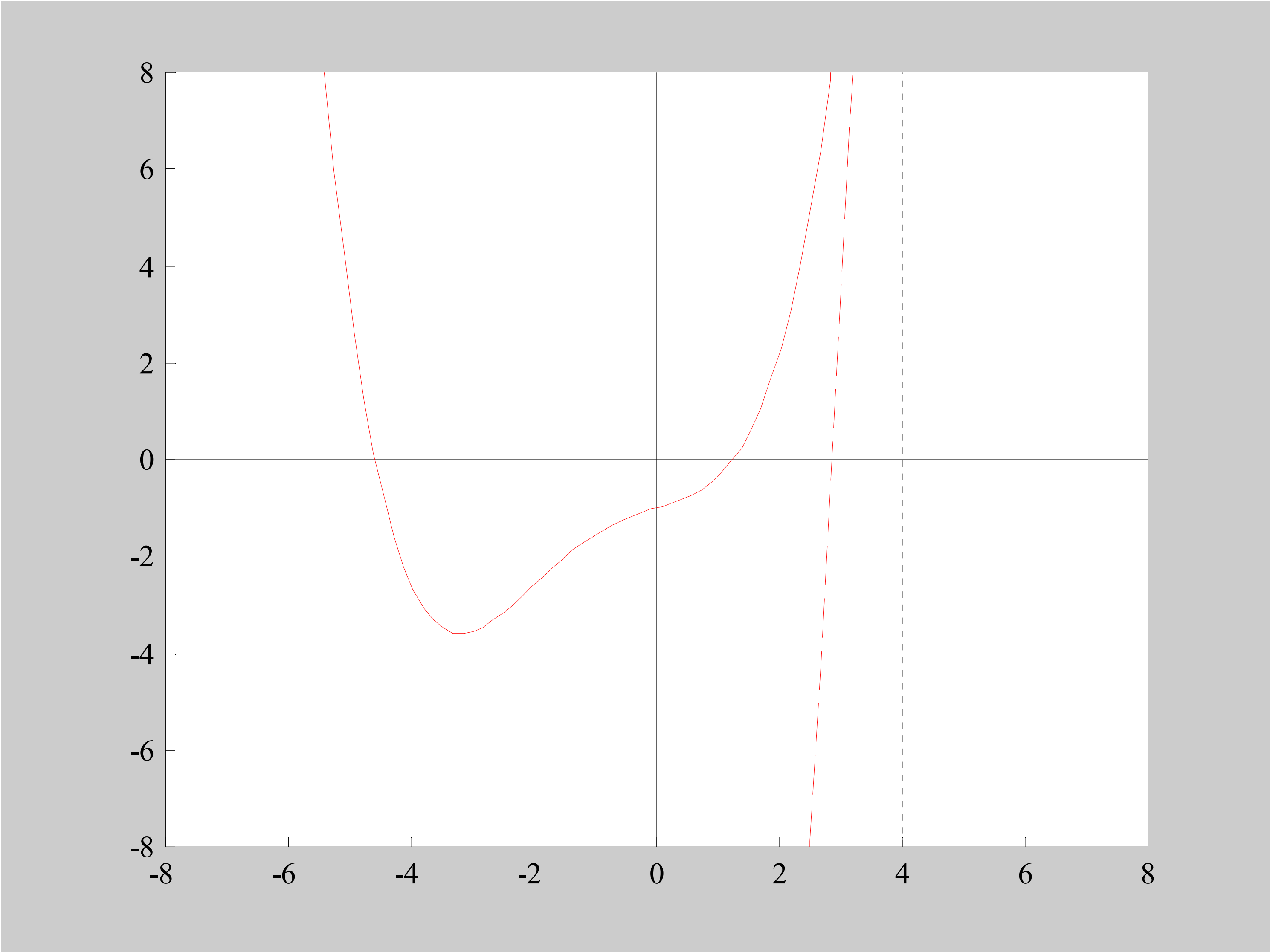

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8



8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

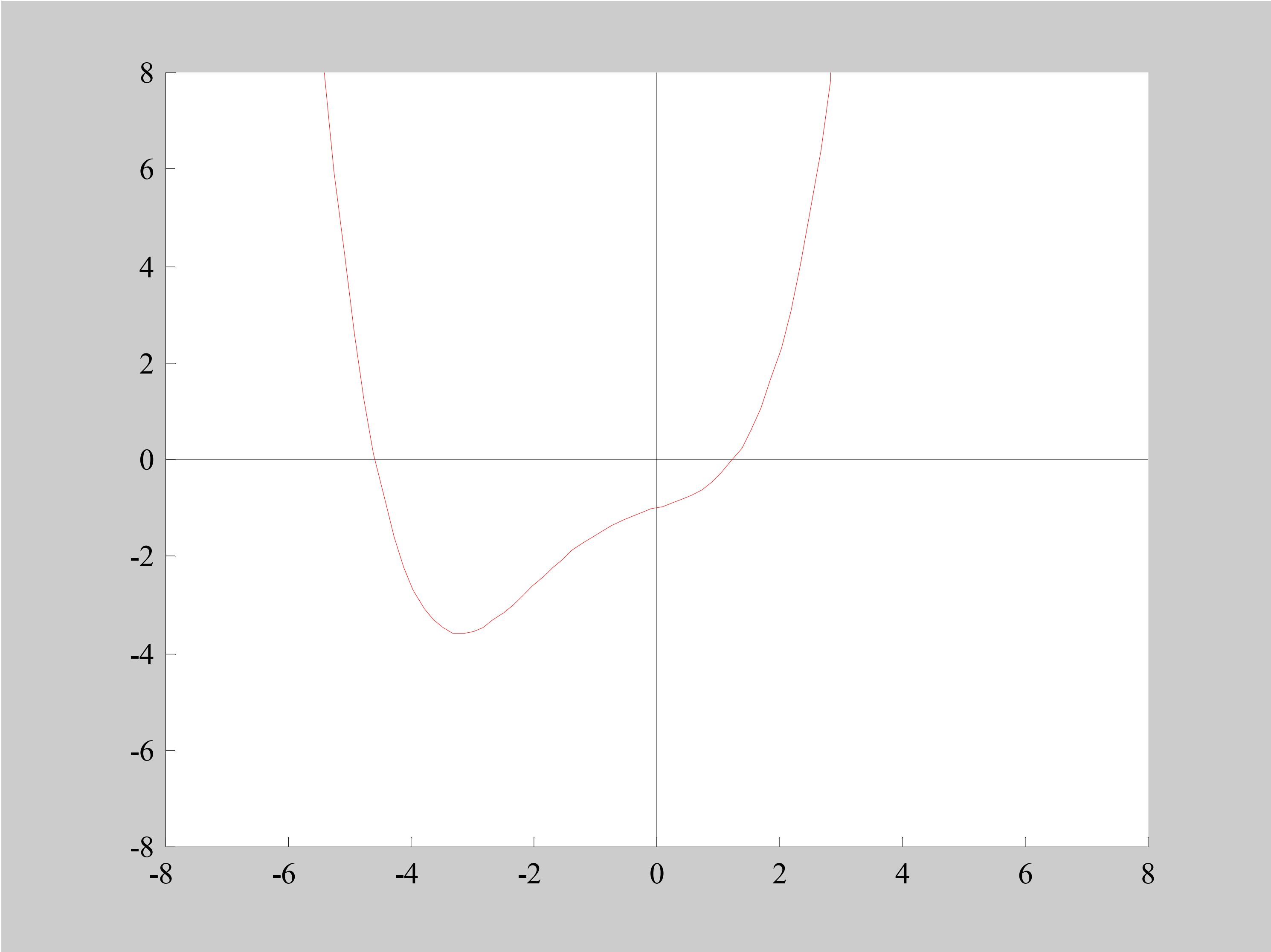

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

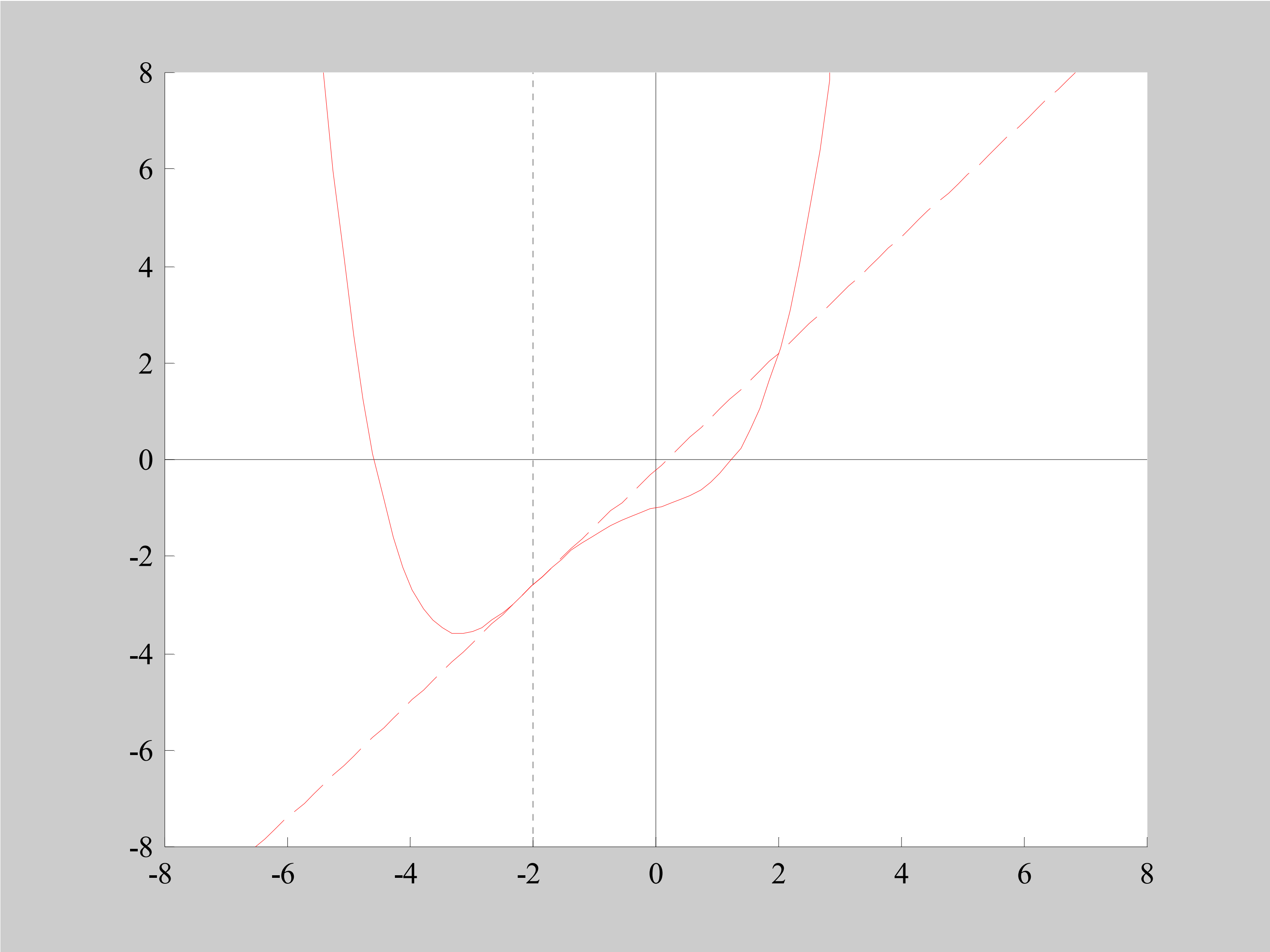
Metoda Newtona (aproksymacyjna)

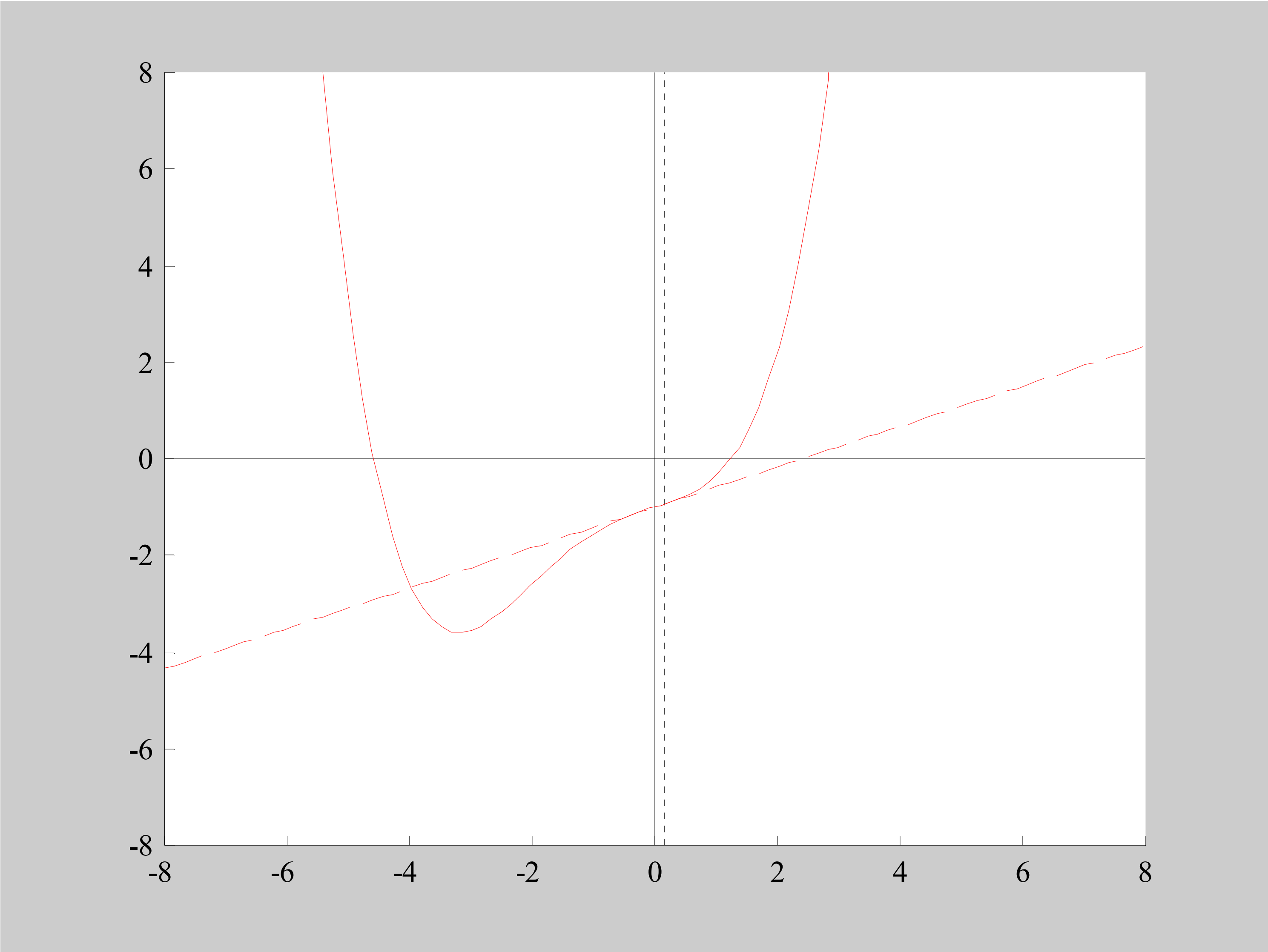
- Przykład działania
  /cel: znalezienie miejsca zerowego funkcji danej/
  - funkcja

    $f(x) = 0.05x^4 + 0.2x^3 + 0x^2 + 0.4x - 1$
  - wartość początkowa

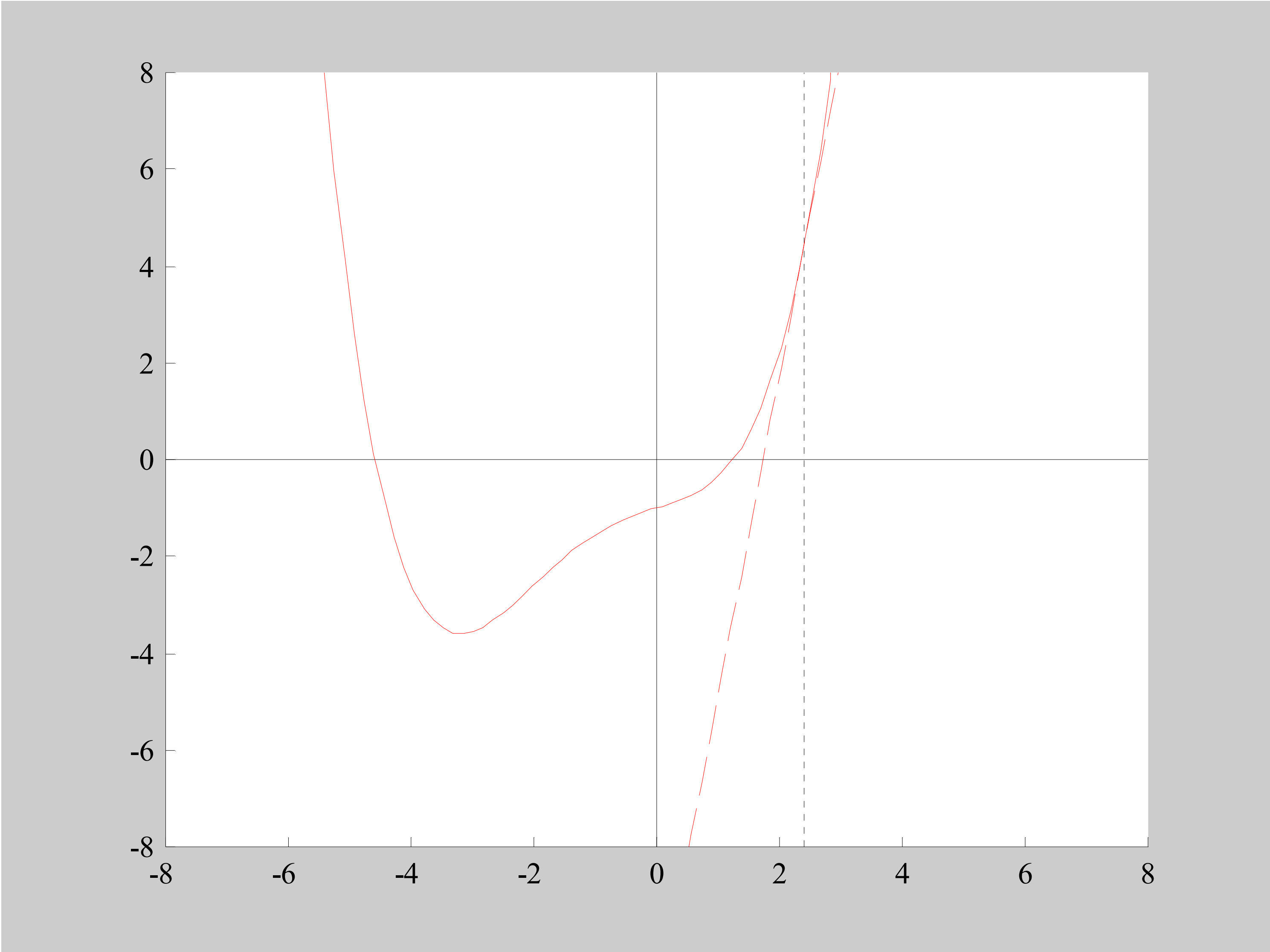
    $x_0 = -2$

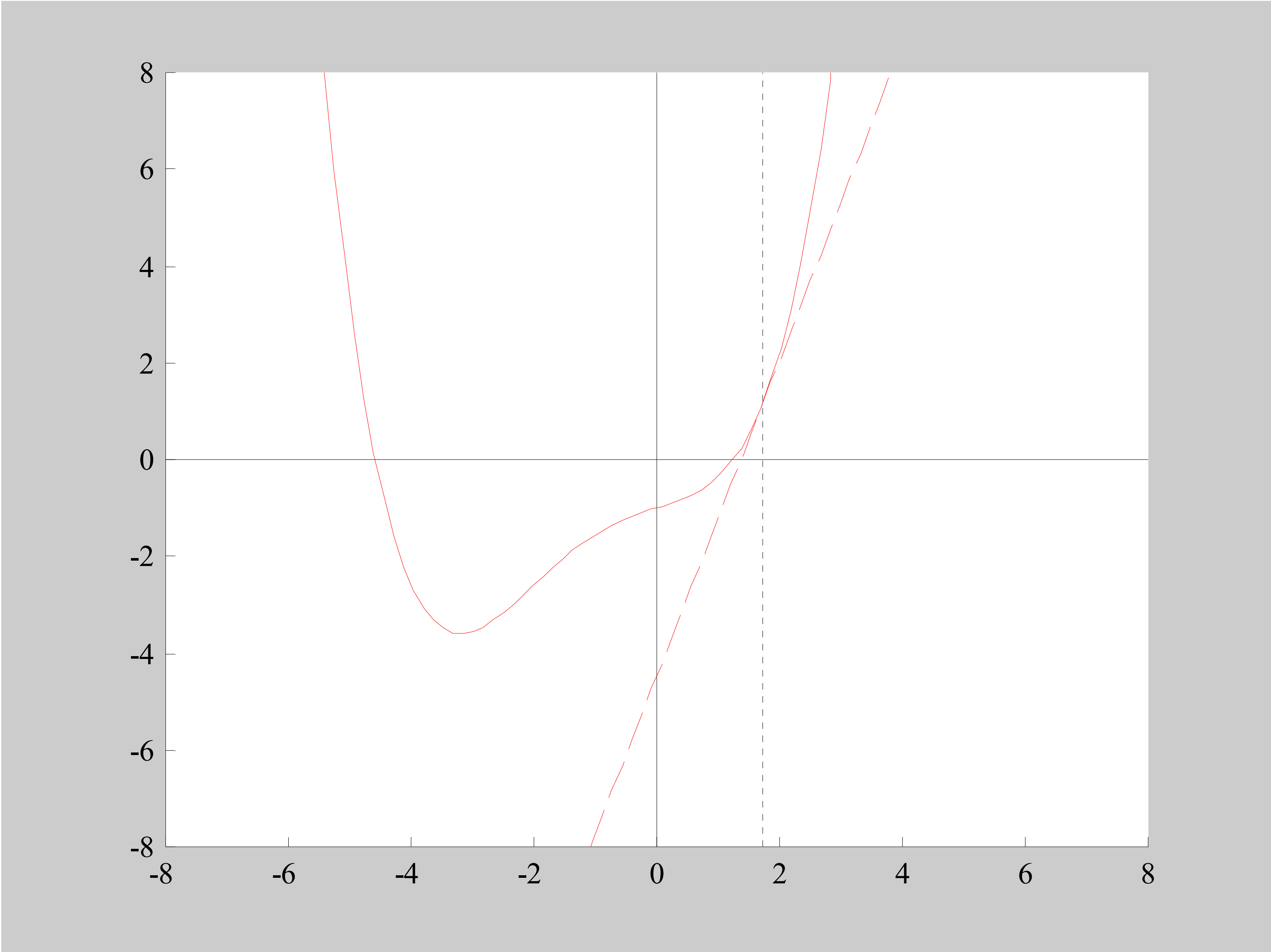

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

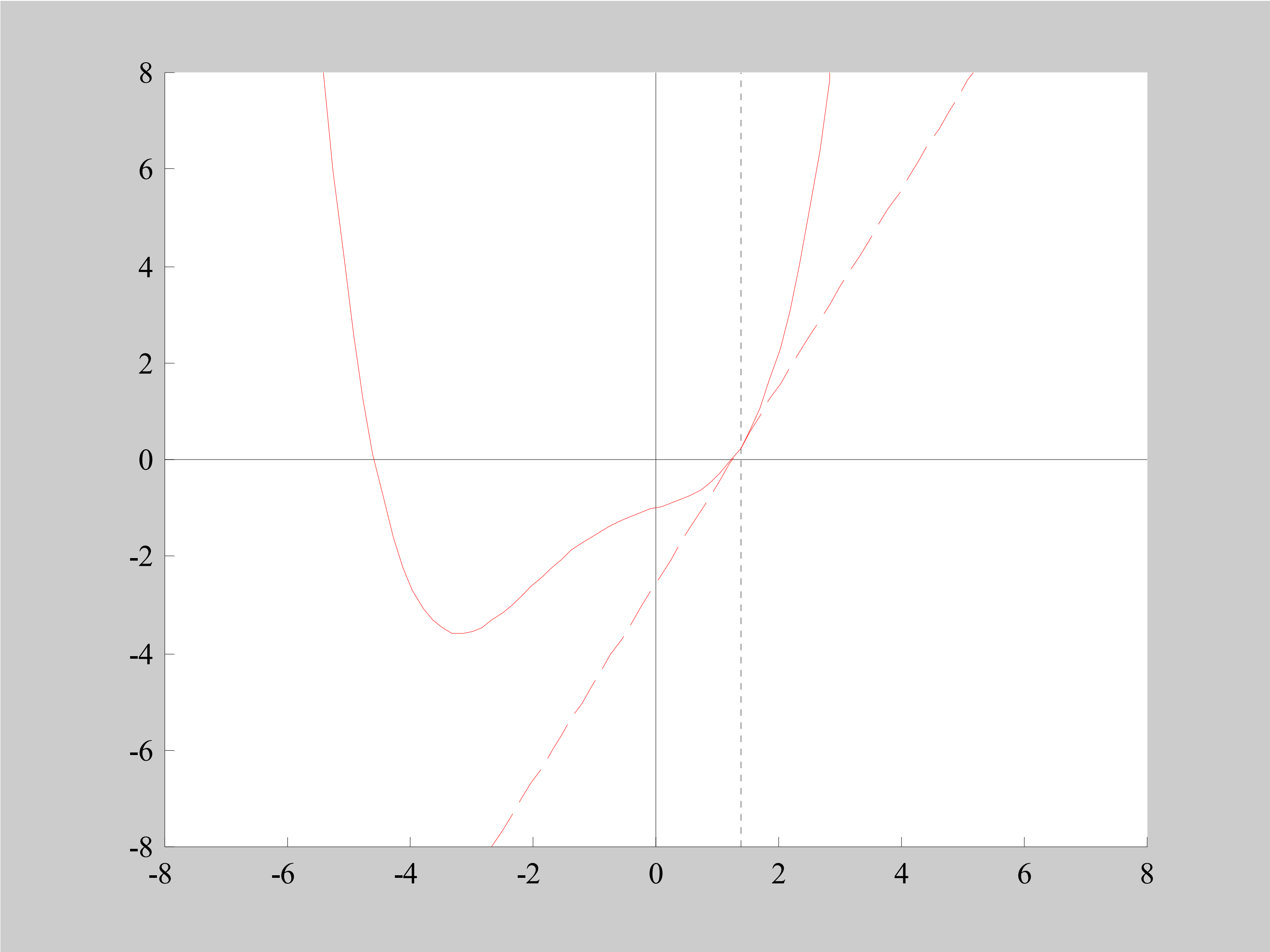

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

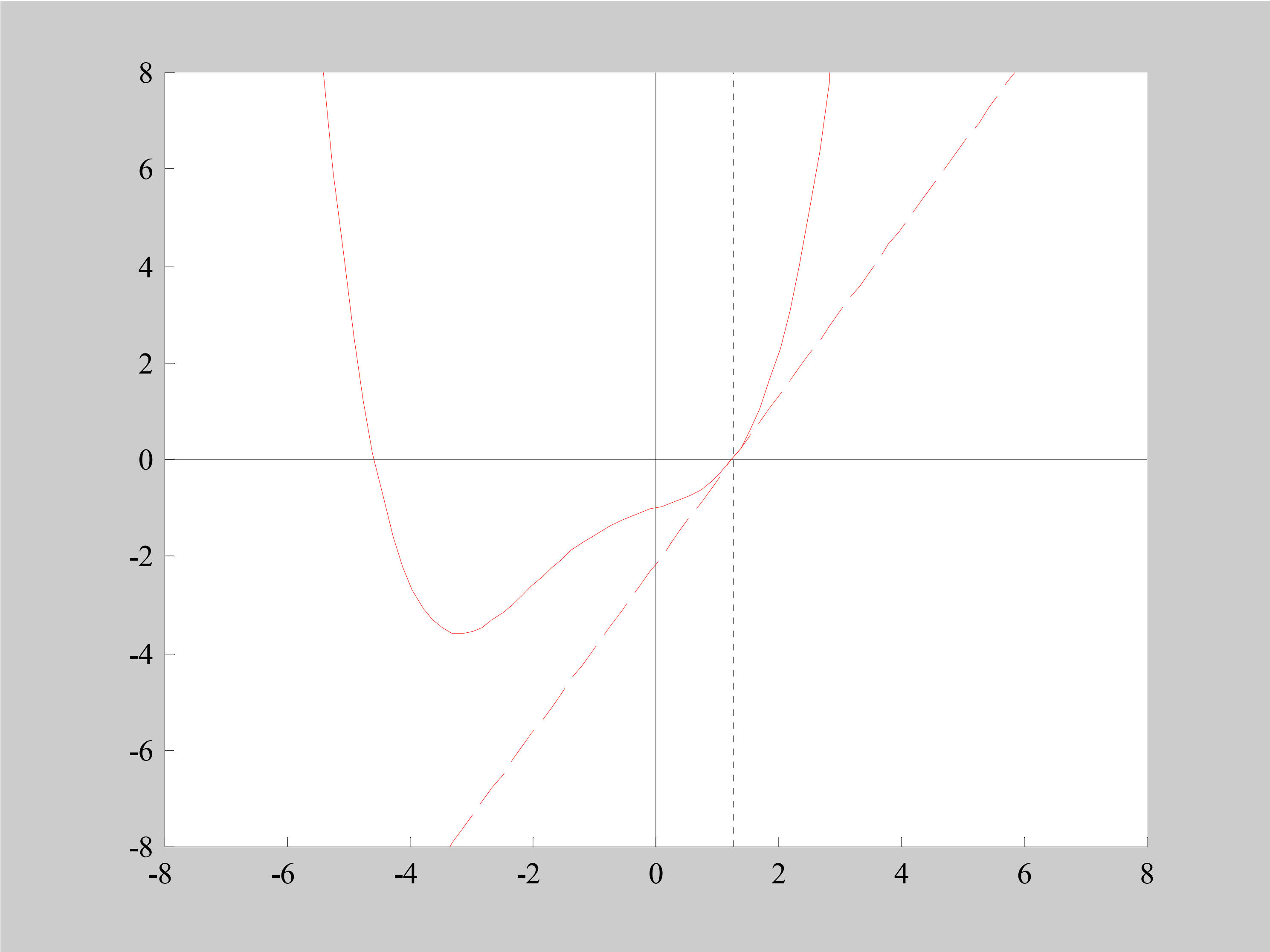


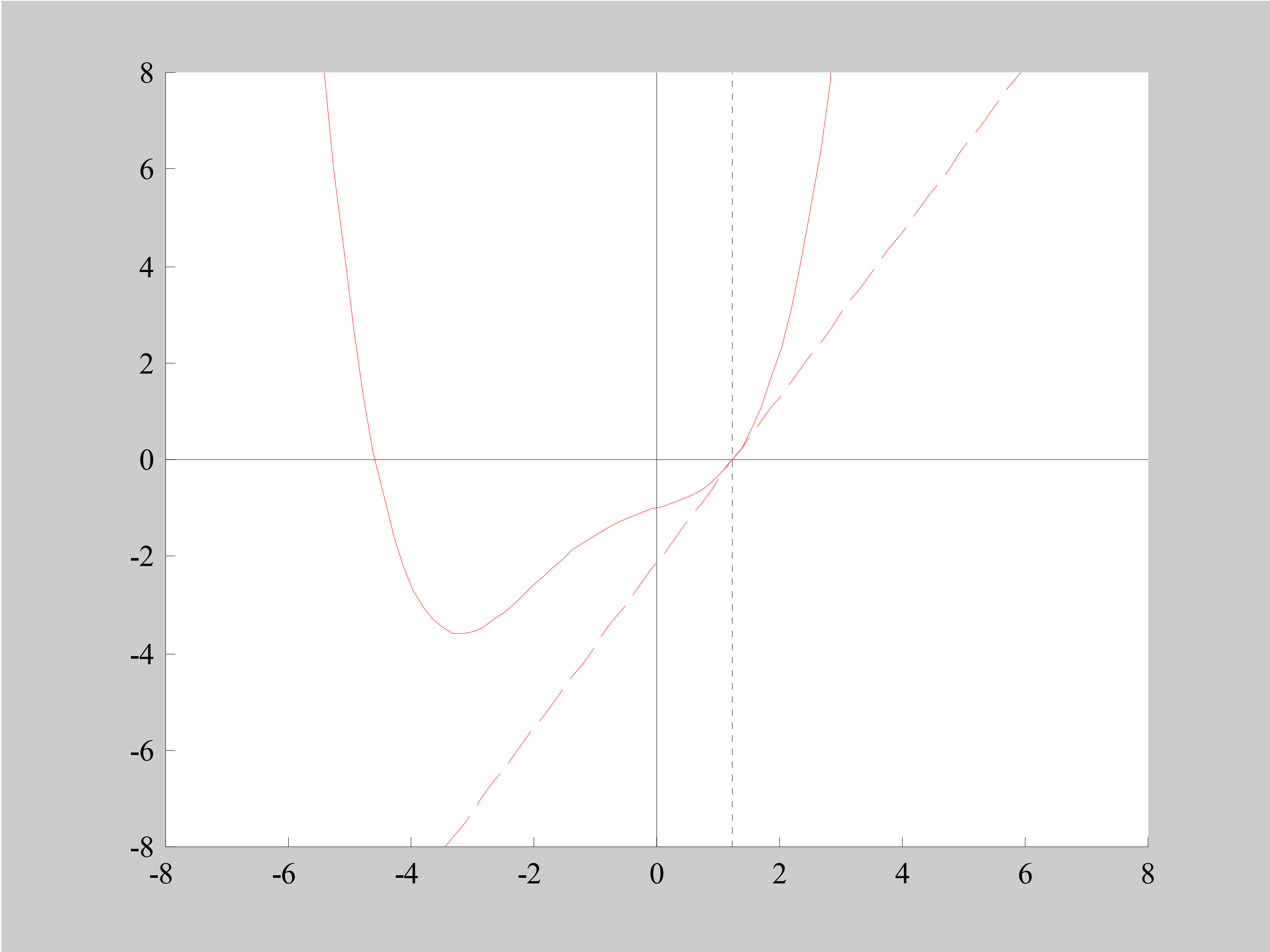
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

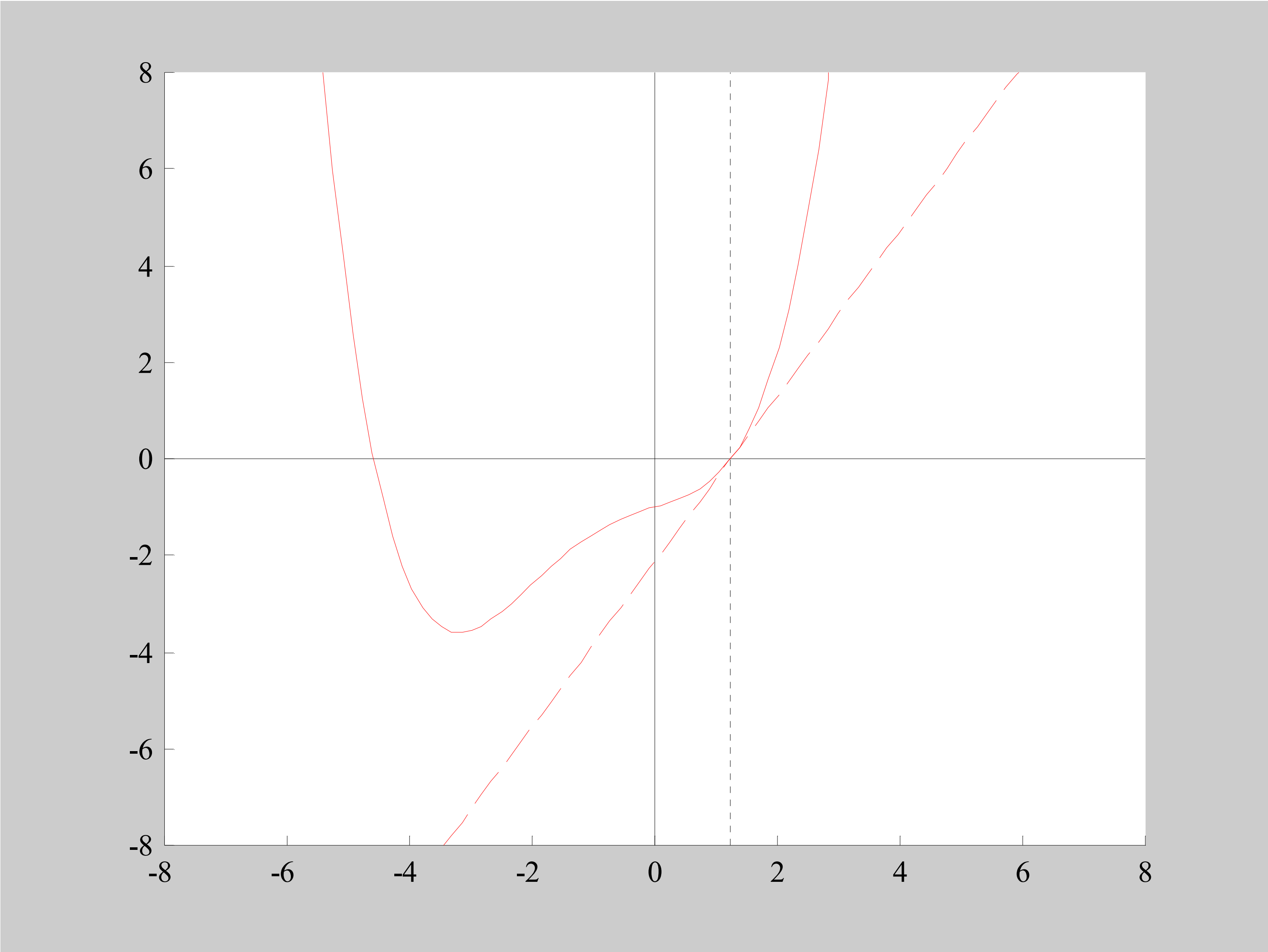

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

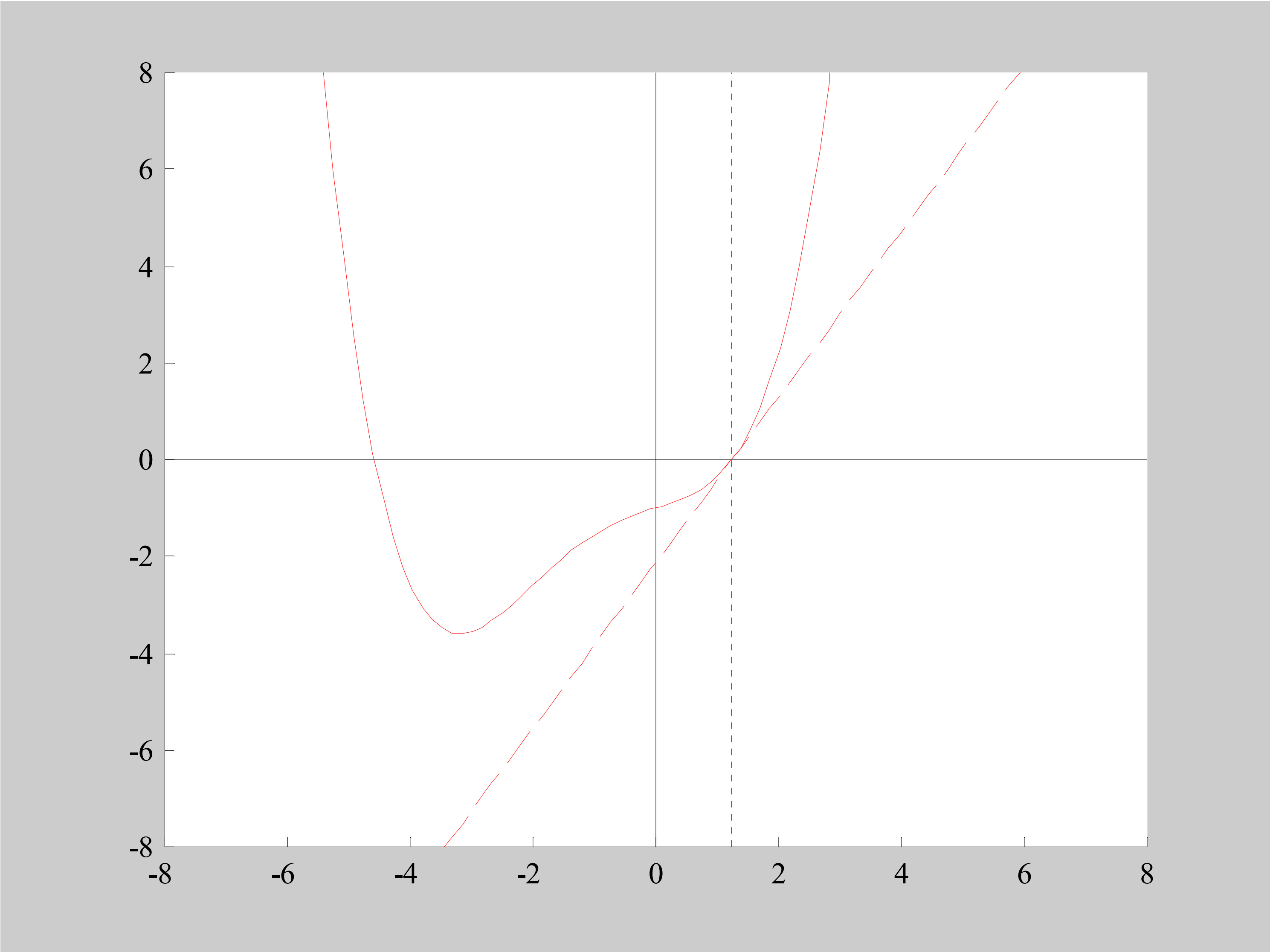

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8



8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

…

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji
  - funkcja

  $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji
  - funkcja

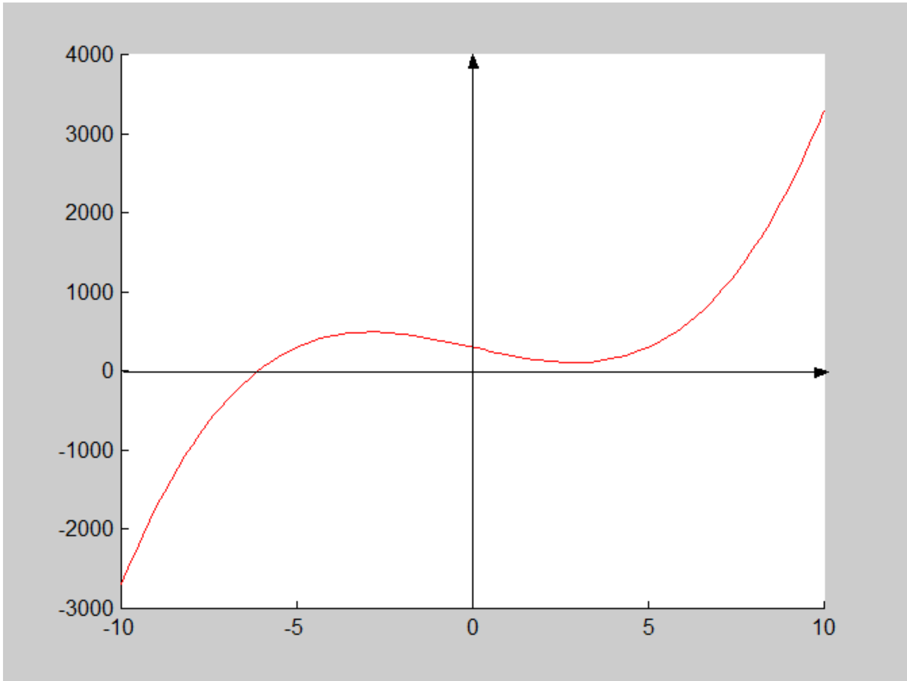
  $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$

-5		300	200
-4		444	92
-3		492	8
-2		468	-52
-1		396	-88
0		300	-100
1		204	-88
2		132	-52
3		108	8
4		156	92
5		300	200

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji
  - funkcja

$f(x) = 4x^3 - 100x + 300$

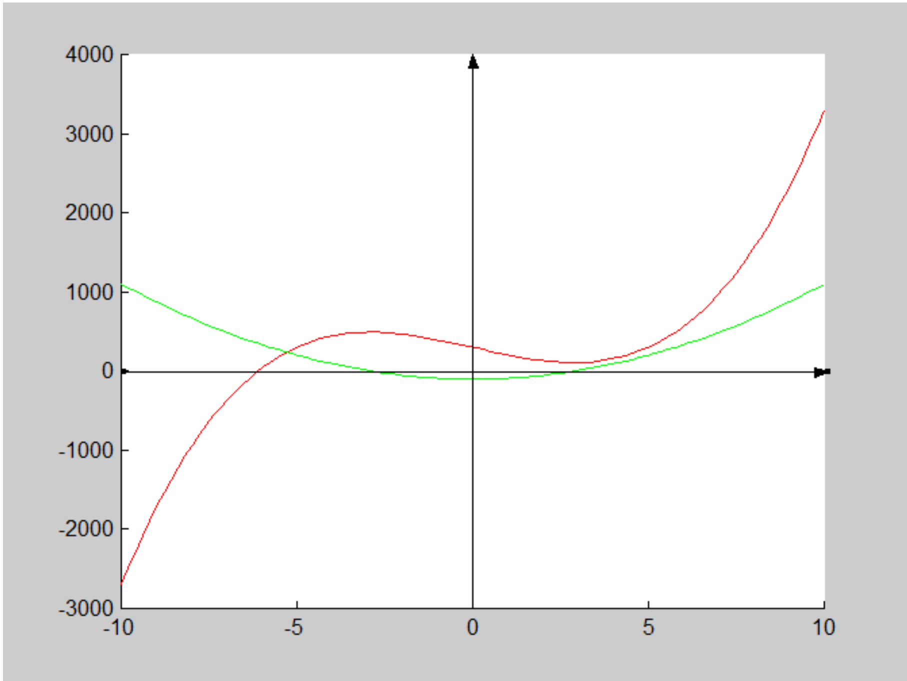


Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji
  - funkcja

    $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$
  - pierwsza pochodna

    $f'(x) = 12x^2 - 100$



Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - miejsce zerowe funkcji: $x^z = -6.10598343090539\ldots$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

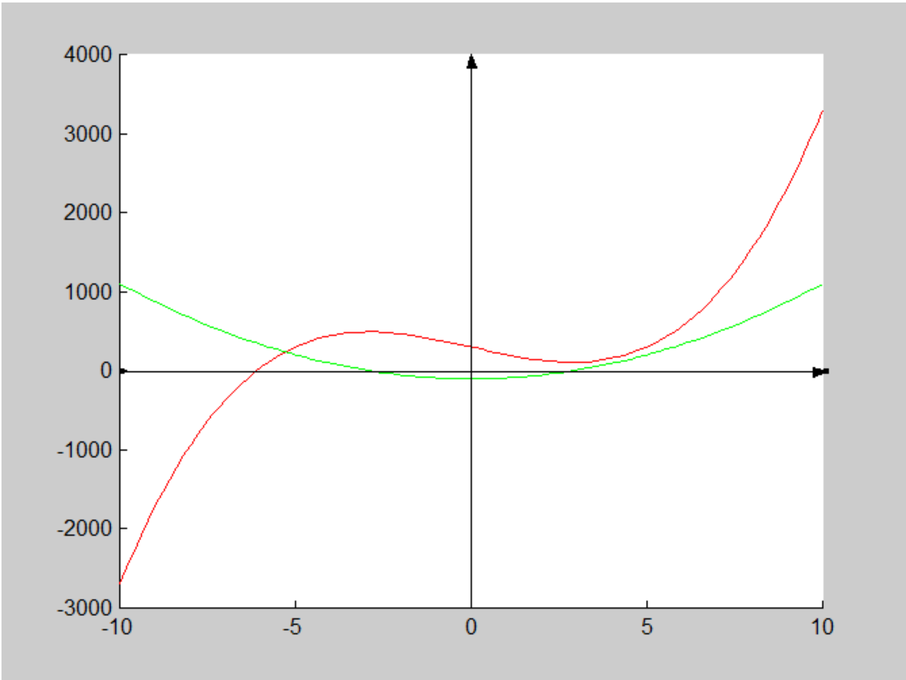
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$
    - warunek ten pozwala na uznanie, że:
      - funkcja f(x) osiąga wartość zero

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - przyjęty punkt początkowy $x_0 = 1$
    - punkt ten decyduje o przebiegu całego procesu

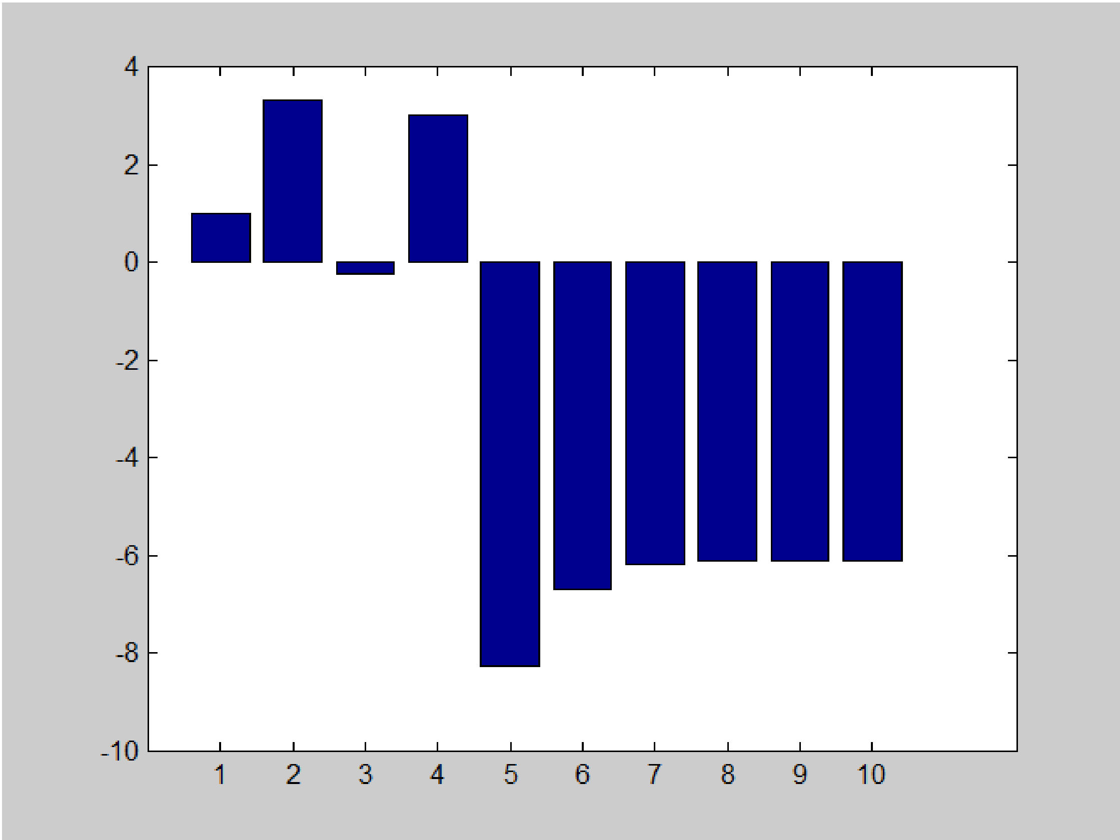
Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - funkcja



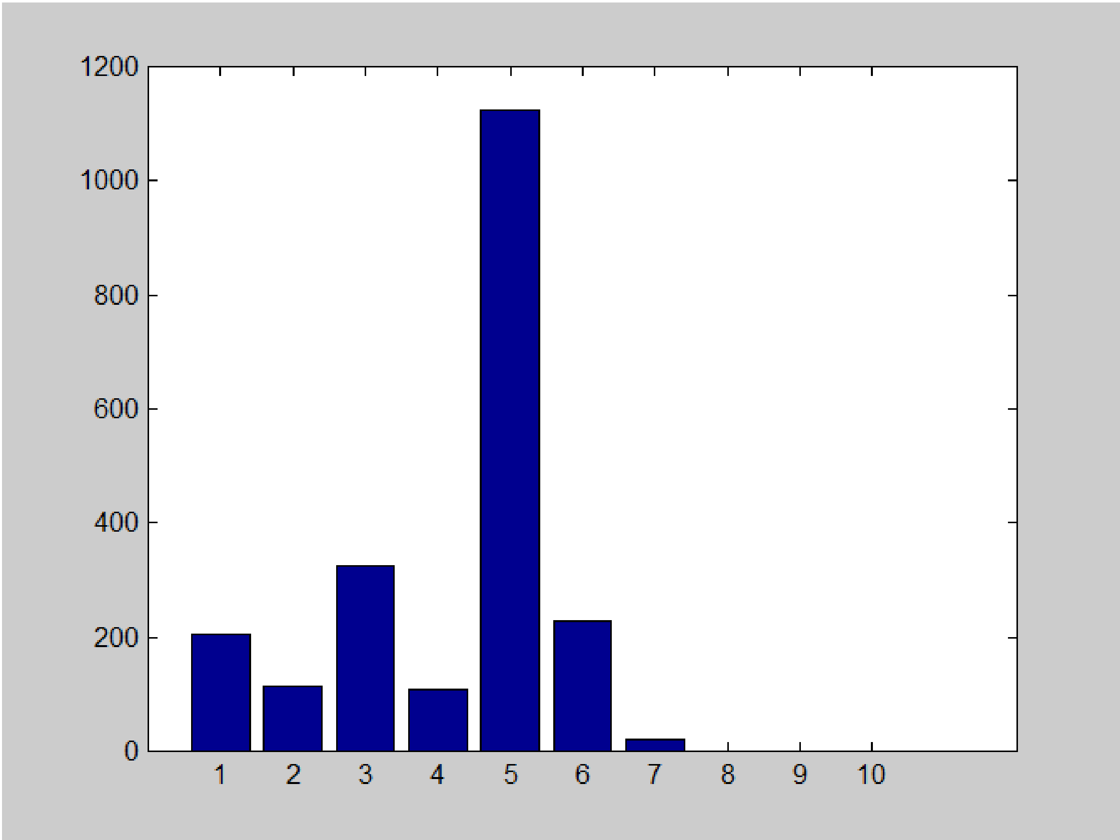
Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - x



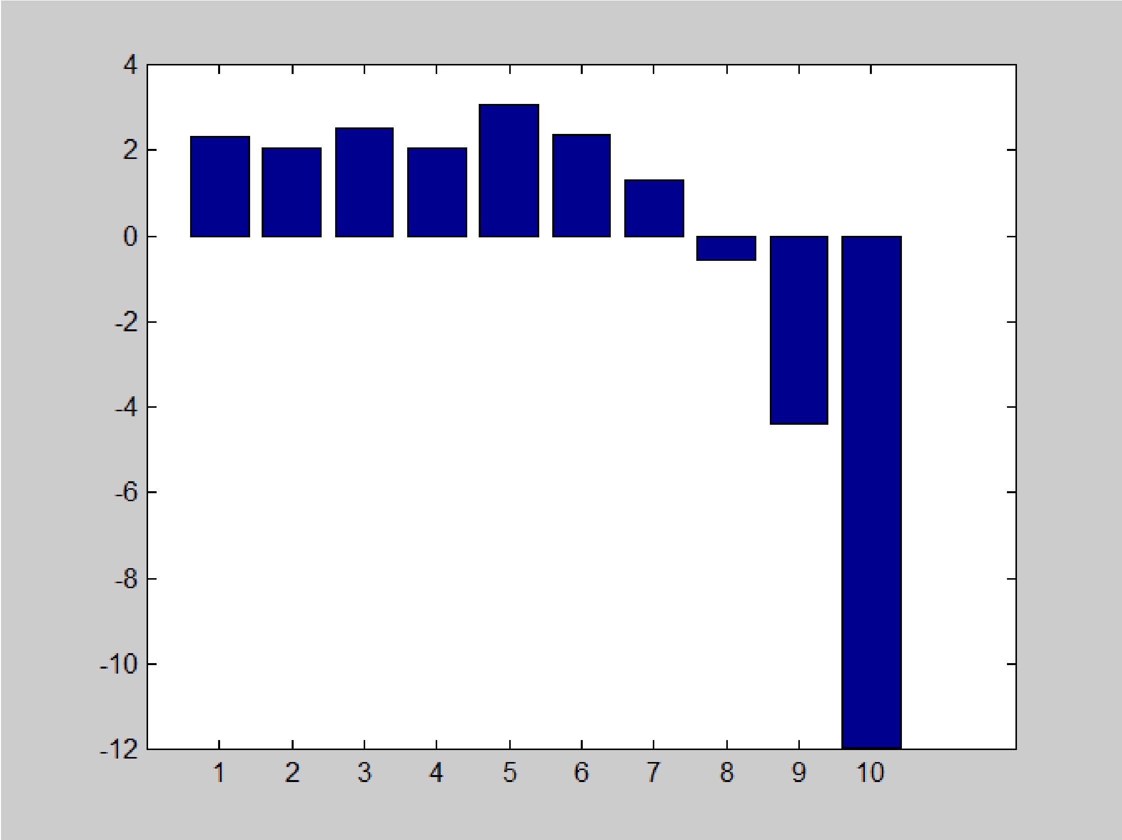
Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - |f(x)|



Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - log(|f(x)|)



Metoda Newtona (aproksymacyjna)

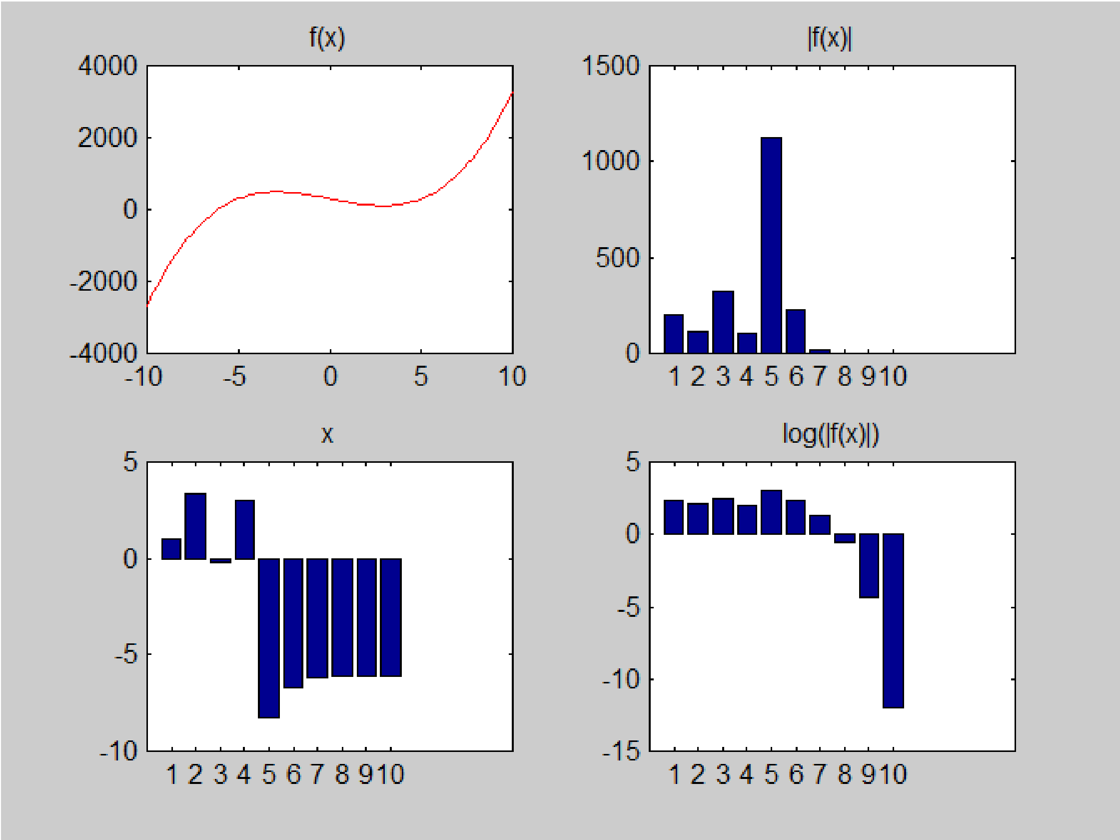
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$
  - miejsce zerowe funkcji: $x^z = -6.10598343090539\ldots$
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

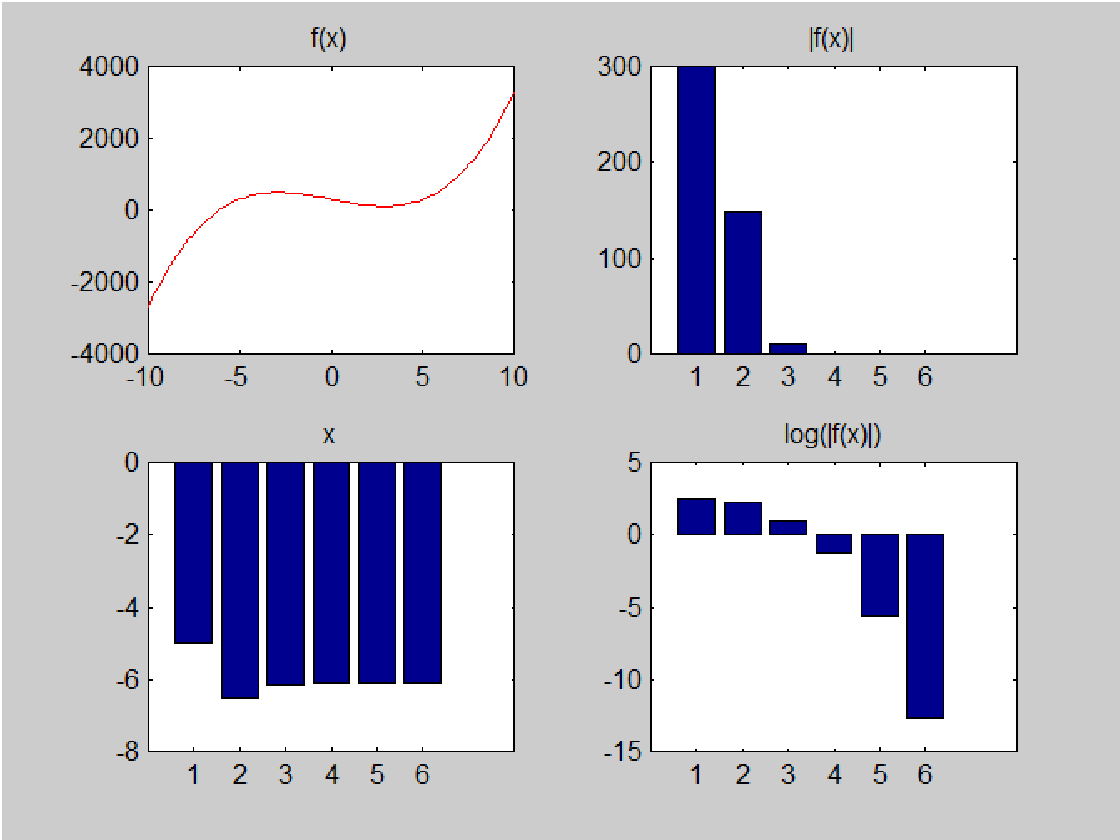
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

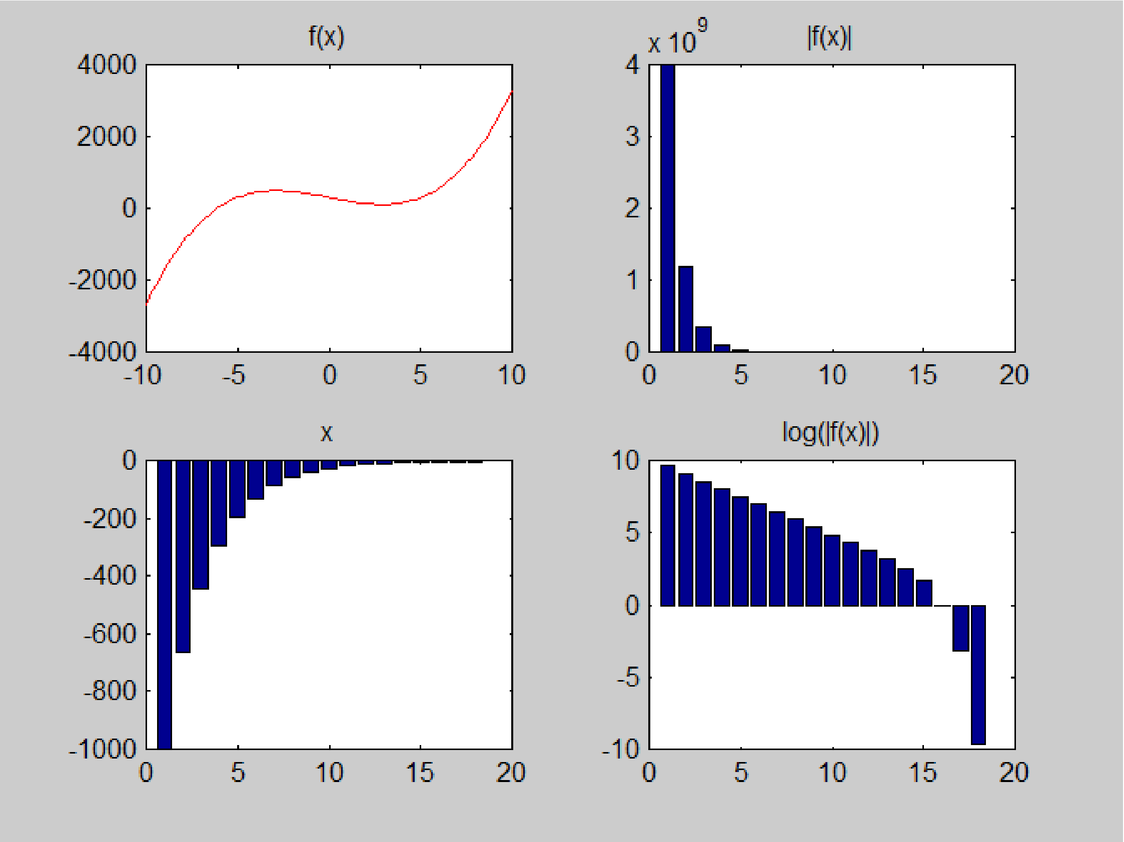
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -5$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

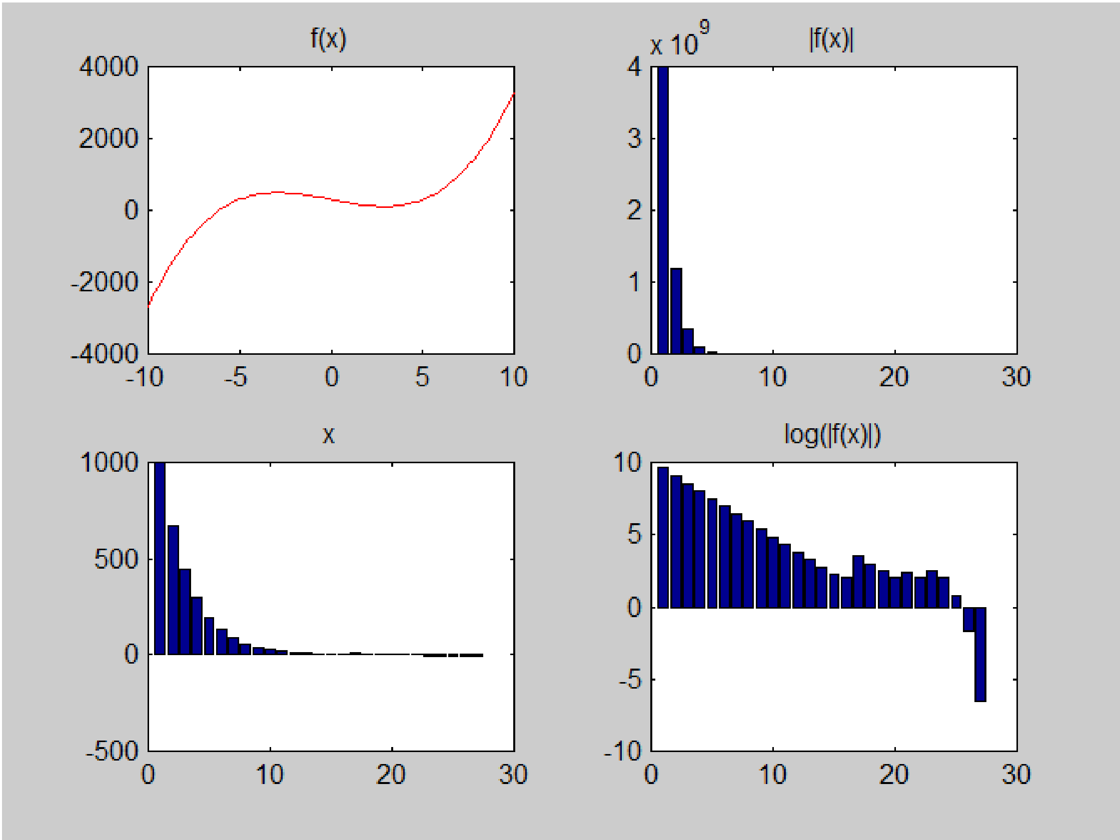
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1000$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

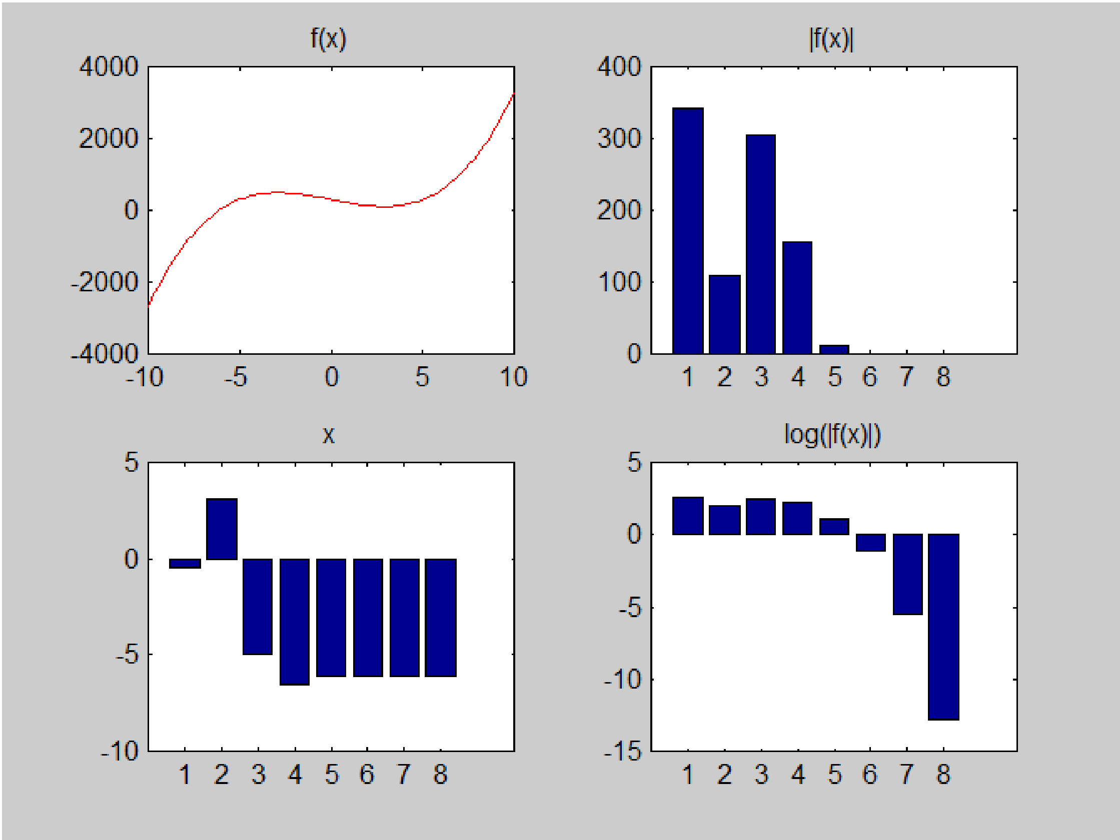
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \le 10^{-6}$, $x_0 = 1000$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

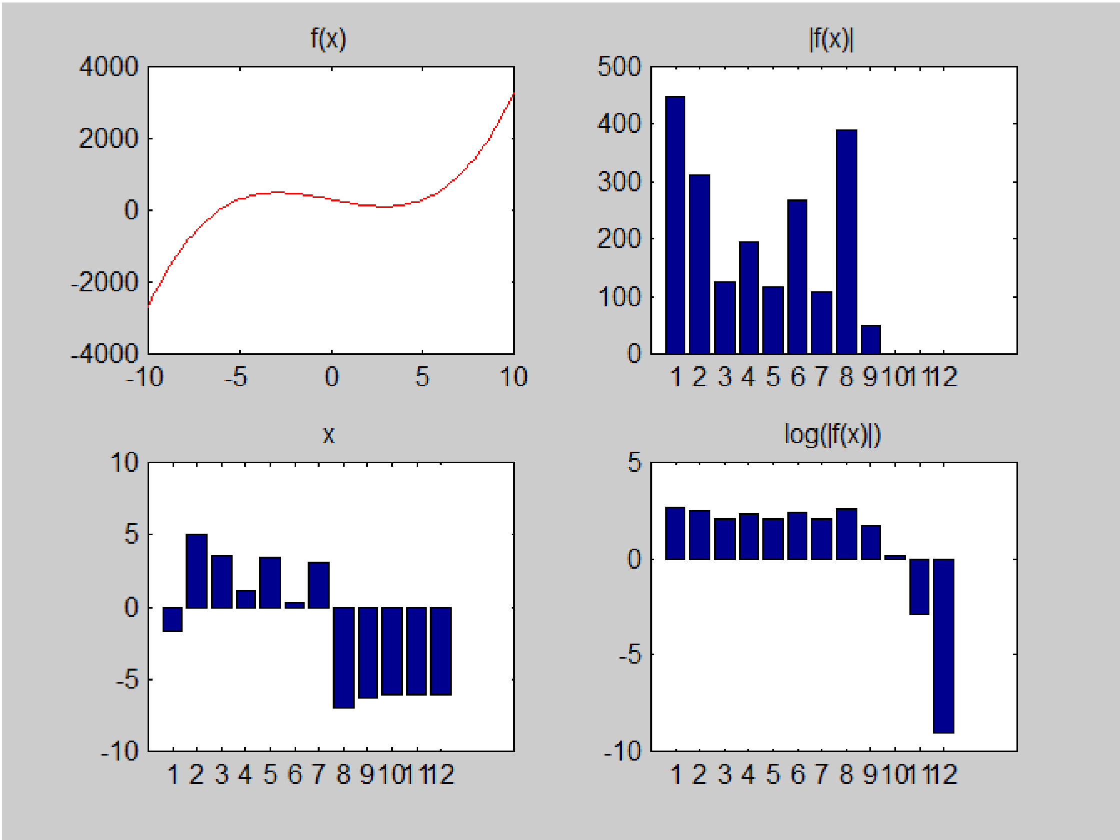
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

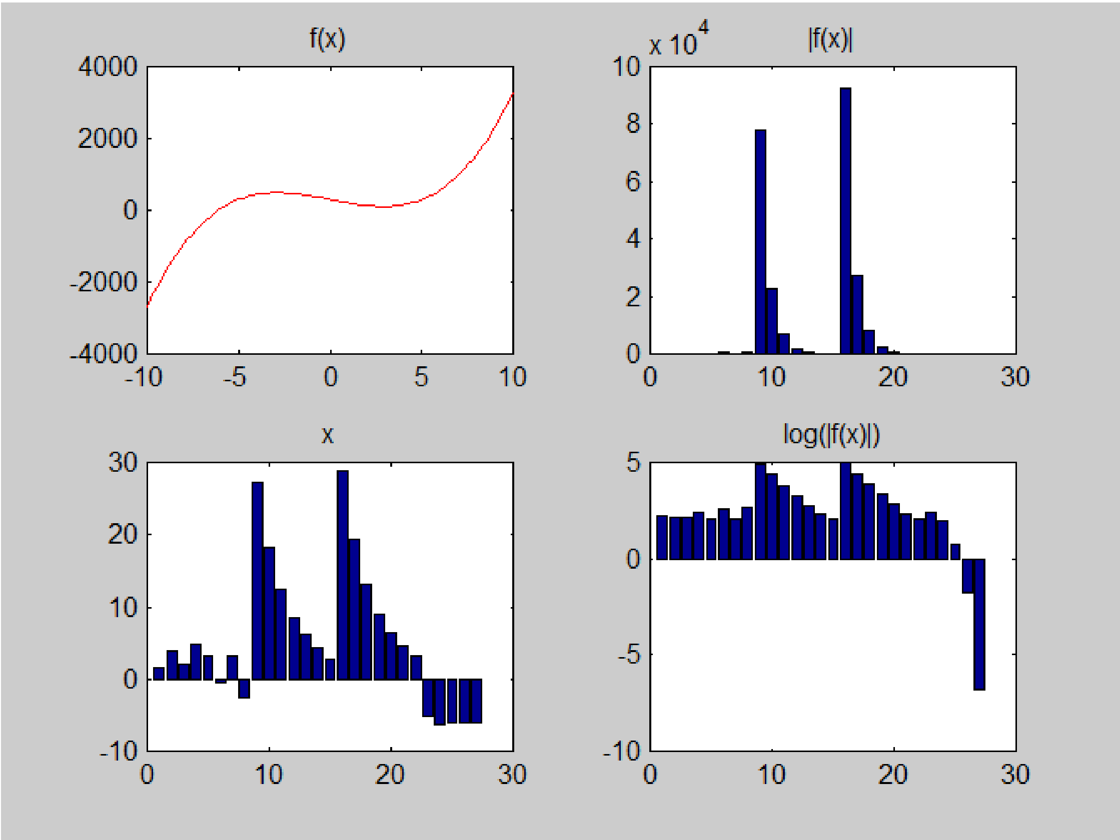
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  – $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \le 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  – osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

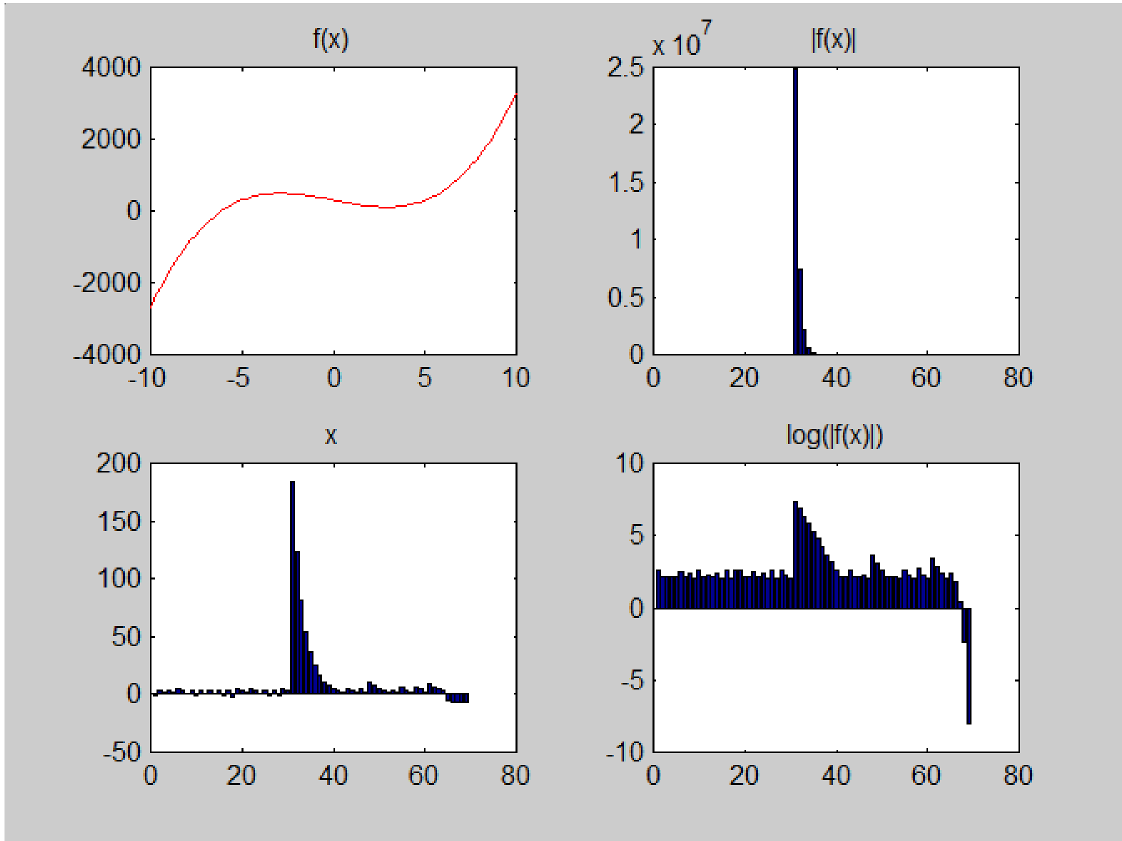
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = 4x^3 - 100x + 300$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

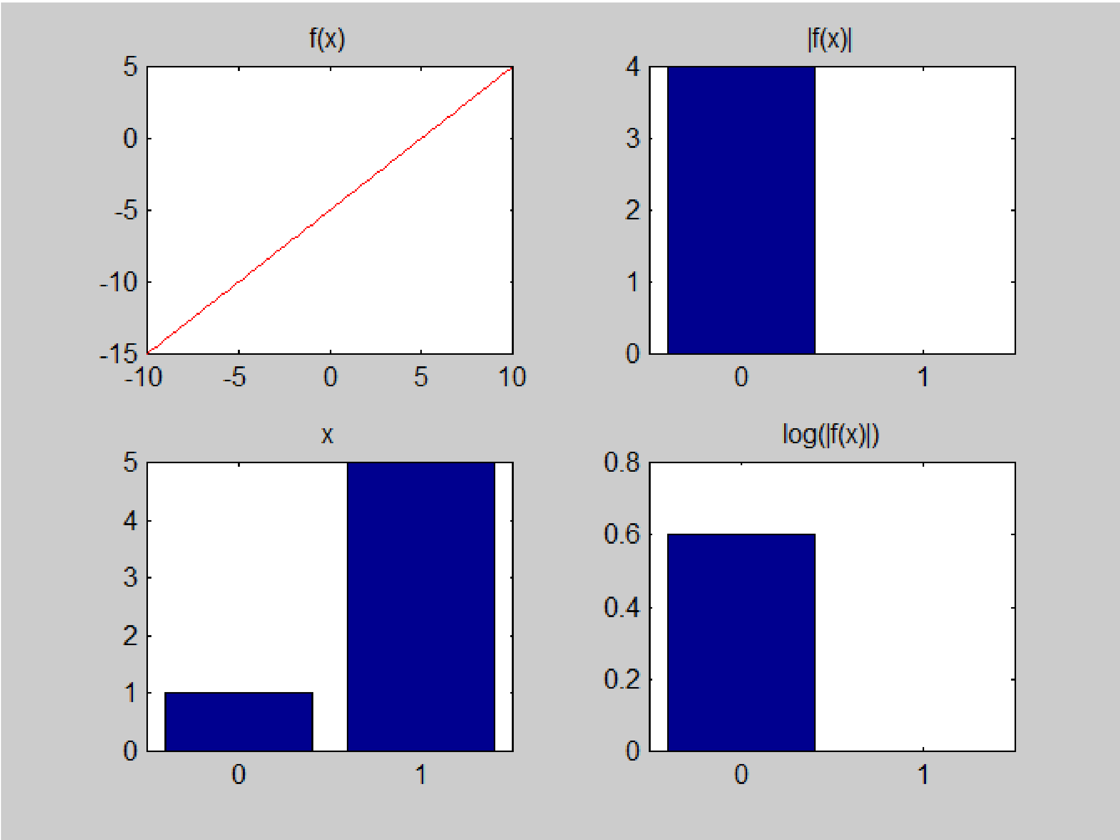
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x - 5$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x - 5$
  - miejsce zerowe funkcji: $x^z = 5$
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

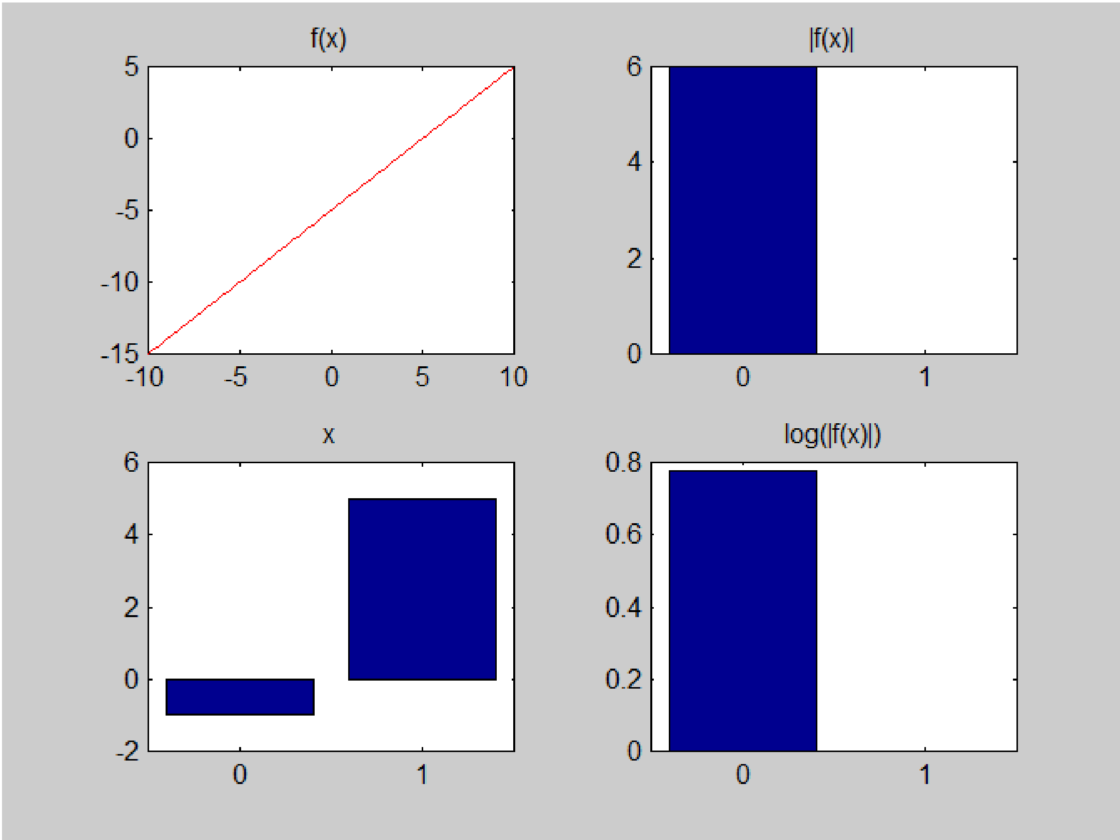
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x - 5$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

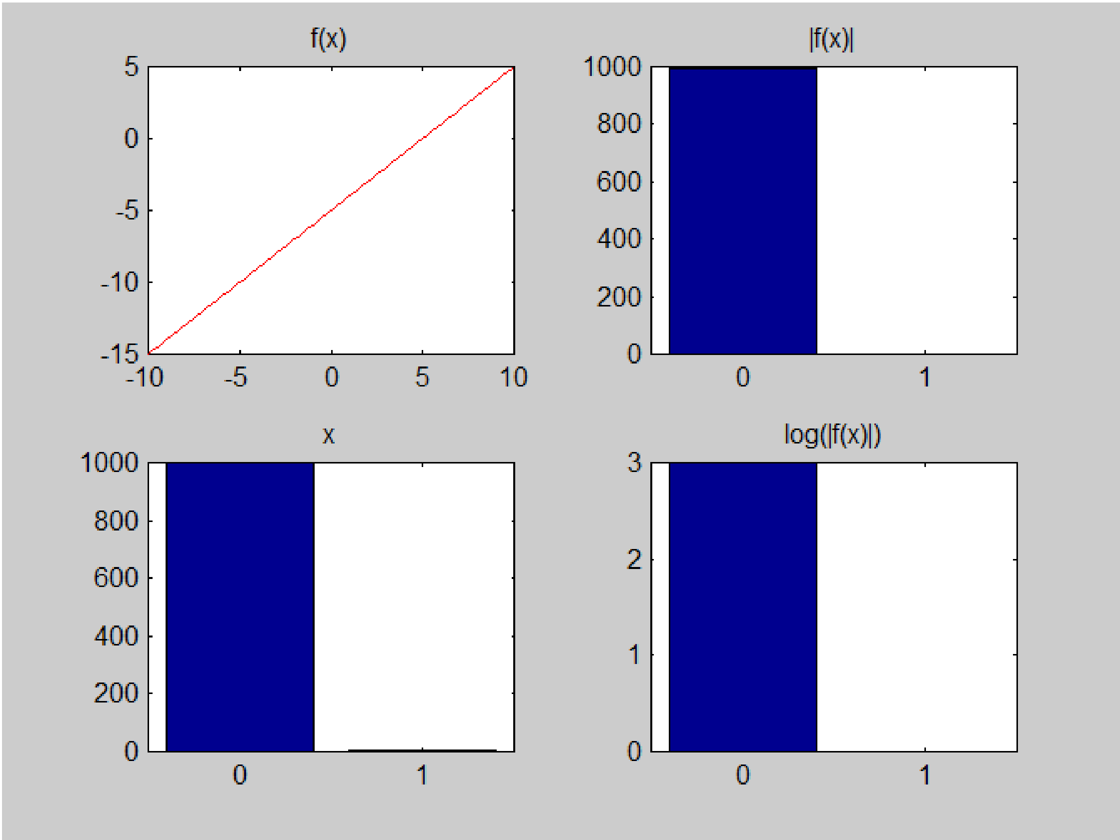
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x - 5$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

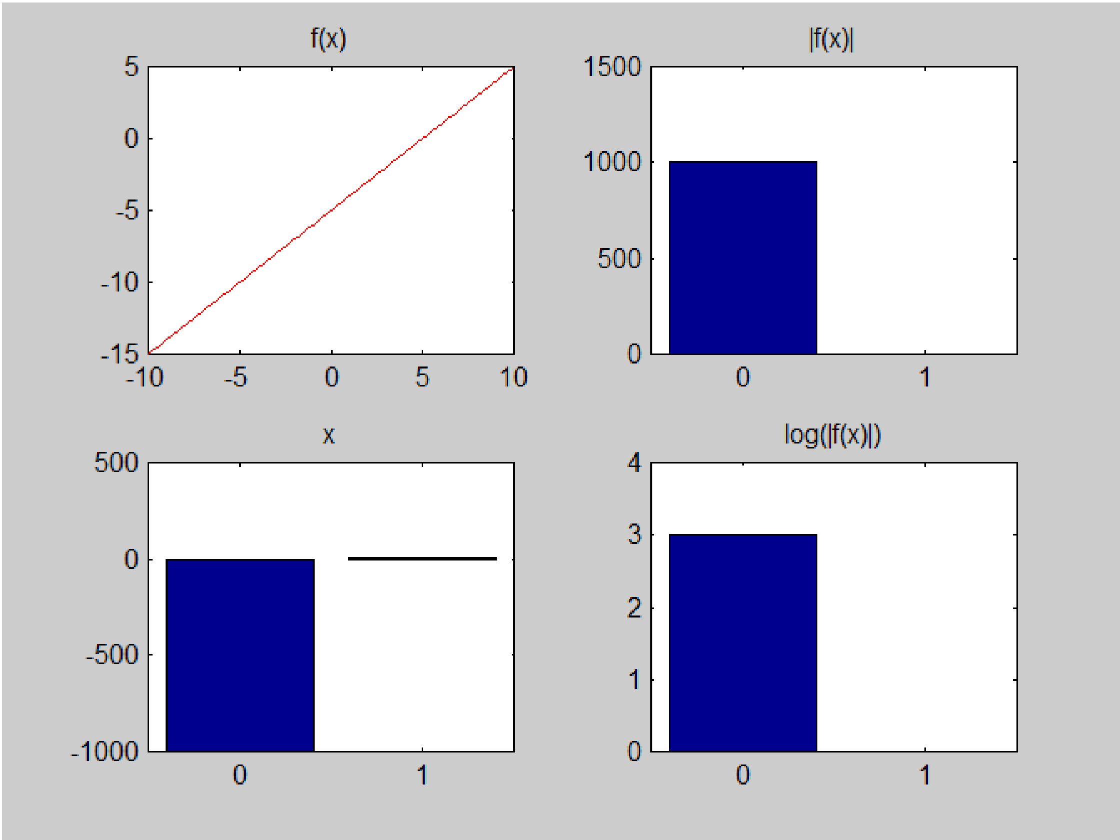
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x - 5$, $|f(x)| \le 10^{-6}$, $x_0 = 1000$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  – $f(x) = x - 5$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1000$



  – osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

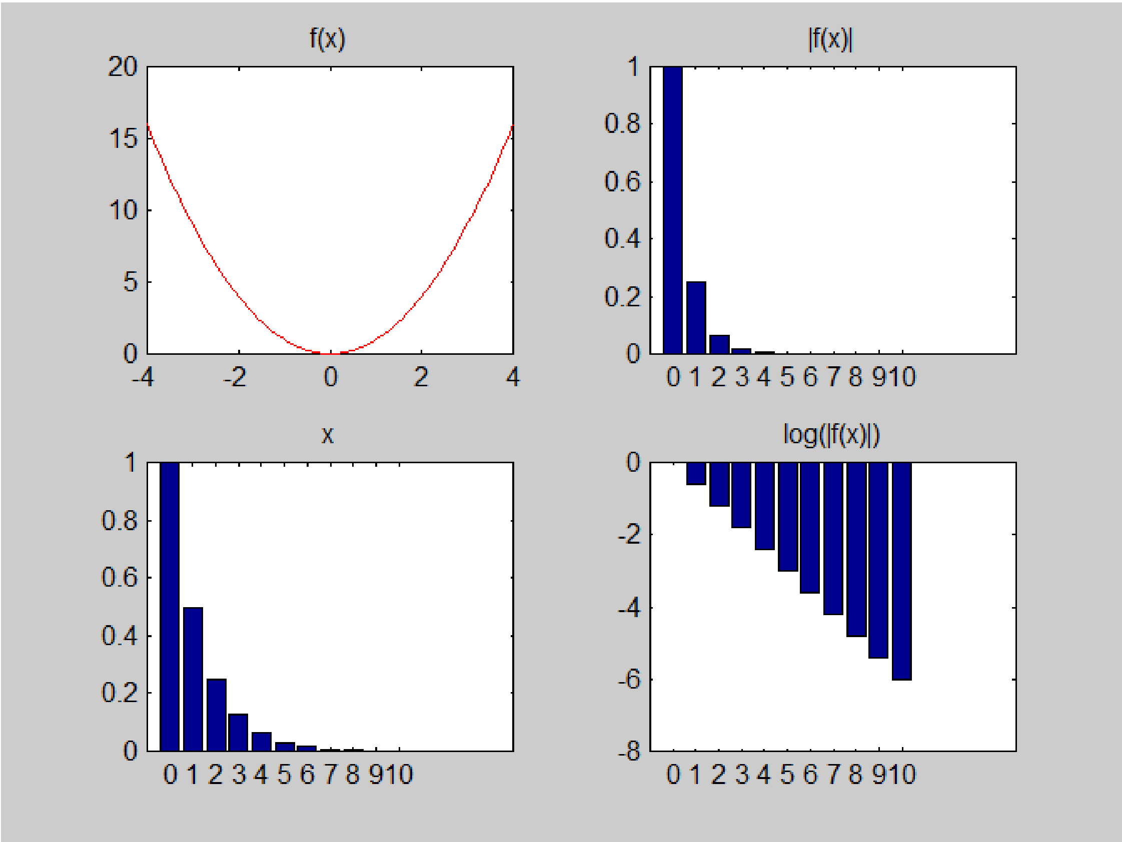
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2$
  - miejsce zerowe funkcji: $x^z = 0$
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

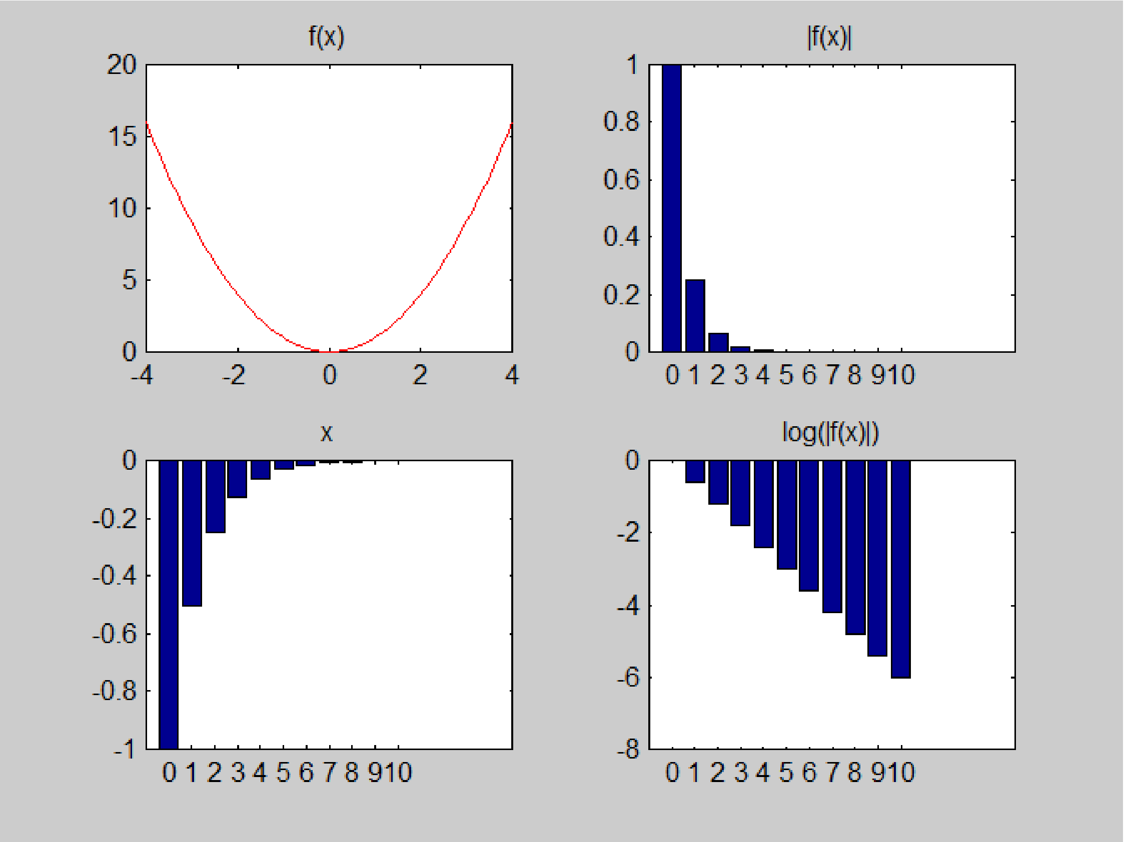
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - osiągnięto warunek stopu (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

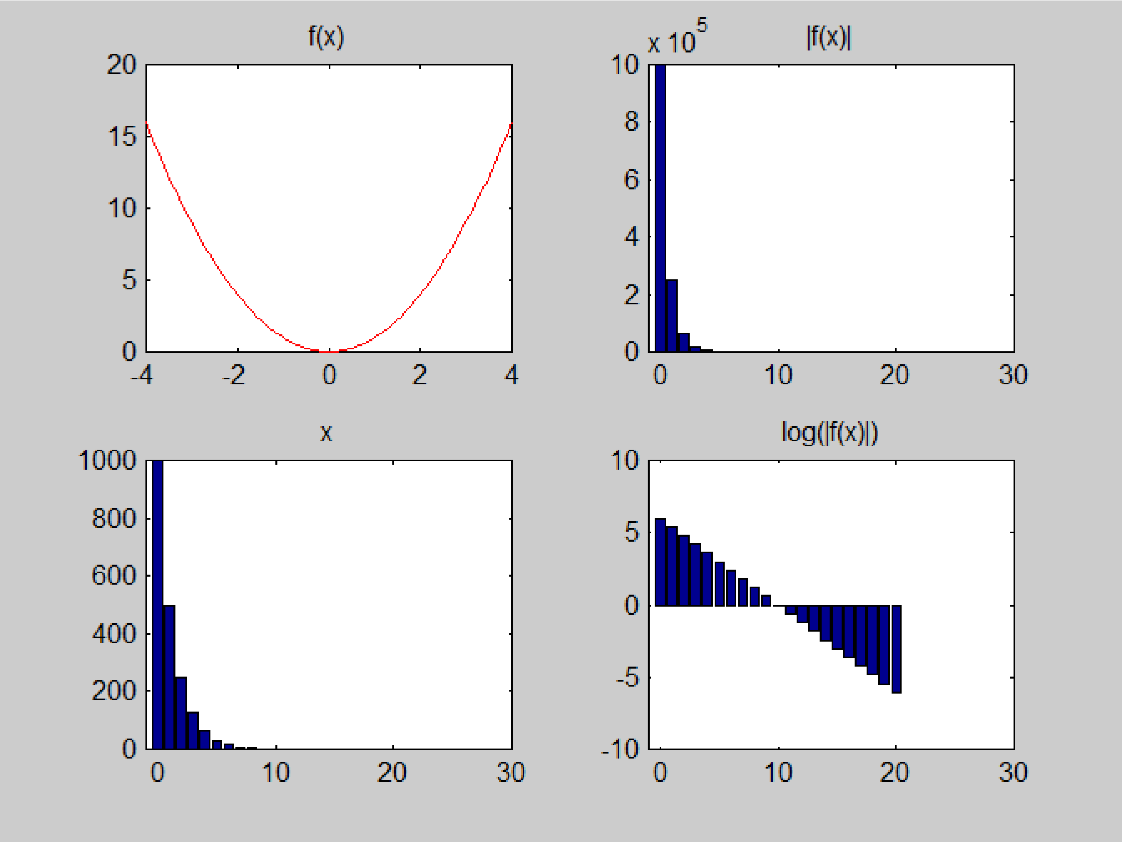
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2$, $|f(x)| \le 10^{-6}$, $x_0 = -1$



  - osiągnięto warunek stopu (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

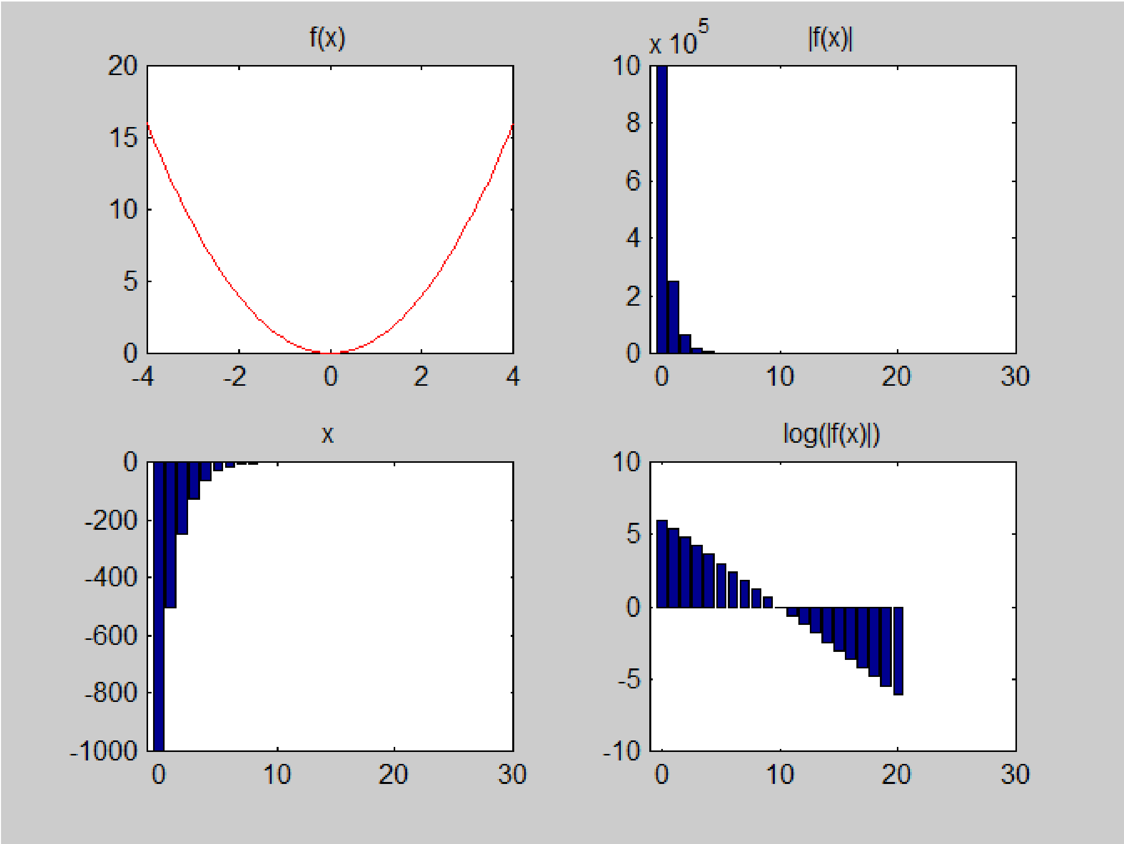
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1000$



  - osiągnięto warunek stopu (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

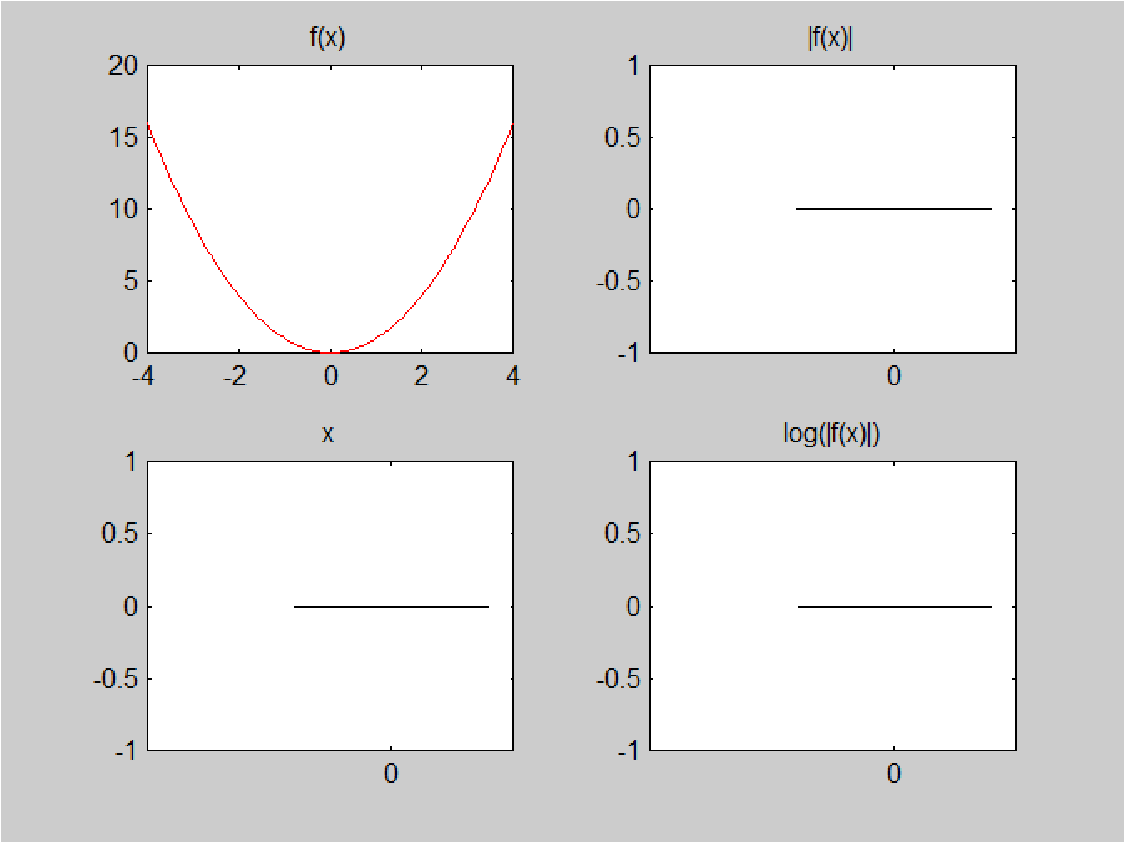
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1000$



  - osiągnięto warunek stopu (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 0$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

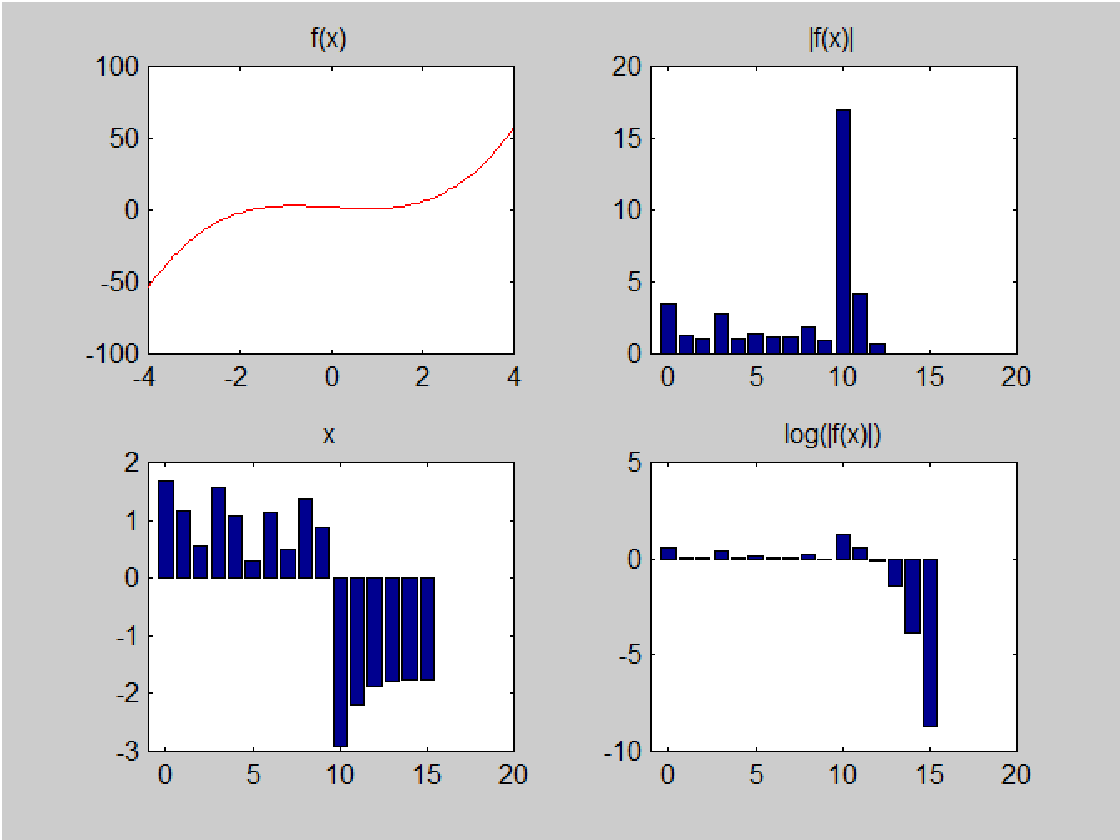
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$
  - miejsce zerowe funkcji: $x^z = -1.76929235424336\ldots$
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

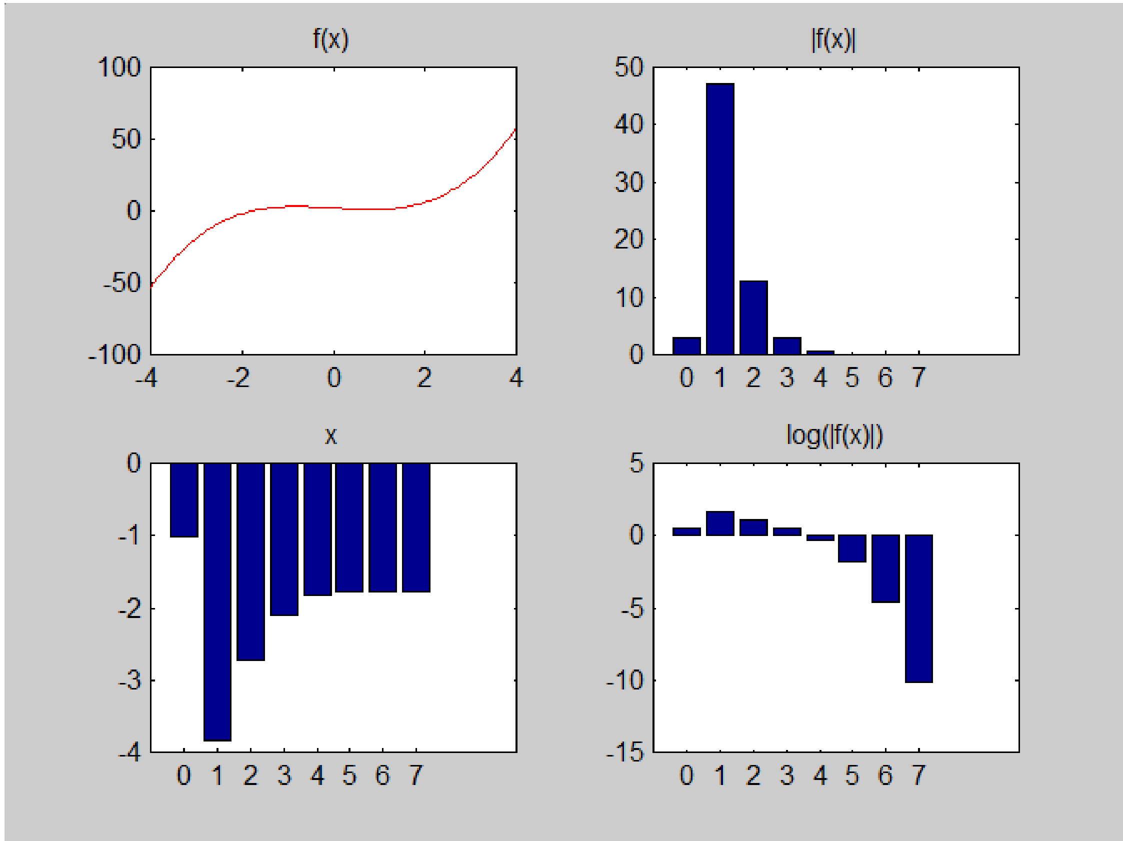
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

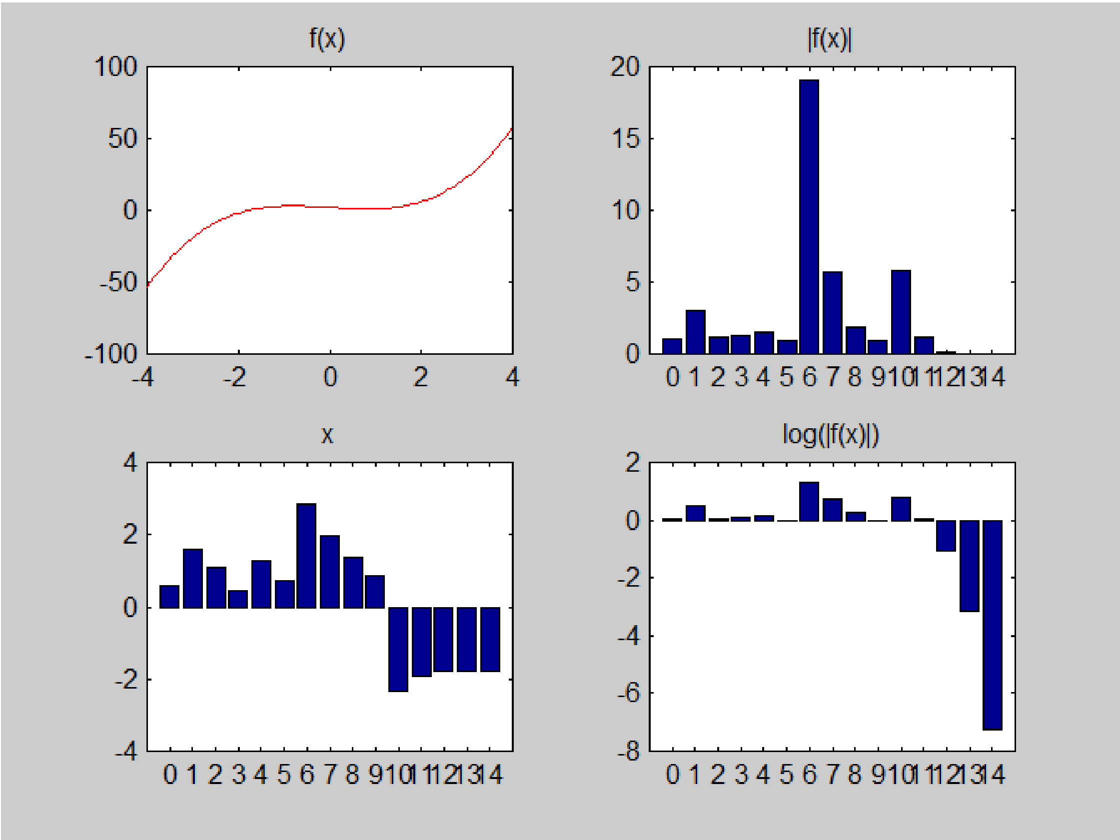
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

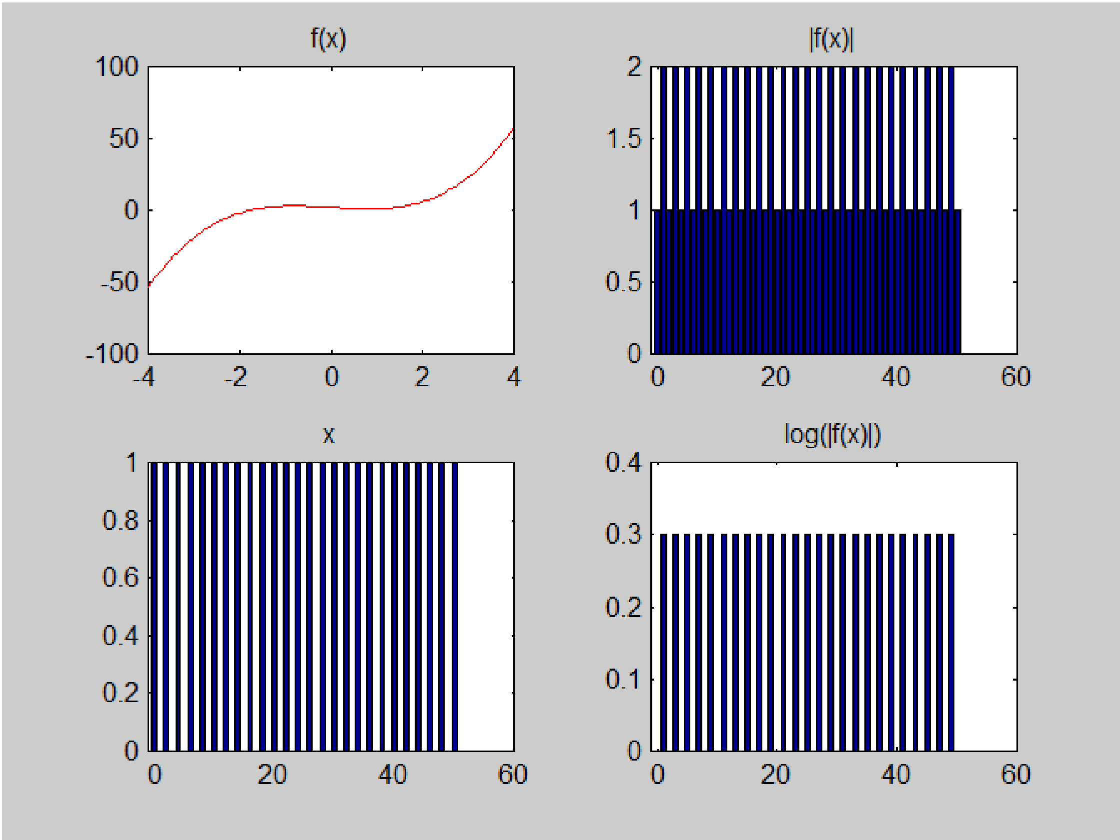
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - nie osiągnięto warunku stopu (problem: brak zbieżności)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

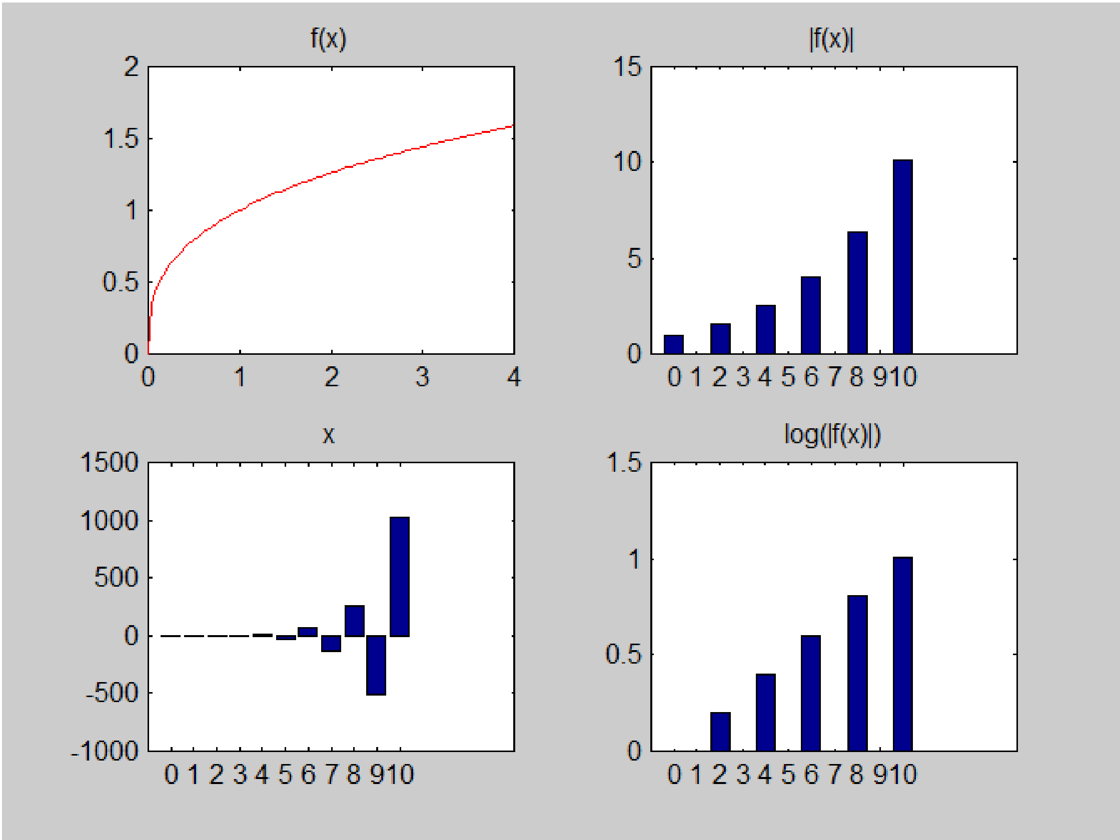
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - miejsce zerowe funkcji: $x^z = 0$
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - nie osiągnięto warunku stopu (problem: brak zbieżności)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

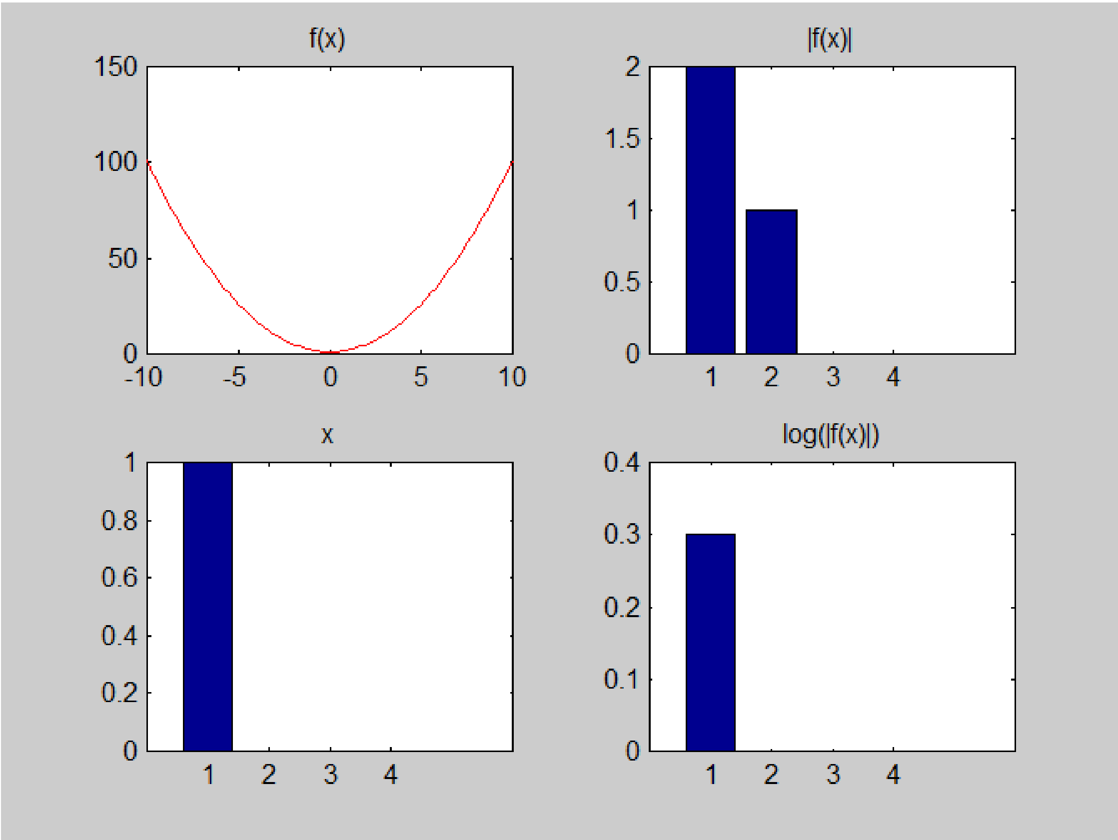
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2 + 1$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2 + 1$
  - miejsce zerowe funkcji: brak ($\forall_{x \in (-\infty, +\infty)}$: $f(x) > 0$)
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2 + 1$, $|f(x)| \le 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - nie osiągnięto warunku stopu (problem: dzielenie przez zero)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

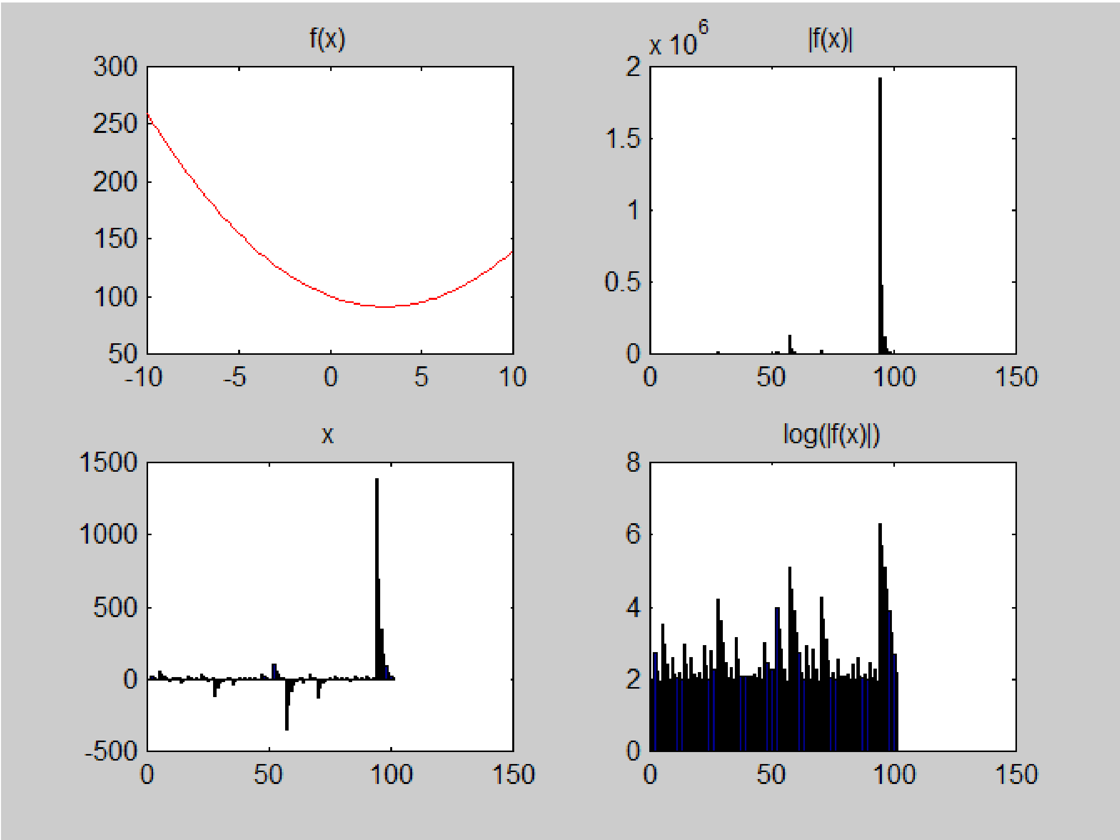
- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  – $f(x) = x^2 - 6x + 100$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2 - 6x + 100$
  - miejsce zerowe funkcji: brak ($\forall_{x \in (-\infty,+\infty)}$: $f(x) > 0$)
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^2 - 6x + 100$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - nie osiągnięto warunku stopu (problem: brak zbieżności)

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  – uzasadnienia niektórych niezbieżności

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$
  - czy można wyjaśnić niezbieżność dla $x_0 = 0$?

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$
  - pochodna: $f'(x) = 3x^2 - 2$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 – 2x + 2$
  - pochodna: $f'(x) = 3x^2 – 2$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n – f(x_n)/f'(x_n) = x_n – ((x_n)^3 – 2x_n + 2)/(3(x_n)^2 – 2)$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 – 2x + 2$
  - pochodna: $f'(x) = 3x^2 – 2$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n – f(x_n)/f'(x_n) = x_n – ((x_n)^3 – 2x_n + 2)/(3(x_n)^2 – 2)$
  - iteracja:
    - $x_0 = 0$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$
  - pochodna: $f'(x) = 3x^2 - 2$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^3 - 2x_n + 2)/(3(x_n)^2 - 2)$
  - iteracja:
    - $x_0 = 0$
    - $x_1 = 0 - (0^3 - 2 \cdot 0 + 2)/(3 \cdot 0^2 - 2) = -2/(-2) = 1$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$
  - pochodna: $f'(x) = 3x^2 - 2$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^3 - 2x_n + 2)/(3(x_n)^2 - 2)$
  - iteracja:
    - $x_0 = 0$
    - $x_1 = 0 - (0^3 - 2 \cdot 0 + 2)/(3 \cdot 0^2 - 2) = -2/(-2) = 1$
    - $x_2 = 1 - (1^3 - 2 \cdot 1 + 2)/(3 \cdot 1^2 - 2) = 1 - 1/1 = 0$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^3 - 2x + 2$
  - pochodna: $f'(x) = 3x^2 - 2$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^3 - 2x_n + 2)/(3(x_n)^2 - 2)$
  - iteracja:
    - $x_0 = 0$
    - $x_1 = 0 - (0^3 - 2 \cdot 0 + 2)/(3 \cdot 0^2 - 2) = -2/(-2) = 1$
    - $x_2 = 1 - (1^3 - 2 \cdot 1 + 2)/(3 \cdot 1^2 - 2) = 1 - 1/1 = 0$
    - ...

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - czy można wyjaśnić niezbieżność dla $x_0 \neq 0$?

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - pochodna: $f'(x) = (1/3)\cdot x^{1/3-1} = (1/3)\cdot x^{-2/3}$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - pochodna: $f'(x) = (1/3)\cdot x^{1/3-1} = (1/3)\cdot x^{-2/3}$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^{1/3})/((1/3)\cdot(x_n)^{-2/3})$
    $= x_n - 3(x_n)^{1/3-(-2/3)} = x_n - 3(x_n)^{3/3} = x_n - 3x_n = -2x_n$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - pochodna: $f'(x) = (1/3)\cdot x^{1/3-1} = (1/3)\cdot x^{-2/3}$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^{1/3})/((1/3)\cdot(x_n)^{-2/3})$
    $= x_n - 3(x_n)^{1/3-(-2/3)} = x_n - 3(x_n)^{3/3} = x_n - 3x_n = -2x_n$
  - iteracja:
    - $x_0 = 1$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - pochodna: $f'(x) = (1/3)\cdot x^{1/3-1} = (1/3)\cdot x^{-2/3}$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^{1/3})/((1/3)\cdot(x_n)^{-2/3})$
    $= x_n - 3(x_n)^{1/3-(-2/3)} = x_n - 3(x_n)^{3/3} = x_n - 3x_n = -2x_n$
  - iteracja:
    - $x_0 = 1$
    - $x_1 = -2\cdot 1 = -2$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - pochodna: $f'(x) = (1/3)\cdot x^{1/3-1} = (1/3)\cdot x^{-2/3}$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^{1/3})/((1/3)\cdot(x_n)^{-2/3})$
    $= x_n - 3(x_n)^{1/3-(-2/3)} = x_n - 3(x_n)^{3/3} = x_n - 3x_n = -2x_n$
  - iteracja:
    - $x_0 = 1$
    - $x_1 = -2\cdot 1 = -2$
    - $x_2 = -2\cdot(-2) = 4$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - pochodna: $f'(x) = (1/3)\cdot x^{1/3-1} = (1/3)\cdot x^{-2/3}$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^{1/3})/((1/3)\cdot(x_n)^{-2/3})$
    $= x_n - 3(x_n)^{1/3-(-2/3)} = x_n - 3(x_n)^{3/3} = x_n - 3x_n = -2x_n$
  - iteracja:
    - $x_0 = 1$
    - $x_1 = -2\cdot 1 = -2$
    - $x_2 = -2\cdot(-2) = 4$
    - $x_3 = -2\cdot 4 = -8$

Metoda Newtona (aproksymacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^{1/3}$
  - pochodna: $f'(x) = (1/3)\cdot x^{1/3-1} = (1/3)\cdot x^{-2/3}$
  - schemat: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - ((x_n)^{1/3})/((1/3)\cdot(x_n)^{-2/3})$
    $= x_n - 3(x_n)^{1/3-(-2/3)} = x_n - 3(x_n)^{3/3} = x_n - 3x_n = -2x_n$
  - iteracja:
    - $x_0 = 1$
    - $x_1 = -2\cdot 1 = -2$
    - $x_2 = -2\cdot(-2) = 4$
    - $x_3 = -2\cdot 4 = -8$
    - ...

…

Dygresja

- Jak się ma średnia arytmetyczna do kombinacji wypukłej?
  - średnia arytmetyczna jest szczególnym przypadkiem tzw. kombinacji wypukłej
  - $\text{mean}(a,b) = (a+b)/2 = (1/2)\cdot(a+b) = (1/2)\cdot a + (1/2)\cdot b$
  - dla wszystkich rzeczywistych a i b mamy więc:
    - gdy $a < b$: $a \leq \text{mean}(a,b) \leq b$
    - gdy $a = b$: $a = \text{mean}(a,b) = b$
    - gdy $a > b$: $a \geq \text{mean}(a,b) \geq b$

Dygresja

- Wniosek:
  dla wszystkich rzeczywistych a i b
  średnia arytmetyczna z a i b leży pomiędzy* a i b

*„pomiędzy” a i b jest rozumiane „słabo”,
tzn. gdy a = b, to zarówno a, jak i b leżą pomiędzy a i b

Dygresja

- Właściwość funkcji ciągłej (twierdzenie Darboux)
  - niech $f: [a, b] \to R$ będzie taką funkcją ciągłą, że $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tzn. $f(a)$ i $f(b)$ są niezerowe i mają różne znaki)
  - wtedy istnieje $c \in [a, b]$ takie, że $f(c) = 0$

Dygresja

- Właściwości funkcji $f(x) = 1/x$ (ciągła m.in. na przedziale $(0,+\infty)$)
  - jeżeli rzeczywiste, dodatnie x spełnia
    - $x < 1$, to $1/x > 1$, a więc $x < 1 < 1/x$
    - $x = 1$, to $1/x = 1$, a więc $x = 1 = 1/x$
    - $x > 1$, to $1/x < 1$, a więc $x > 1 > 1/x$

Dygresja

- Właściwości funkcji $f(x) = x^{1/2}$ (ciągła m.in. na przedziale $(0,+\infty)$)
  - jeżeli rzeczywiste, dodatnie x spełnia
    - $x < 1$, to $1 > x^{1/2} > x$
    - $x = 1$, to $1 = x^{1/2} = x$
    - $x > 1$, to $1 < x^{1/2} < x$

Dygresja

- Wniosek:
  pierwiastek z rzeczywistego, dodatniego x leży pomiędzy* x a 1/x

*„pomiędzy” a i b jest rozumiane „słabo”,
tzn. gdy a = b, to zarówno a, jak i b leżą pomiędzy a i b

Dygresja

- Niech $x_0 > 0$
- Pytanie:
  co się dzieje z wartościami ciągu:

  $x_{n+1} = (1/2)\cdot(x_n + 1/x_n)$

  dla kolejnych n?

- Odpowiedź:
  zbiegają się do 1 (bo x = 1 jest rozwiązaniem x = 1/x)

Dygresja

- Niech $x_0 > 0$
- Pytanie:
  co się dzieje z wartościami ciągu:

  $x_{n+1} = (1/2)\cdot(x_n + 4/x_n)$

  dla kolejnych n?

- Odpowiedź:
  zbiegają się do 2 (bo x = 2 jest rozwiązaniem x = 4/x)

  ... itd. ...

…

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Pierwiastki rzeczywiste z (rzeczywistych) liczb nieujemnych
  - pytanie: jak obliczyć pierwiastek kwadratowy z 1000?
  - odpowiedź: skorzystać z kalkulatora! ☺
  - pytanie: jak kalkulator może obliczyć pierwiastek kwadratowy z 1000?

    (uwaga: pierwiastka nie można obliczyć za pomocą żadnej /dostępnej na kalkulatorze/ pojedynczej operacji typu dodawanie, odejmowanie, mnożenie czy dzielenie)
  - odpowiedź: może skorzystać z (aproksymacyjnej) metody Newtona

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Aproksymacyjna metoda Newtona w poszukiwaniu pierwiastków kwadratowych z rzeczywistych liczb nieujemnych
  - dla nieujemnych p zachodzi $x = p^{1/2} \Rightarrow x^2 = p \Leftrightarrow x^2 - p = 0$
  - wniosek: $p^{1/2}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = x^2 - p$ (jedynym, gdy $p = 0$; jednym z dwóch, gdy $p > 0$ /drugim jest $-p^{1/2}$/)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Aproksymacyjna metoda Newtona w poszukiwaniu pierwiastków kwadratowych z rzeczywistych liczb nieujemnych, c.d.
  - wyprowadzenie (aproksymacyjnego) schematu iteracyjnego
    - funkcja: $f(x) = x^2 - p$
    - pochodna: $f'(x) = 2x$
    - schemat: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) =$

      $= x_k - ((x_k)^2 - p)/(2x_k) =$

      $= x_k - (x_k)^2/(2x_k) + p/(2x_k) =$

      $= x_k - x_k/2 + p/(2x_k) =$

      $= (1/2)\cdot x_k + (p/2)/x_k =$

      $= (1/2)\cdot x_k + (1/2)\cdot p/x_k =$

      $= (1/2)\cdot(x_k + p/x_k)$

      (średnia arytmetyczna z x_k oraz p/x_k)
    - założenie: $x_k \neq 0$ dla wszystkich k, w szczególności $x_0 \neq 0$
    - po przyjęciu $x_0 > 0$, wobec nieujemności p, mamy gwarancję, że dla wszystkich k zachodzi $x_k \neq 0$

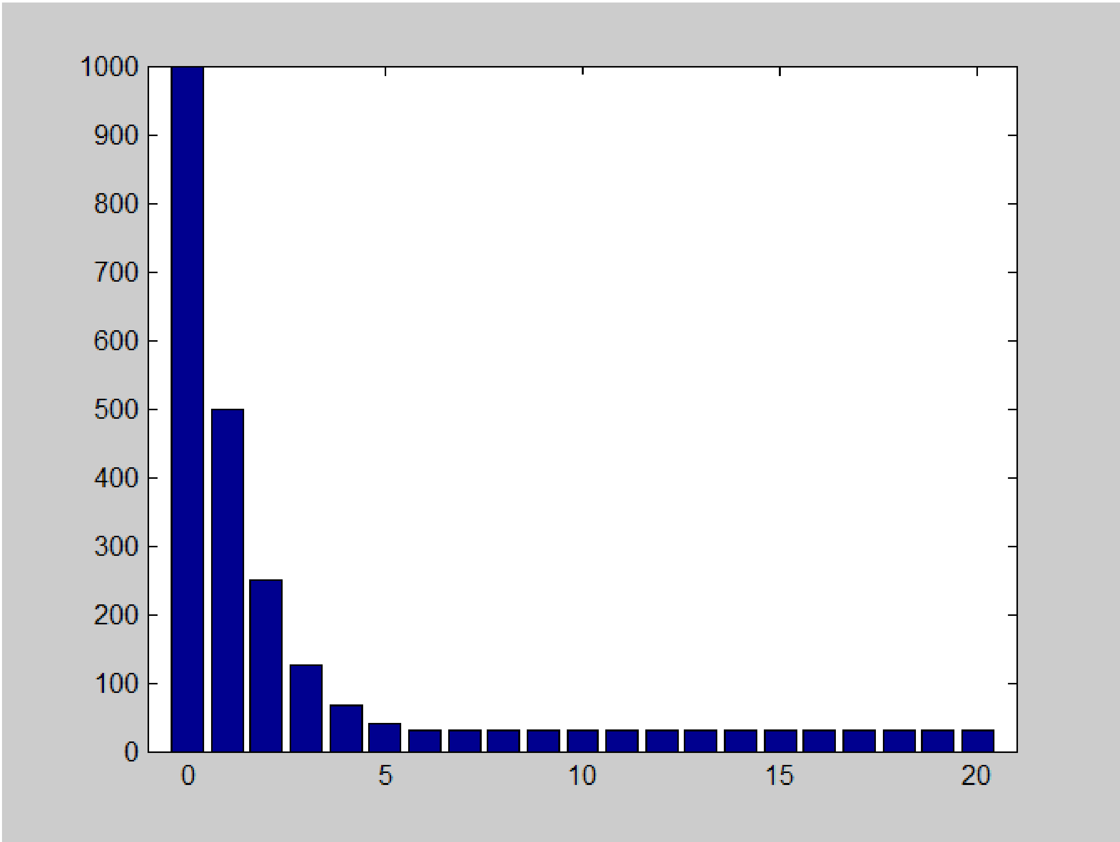
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Aproksymacyjna metoda Newtona w poszukiwaniu pierwiastków kwadratowych z rzeczywistych liczb nieujemnych, c.d.
  - algorytm (wejscie p, wyjscie y)

```
if (p < 0)
    y = „error”
elseif (p = 0)
    y = 0
else
    x_0 = p
    for k=0 to 19
        x_{k+1} = (1/2)·(x_k + p/x_k)
    end
    y = x_20
```

  - uwagi
    - liczba iteracji dostosowana do kalkulatora 9-cio pozycyjnego
    - demonstrowane wyniki nie uwzględniają tego faktu (zostały wygenerowane w arytmetyce typu double)

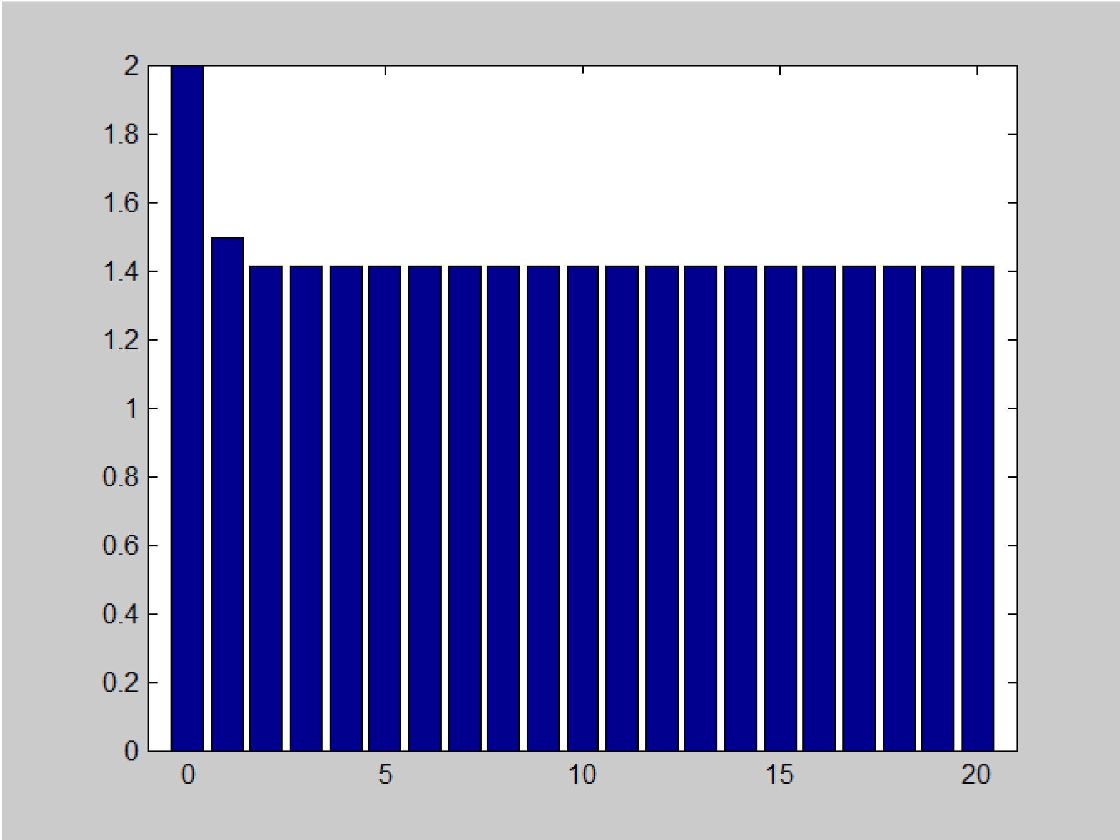
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = 1000 /20 iteracji/
- y = 31.6227766

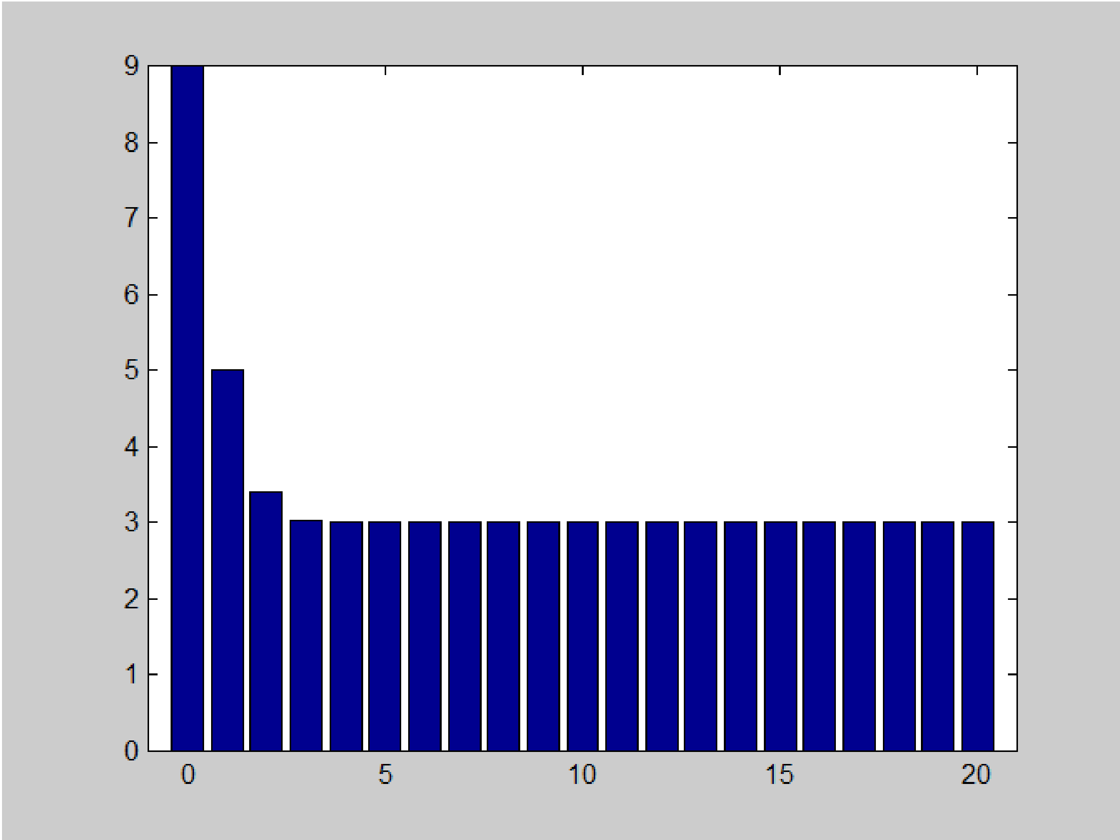
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = 2 /20 iteracji/
- y = 1.41421356

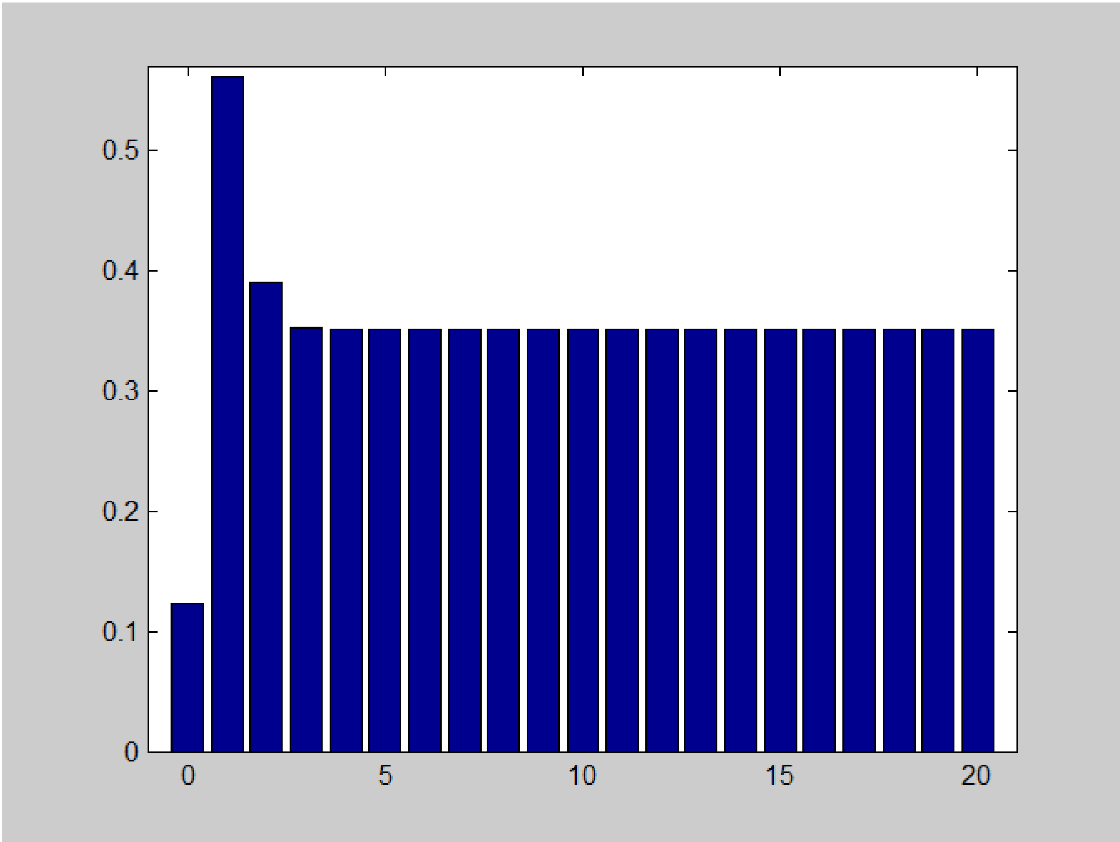
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = 9 /20 iteracji/
- y = 3

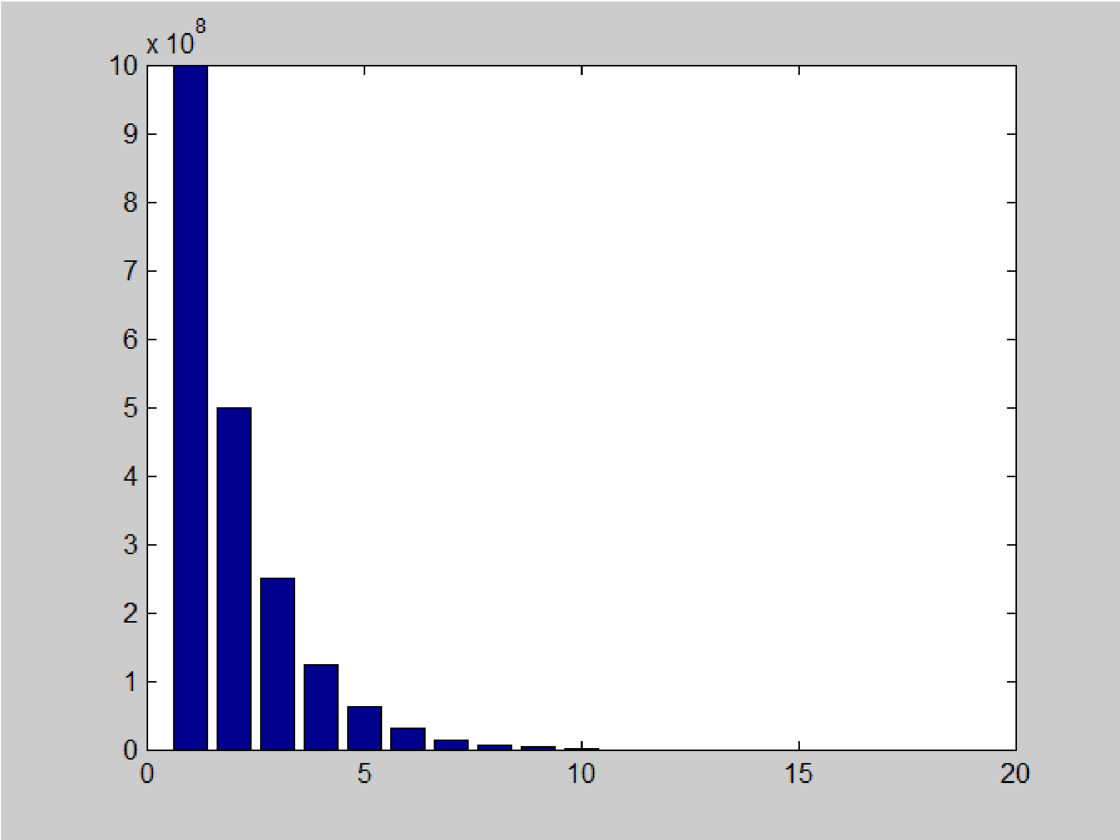
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = 0.12345678 /20 iteracji/
- y = 0.35136417

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



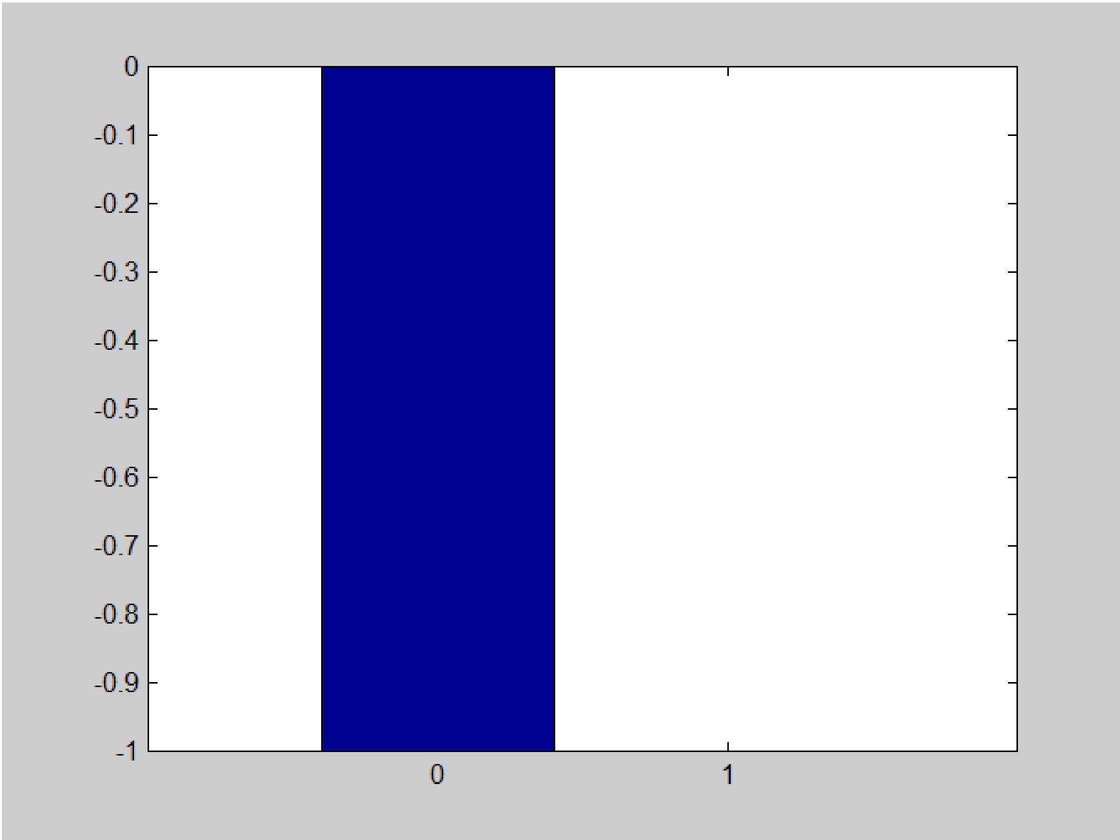
x_k

- p = 999999999 (dziewięć dziewiątek) /20 iteracji/
- y = 31622.7765

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona

- Co się dzieje, gdy założenie $p \geq 0$ nie jest spełnione
  ale schemat iteracyjny zostanie uruchomiony?

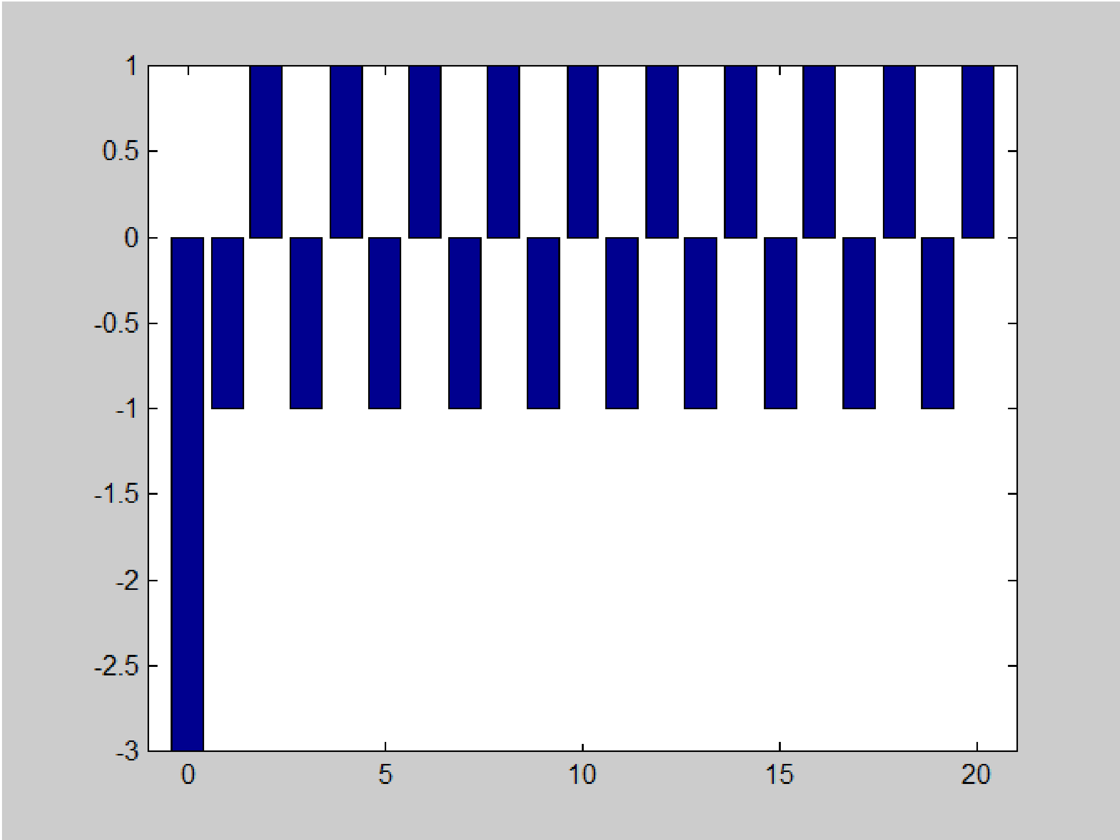
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = –1 (wbrew założeniu!) /2 iteracje/
- $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, czyli jest x_2 nieokreślone (formalny wynik: y = „error”)

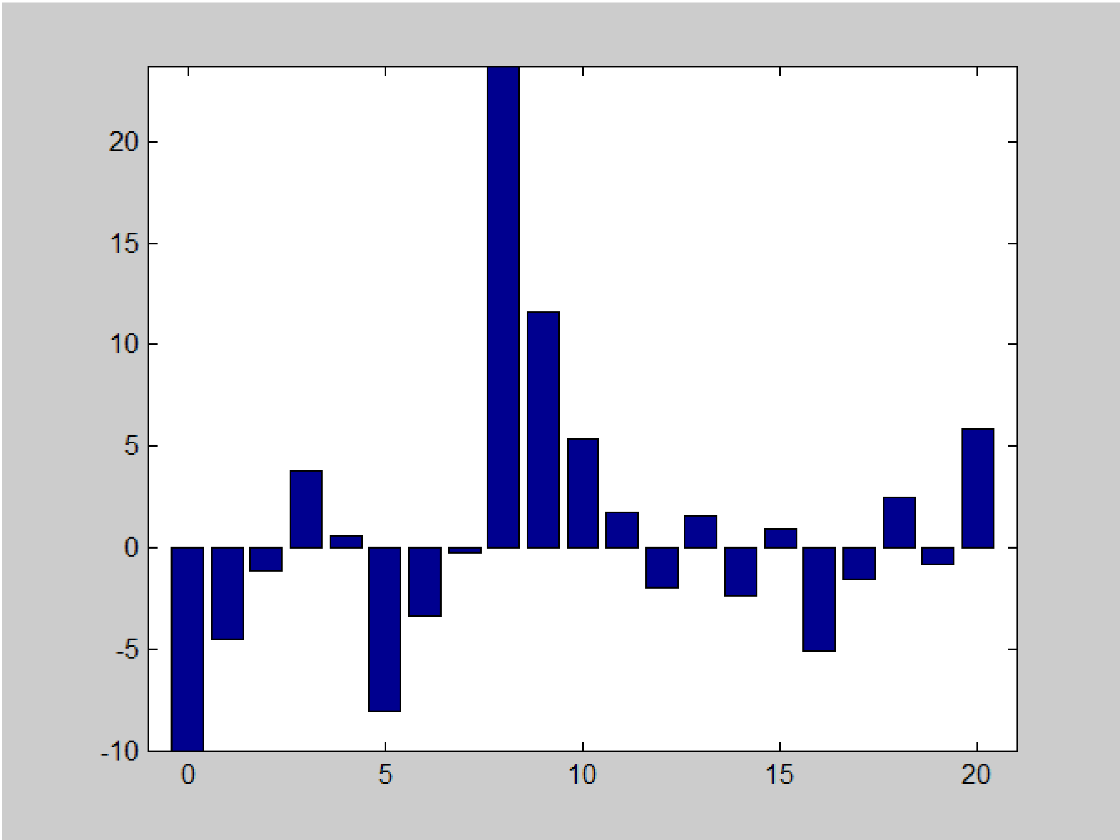
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = –3 (wbrew założeniu!) /20 iteracji/
- cykliczność ciągu $\{x_k\}$ (formalny wynik: y = „error”)

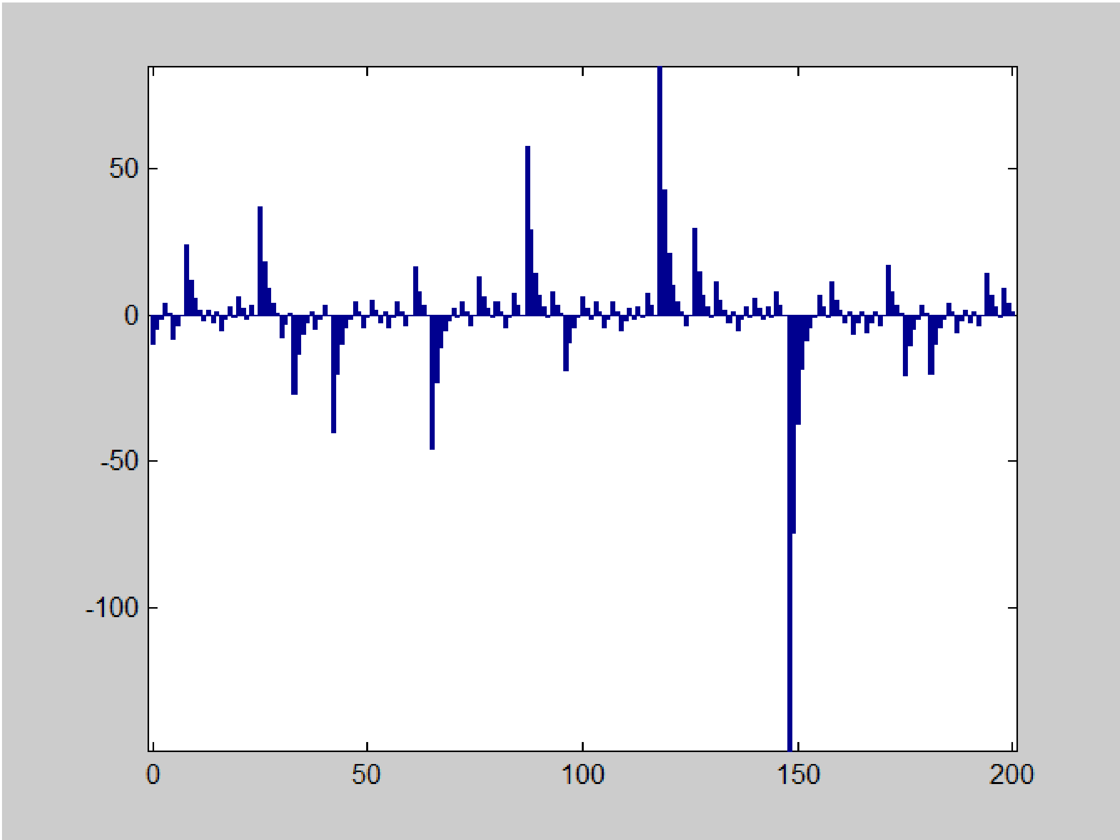
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = –10 (wbrew założeniu!) /20 iteracji/
- niezbieżność ciągu $\{x_k\}$ (formalny wynik: y = „error”)

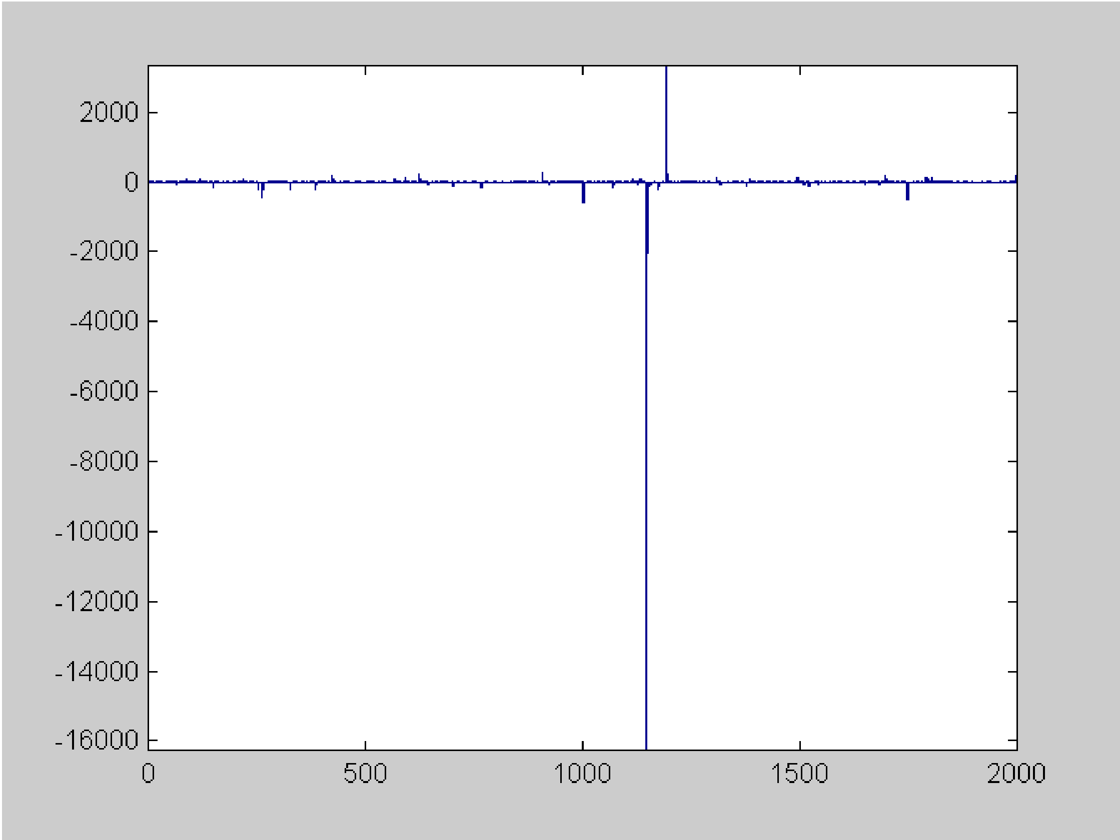
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = –10 (wbrew założeniu!) /200 iteracji/
- niezbieżność ciągu $\{x_k\}$ (formalny wynik: y = „error”)

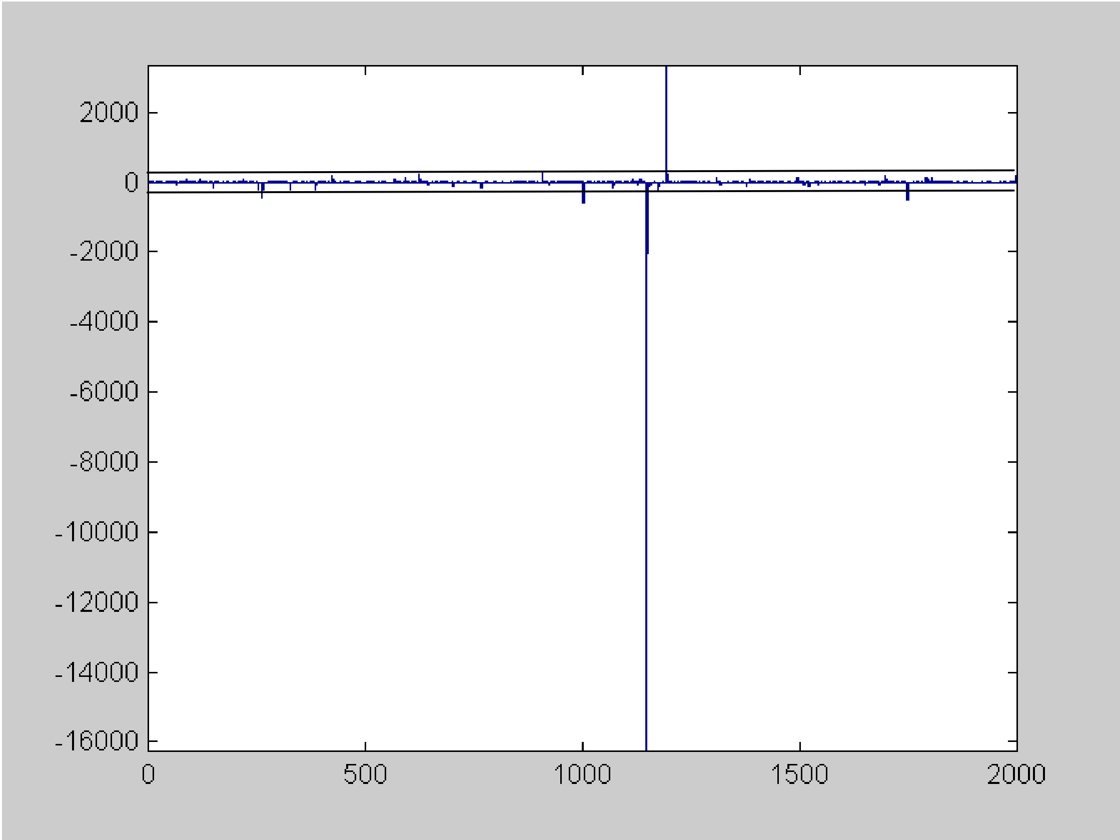
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = –10 (wbrew założeniu!) /2000 iteracji/
- niezbieżność ciągu $\{x_k\}$ (formalny wynik: y = „error”)

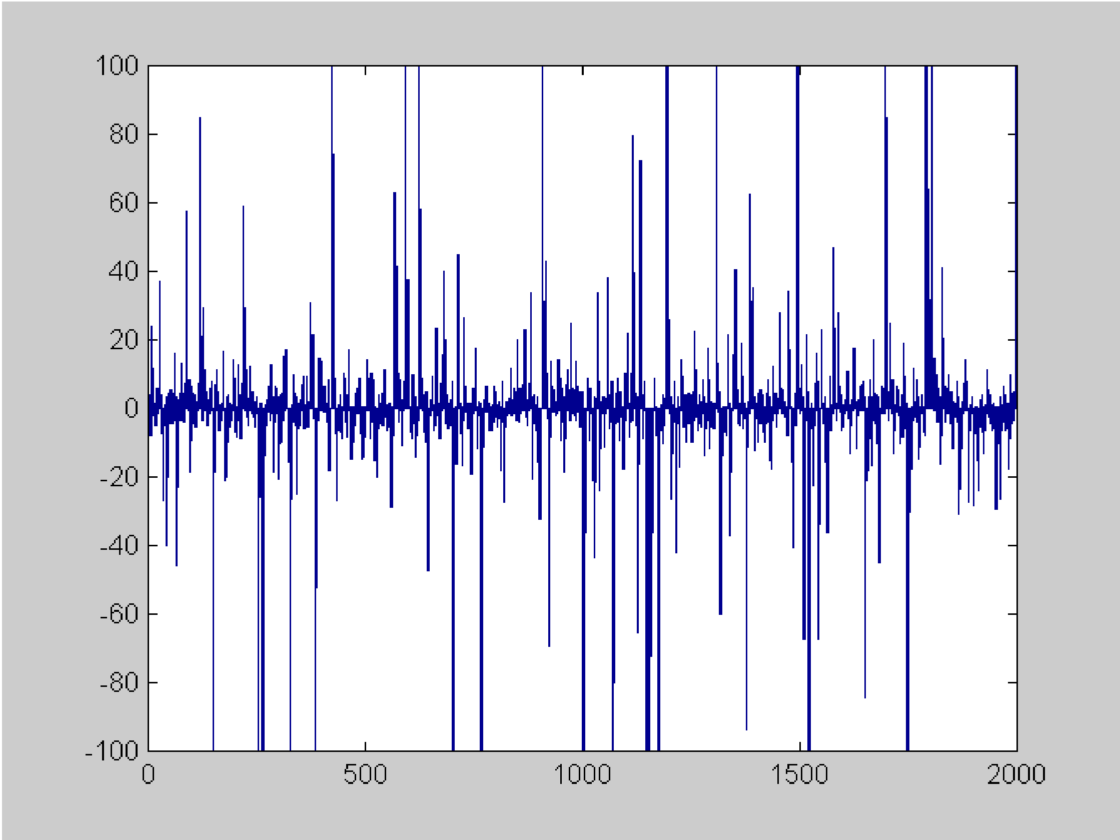
Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = –10 (wbrew założeniu!) /2000 iteracji/
- niezbieżność ciągu $\{x_k\}$ (formalny wynik: y = „error”)

Przykład ciekawego zastosowania metody Newtona



x_k

- p = –10 (wbrew założeniu!) /2000 iteracji/, zawężone wartości
- niezbieżność ciągu $\{x_k\}$ (formalny wynik: y = „error”)

…

Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Skojarzenia
  - funkcja kwadratowa
  - parabola
  - wyróżnik (tzw. delta)
  - dwa pierwiastki
  - ...

  ale...
  - czy f(x) jest funkcją kwadratową?
  - czy f(x) jest funkcją liniową*?
  - czy f(x) jest funkcją stałą?

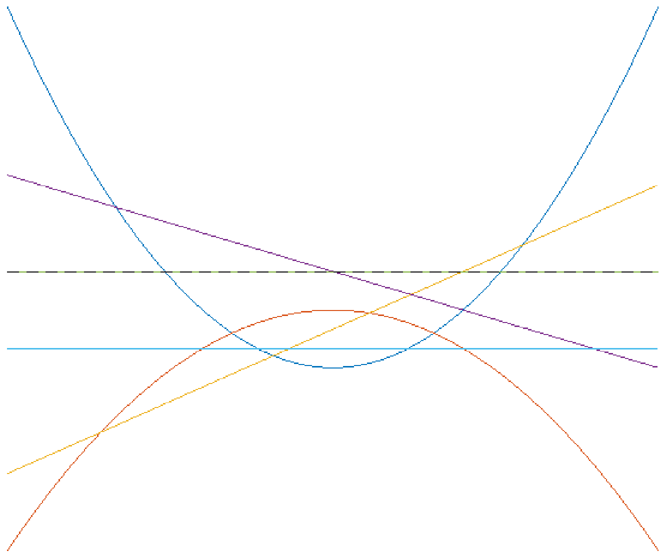
  (uwaga na inne relacje pomiędzy pojęciami (funkcja) „kwadratowa–liniowa” a (funkcja) „liniowa–stała”)

* na tym i kilku kolejnych slajdach: „funkcja liniowa” to funkcja postaci $f(x) = ax + b$

Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Ekstrema (lokalne) $f(x) = ax^2 + bx + c$ przy $a \neq 0$ (kwadratowa)
  - ...
- Ekstrema (lokalne) $f(x) = ax^2 + bx + c$ przy $a = 0$ (liniowa)
  - ekstrema (lokalne) $f(x) = 0x^2 + bx + c$ przy $b \neq 0$ (niestała)
    - ...
  - ekstrema (lokalne) $f(x) = 0x^2 + bx + c$ przy $b = 0$ (stała)
    - ekstrema (lokalne) $f(x) = 0x^2 + 0x + c$ przy $c \neq 0$
      - ...
    - ekstrema (lokalne) $f(x) = 0x^2 + 0x + c$ przy $c = 0$
      - ...

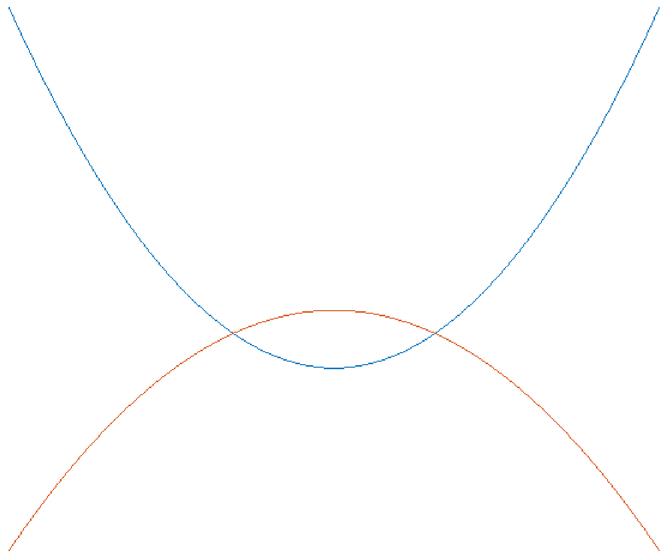
Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$



Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Ekstrema (lokalne) $f(x) = ax^2 + bx + c$ przy $a \neq 0$ (kwadratowa)
  - ...

Funkcja postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$



…

Ekstrema (minima/maksima) lokalne

- Oznaczenia
  - funkcja
    $f(x)$
    - założenie: $f(x) \in C^2$
  - pochodna
    $f'(x_0) \equiv [\partial f/\partial x]_{x=x_0}$
  - druga pochodna
    $f''(x_0) \equiv [\partial f/\partial x^2]_{x=x_0}$
- Twierdzenie o ekstremach (lokalnych)
  Jeżeli $f'(x_0) = 0$
  - oraz $f''(x_0) > 0$, to x_0 stanowi minimum (lokalne) funkcji $f(x)$
  - oraz $f''(x_0) < 0$, to x_0 stanowi maksimum (lokalne) funkcji $f(x)$

Ekstrema (minima/maksima) lokalne

- Zastosowanie twierdzenia o ekstremach (lokalnych)
  – funkcja (w postaci ogólnej): $f(x) = ax^2 + bx + c$
  – pochodna: $f'(x) = 2ax + b$
  – druga pochodna: $f''(x) = 2a$
- W tym przypadku
  – $f'(x) = 2ax + b = 0$
    - spełnione dla $x_0 = -b/(2a)$ (punkt stacjonarny)
      /określa położenie potencjalnego ekstremum/
  – $f''(x) = 2a$ (nie zależy od x)
    - $2a > 0 \Leftrightarrow a > 0$ natomiast $2a < 0 \Leftrightarrow a < 0$
      /określa istnienie i charakter potencjalnego ekstremum/
- W rezultacie
  – dla $a > 0$ $f(x)$ posiada minimum w $x_0 = -b/(2a)$
  – dla $a < 0$ $f(x)$ posiada maksimum w $x_0 = -b/(2a)$

Ekstrema (minima/maksima) lokalne

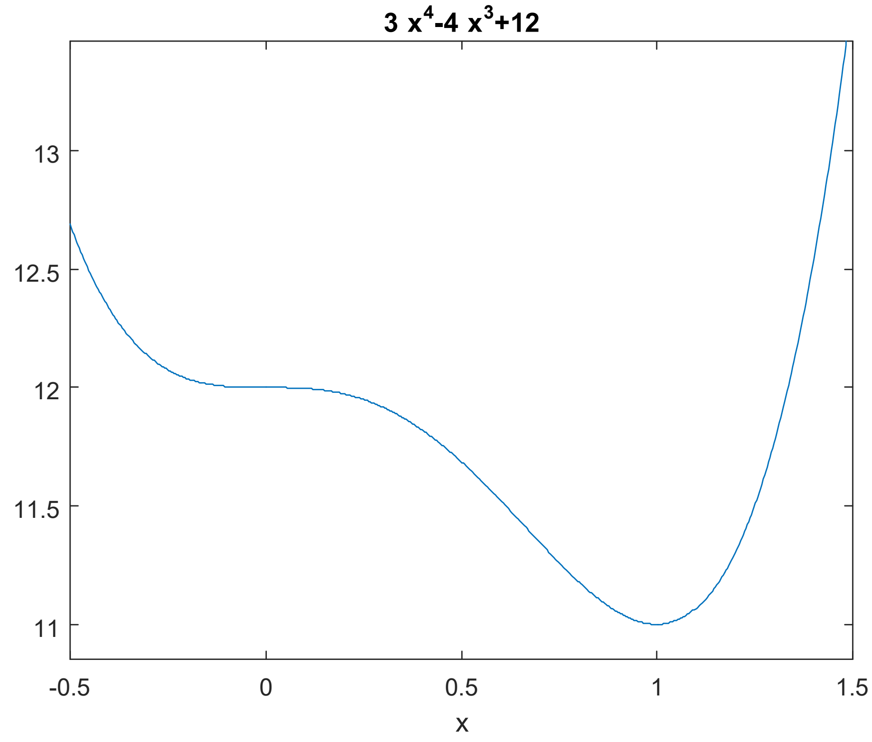
- Zastosowanie twierdzenia o ekstremach (lokalnych)
  - funkcja: $f(x) = x^2 + x + 1$
  - pochodna: $f'(x) = 2x + 1$
  - druga pochodna: $f''(x) = 2$
- W tym przypadku
  - $f'(x) = 2x + 1 = 0$
    - spełnione dla $x_0 = -1/2$ (punkt stacjonarny)
      /określa położenie potencjalnego ekstremum/
  - $f''(x) = 2$ (nie zależy od x)
    - $2 > 0$
      /określa istnienie i charakter potencjalnego ekstremum/
- W rezultacie
  - f(x) posiada minimum w $x_0 = -1/2$

Ekstrema (minima/maksima) lokalne

- Zastosowanie twierdzenia o ekstremach (lokalnych)
  - funkcja: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12$
  - pochodna: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$
  - druga pochodna: $f''(x) = 36x^2 - 24x$
- W tym przypadku
  - $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0$
    - spełnione dla $x_0 = 0$ lub $x_0 = 1$ (punkty stacjonarne)
      /określa położenie potencjalnego ekstremum/
  - $f''(x) = 36x^2 - 24x$
    - $f''(x) = 0$ dla $x_0 = 0$
    - $f''(x) = 12 > 0$ dla $x_0 = 1$

      /określa istnienie i charakter potencjalnego ekstremum/
- W rezultacie
  - $f(x)$ posiada minimum (tylko) w $x_0 = 1$

Ekstrema (minima/maksima) lokalne



…

Minimalizacja funkcji

- Niech f(**x**) będzie daną analitycznie funkcją rzeczywistą określoną dla każdego wektora **x** należącego do jakiegoś ustalonego obszaru zainteresowań S (zawartego w lub równego dziedzinie funkcji), np.:
  – n-wymiarowej hiperprzestrzeni V_n
  – n-wymiarowego hiperprostopadłościanu H_n wyznaczonego przez wektory $[a_1, \ldots, a_n]$ oraz $[b_1, \ldots, b_n]$, gdzie $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$
- O funkcji f(**x**) zakładamy w ogólności, że w obszarze S jest
  – ciągła
  – posiada przynajmniej dwie pierwsze pochodne (dane analitycznie)
  – jej dwie pierwsze pochodne są ciągłe
- Niektóre metody zakładają także, że f(**x**) w obszarze S jest
  – wypukła

…

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Metoda (optymalizacyjna) Newtona
  - metoda optymalizacji <u>jednowymiarowej</u> bez ograniczeń
    (z ewentualnymi ograniczeniami na zakres zmienności zmiennej)
- Dane
  - jednowymiarowy obszar S
    - (obszar musi spełniać kilka dodatkowych założeń)
  - określona w obszarze S funkcja f(x)
    - (funkcja musi spełniać kilka dodatkowych założeń)
- Cel metody
  - znaleźć $x^* \in S$ taki, że $\forall_{x \in S}\ f(x^*) \leq f(x)$
    (minimalizacja funkcji f(x) w obszarze S)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Idea metody Newtona (optymalizacji jednowymiarowej)
  - niech będzie dana analitycznie jednowymiarowa funkcja f(x), dla której poszukujemy minimum w pewnym obszarze (w praktyce: w przedziale), i o której zakładamy, że w tym właśnie przedziale
    - jest ciągła
    - jest wypukła
    - posiada pierwszą i drugą pochodną (dane analitycznie), które są ciągłe
  - uznaje się, że przebieg optymalizowanej, jednowymiarowej funkcji f(x) w otoczeniu pewnego ustalonego punktu x_0 jest taki sam, jak przebieg pewnej funkcji kwadratowej, czyli funkcji postaci $g(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$, o parametrach a, b i c tak dobranych, aby „dobrze” odzwierciedlały przebieg funkcji f(x)
    - do „jakości” takiego odzwierciedlenia przyczyniają się oczywiście powyższe założenia dotyczące funkcji f(x), które (nie przez przypadek, oczywiście) są także właściwościami funkcji kwadratowej postaci $g(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$
  - przybliżenie funkcji f(x) jest wykonywane z użyciem jej pochodnych

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Idea metody Newtona (optymalizacji jednowymiarowej), c.d.
  - za rozwiązanie funkcji f(x) uznaje się rozwiązanie funkcji g(x), przy czym:
    - jeżeli znaleziony punkt (czyli rozwiązanie kwadratowej funkcji g(x)) stanowi rozwiązanie optymalizowanej funkcji f(x), to zadanie jest zakończone
      - powyższe sprawdzenie może nie być trywialne
      - ogólne rozwiązanie tego problemu stanowi osobne zagadnienie (warunek stopu)
    - jeżeli znaleziony punkt (czyli rozwiązanie kwadratowej funkcji g(x)) nie stanowi rozwiązania optymalizowanej funkcji f(x), to przyjmuje się, że stanowi on lepsze przybliżenie poszukiwanego rozwiązania i powtarza się całe postępowanie
      - powyższe przyjęcie może być błędne
      - ogólne rozwiązanie tego problemu stanowi osobne zagadnienie (niezbieżność)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Idea metody Newtona (optymalizacji jednowymiarowej), c.d.
  - funkcja kwadratowa i jej dwie pierwsze pochodne
    - funkcja: $g(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$
    - jej pierwsza pochodna: $g'(x) = 2ax + b$
    - jej druga pochodna: $g''(x) = 2a$
  - położenie rozwiązania funkcji kwadratowej:
    punkt zerowania się (pierwszej) pochodnej
    - przyrównanie pierwszej pochodnej do zera: $2ax + b = 0$
    - rozwiązanie: $x = –b/2/a$
  - pierwsza pochodna jest funkcją afiniczną, która zmienia znak w punkcie $x = –b/2/a$ (jest ujemna dla $x < –b/2/a$ i dodatnia dla $x > –b/2/a$), z czego wynika, że funkcja $g(x)$ posiada ekstremum w punkcie $x = –b/2/a$
  - ponieważ (z założenia) $a > 0$, więc także $2a > 0$,
    a zatem ekstremum funkcji $g(x)$ jest typu minimum
    - uwaga: w zależności od a, funkcja $g(x) = ax^2 + bx + c$ może mieć minima, maksima albo punkty przegięcia, a konkretnie:
      - funkcja ma minimum, gdy $a > 0$
      - funkcja ma punkt przegięcia, gdy $a = 0$
      - funkcja ma maksimum, gdy $a < 0$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przybliżanie funkcji f(x) funkcją kwadratową z użyciem pochodnych
  - jeżeli wszystkie pochodne funkcji f(x) istnieją w pewnym obszarze S, to w tym obszarze możliwe jest przybliżenie tej funkcji wykorzystujące jej rozwinięcie w szereg Taylora

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przybliżanie funkcji f(x) funkcją kwadratową z użyciem pochodnych
  - niech dane będą
    - ustalony obszar S
    - funkcja f(x) określona w obszarze S i posiadająca wszystkie pochodne określone w obszarze S
  - rozwinięcie T(x) funkcji f(x) w szereg Taylora wokół punktu $x_0 \in S$ dane jest następującym wzorem

$$
\begin{aligned}
T(x) &= f^{(0)}(x_0)(x-x_0)^0/(0!) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0)^1/(1!) + f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2/(2!) + \dots \\
&= f(x_0)\cdot 1/1 + f'(x_0)(x-x_0)/1 + f''(x_0)(x-x_0)^2/2 + \dots \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2 + \dots
\end{aligned}
$$

    (rozwinięcie obejmuje nieskończoną liczbę składników)
  - zastosowana notacja:
    - $f^{(k)}(x)$ – oznaczenie k-tej pochodnej funkcji f(x)
    - w szczególności
      - $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$ – funkcja
      - $f^{(1)}(x) \equiv f'(x)$ – jej pierwsza pochodna
      - $f^{(2)}(x) \equiv f''(x)$ – jej druga pochodna
      - …

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przybliżanie funkcji f(x) funkcją kwadratową z użyciem pochodnych
  - dla dowolnej funkcji f(x)
    - dla każdego $x \in S$ wykorzystując
      - nieskończoną liczbę składników rozwinięcia otrzymujemy T(x) = f(x)
      - skończoną liczbę składników rozwinięcia otrzymujemy $T(x) \approx f(x)$
  - dla szczególnej funkcji, spełniającej $f^{(k)}(x) = 0$ dla wszystkich $k \geq 3$
    - dla każdego $x \in S$ wykorzystując
      - trzy pierwsze składniki rozwinięcia otrzymujemy T(x) = f(x)
    - przykładem takiej funkcji jest $g(x) = ax^2 + bx + c$, ponieważ:
      - $g'(x) = 2ax + b$
      - $g''(x) = 2a$
      - $g'''(x) = 0$
      - $g''''(x) = 0$
      - itd.

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przybliżanie funkcji f(x) funkcją kwadratową z użyciem pochodnych
  - wykorzystując trzyelementowe przybliżenie q(x) rozwinięcia funkcji f(x) wokół punktu $x_0 \in S$ mamy dla każdego $x \in S$

    $f(x) \approx q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2$
  - funkcja q(x)
    - stanowi przybliżenie funkcji f(x)
    - jest trzyelementowym rozwinięciem f(x) w szereg Taylora wokół punktu x_0
    - ma postać $g(x) = ax^2 + bx + c$ ponieważ

      $$\begin{aligned} q(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)(x-x_0)^2/2 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)(x^2-2xx_0 + (x_0)^2)/2 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)x^2/2 - 2f''(x_0)xx_0/2 + f''(x_0)(x_0)^2/2 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)x^2/2 - f''(x_0)xx_0 + f''(x_0)(x_0)^2/2 = \\ &= f''(x_0)x^2/2 + f'(x_0)x - f''(x_0)xx_0 + f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)(x_0)^2/2 \\ &= f''(x_0)/2 \cdot x^2 + (f'(x_0) - f''(x_0)x_0) \cdot x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)(x_0)^2/2) \end{aligned}$$

      a więc: $a = f''(x_0)/2$, $b = f'(x_0) - f''(x_0)x_0$, $c = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)(x_0)^2/2$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Schemat iteracyjny metody
  - zakładamy, że dla każdego $x \in S$ spełniony jest warunek $f''(x) \neq 0$
  - powyższe założenie oraz zależności $a = f''(x_0)/2$ i $b = f''(x_0) - f'(x_0)x_0$ pozwalają na następujące określenie rozwiązania funkcji

    $$x = -b/2/a =$$
    $$= -(f'(x_0) - f''(x_0)x_0)/2/(f''(x_0)/2) = -(f'(x_0) - f''(x_0)x_0)/f''(x_0) =$$
    $$= -(f'(x_0)/f''(x_0) - f''(x_0)x_0/f''(x_0)) = -(f'(x_0)/f''(x_0) - x_0) =$$
    $$= x_0 - f'(x_0)/f''(x_0)$$

  - jeżeli x_0 jest dowolnym punktem ustalonego obszaru S, to (zgodnie z zasadą przybliżania funkcji f(x) funkcją kwadratową) punkt $x = x_0 - f'(x_0)/f''(x_0)$ jest rozwiązaniem funkcji f(x) lub lepszym przybliżeniem tego rozwiązania niż punkt x_0

    (powyższe „działa” także w przypadku, gdy x_0 jest już rozwiązaniem funkcji f(x) /ale spełniającym $f''(x_0) \neq 0$/, ponieważ wtedy $x_0 - f'(x_0)/f''(x_0) = x_0 - 0/f''(x_0) = x_0 - 0 = x_0$)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Schemat iteracyjny metody
  – zasada ustalania następnego punktu na podstawie poprzedniego pozwala na sformułowanie następującego schematu iteracyjnego

    $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$

    <u>Algorytm</u>

    1. ustal punkt x_0 i podstaw $k = 0$
    2. dopóki nie zachodzi warunek stopu, wykonuj:
        - oblicz $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$
        - podstaw $k = k + 1$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Potencjalne warunki stopu metody
  - osiągnięcie minimum
    - teoretycznie badamy: $f'(x_k) = 0$
    - praktycznie badamy: $|f'(x_k)| \leq \varepsilon$
  - ustabilizowanie wyniku
    - teoretycznie badamy: $x_{k+1} = x_k$
    - praktycznie badamy: $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$
  - przekroczenie maksymalnej liczby iteracji
    - $k > k_0$

gdzie

- ε jest (małą) dodatnią wartością rzeczywistą (dokładność obliczeń)
- k_0 jest (dużą) dodatnią wartością całkowitą (maksymalna liczba iteracji)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Zbieżność metody
  - metoda nie gwarantuje zbieżności dla każdego wektora początkowego
  - teoretyczne przyczyny ewentualnej niezbieżności
    - zerowość drugiej pochodnej (a więc nie istnieje jej odwrotność)
      rezultat: nie można obliczyć x_{k+1}
    - niewłaściwy krok metody (choć prawidłowo obliczony)
      rezultat: $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$
  - praktyczne przyczyny ewentualnej niezbieżności
    - ...
  - w (korzystnych) przypadkach zbieżnych: (w pobliżu rozwiązania) zbieżność rzędu drugiego (czyli wysoka!)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Czy są możliwe sytuacje, w których (optymalizacyjna) metoda Newtona nie działa wcale?
  - tak
  - przyczyny
    - druga pochodna nieokreślona (nie można zainicjować ciągu $\{x_k\}$)
    - druga pochodna dla pewnego x_k zerowa (nie można utworzyć elementu x_{k+1})
    - ciąg $\{x_k\}$ jest niezbieżny, a więc np.:
      - ciąg $\{x_k\}$ dąży do $+\infty$
      - ciąg $\{x_k\}$ dąży do $-\infty$
      - ciąg $\{x_k\}$ jest cykliczny
      - ciąg $\{x_k\}$ przejawia inne powody niezbieżności
        - » np.: +1, –2, +4, –8, +16, –32, +64, –128, +256, …

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Czy są możliwe sytuacje, w których (optymalizacyjna) metoda Newtona nie działa jednoznacznie (w jakimś sensie)?
  - tak
  - przyczyna
    - istnienie wielu minimów
      - z których różne mogą zostać osiągnięte (zależnie od doboru punktu startowego)

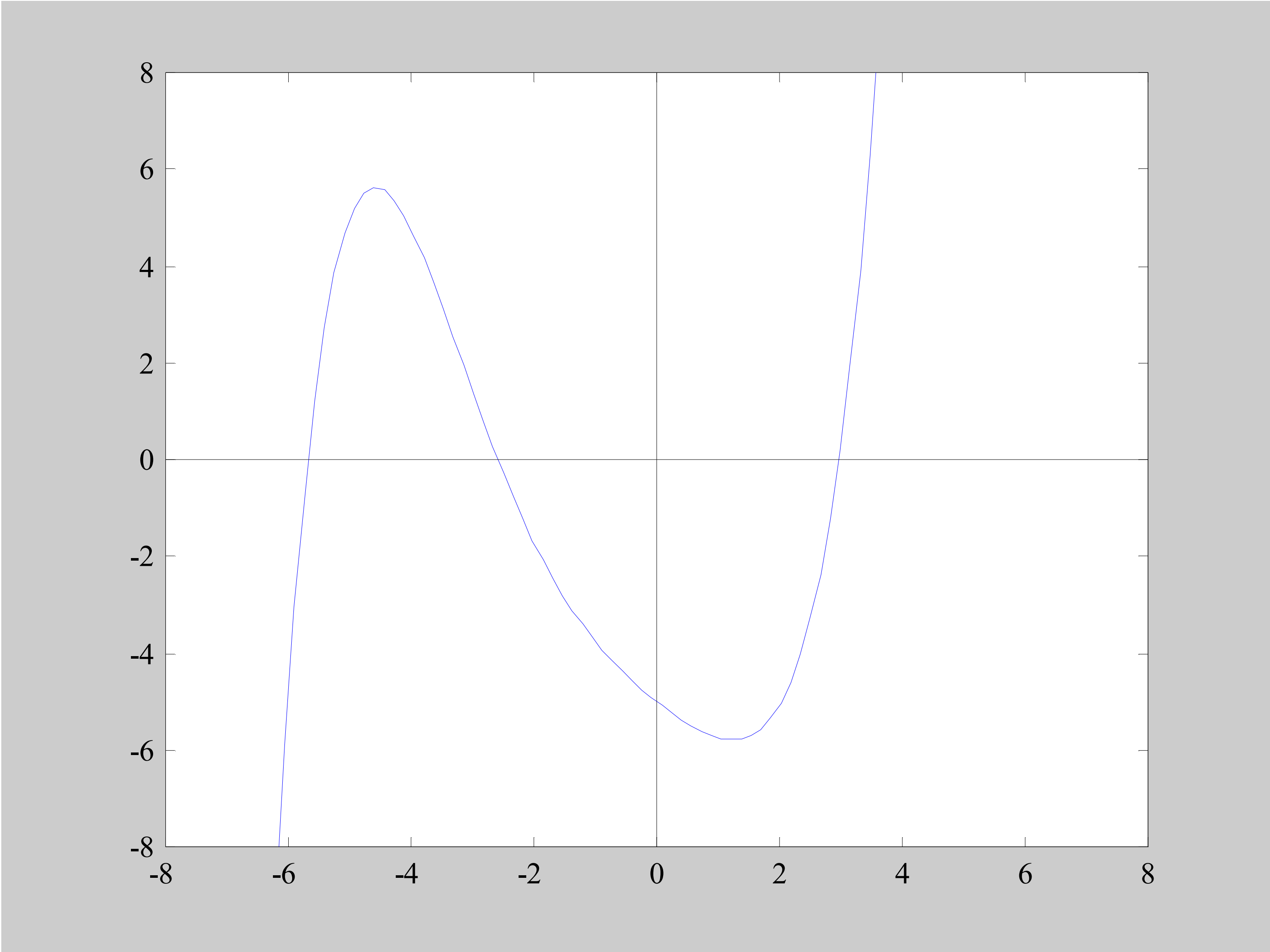
…

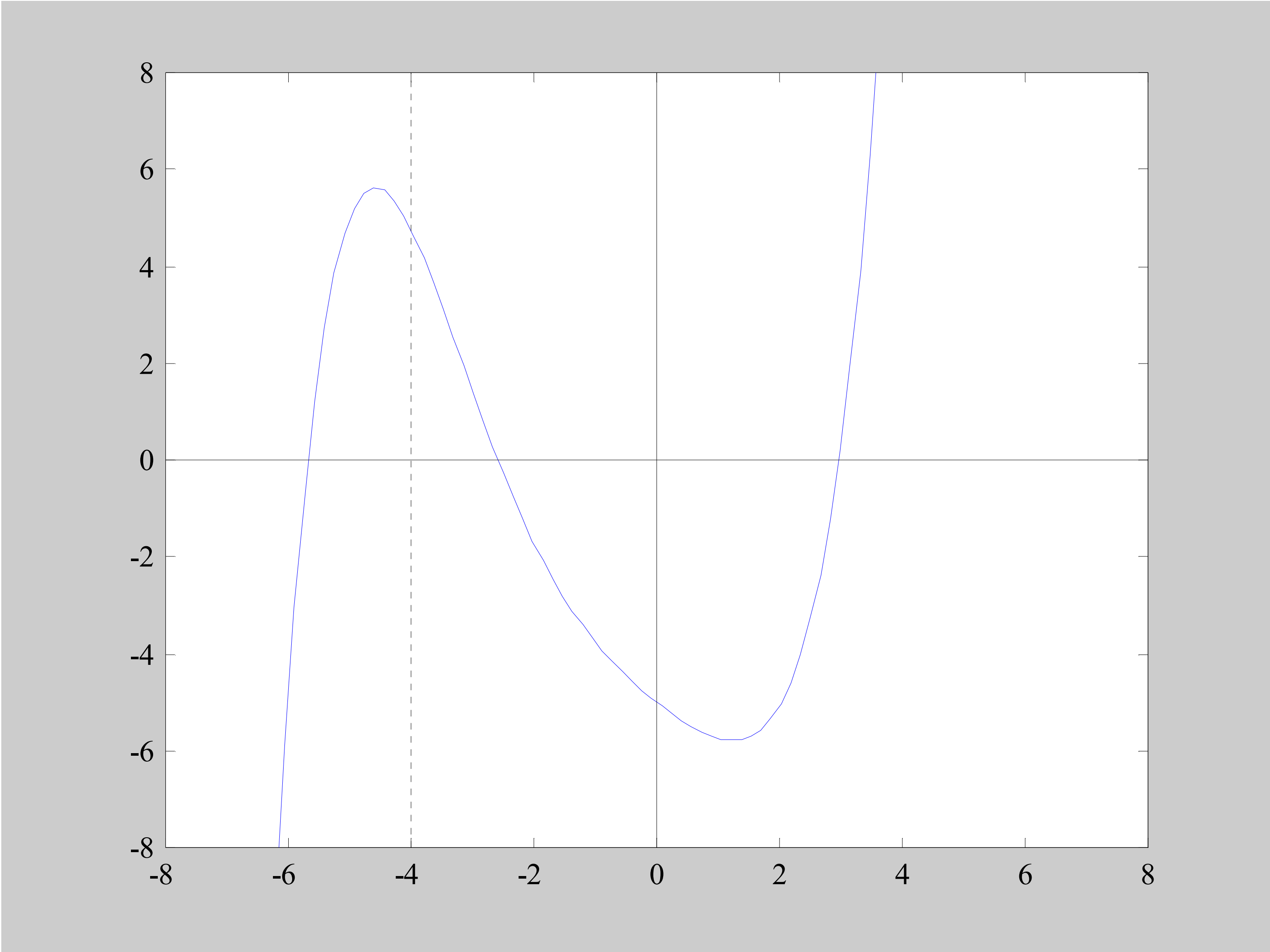
Metoda Newtona (optymalizacyjna)

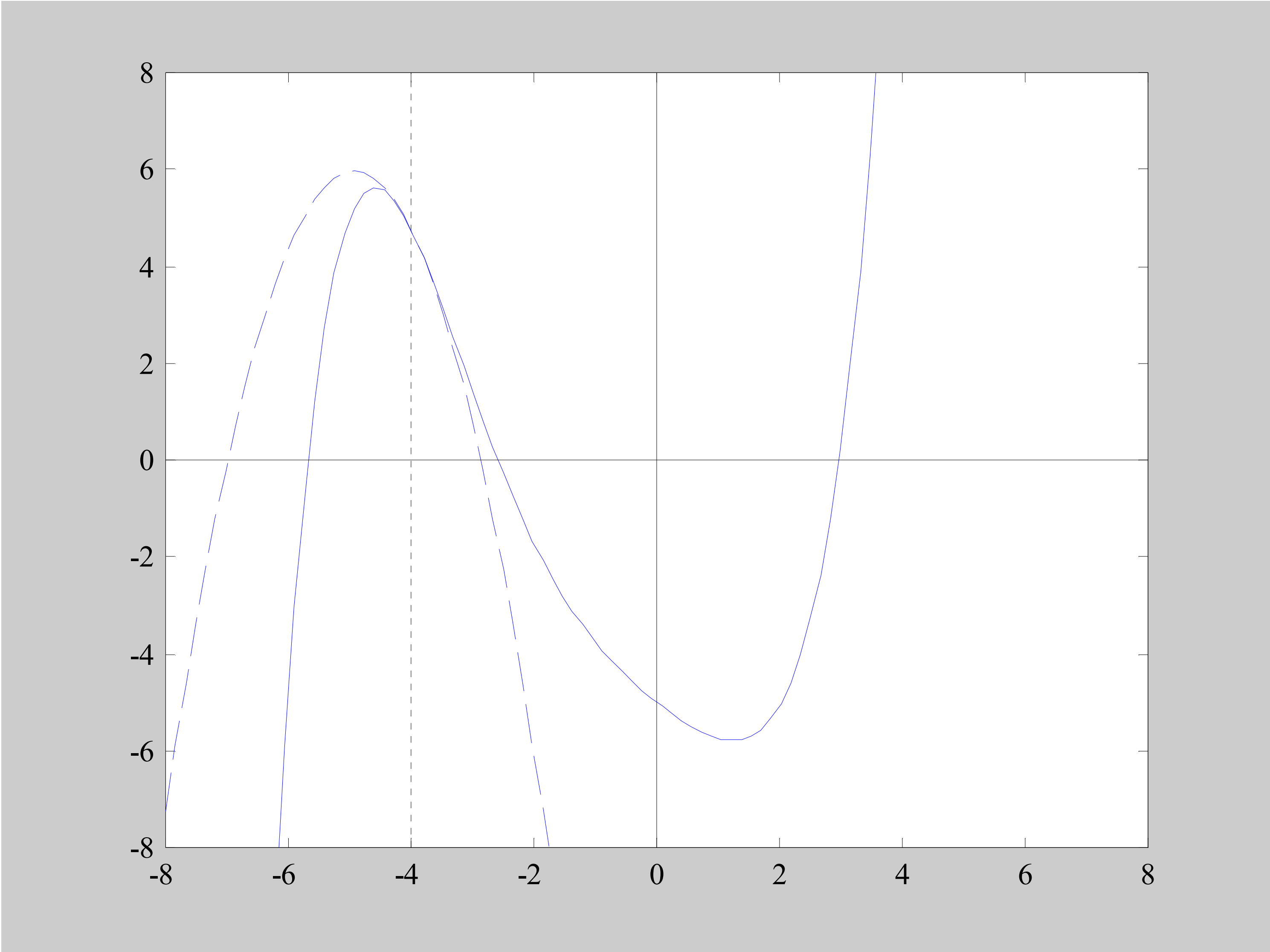
- Przykład przybliżania funkcji danej funkcją przybliżającą (kwadratową) /cel: znalezienie ekstremum funkcji danej/
  - funkcja

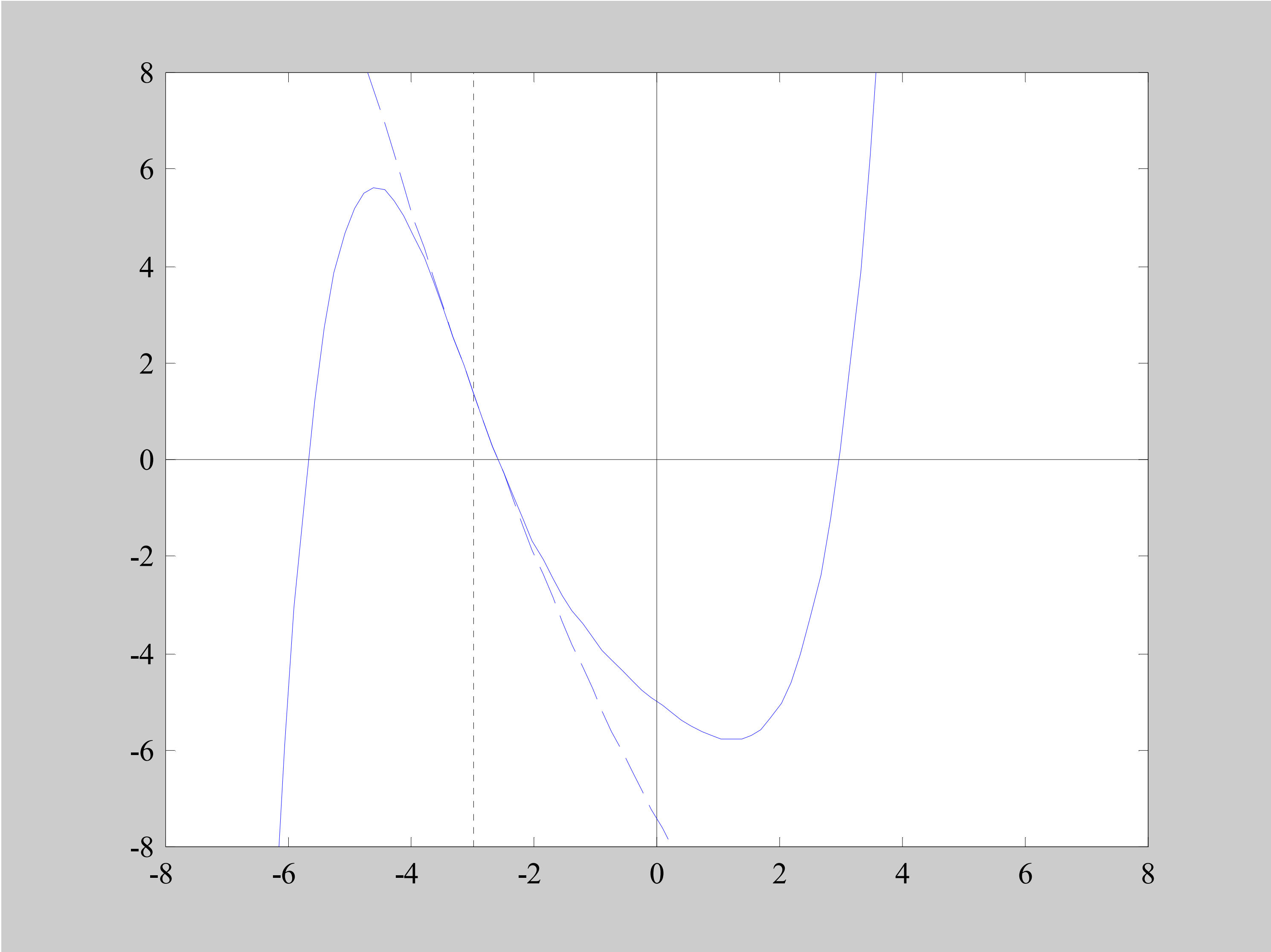
  $f(x) = 0.01x^5 + 0.05x^4 + 0x^3 + 0.2x^2 – x – 5$
  - (przykładowe) punkty, w których znajdujemy przybliżenie

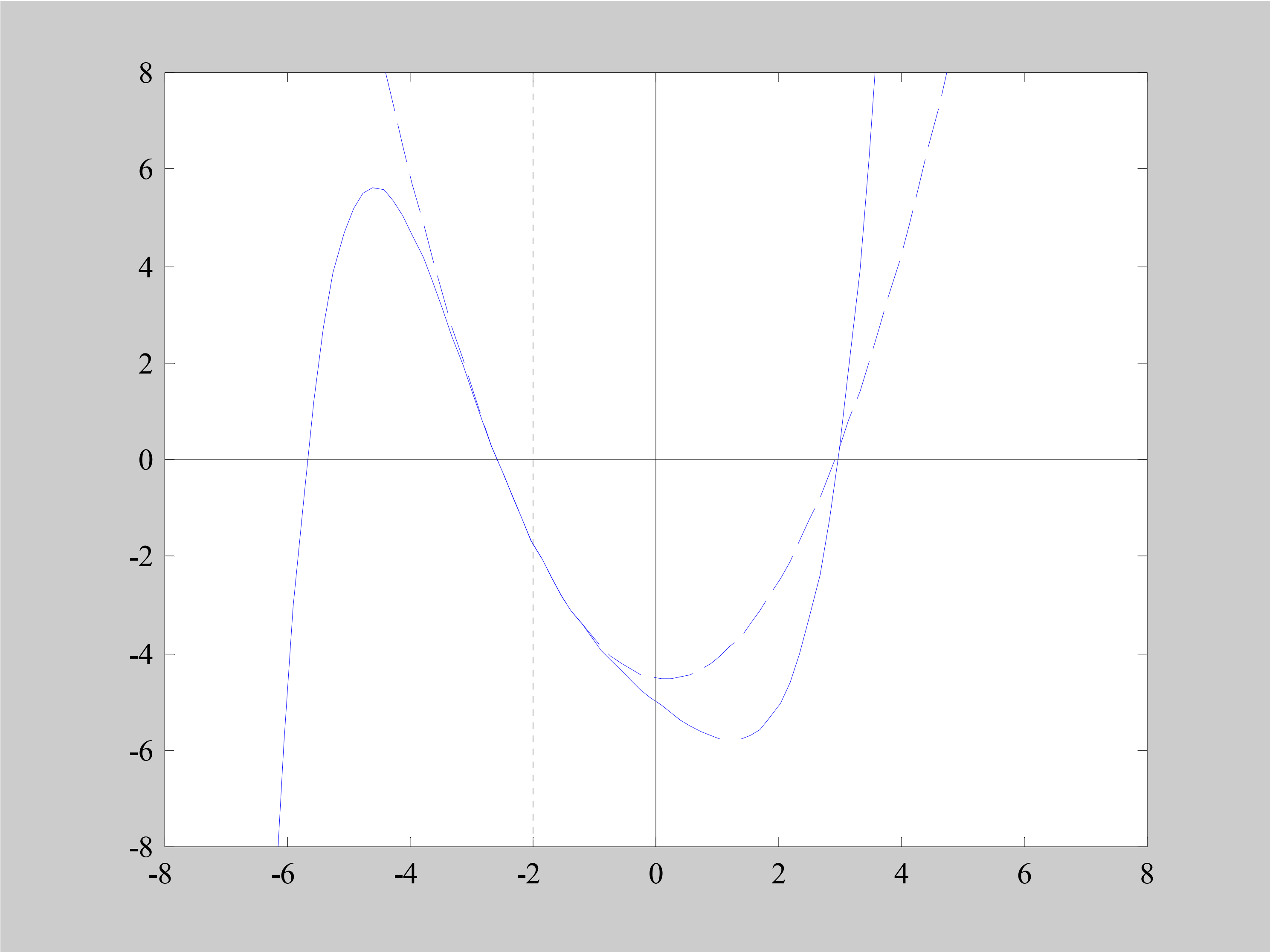
  x_0: –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4

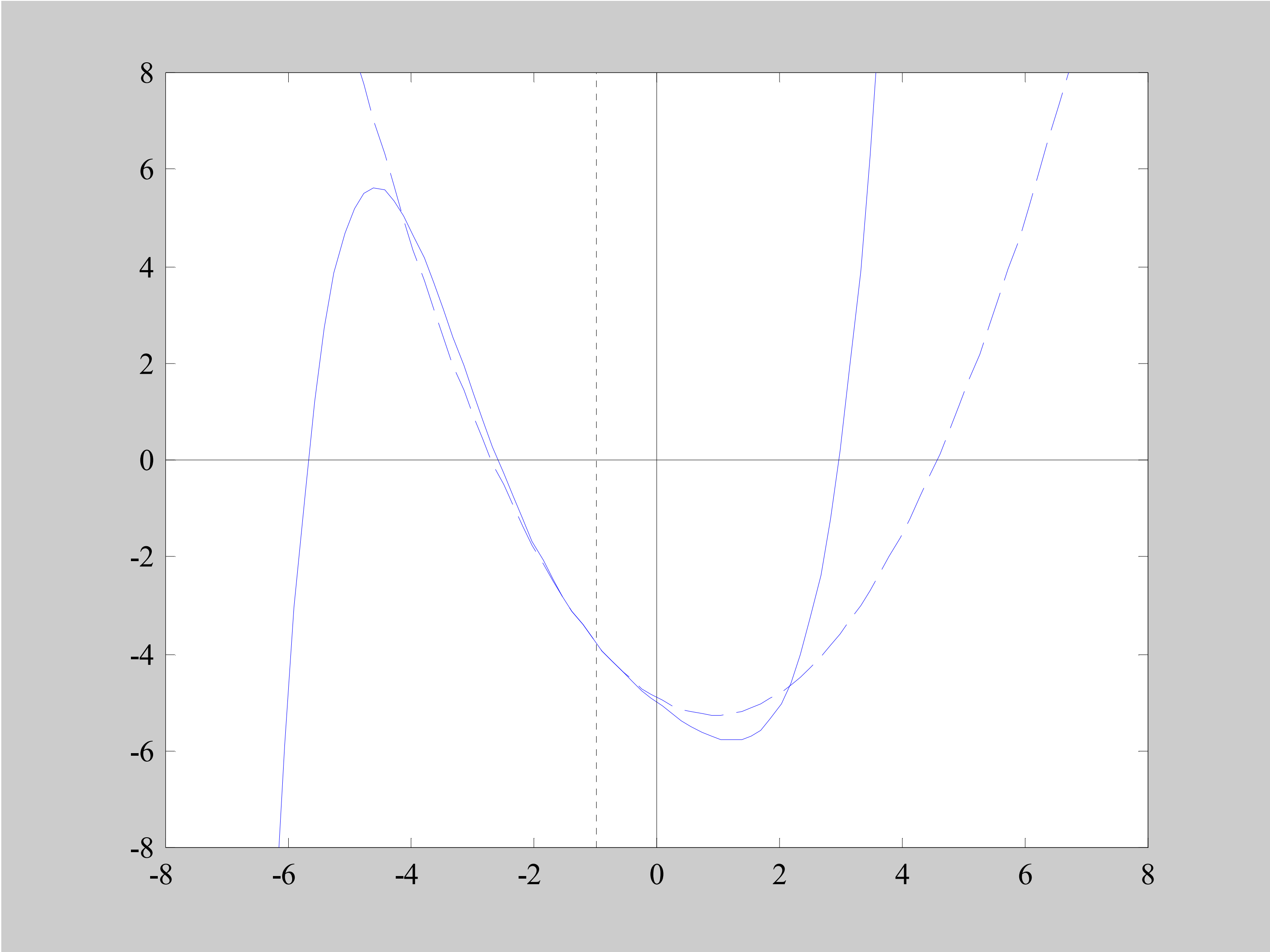

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

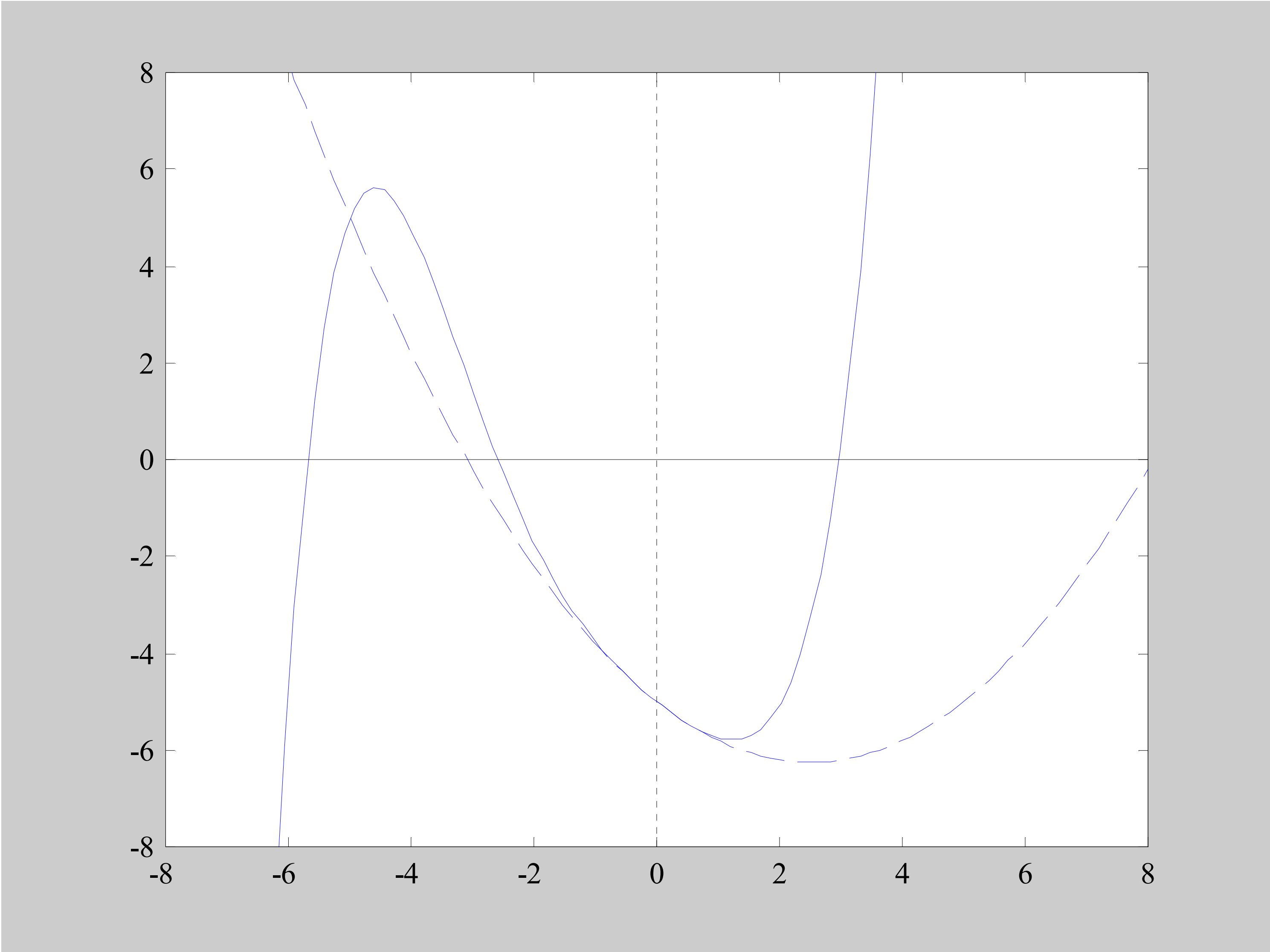

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

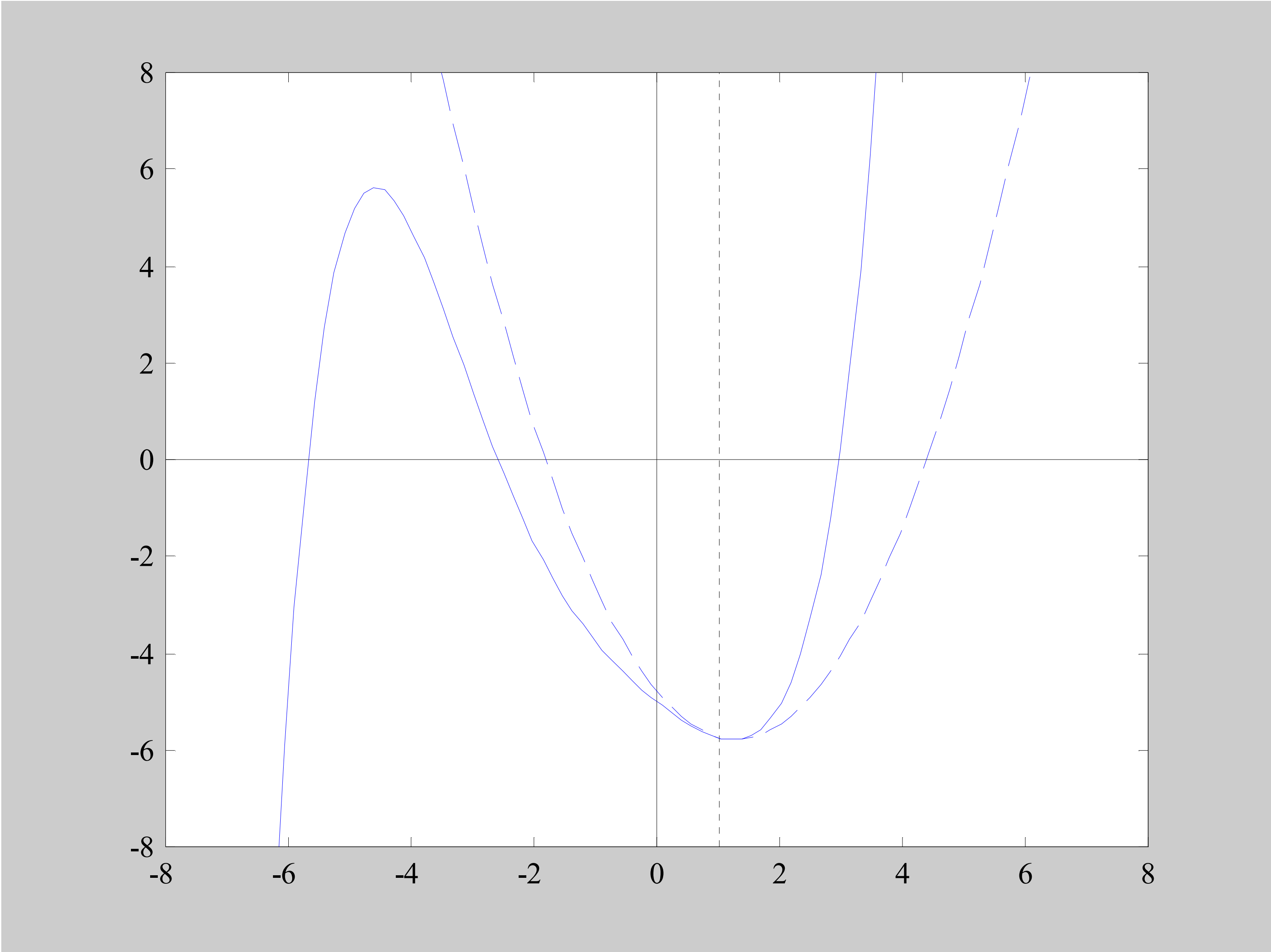

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

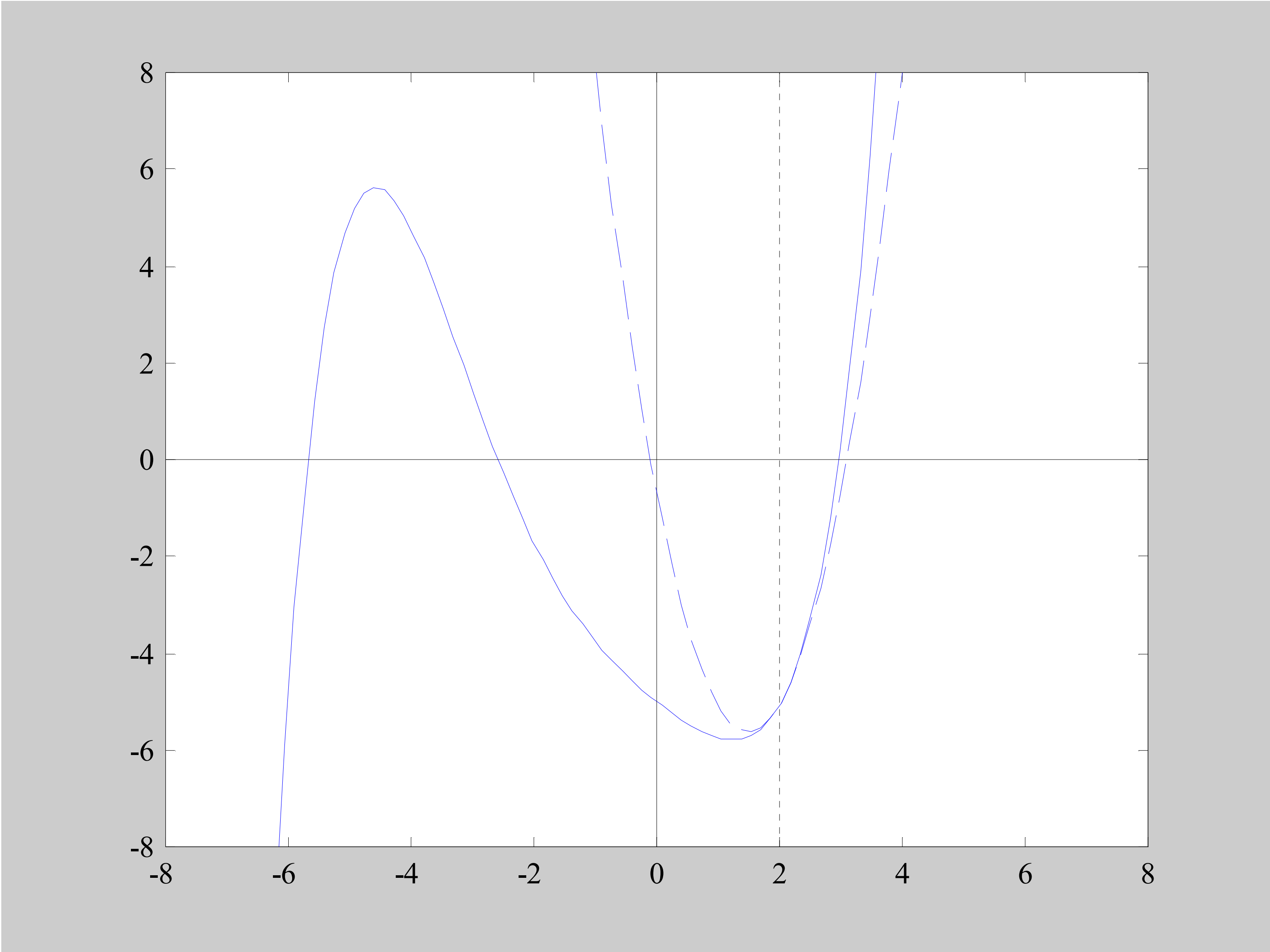

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

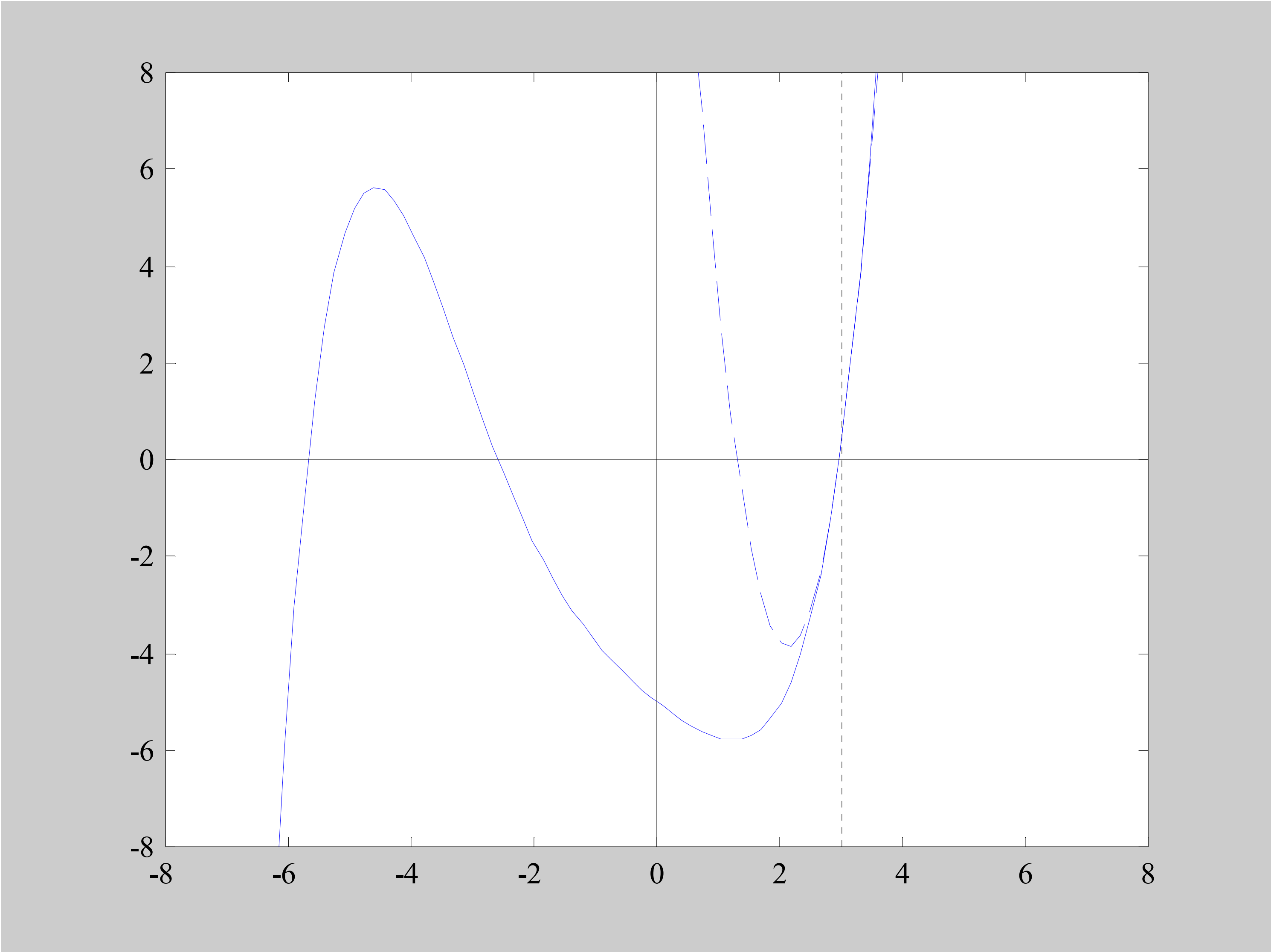

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

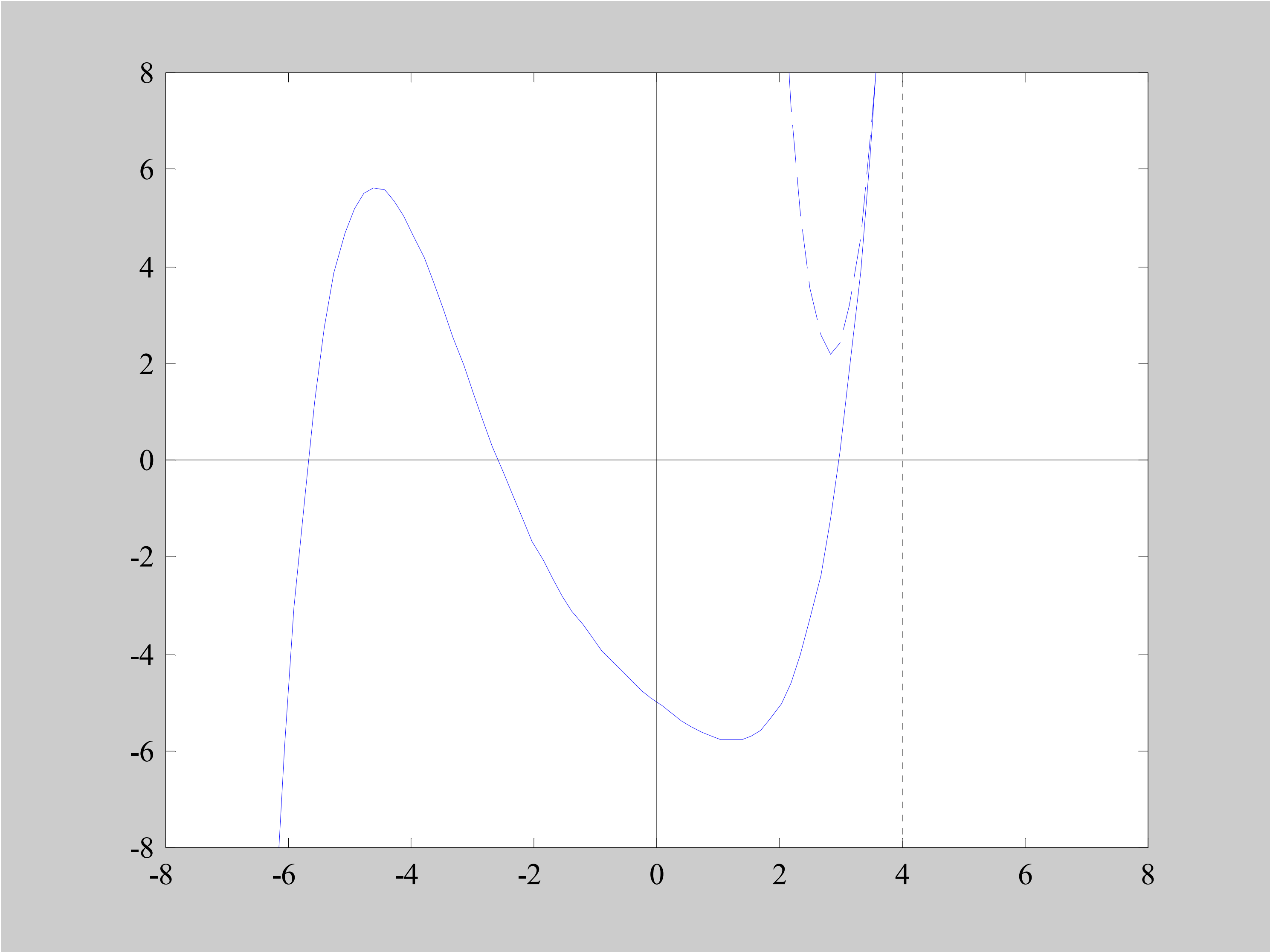


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8



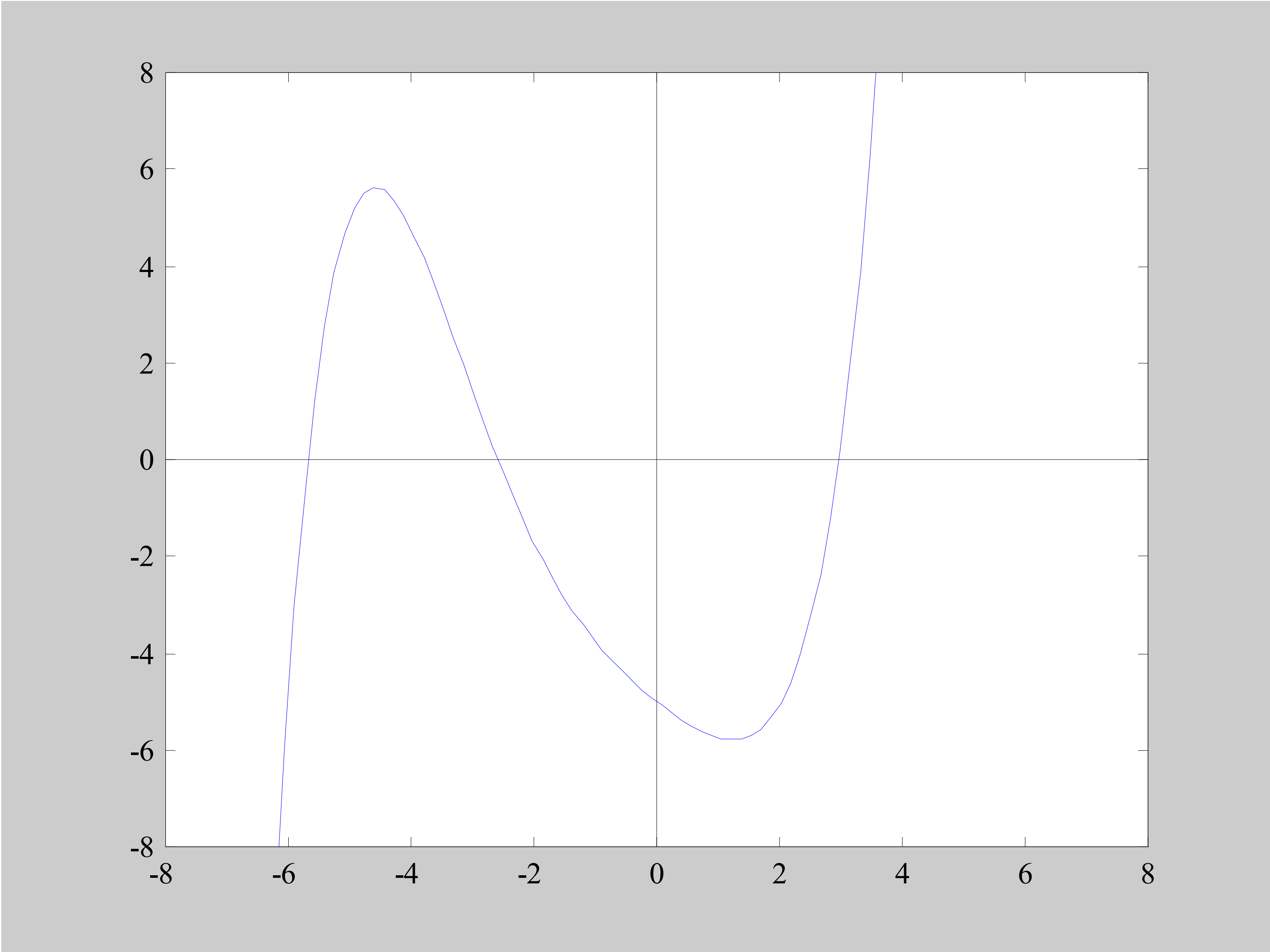
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

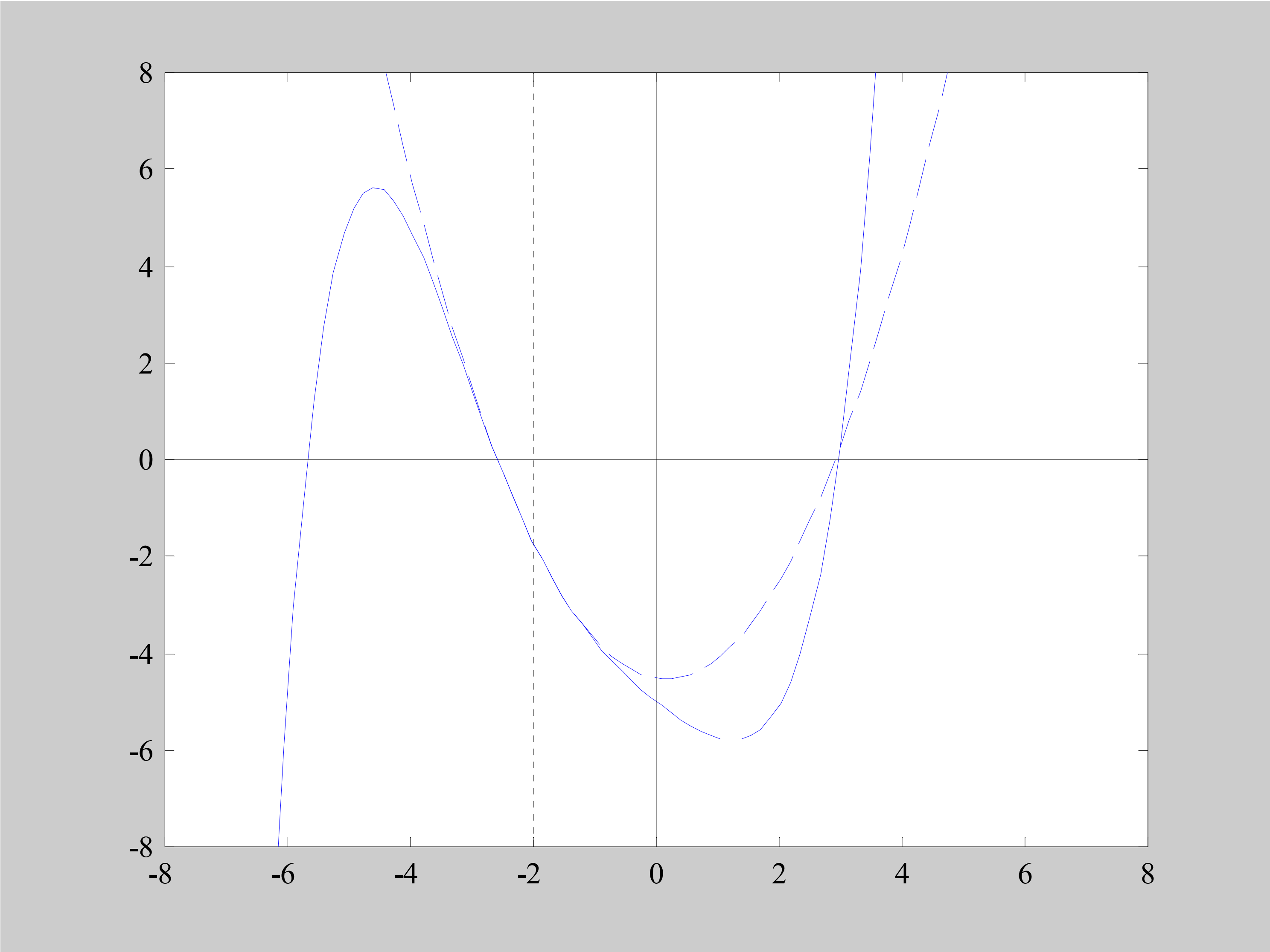
Metoda Newtona (optymalizacyjna)

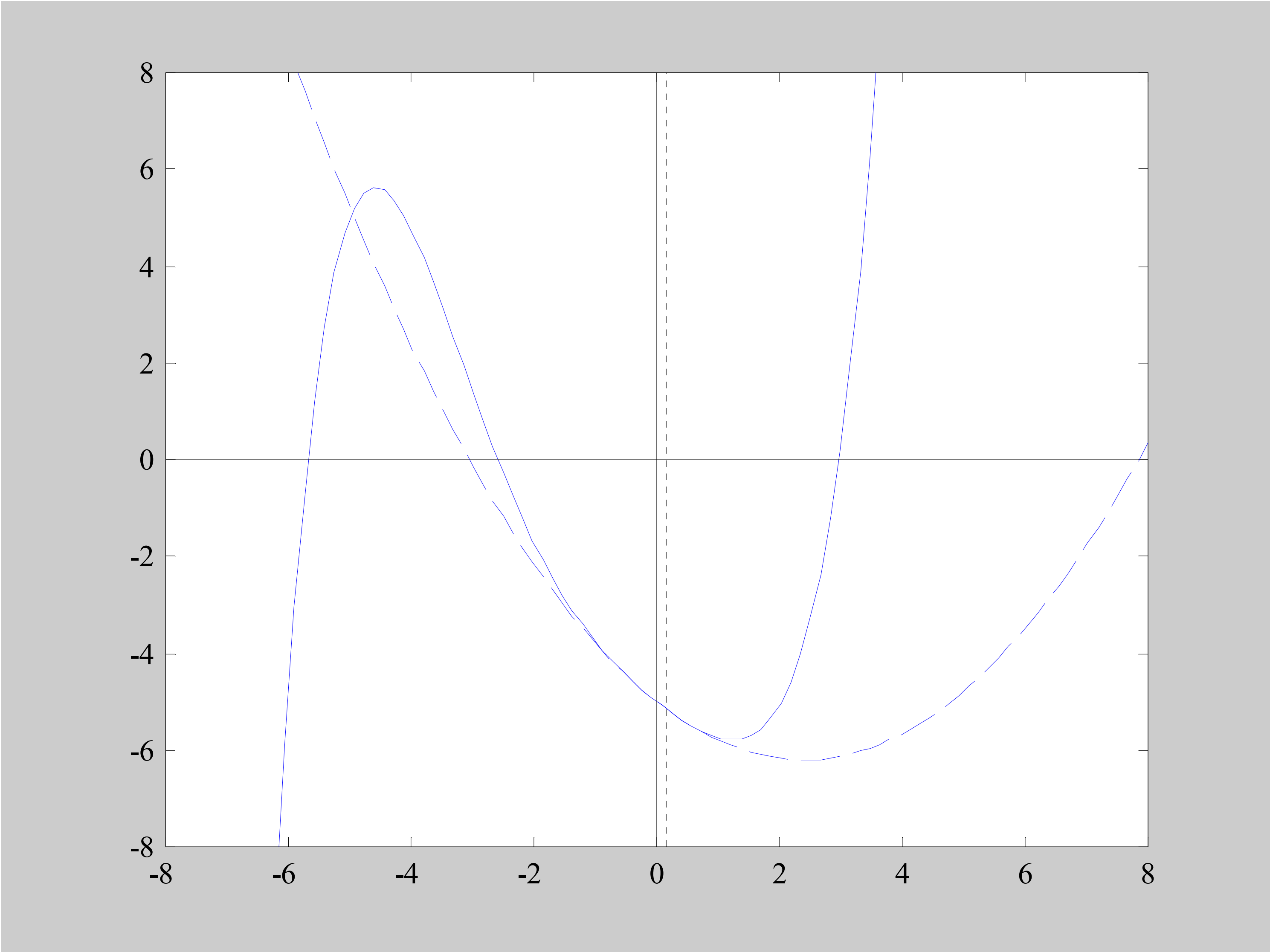
- Przykład działania
  /cel: znalezienie ekstremum funkcji danej/
  - funkcja

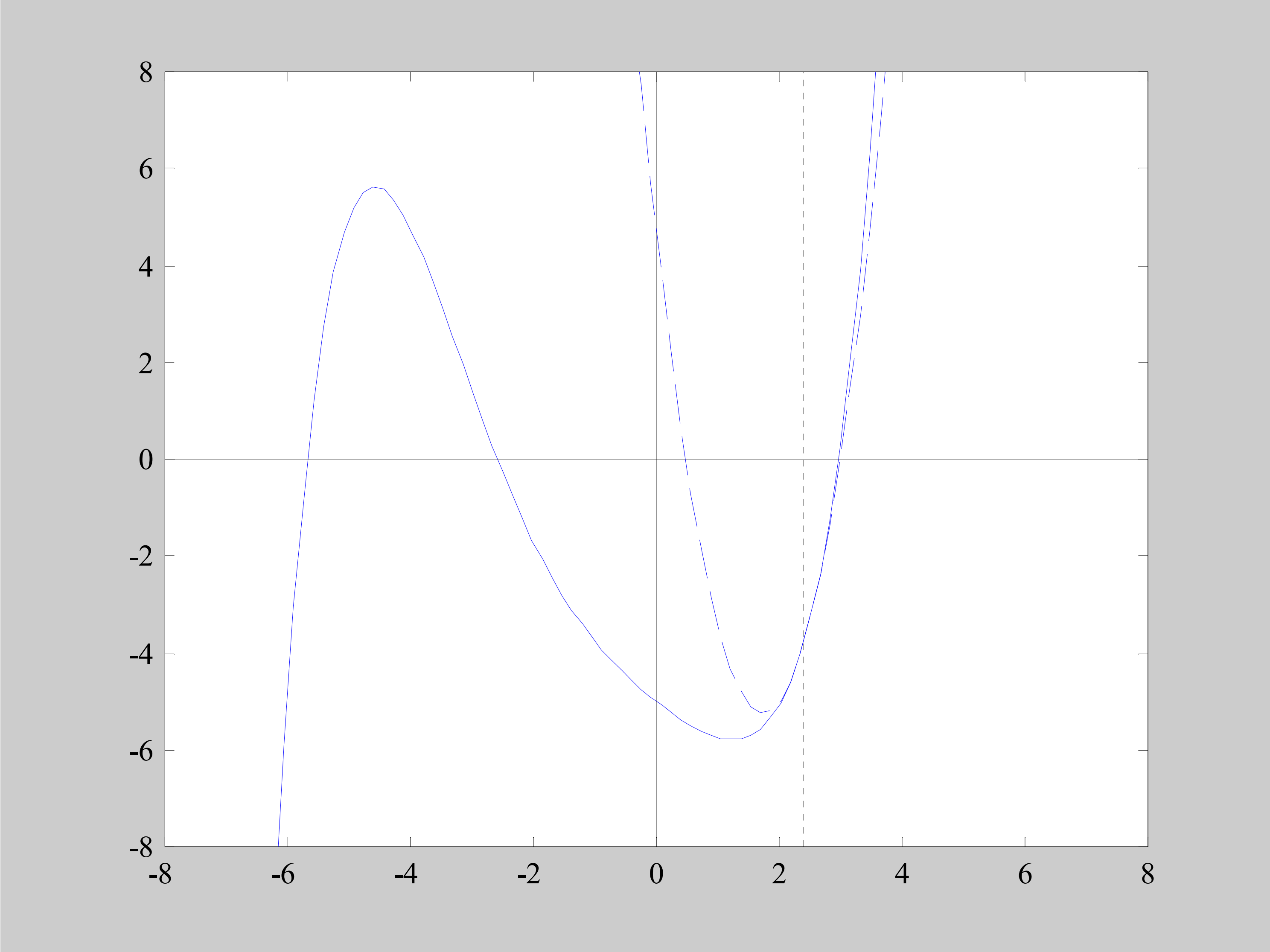
  $f(x) = 0.01x^5 + 0.05x^4 + 0x^3 + 0.2x^2 - x - 5$
  - wartość początkowa

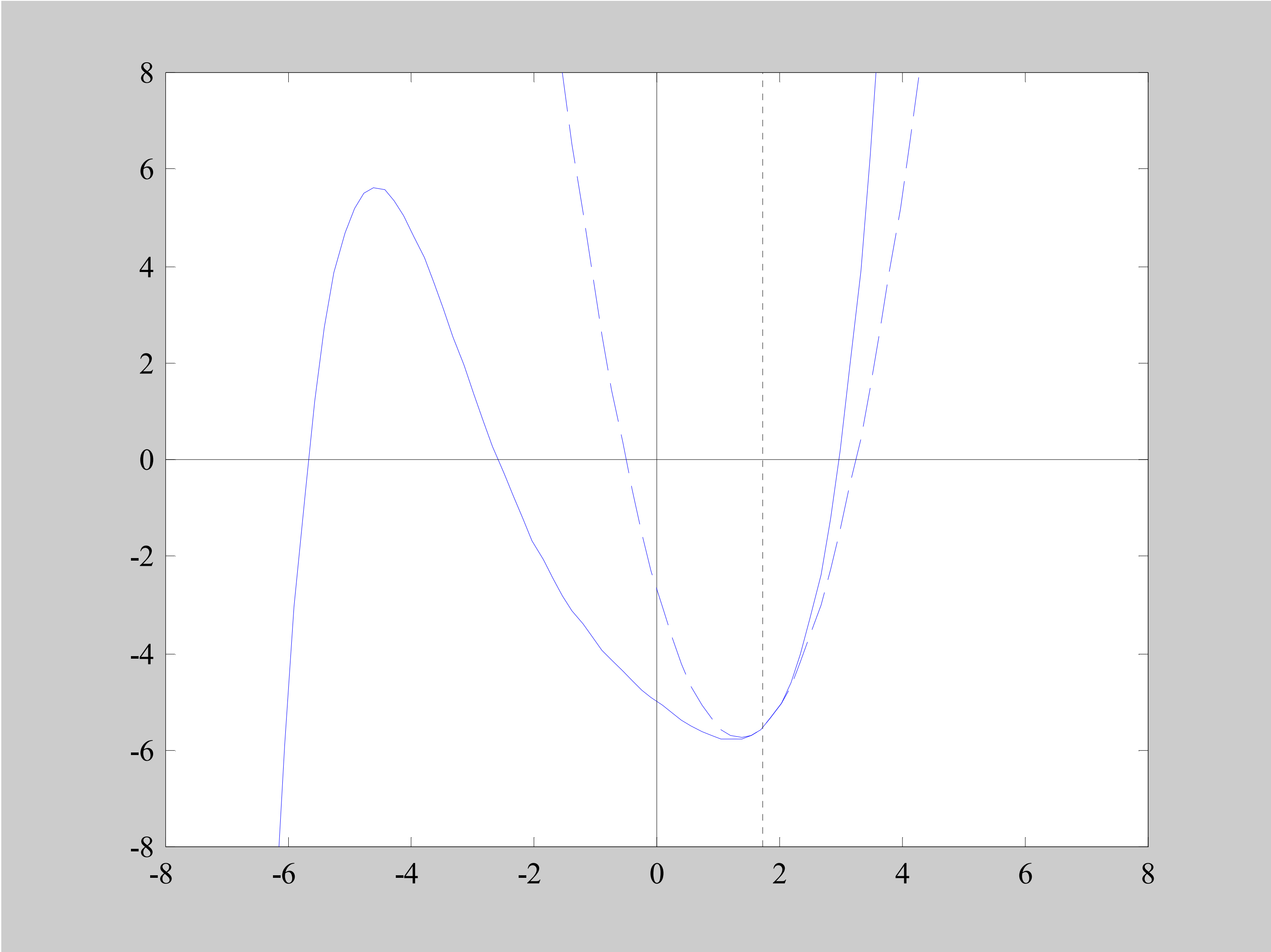
  $x_0 = -2$


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

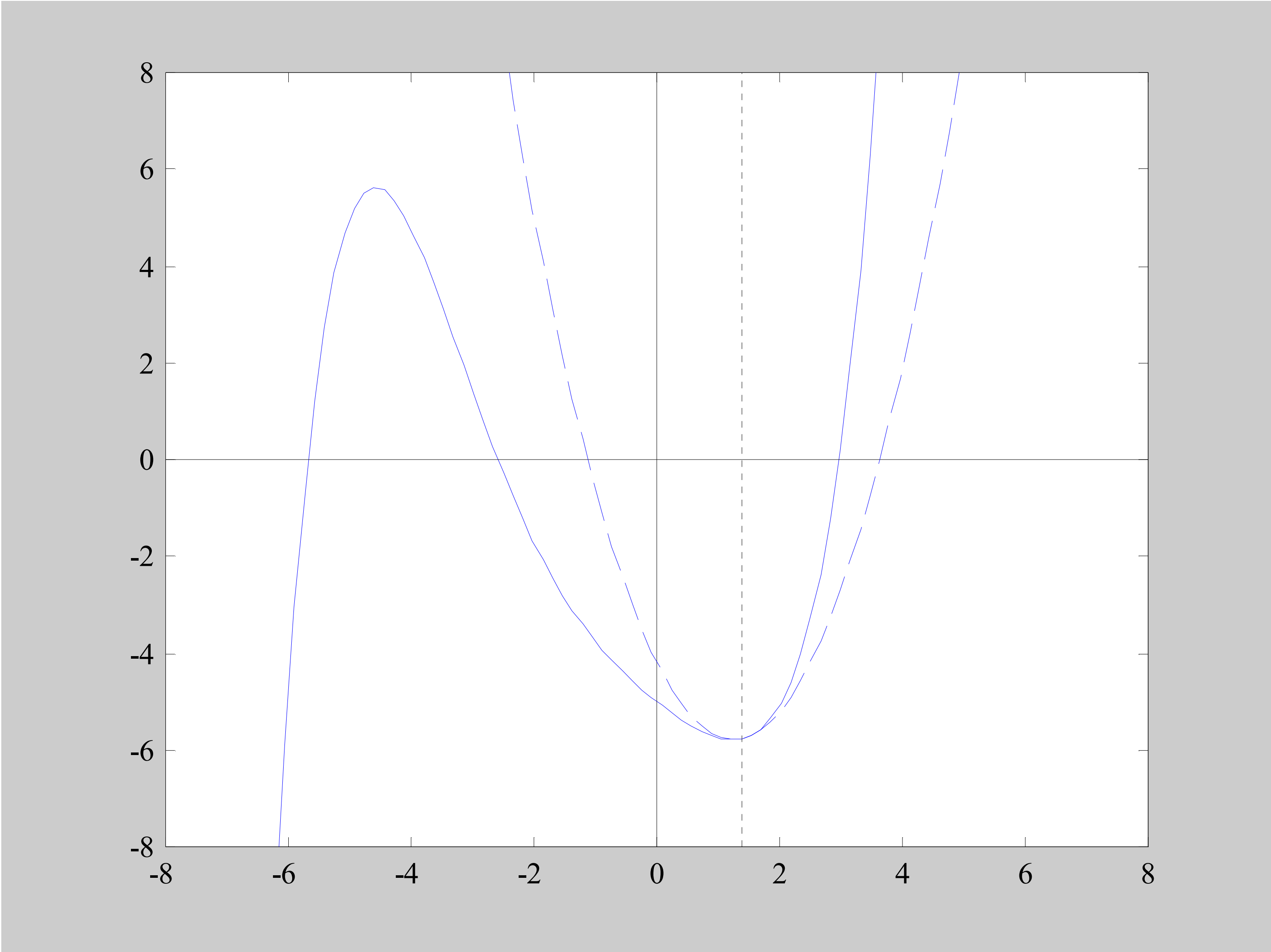

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

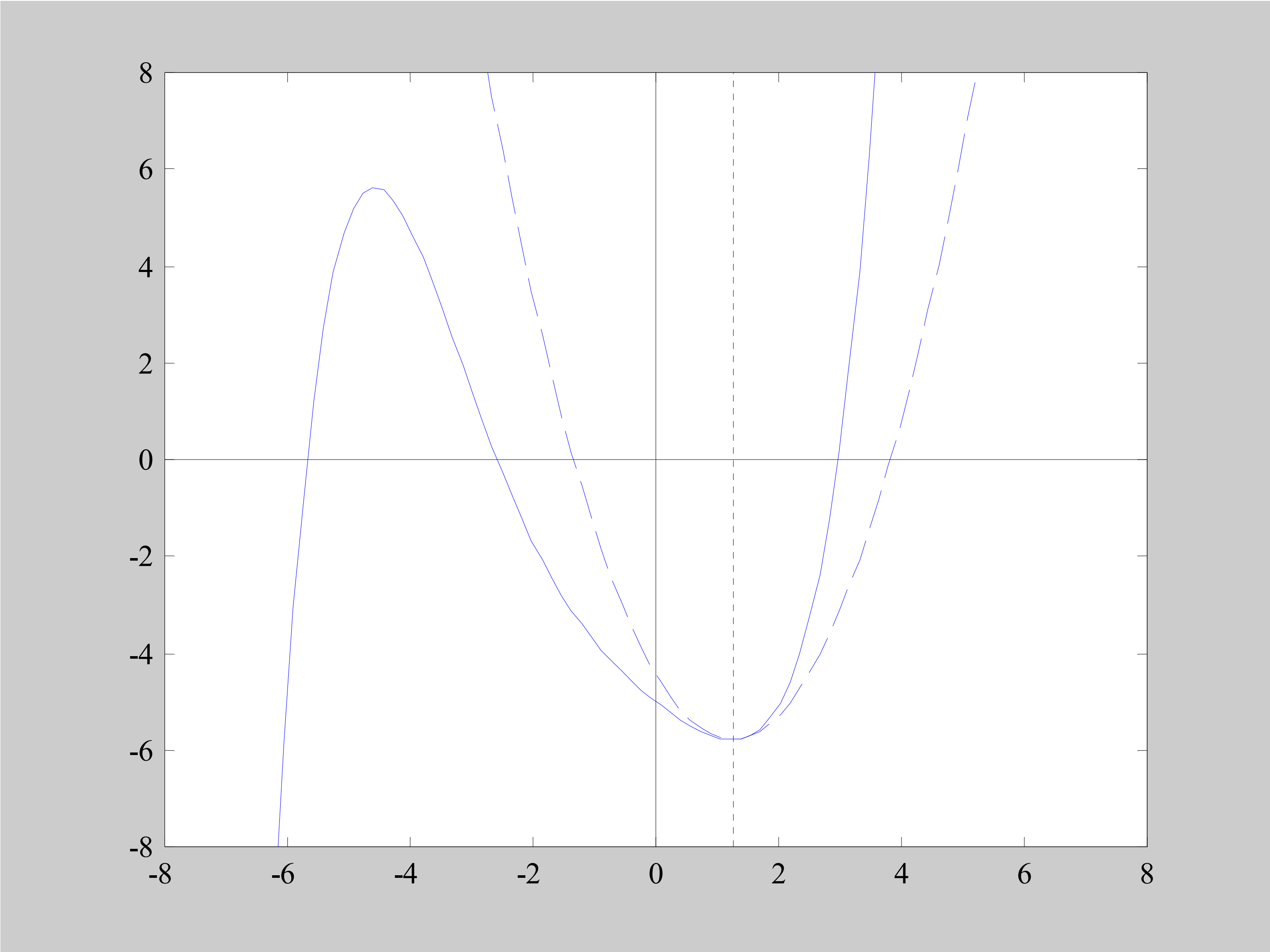

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

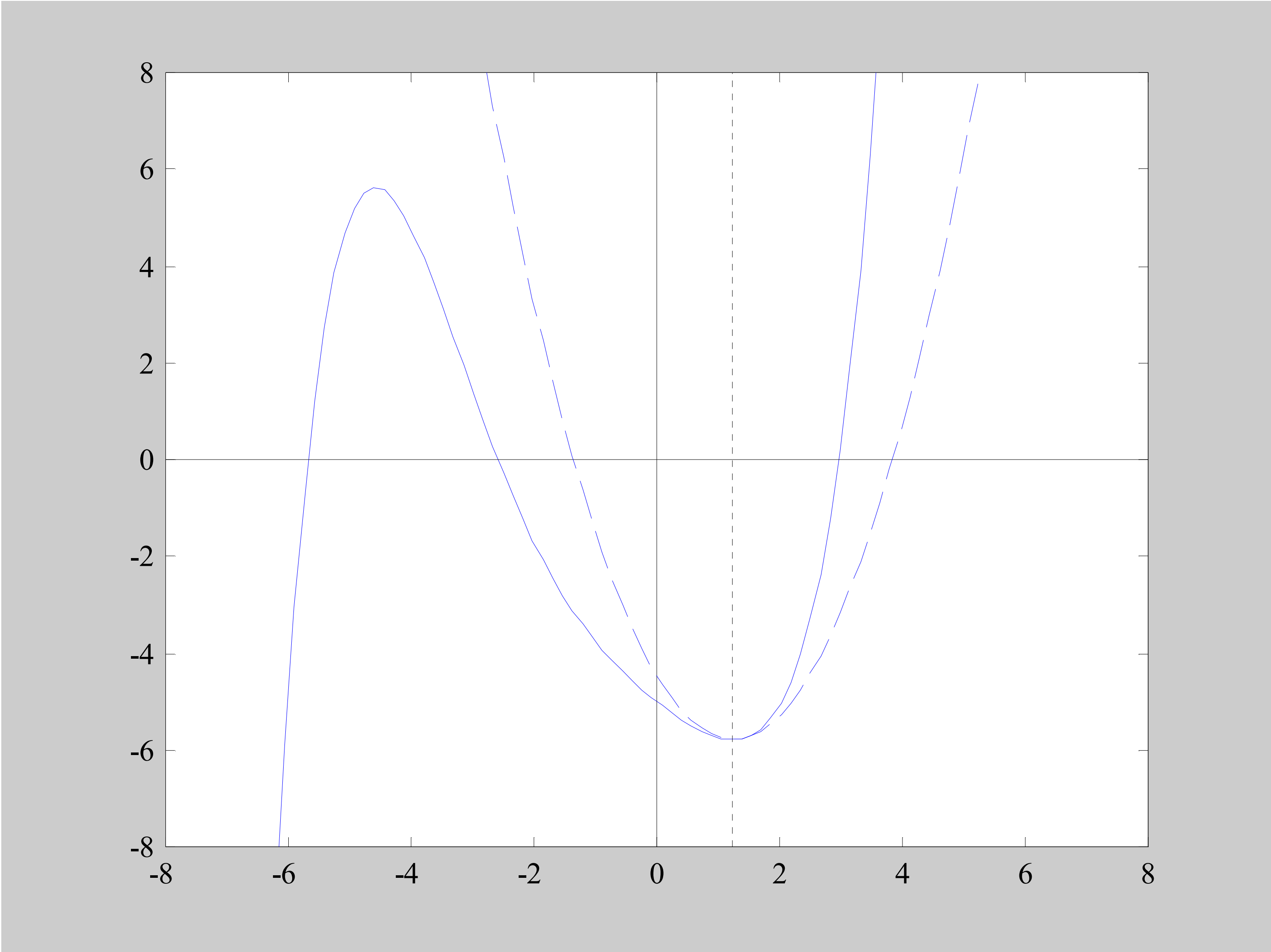

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

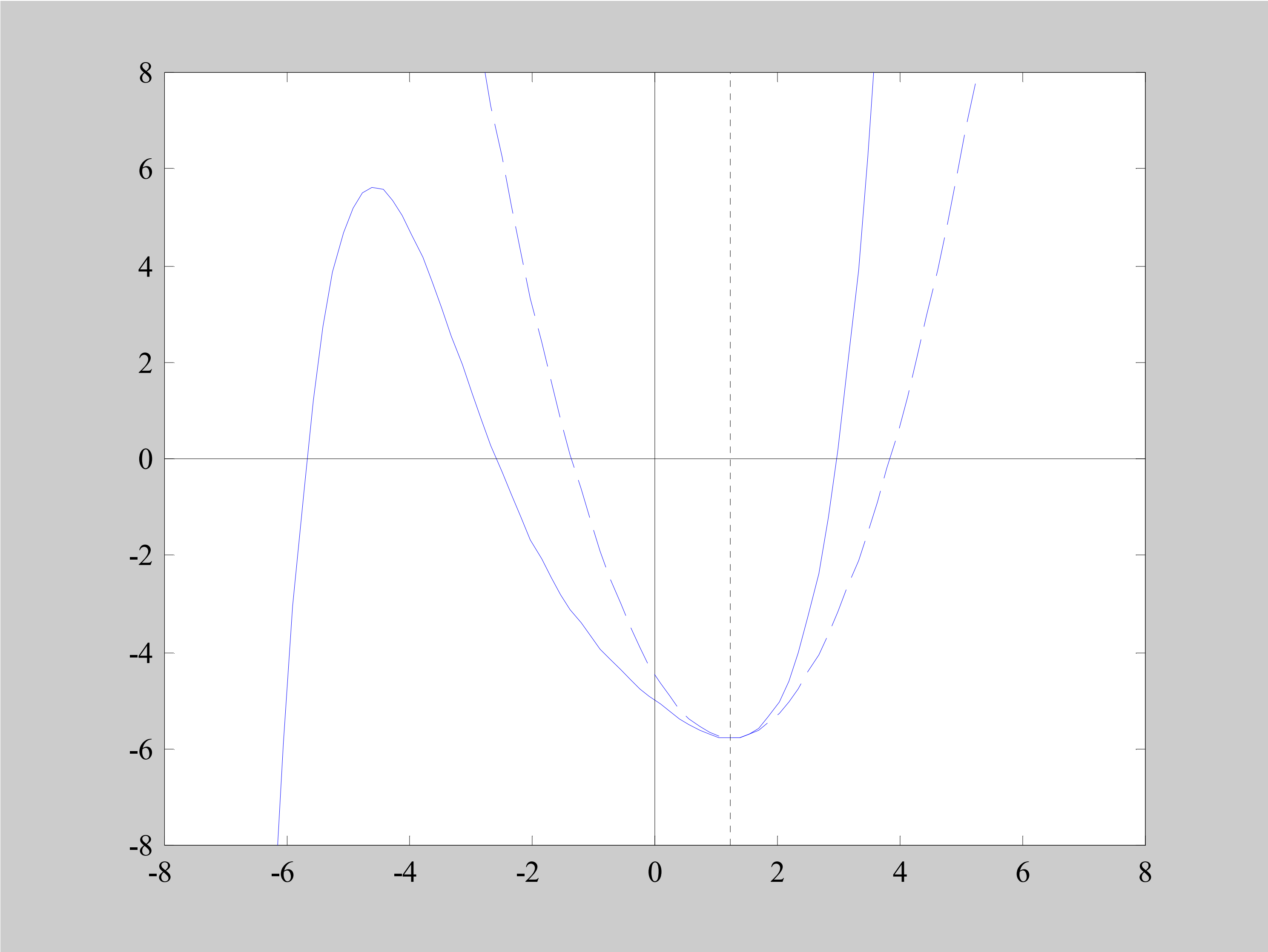


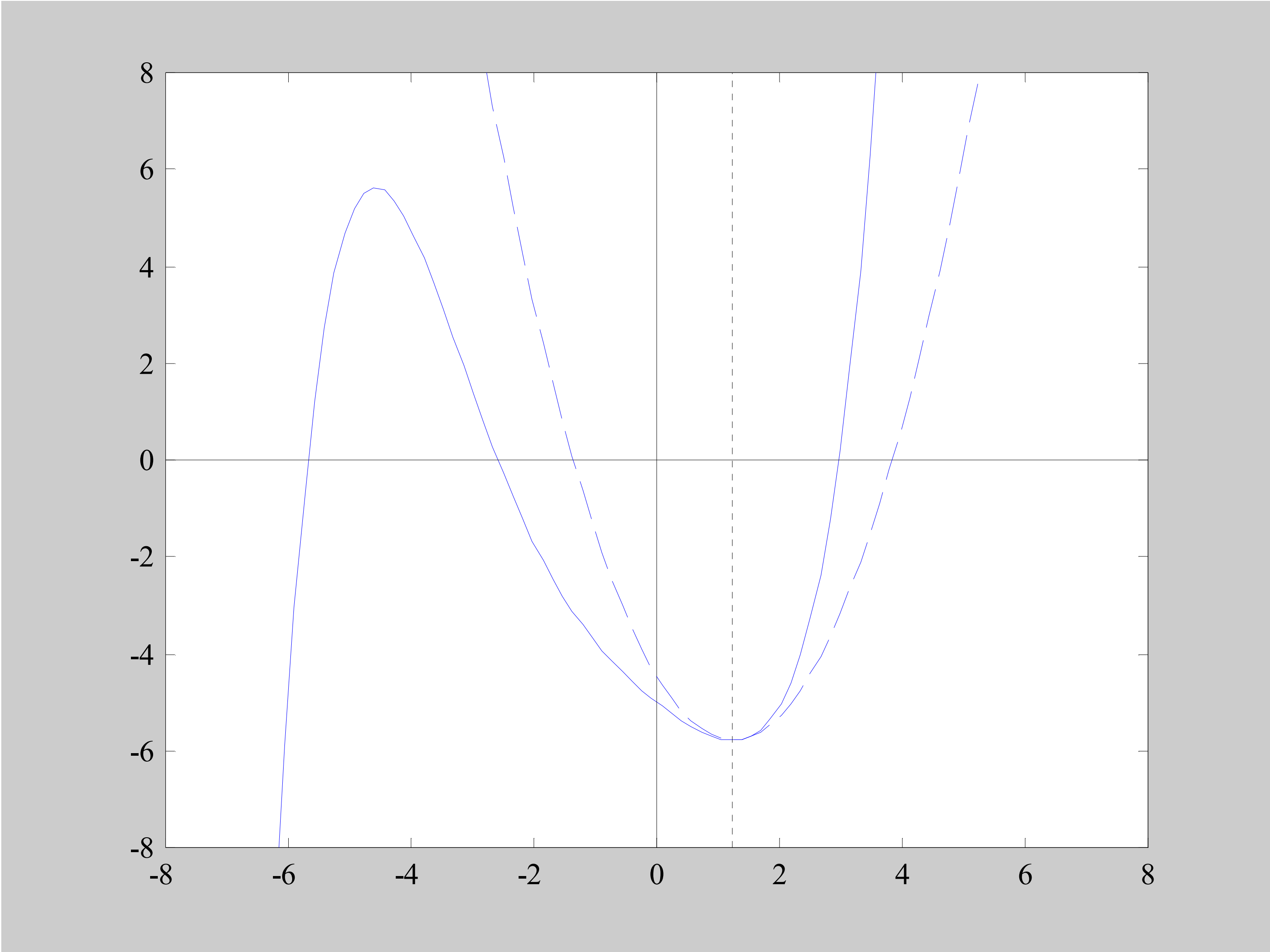
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

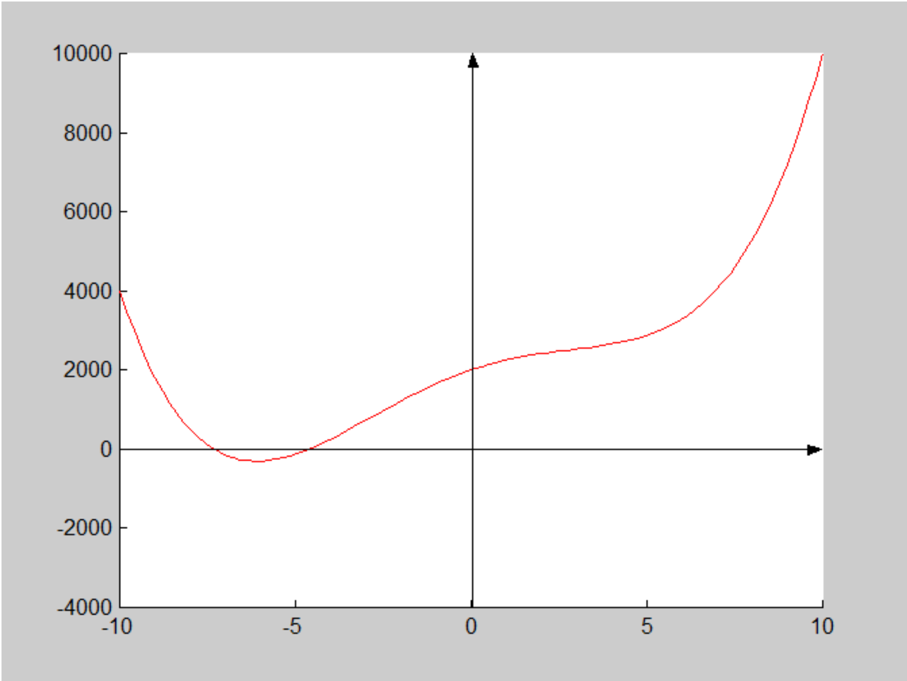

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

...

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji
  - funkcja

  $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$



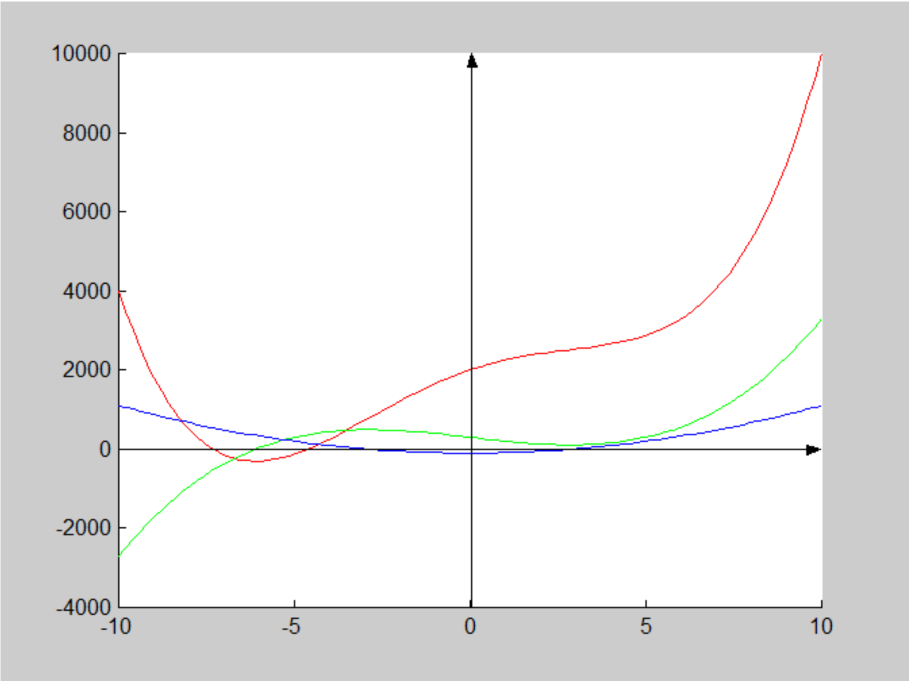
Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji
  - funkcja

  $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$
  - pierwsza pochodna

  $f'(x) = 4x^3 - 100x + 300$
  - druga pochodna

  $f''(x) = 12x^2 - 100$



Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji
  - przyjęty warunek stopu: $|f'(x)| \leq 0.001$
    - warunek ten pozwala na uznanie, że:
      - funkcja $f'(x)$ osiąga wartość zero, czyli funkcja $f(x)$ osiąga wartość minimalną (o ile $f''(x) > 0$)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

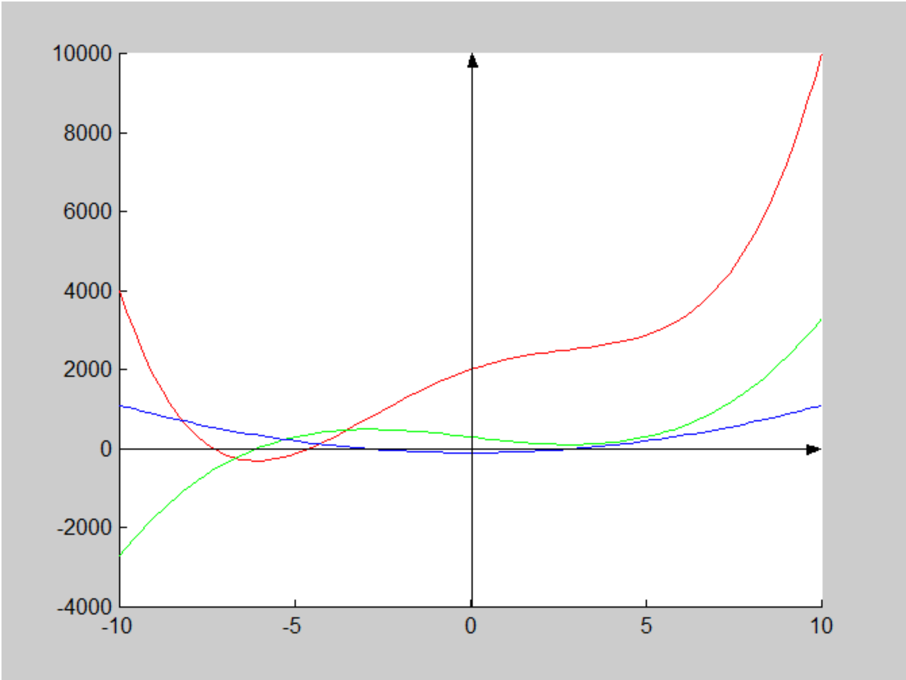
- Przykład poszukiwania minimów funkcji
  - minimum funkcji: $x^* = -6.10598343090539\ldots$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji
  - przyjęty punkt początkowy $x_0 = 1$
    - punkt ten decyduje o przebiegu całego procesu

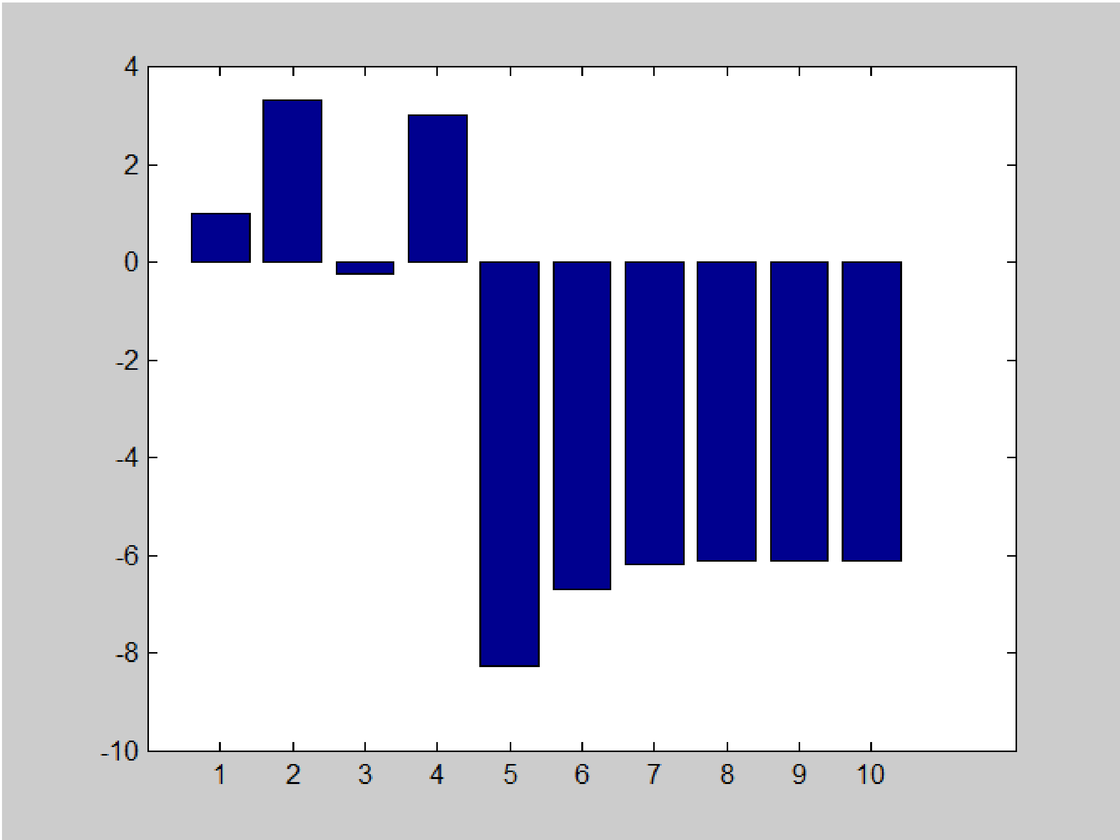
Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - funkcja



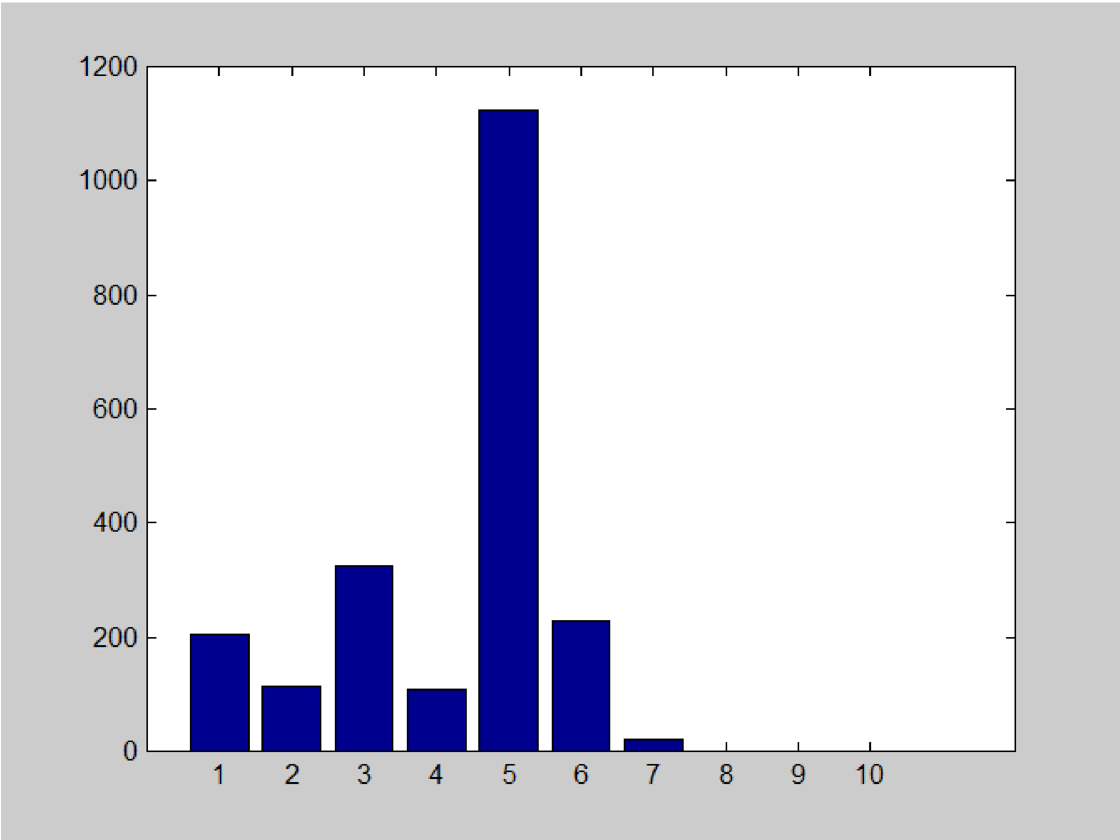
Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - x



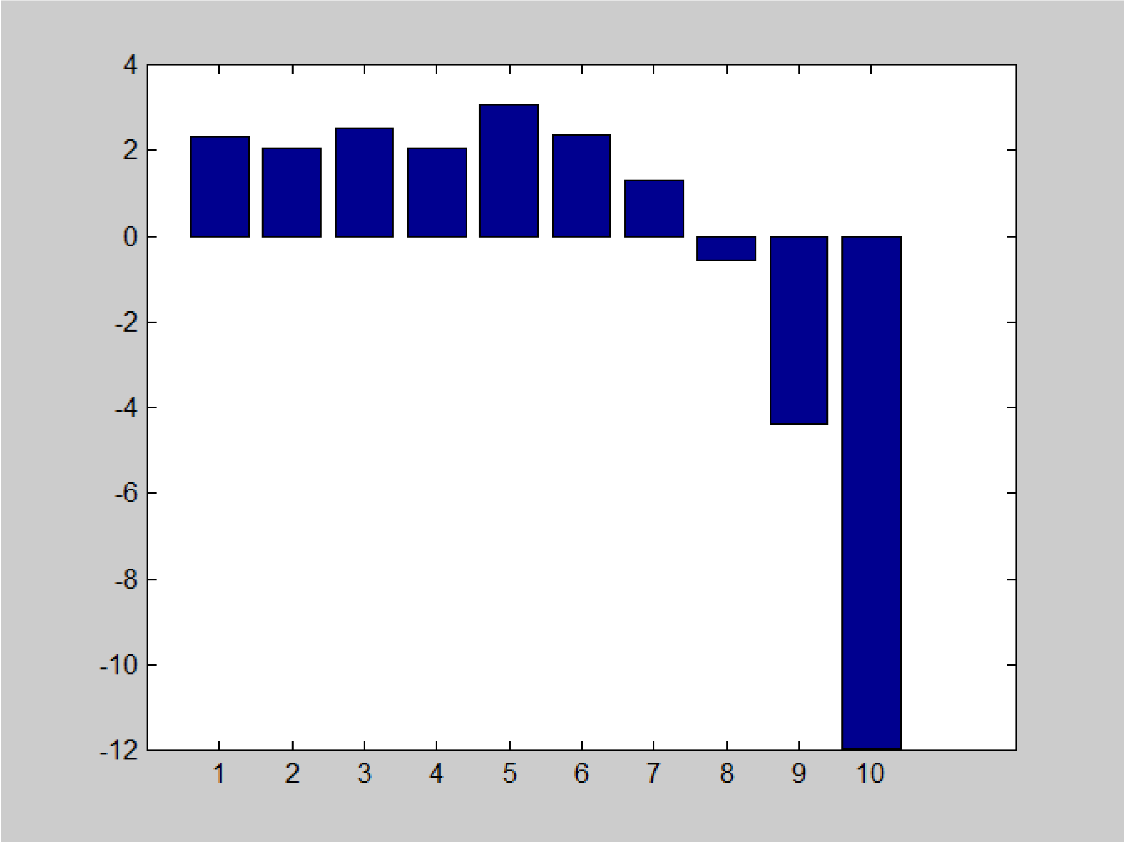
Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - |f(x)|



Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania zer funkcji, c.d.
  - log(|f(x)|)



Metoda Newtona (optymalizacyjna)

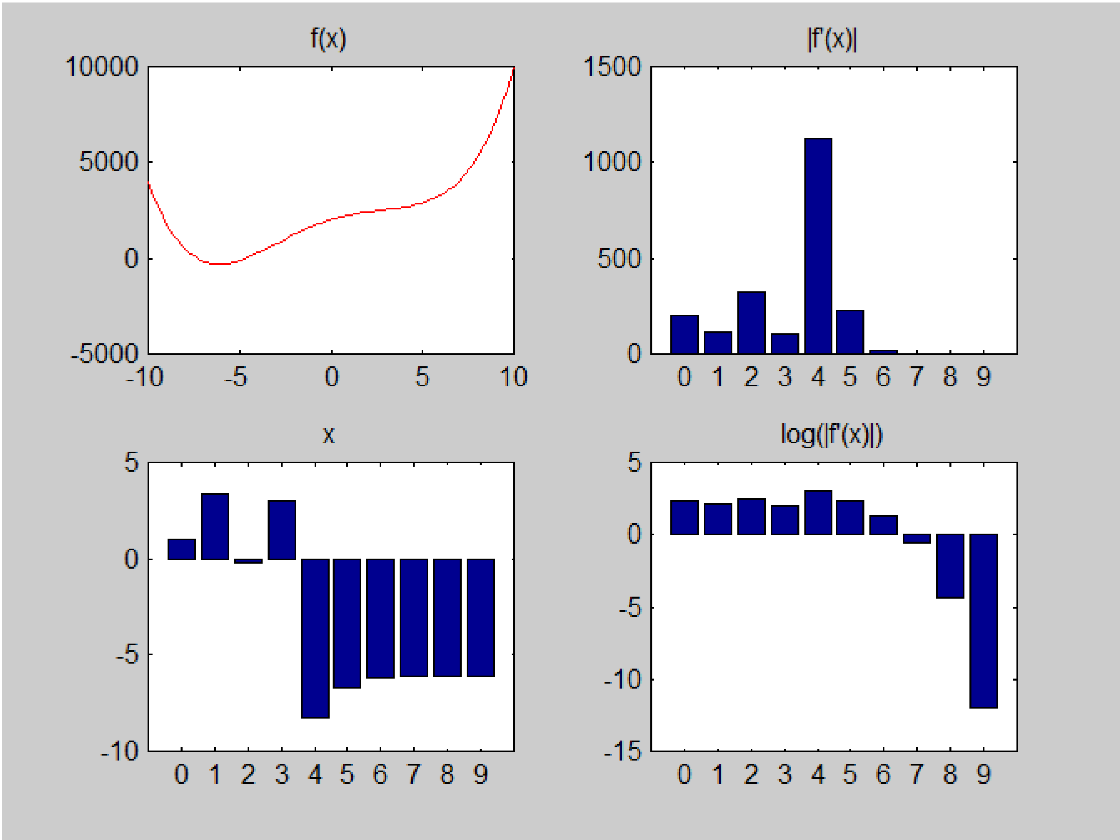
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$
  - minimum funkcji: $x^* = -6.10598343090539\ldots$
  - przyjęty warunek stopu: $|f'(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

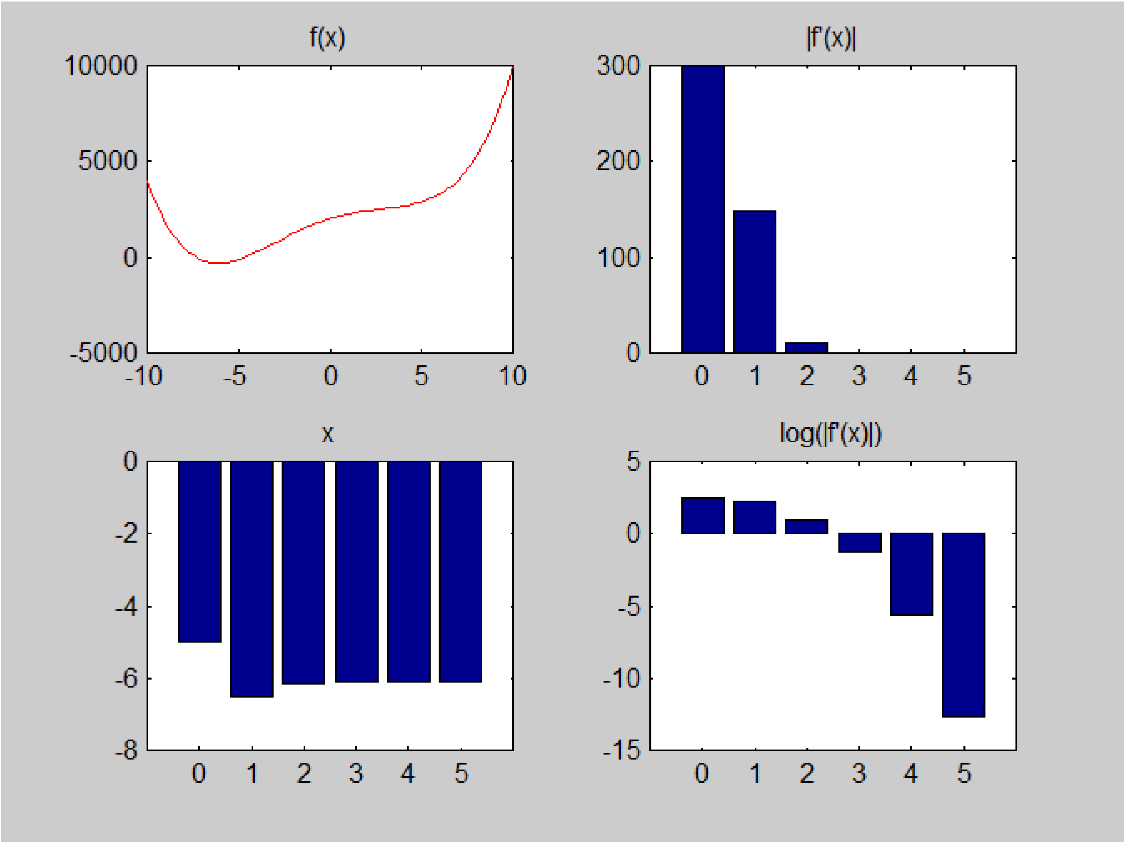
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

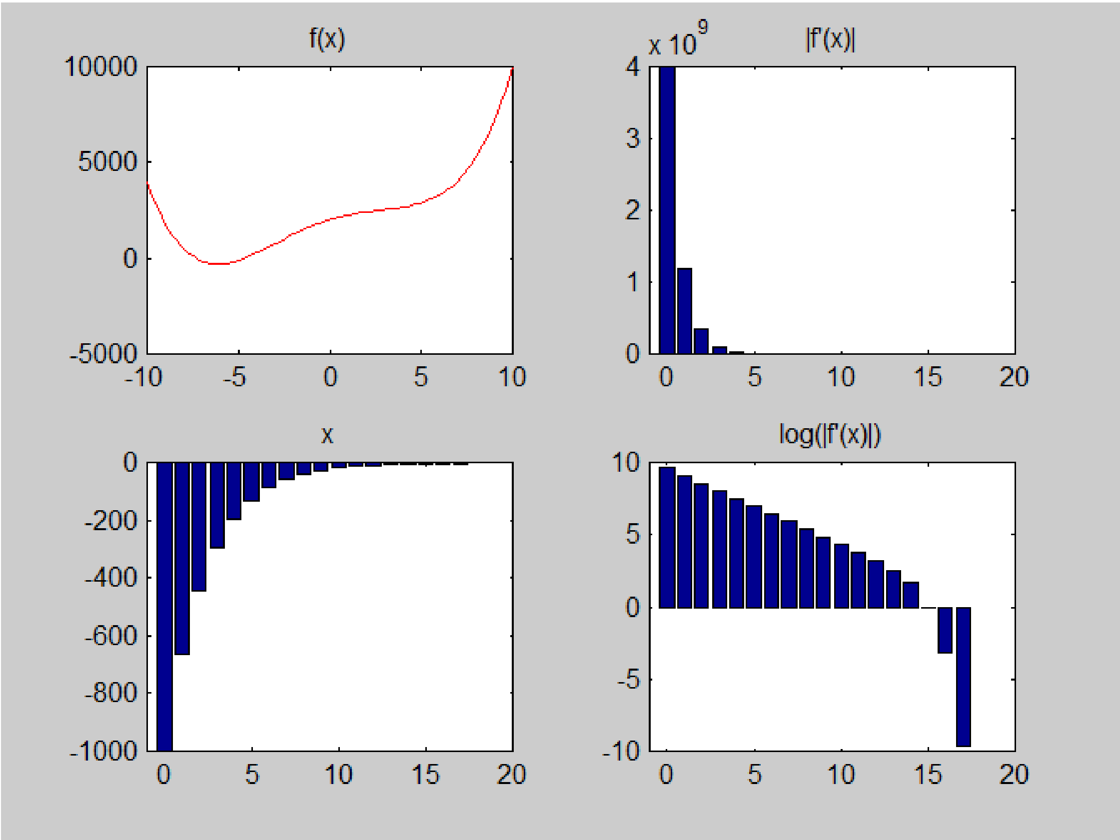
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -5$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

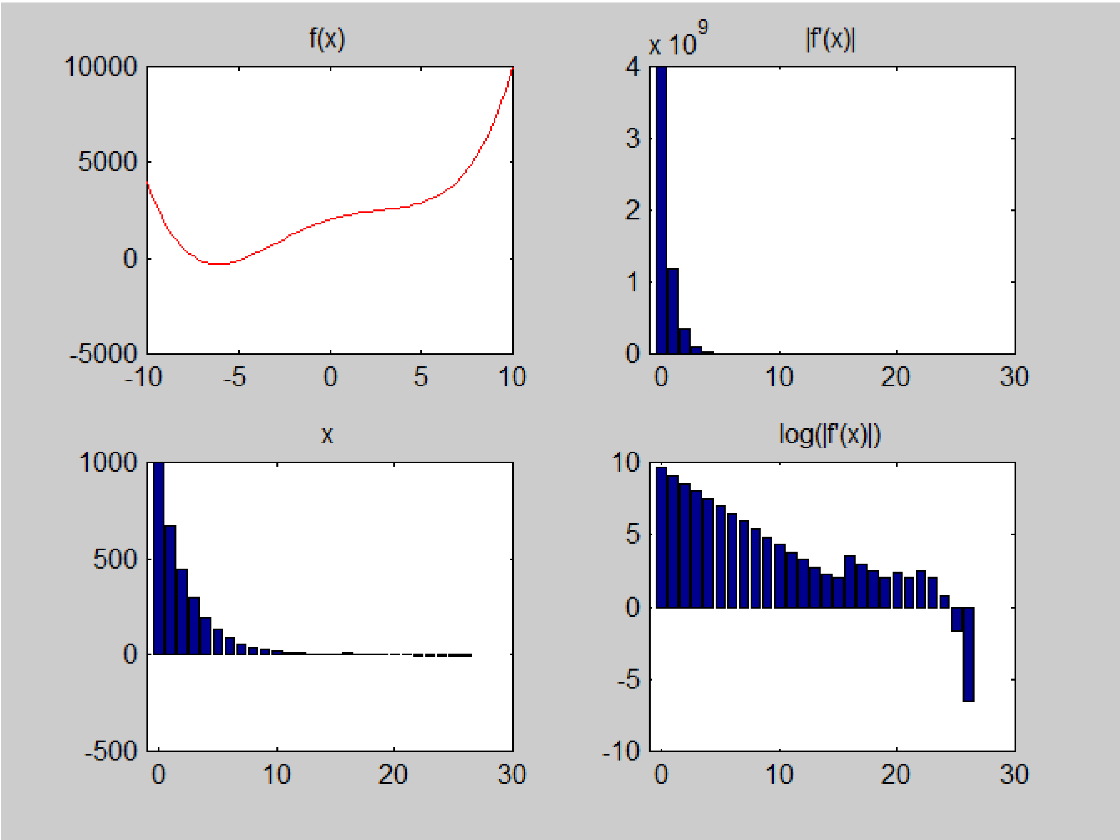
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1000$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

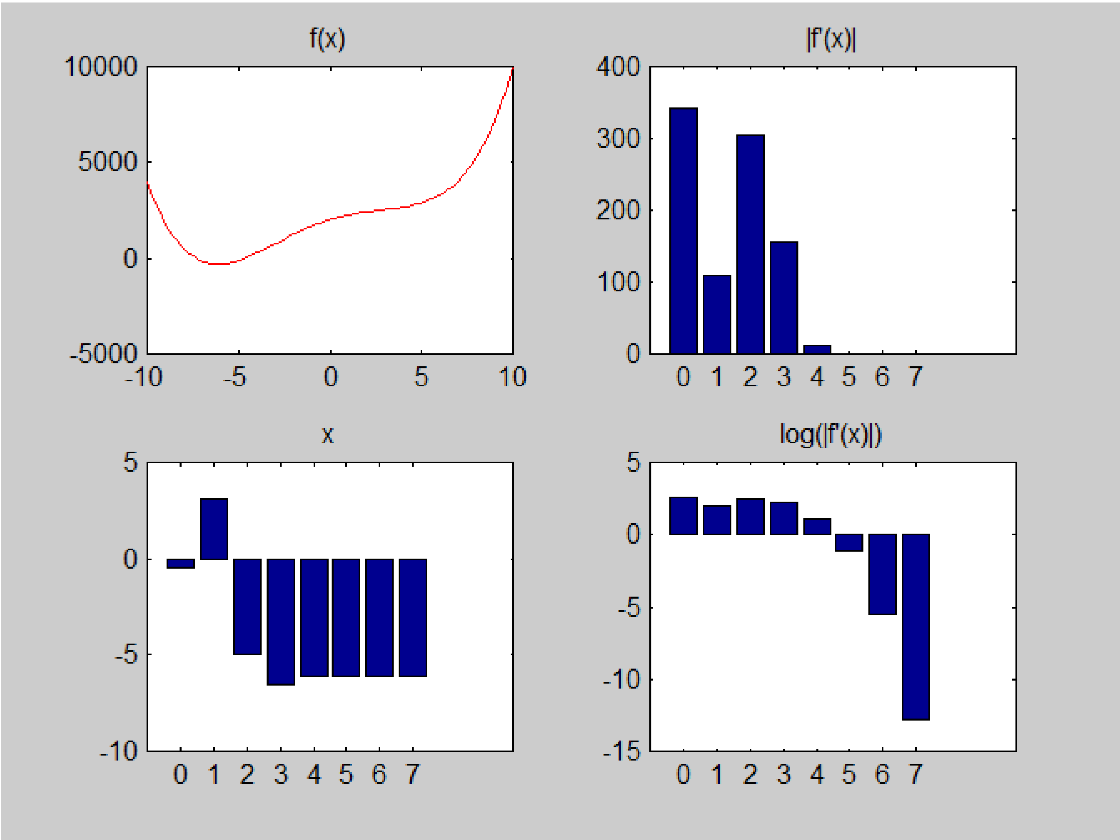
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1000$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

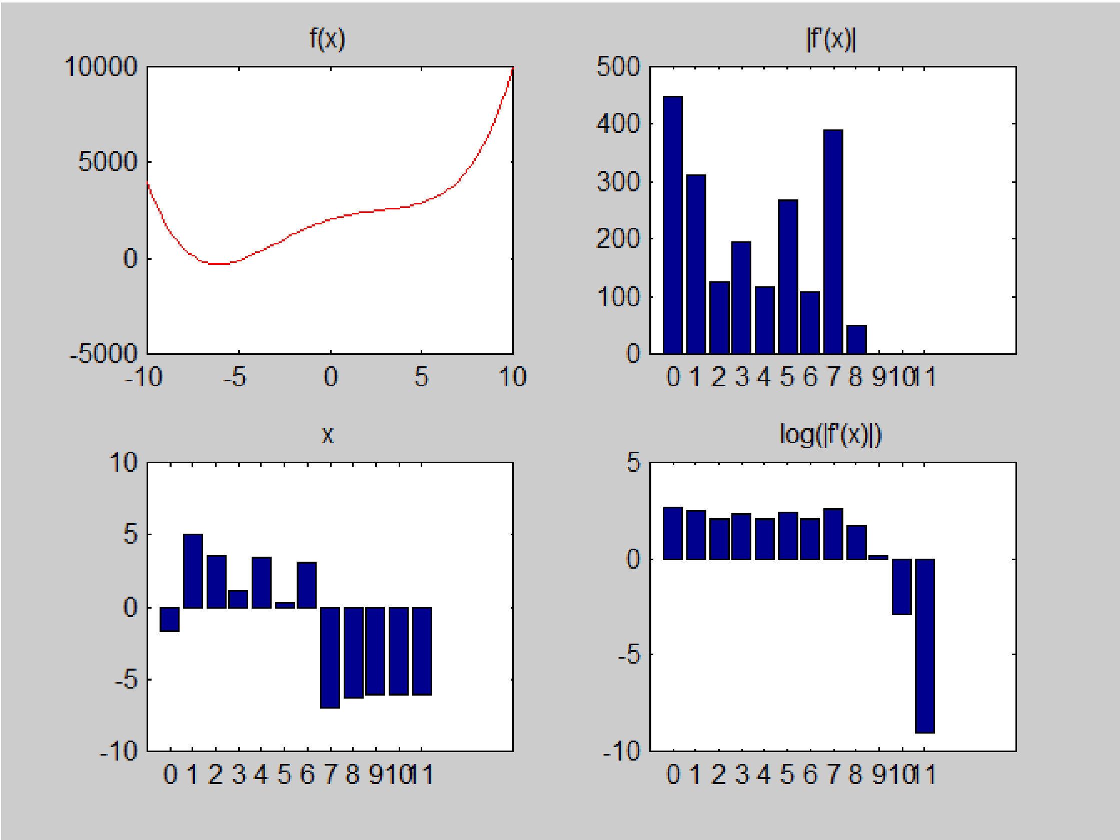
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

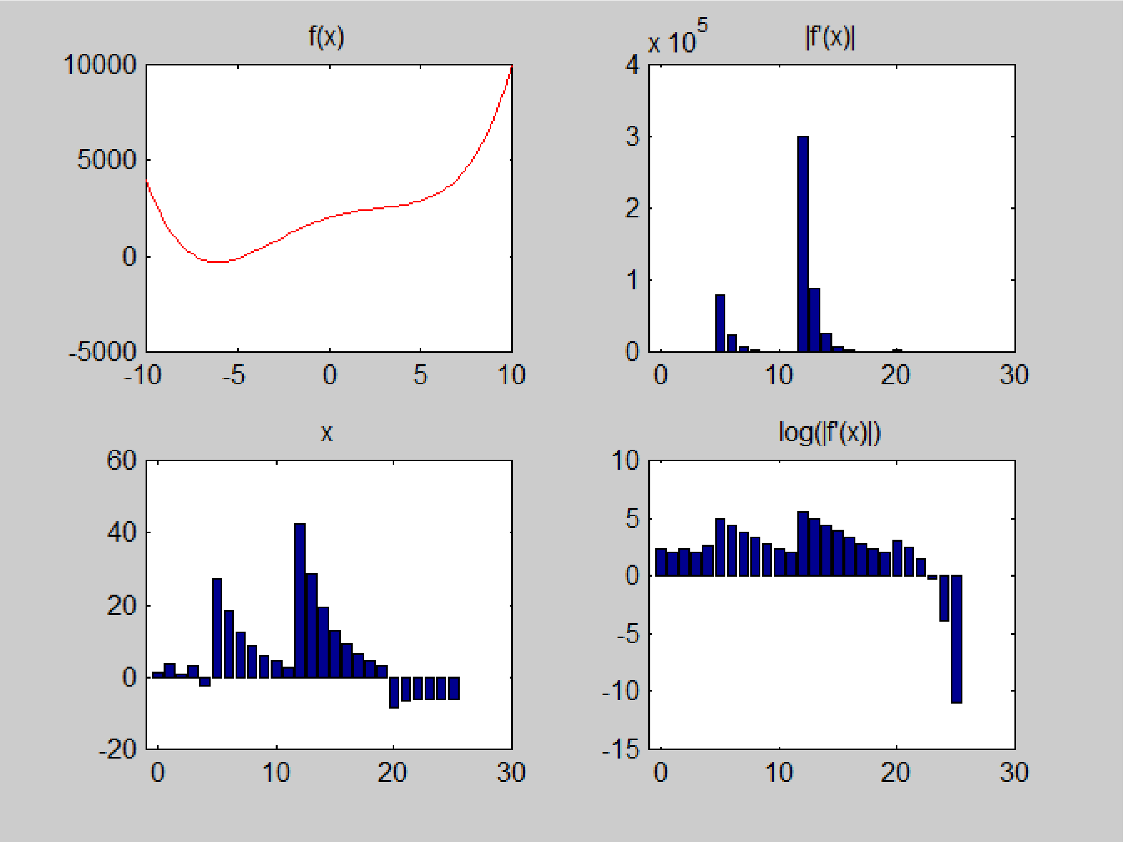
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

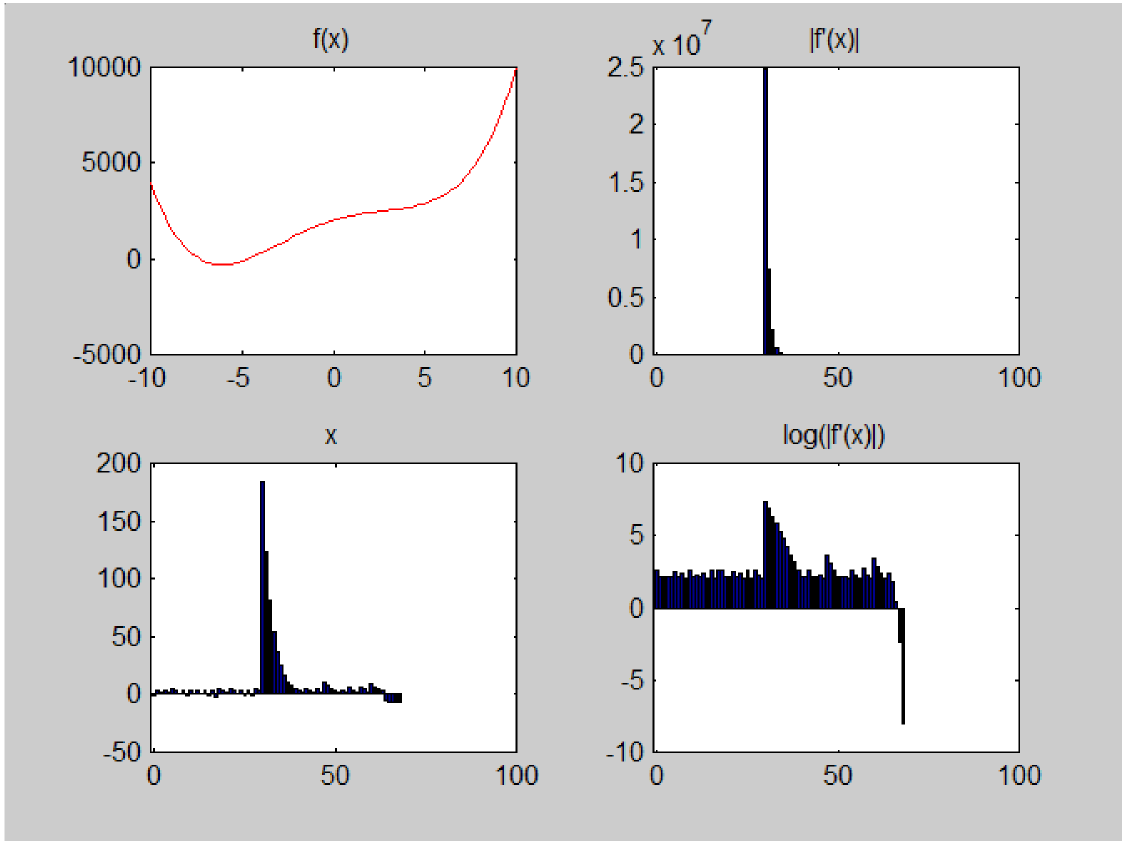
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = x^4 - 50x^2 + 300x + 2000$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

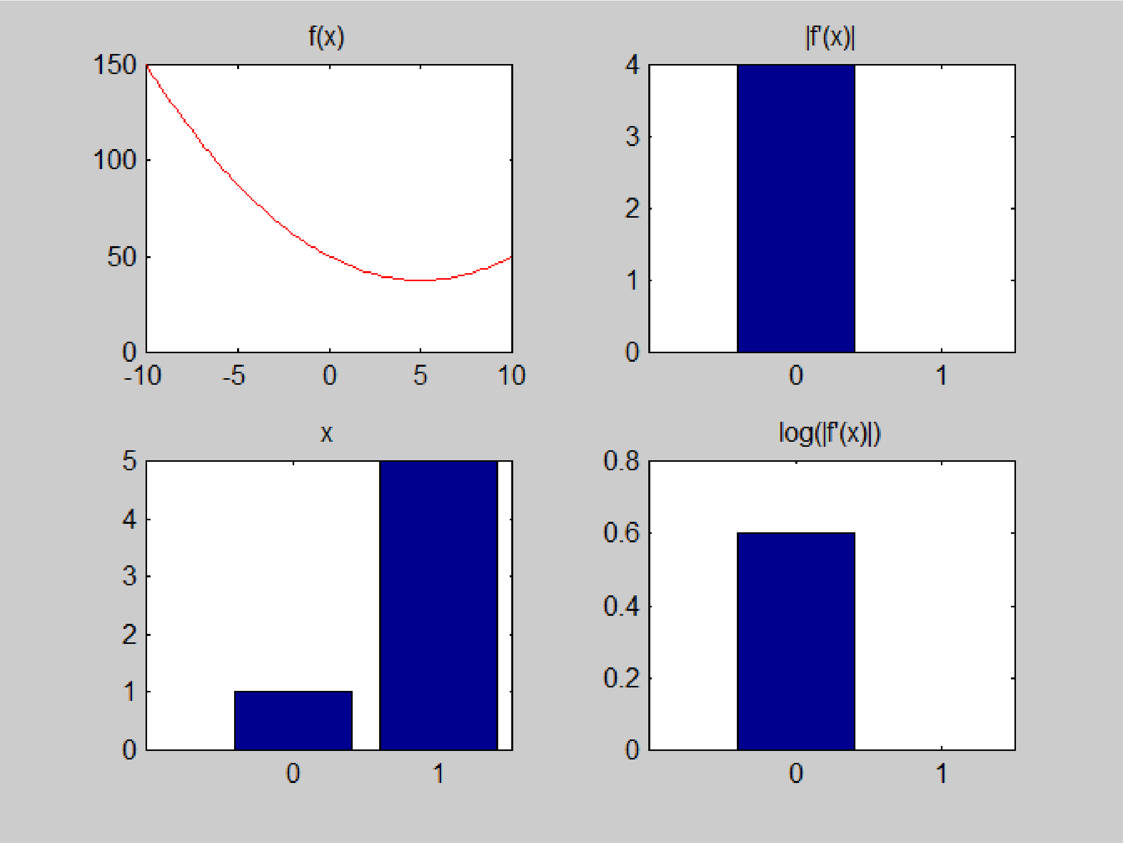
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.5x^2 - 5x + 50$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.5x^2 – 5x + 50$
  - minimum funkcji: $x^* = 5$
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

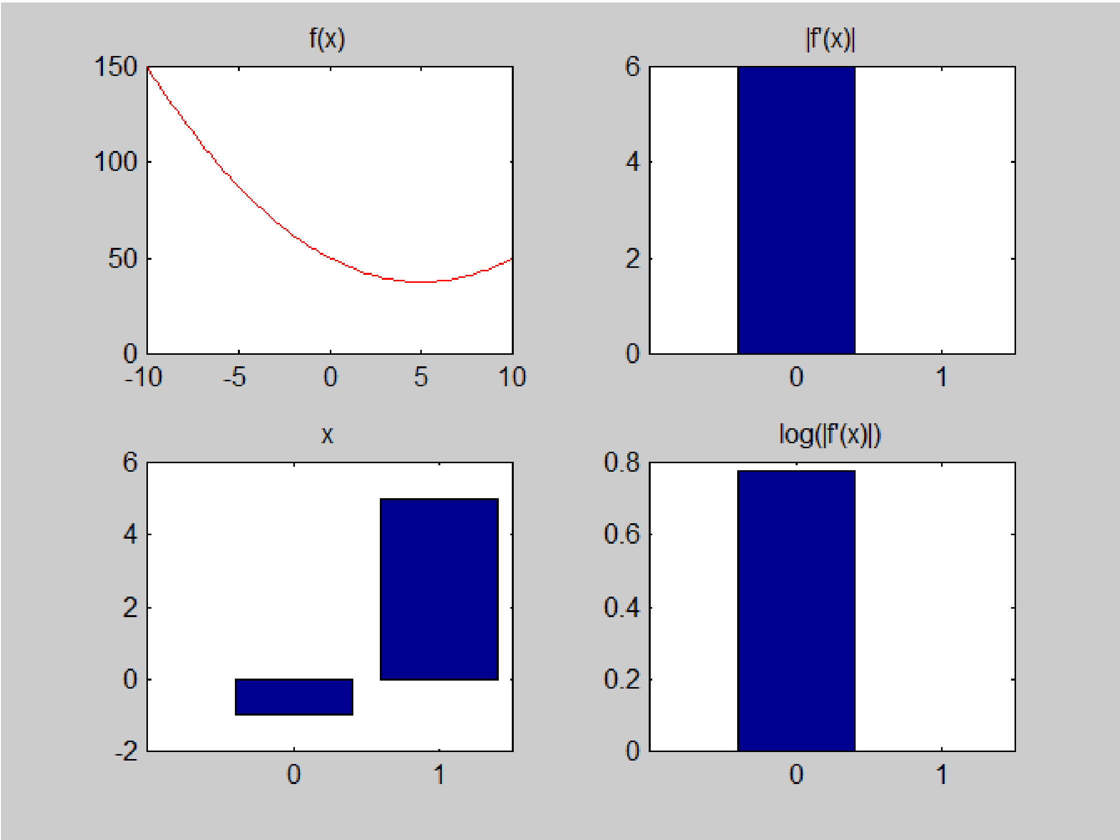
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.5x^2 – 5x + 50$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

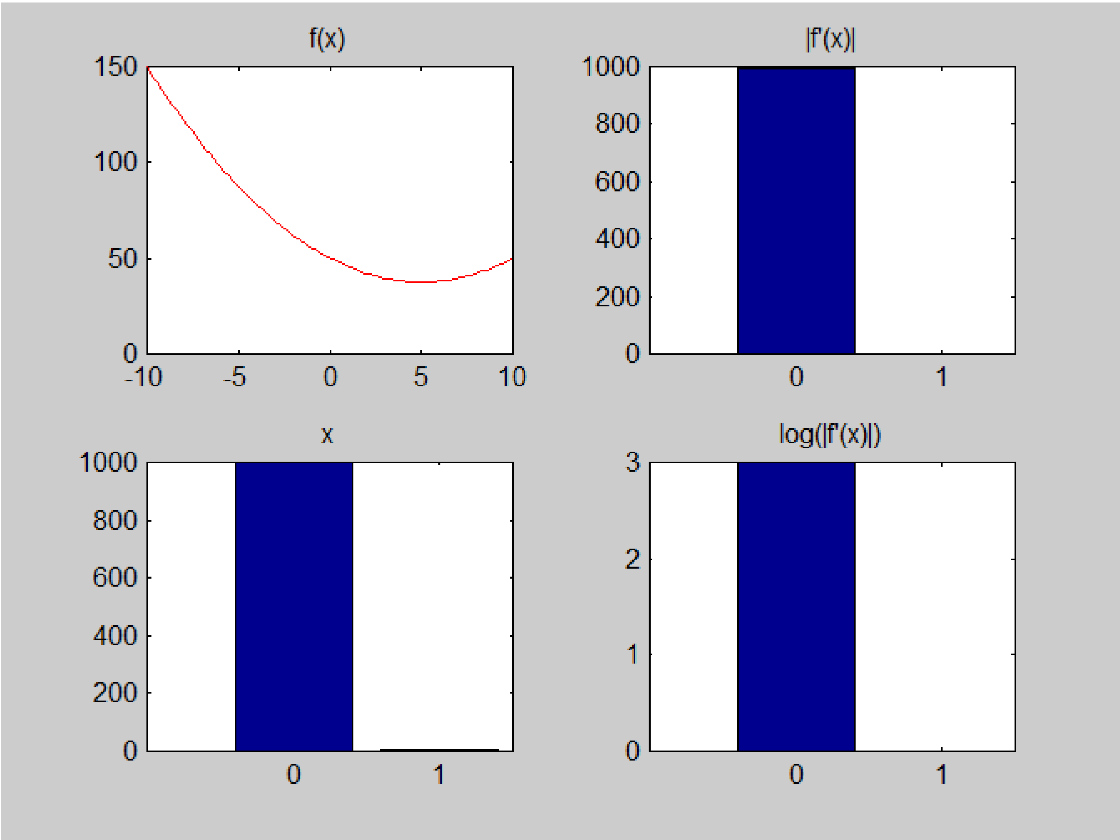
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.5x^2 - 5x + 50$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

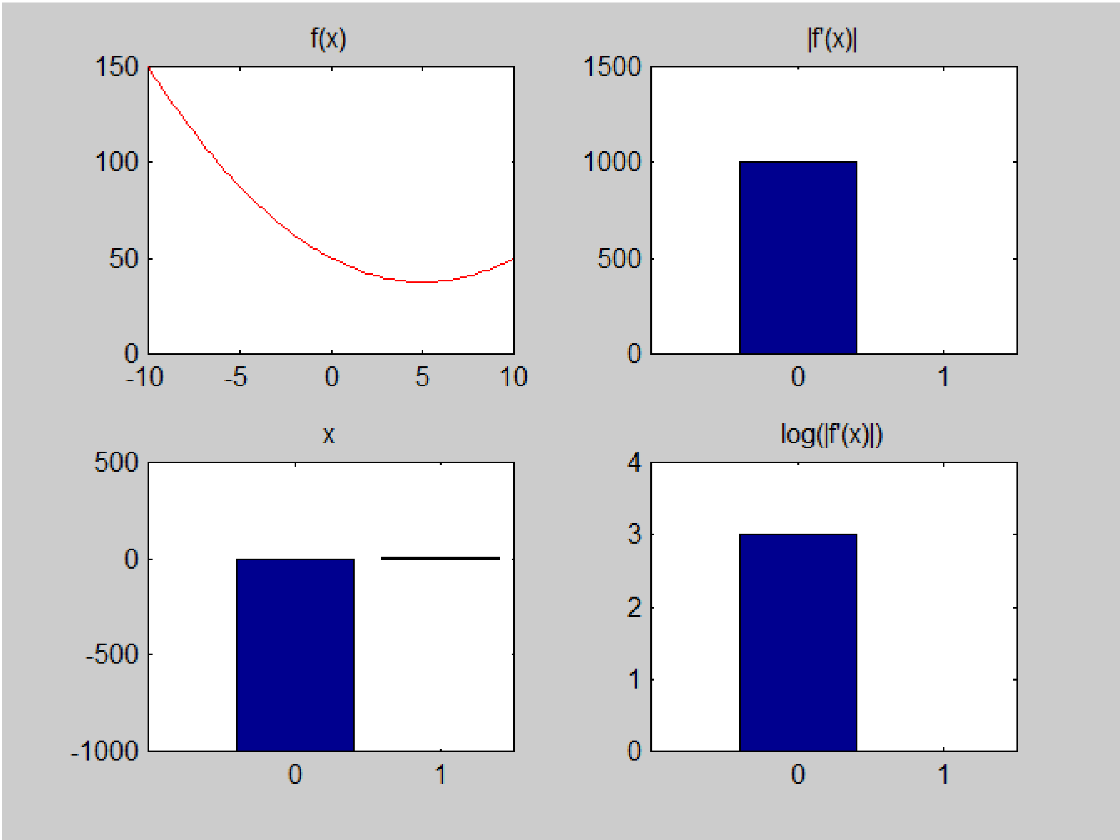
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.5x^2 - 5x + 50$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1000$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.5x^2 - 5x + 50$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1000$



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

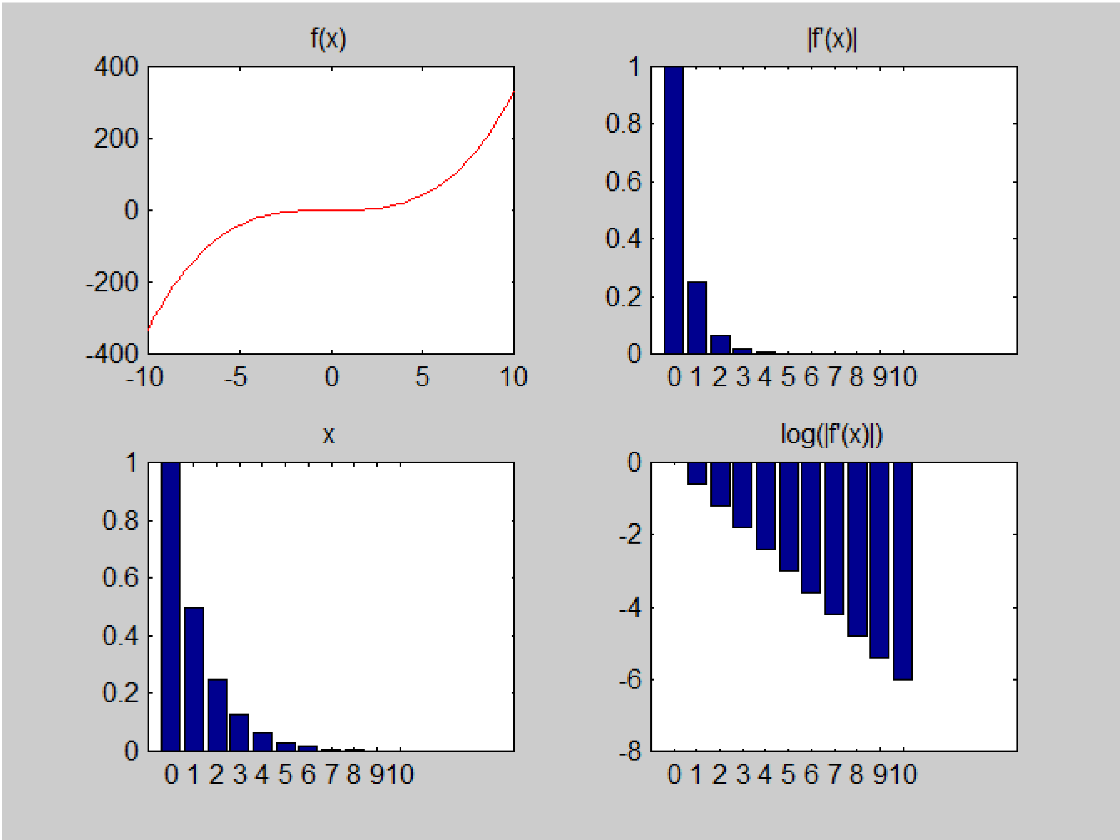
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = (1/3)x^3$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = (1/3)x^3$
  - minimum funkcji: x^*: brak ($\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$)
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

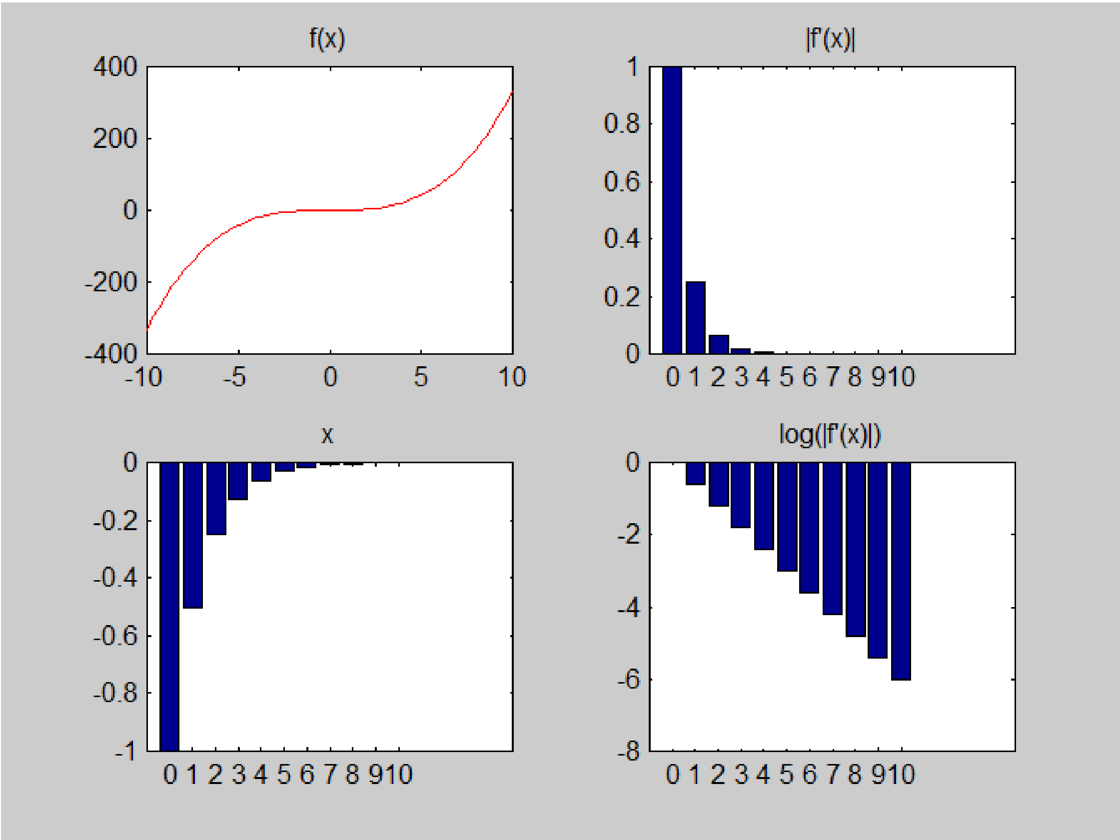
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = (1/3)x^3$, $|f'(x)| \le 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - osiągnięto warunek stopu (problem: wynik nie jest minimum!) (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

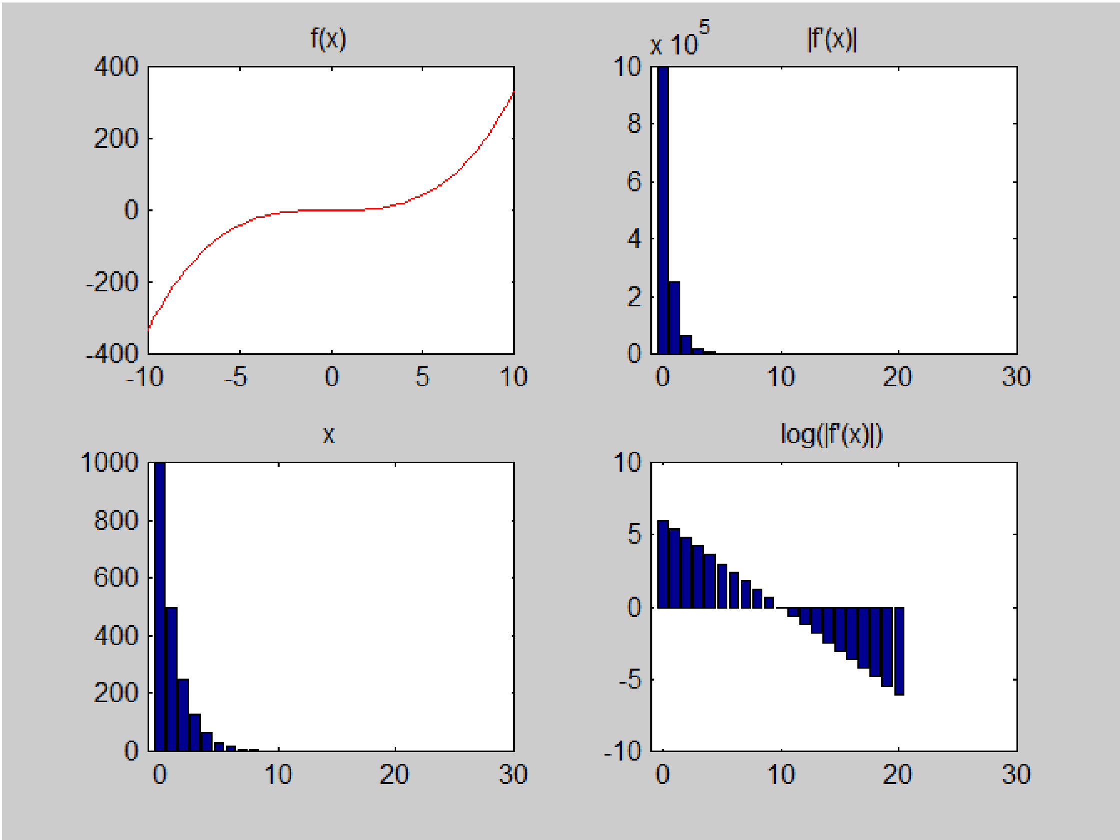
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = (1/3)x^3$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = -1$



  - osiągnięto warunek stopu (problem: wynik nie jest minimum!) (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

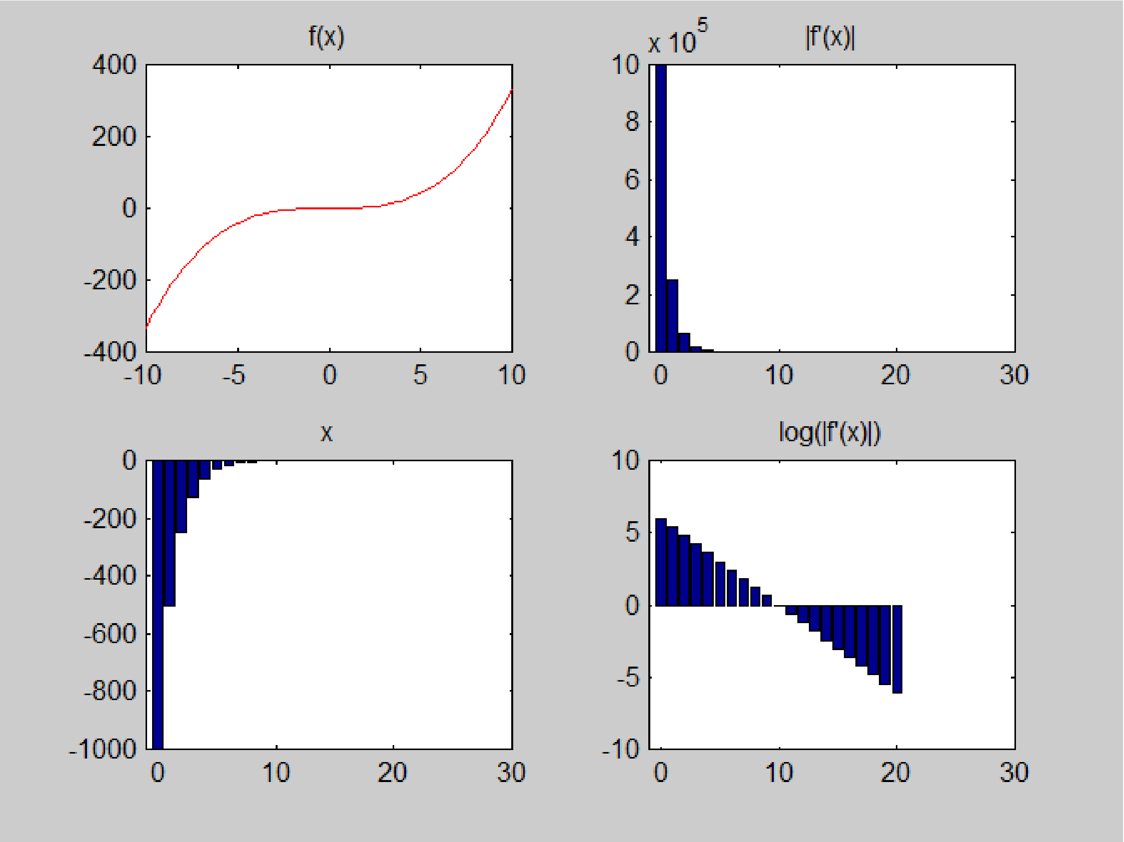
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = (1/3)x^3$, $|f'(x)| \le 10^{-6}$, $x_0 = 1000$



  - osiągnięto warunek stopu (problem: wynik nie jest minimum!) (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

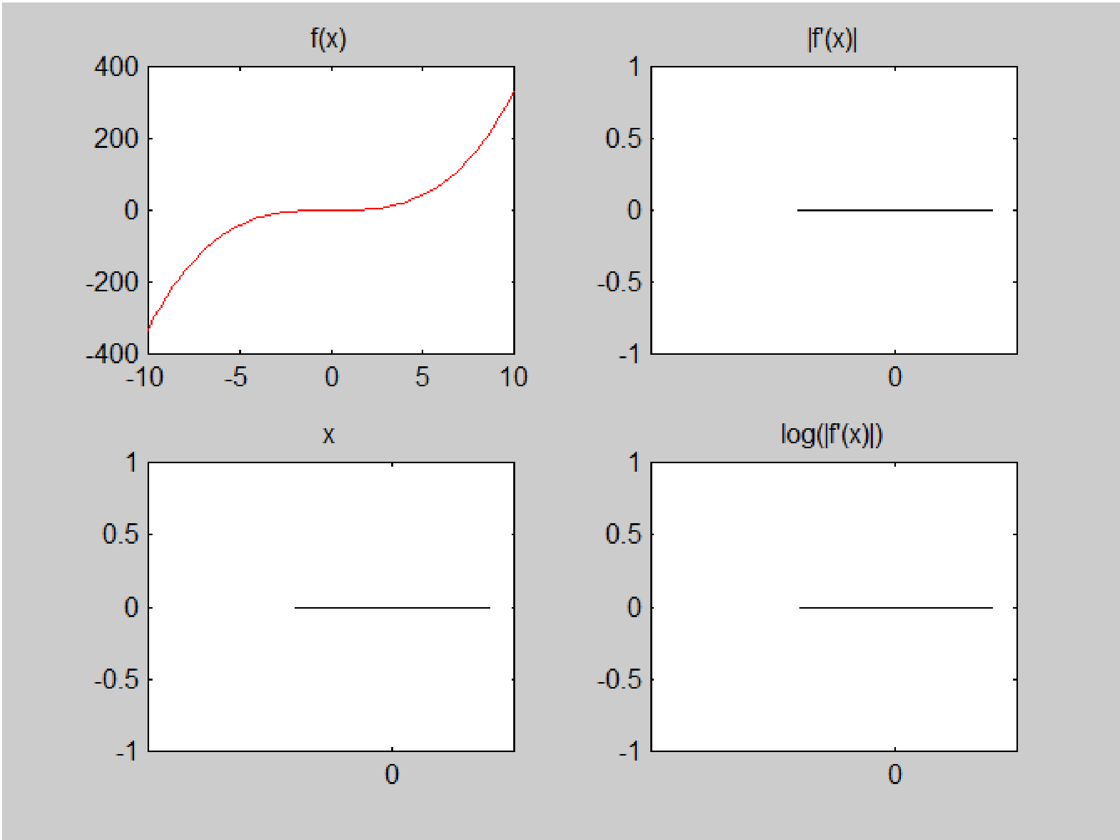
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = (1/3)x^3$, $|f'(x)| \le 10^{-6}$, $x_0 = -1000$



  - osiągnięto warunek stopu (problem: wynik nie jest minimum!) (uwaga: zbieżność rzędu pierwszego)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = (1/3)x^3$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 0$



  - osiągnięto warunek stopu (problem: wynik nie jest minimum)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

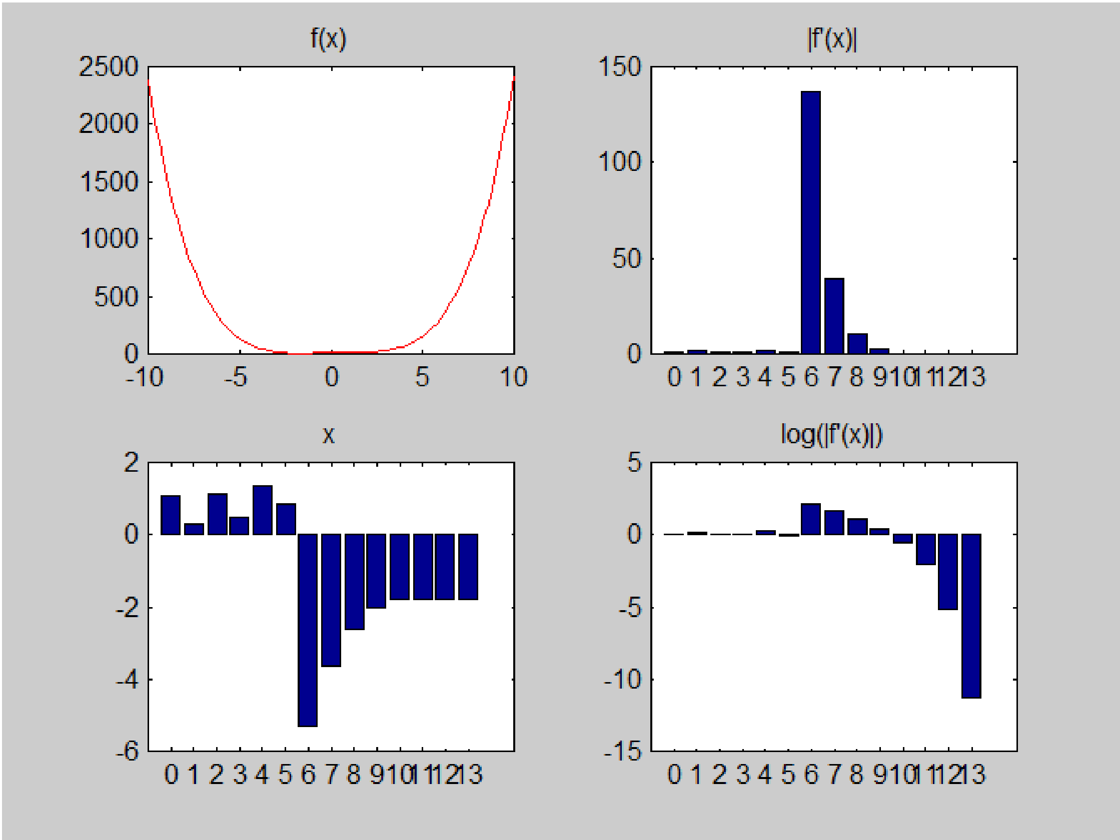
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 2x + 10$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 2x + 10$
  - minimum funkcji: $x^* = -1.76929235424336\ldots$
  - przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

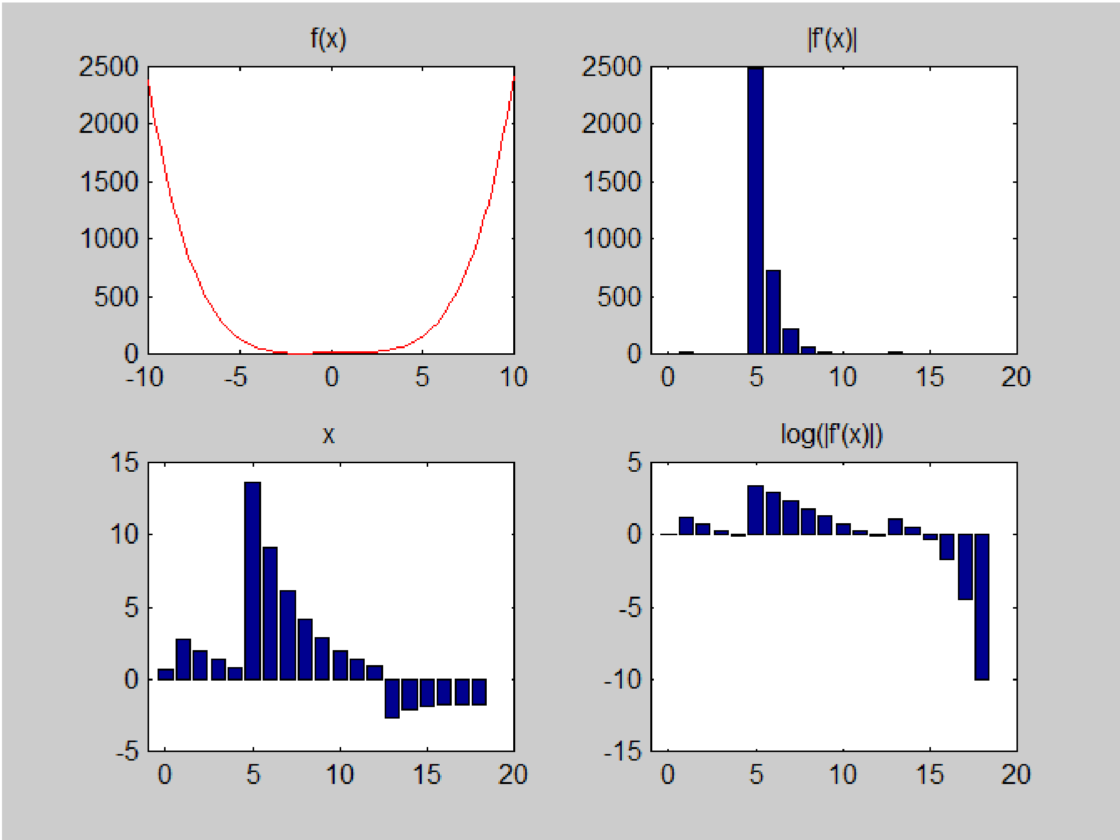
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 2x + 10$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

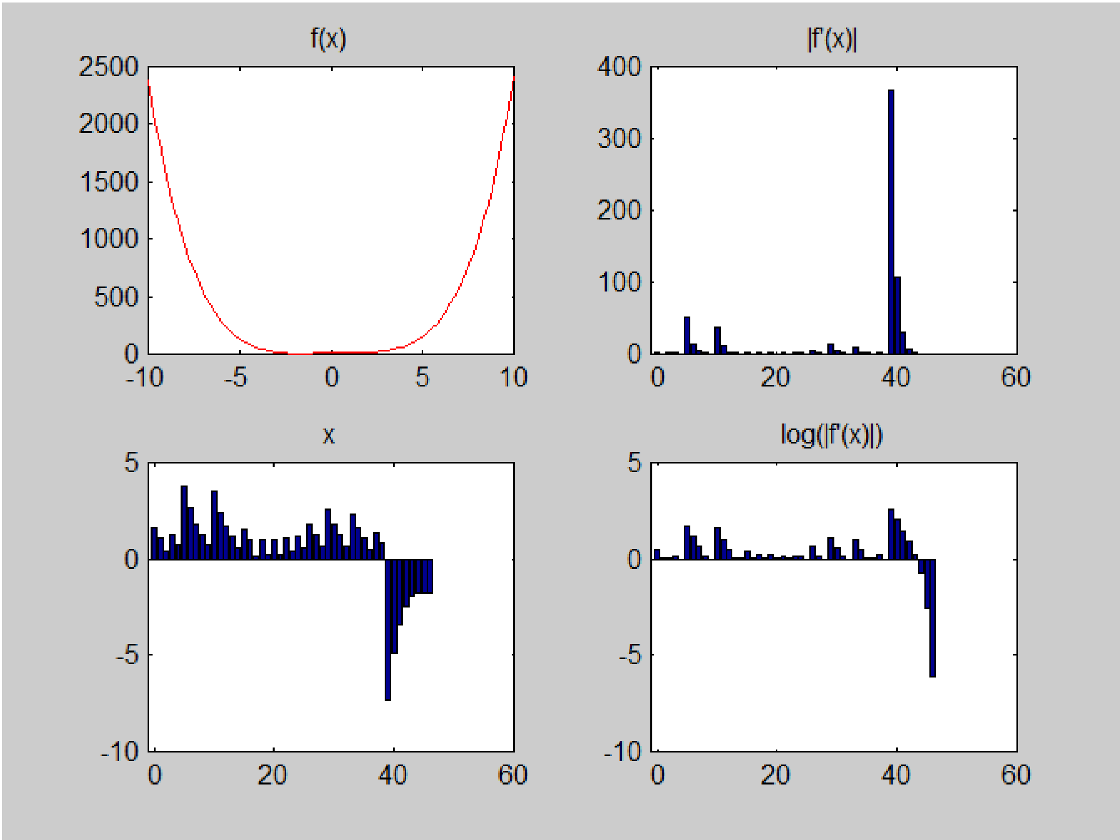
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 2x + 10$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

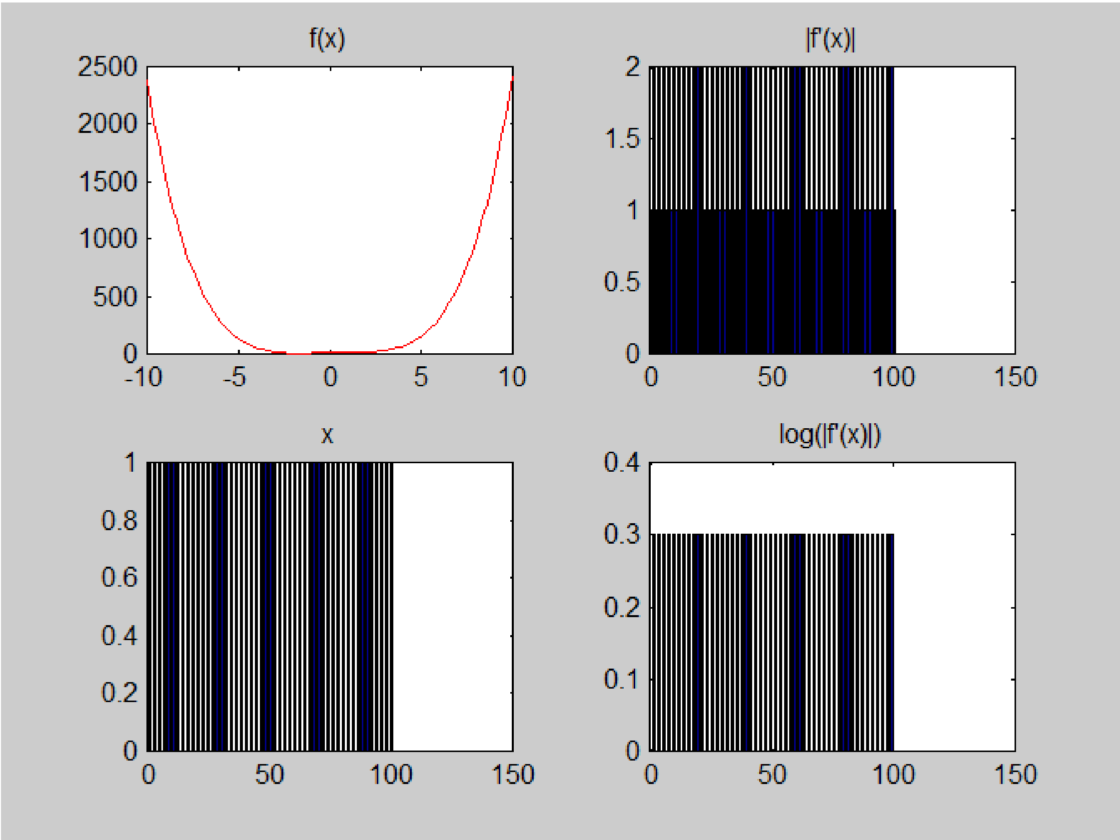
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 2x + 10$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, x_0 losowy z rozkladu N(0,1)



  - osiągnięto warunek stopu

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.25x^4 - x^2 + 2x + 10$, $|f'(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - nie osiągnięto warunku stopu (problem: brak zbieżności)

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

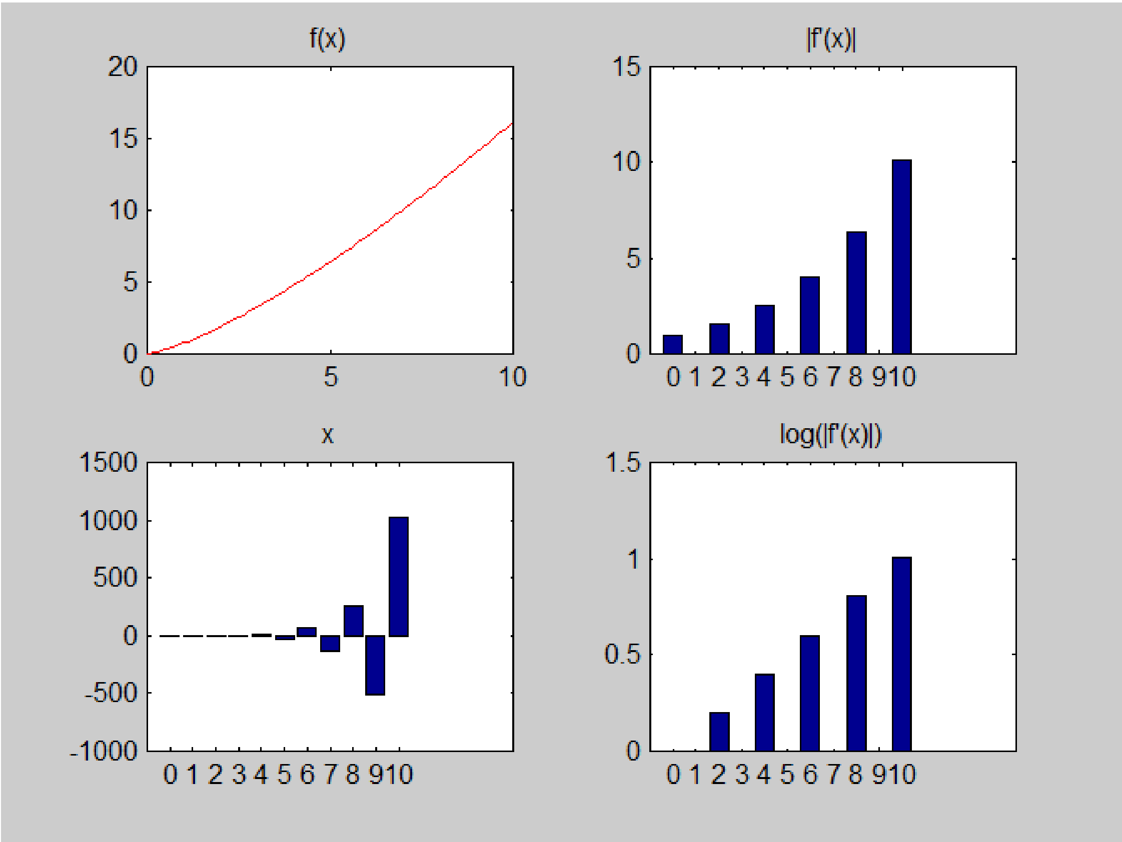
- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.75x^{4/3}$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  – $f(x) = 0.75x^{4/3}$
  – minimum funkcji: $x^* = 0$
  – przyjęty warunek stopu: $|f(x)| \leq 10^{-6}$

Metoda Newtona (optymalizacyjna)

- Przykład poszukiwania minimów funkcji, c.d.
  - $f(x) = 0.75x^{4/3}$, $|f(x)| \leq 10^{-6}$, $x_0 = 1$



  - nie osiągnięto warunku stopu (problem: brak zbieżności)

…

Metody Newtona: porównanie

- Porównanie: <u>optymalizacyjna</u> a <u>aproksymacyjna</u> metoda Newtona
  - dzięki odpowiednim założeniom dotyczącym funkcji f(x) optymalizacyjny schemat iteracyjny
    $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$ dla funkcji f(x) prowadzi do:
    - znalezienia rozwiązania funkcji f(x) (argumentu zapewniającego minimum)

      – a jednocześnie –
    - znalezienia miejsca zerowego funkcji f'(x) (argumentu zapewniającego zerowość)

    a więc jest jednocześnie schematem aproksymacyjnym dla funkcji f'(x)
  - przez analogię:
    schematem aproksymacyjnym dla funkcji f(x) jest więc
    $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
    (reszta algorytmu jest także analogiczna)

Metody Newtona: porównanie

- Porównanie: <u>optymalizacyjna</u> a <u>aproksymacyjna</u> metoda Newtona
  - jakość przybliżania funkcją liniową a funkcją kwadratową
    - ...
    - przybliżenie funkcji f(x) w punkcie x_0 funkcją liniową gwarantuje
      $q(x_0) = f(x_0)$ /identyczna wartość w x_0/
      $q'(x_0) = f'(x_0)$ /identyczne nachylenie w x_0/
      (nadaje się do poszukiwania miejsc zerowych)
    - przybliżenie funkcji f(x) q(x) w punkcie x_0 funkcją kwadratową gwarantuje
      $q(x_0) = f(x_0)$ /identyczna wartość w x_0/
      $q'(x_0) = f'(x_0)$ /identyczne nachylenie w x_0/
      $q''(x_0) = f''(x_0)$ /identyczne ugięcie* w x_0/
      (nadaje się do poszukiwania ekstremów)
    - ...

* powiązane pojęcia: krzywizna, wklęsłość, wypukłość, punkt przegięcia, punkt siodłowy

Metody Newtona: porównanie

- Porównanie: <u>optymalizacyjna</u> a <u>aproksymacyjna</u> metoda Newtona
  - związek funkcja-pochodna „rozciąga się” także na funkcje przybliżające
    - w metodzie aproksymacyjnej jest to funkcja liniowa $q_l(x)$ postaci:
      $q_l(x) = ax + b$
      gdzie $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$, czyli
      $$q_l(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$
    - w metodzie optymalizacyjnej jest to funkcja kwadratowa $q_k(x)$ postaci:
      $q_k(x) = ax^2 + bx + c$
      gdzie $a = f''(x_0)/2$, $b = f'(x_0) - f''(x_0)x_0$, $c = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f''(x_0)(x_0)^2/2$
      - pochodna tej funkcji
        $$(q_k(x))' = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b = 2(f''(x_0)/2)x + f'(x_0) - f''(x_0)x_0 =$$
        $$= f''(x_0)x + f'(x_0) - f''(x_0)x_0$$
    - gdy aproksymacja jest stosowana do pochodnej funkcji optymalizowanej, w kategoriach tej funkcji mamy $a = f''(x_0)$, $b = f'(x_0) - f''(x_0)x_0$, czyli
      $q_l(x) = f''(x_0)x + f'(x_0) - f''(x_0)x_0$
      - wniosek: $(q_k(x))' = q_l(x)$

Metody Newtona: porównanie

- Porównanie: <u>optymalizacyjna</u> a <u>aproksymacyjna</u> metoda Newtona
  - stopnie metod
    - ponieważ schemat iteracyjny $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ w metodzie aproksymacyjnej powstał z (dwuelementowego) rozwinięcia
      $f(x) \approx q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
      więc jest to metoda stopnia 1
    - ponieważ schemat iteracyjny $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$ w metodzie optymalizacyjnej powstał z (trójelementowego) rozwinięcia
      $f(x) \approx q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2$
      więc jest to metoda stopnia 2
  - stopień metody optymalizacyjnej jest o 1 większy od stopnia metody aproksymacyjnej
  - uwaga: jest tak pomino faktu, że schemat iteracyjny metody optymalizacyjnej jest właściwie identyczny (jest to bowiem schemat metody aproksymacyjnej zastosowany do pochodnej funkcji)
    - relacja ta zachowałaby się w przypadku użycia schematu iteracyjnego metody aproksymacyjnej stopnia 2 (co oznacza: rozwinięcie trojelementowe) w metodzie optymalizacyjnej, gdzie stosowany jest do pochodnej funkcji) – metoda optymalizacyjna byłaby wtedy metodą stopnia 3 (co oznacza: rozwinięcie czteroelementowe)

Metody Newtona (optymalizacyjna+aproksymacyjna)

- Przykład przybliżania
  - pewnej funkcji danej funkcją przybliżającą (kwadratową) /cel: znalezienie ekstremum funkcji danej/
    - funkcja

    $f(x) = 0.01x^5 + 0.05x^4 + 0x^3 + 0.2x^2 - x - 5$

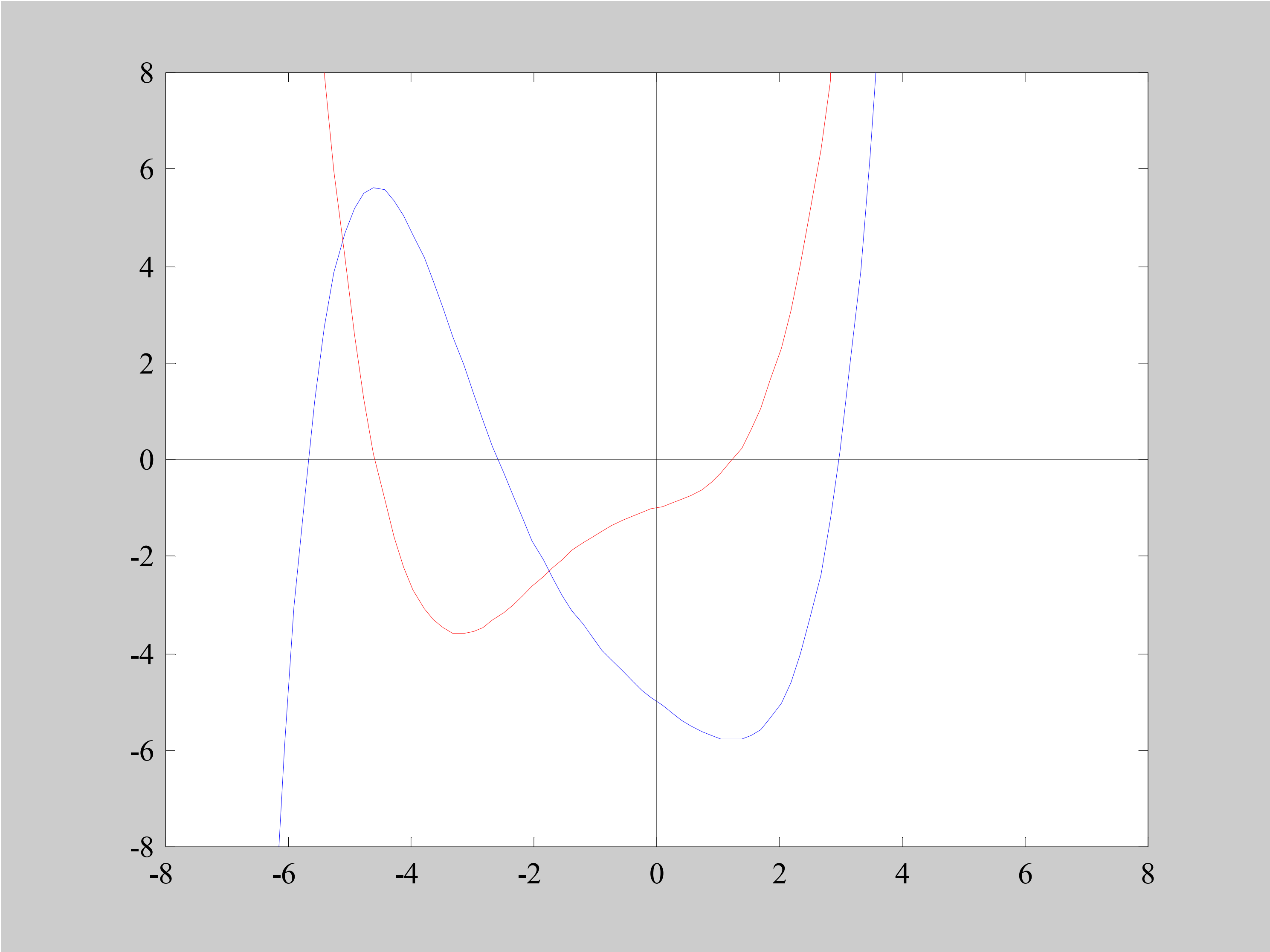
  wraz z jednoczesnym przybliżaniem

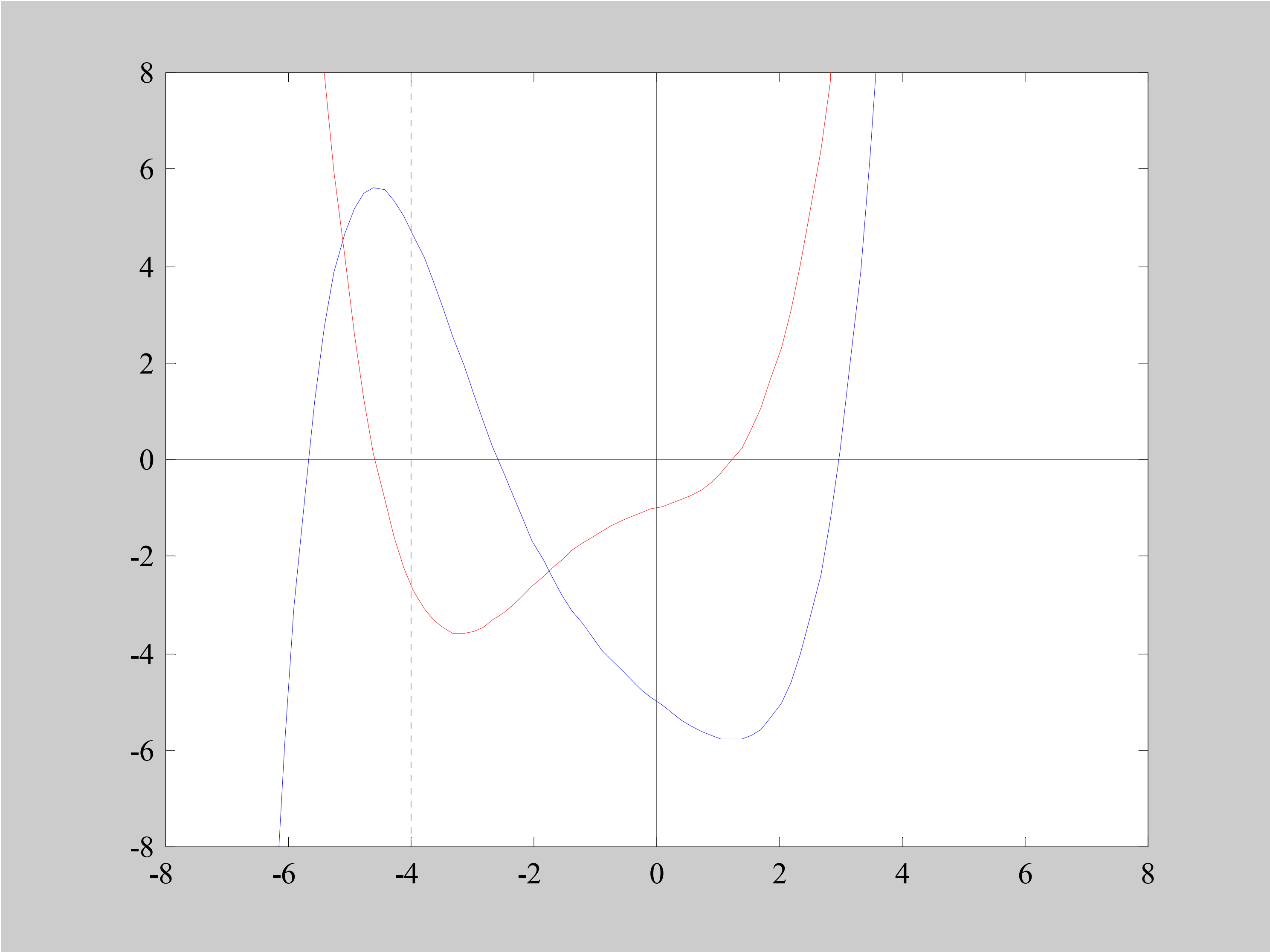
  - pochodnej funkcji danej funkcją przybliżającą (liniową) /cel: znalezienie miejsca zerowego pochodnej funkcji danej/
    - funkcja

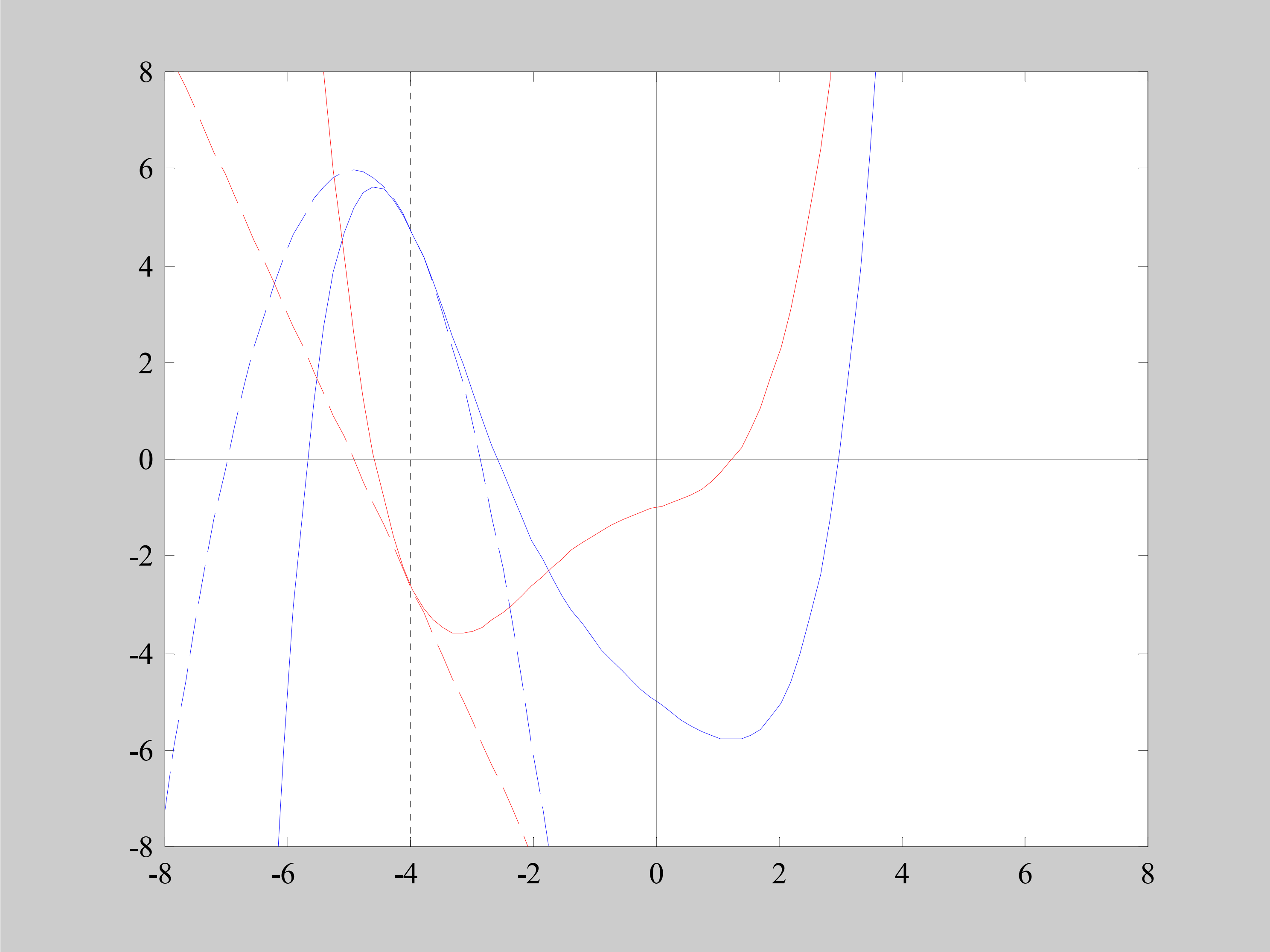
    $f'(x) = 0.05x^4 + 0.2x^3 + 0x^2 + 0.4x - 1$

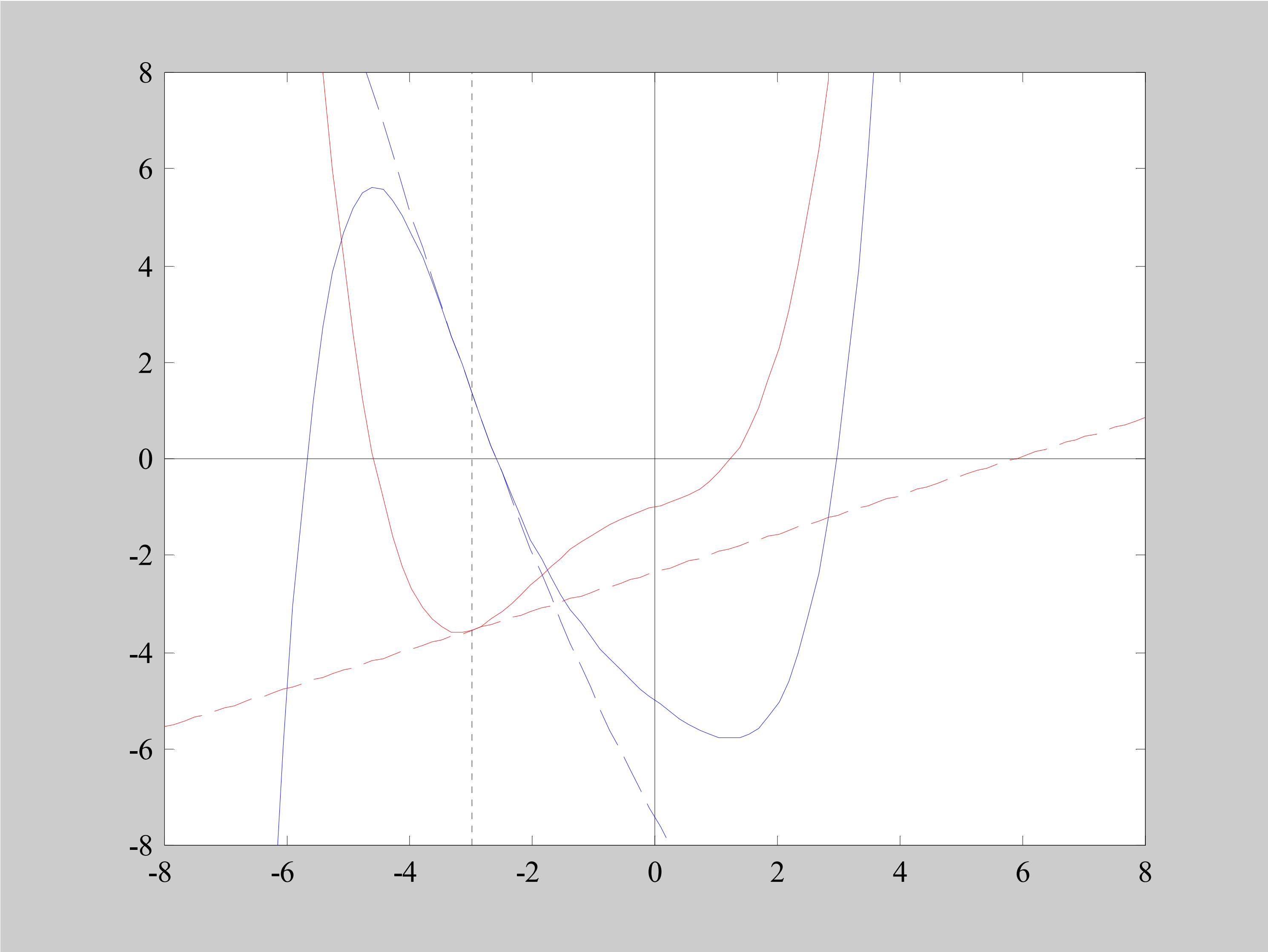
  - (przykładowe) punkty, w których znajdujemy oba przybliżenia

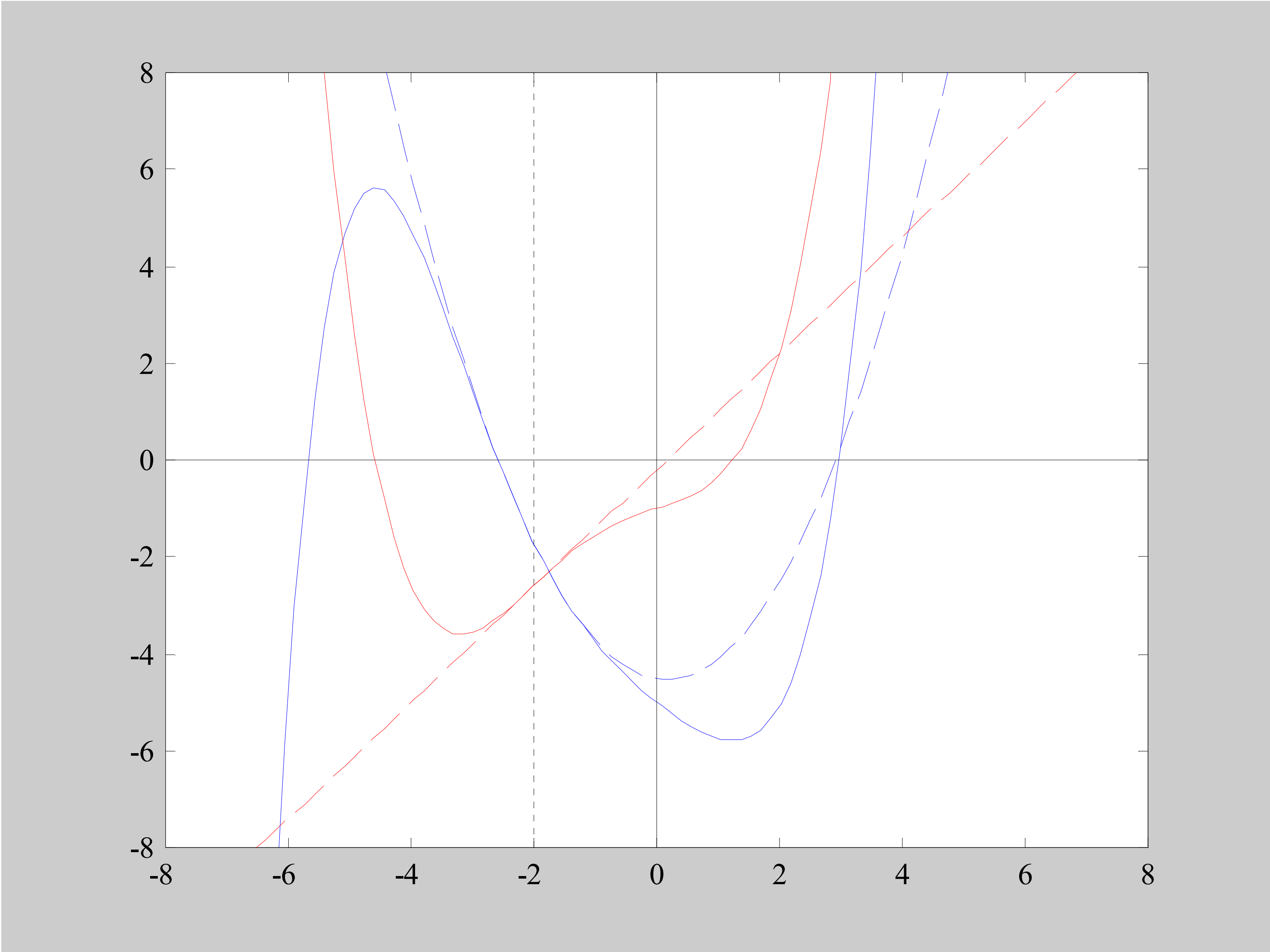
  x_0: –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4

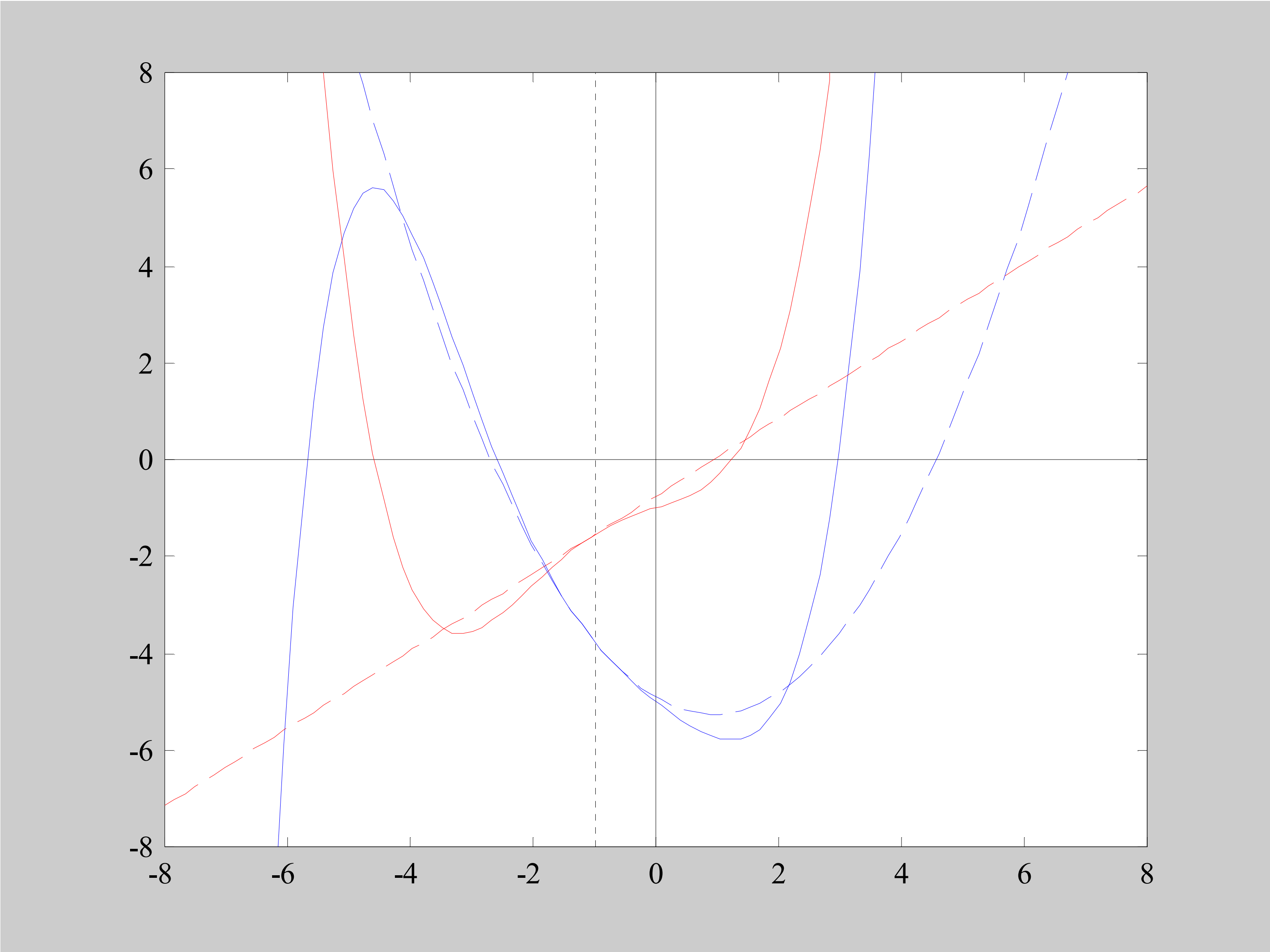

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

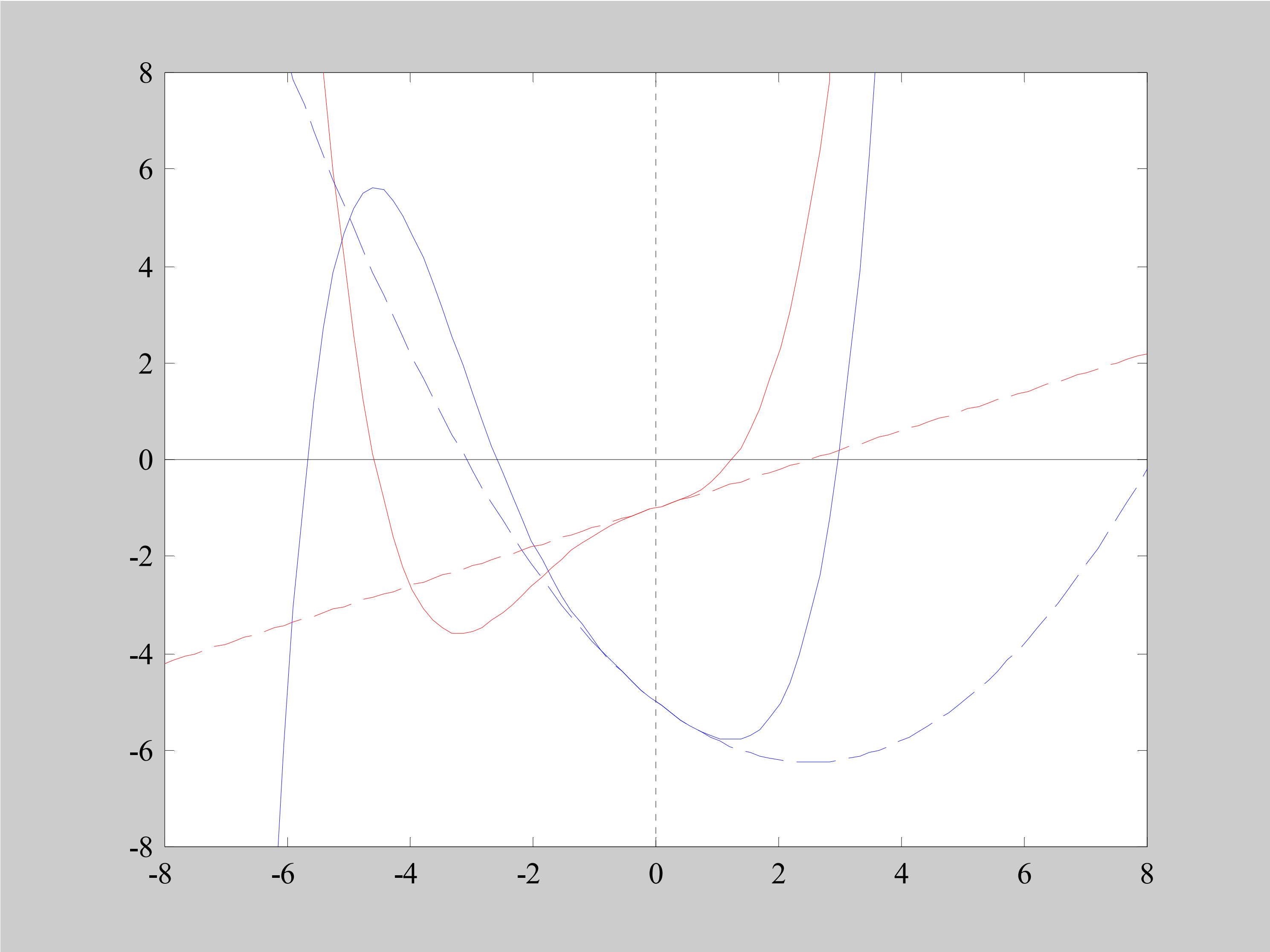

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

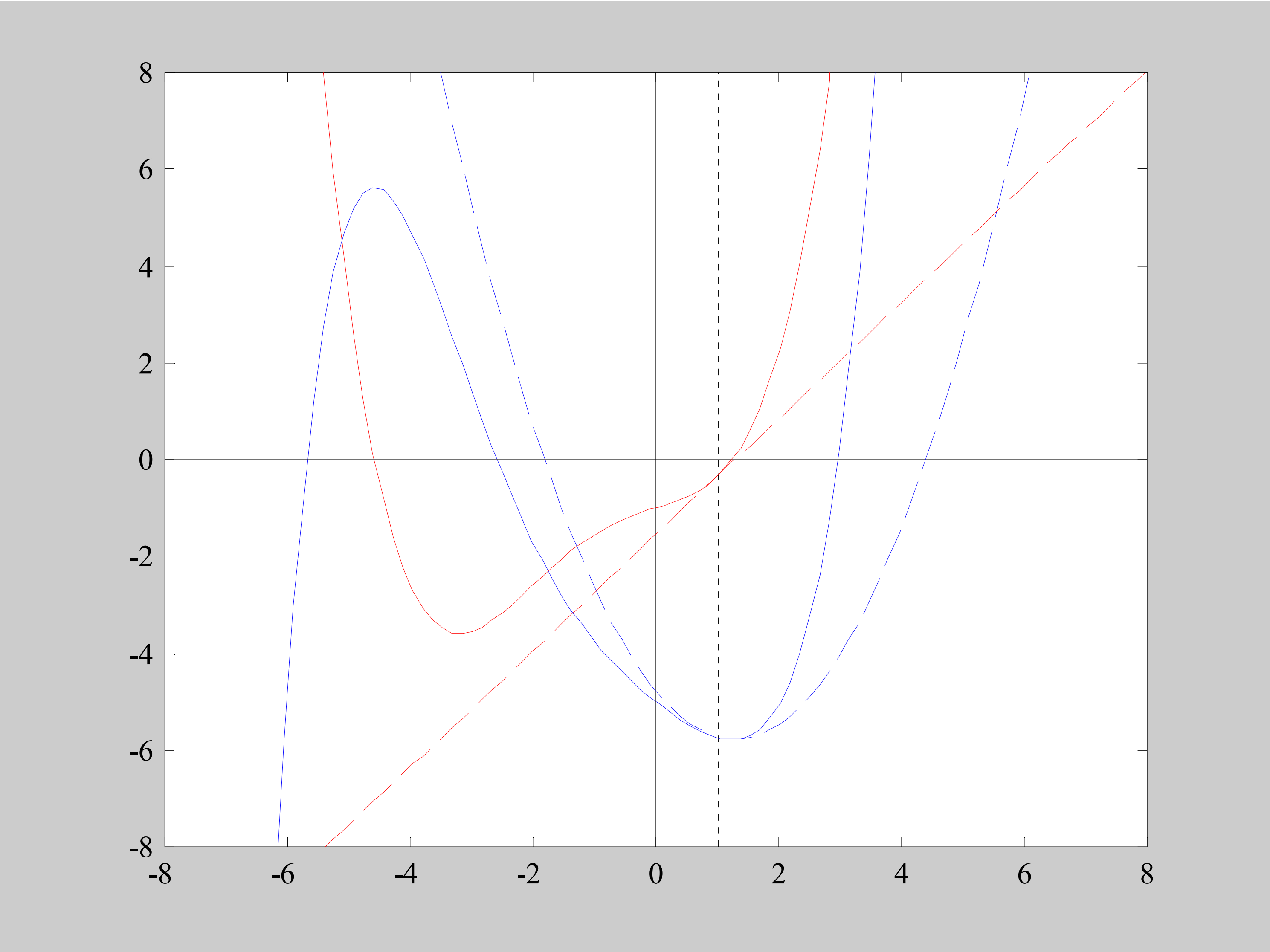

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

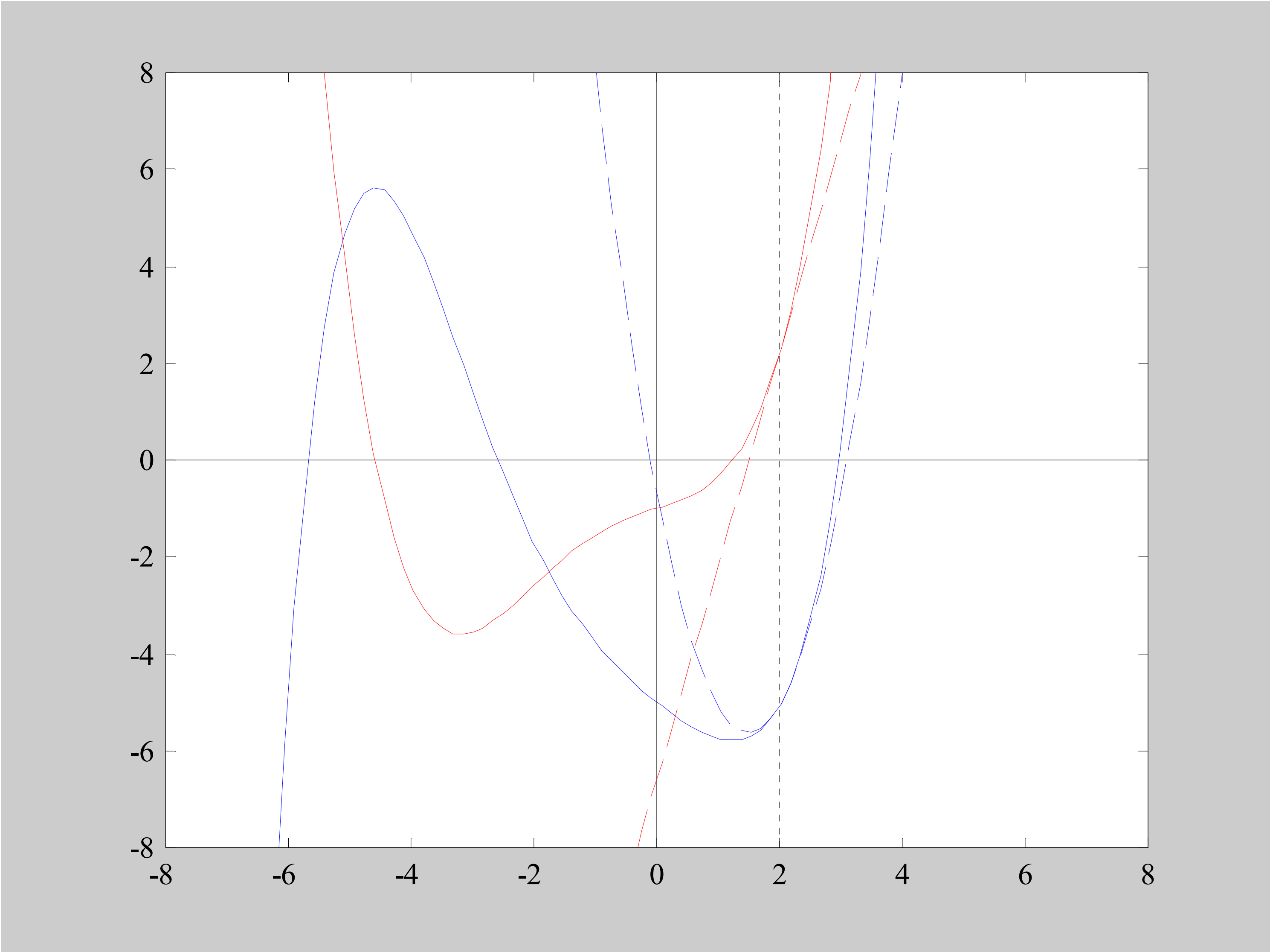

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

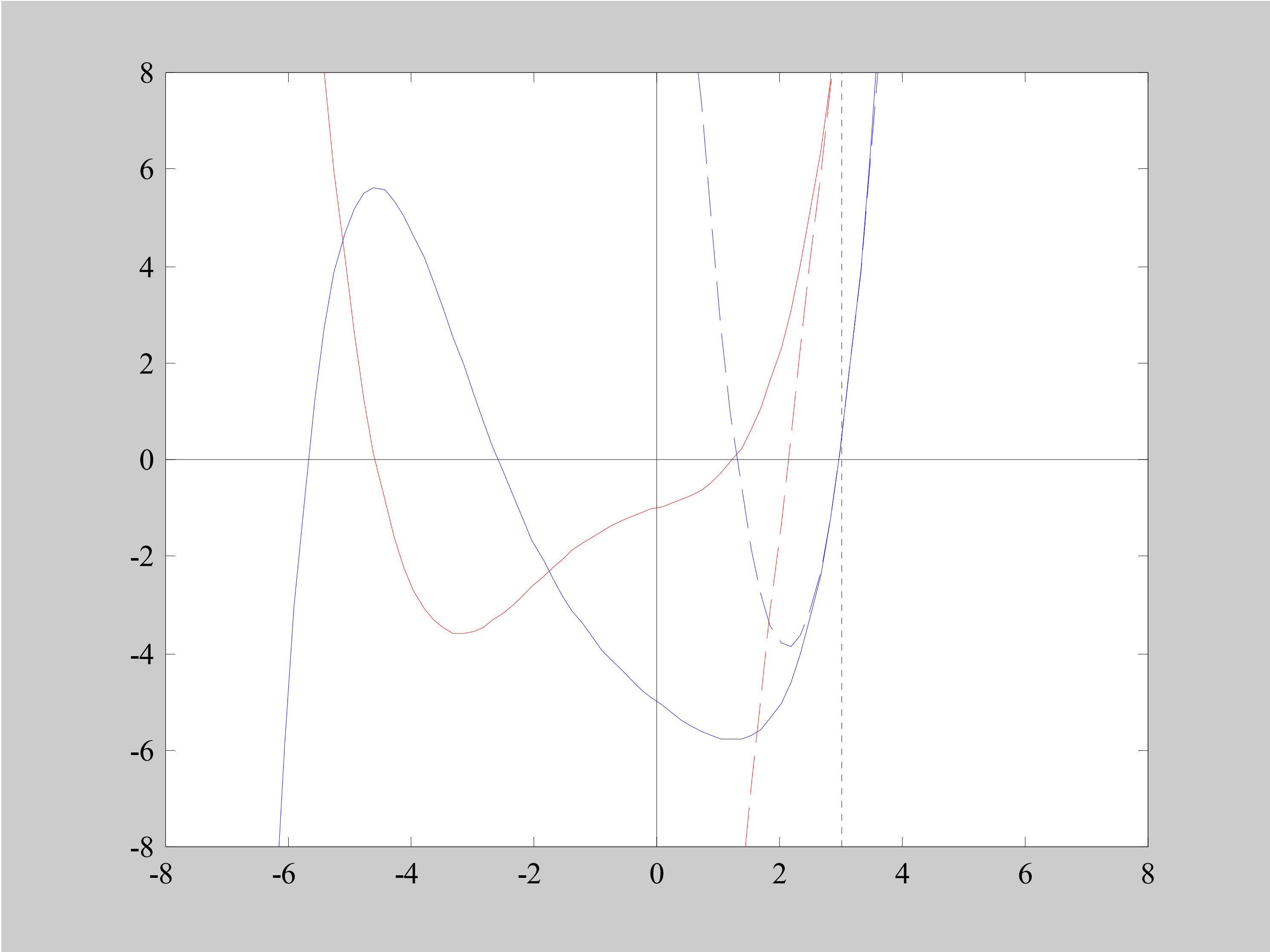

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

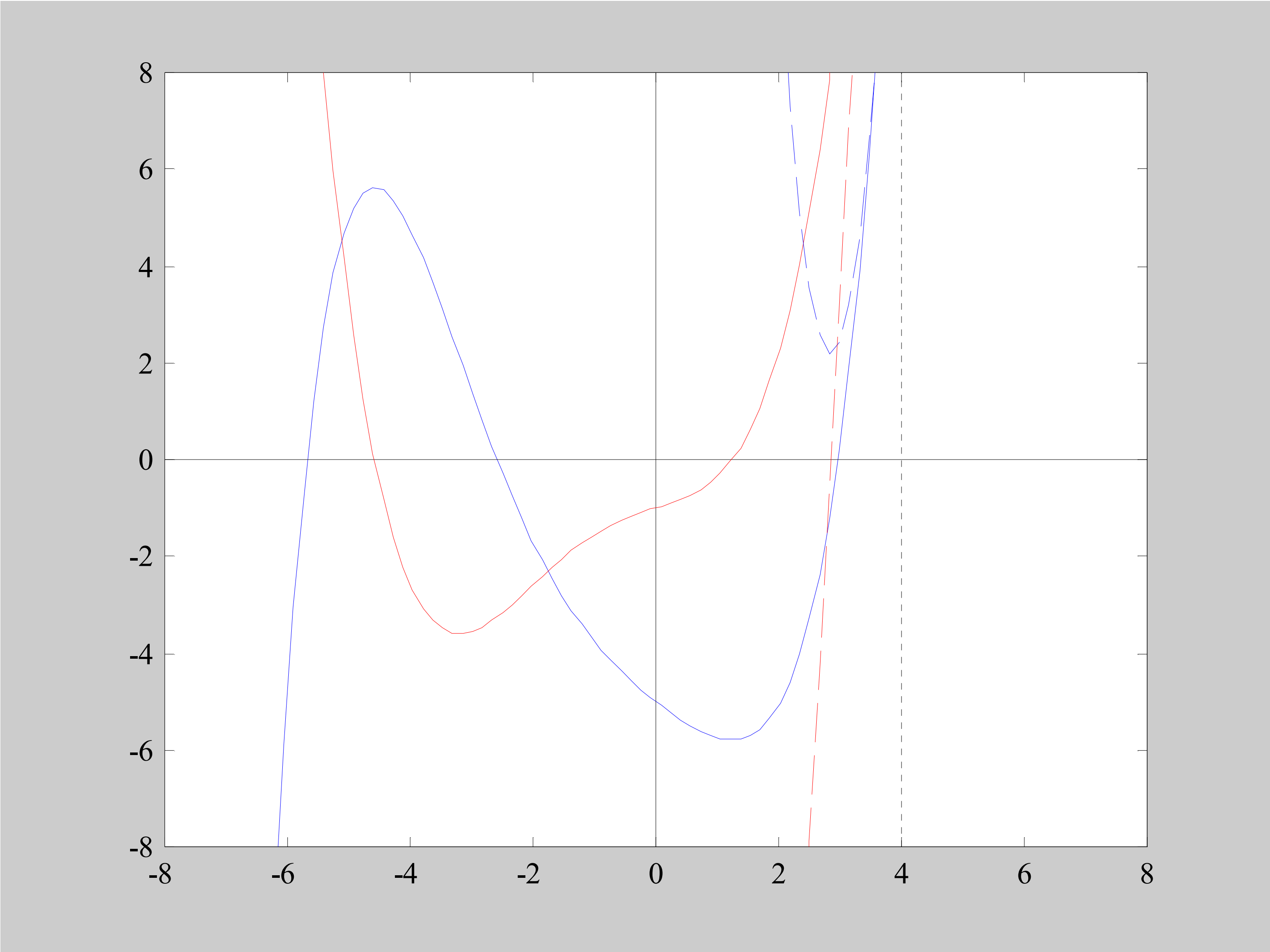

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8



8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

Metody Newtona (optymalizacyjna+aproksymacyjna)

- Przykład
  - znajdowanie ekstremum funkcji danej
    - funkcja

    $f(x) = 0.01x^5 + 0.05x^4 + 0x^3 + 0.2x^2 - x - 5$
    - wartość początkowa

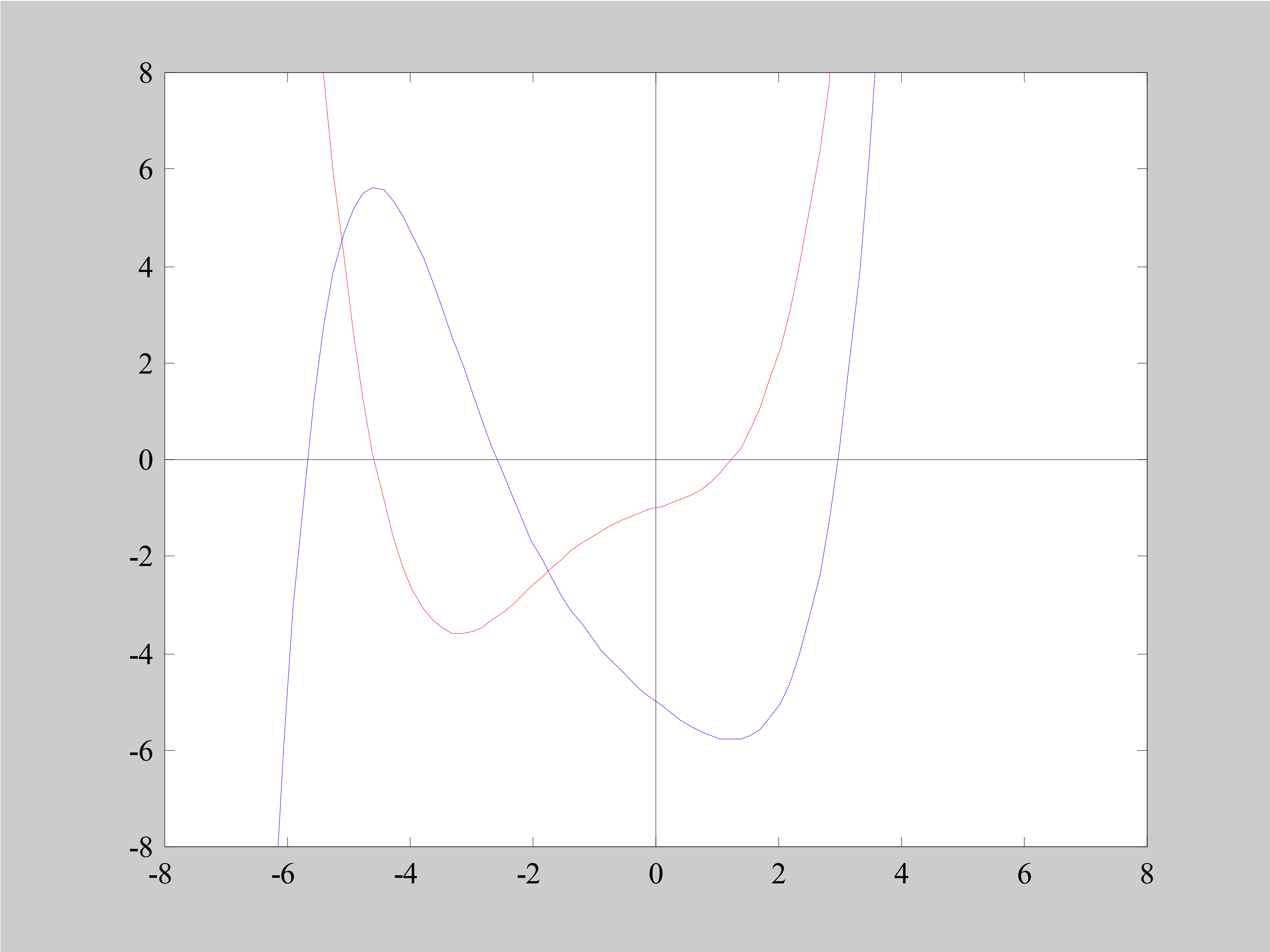
    $x_0 = -2$

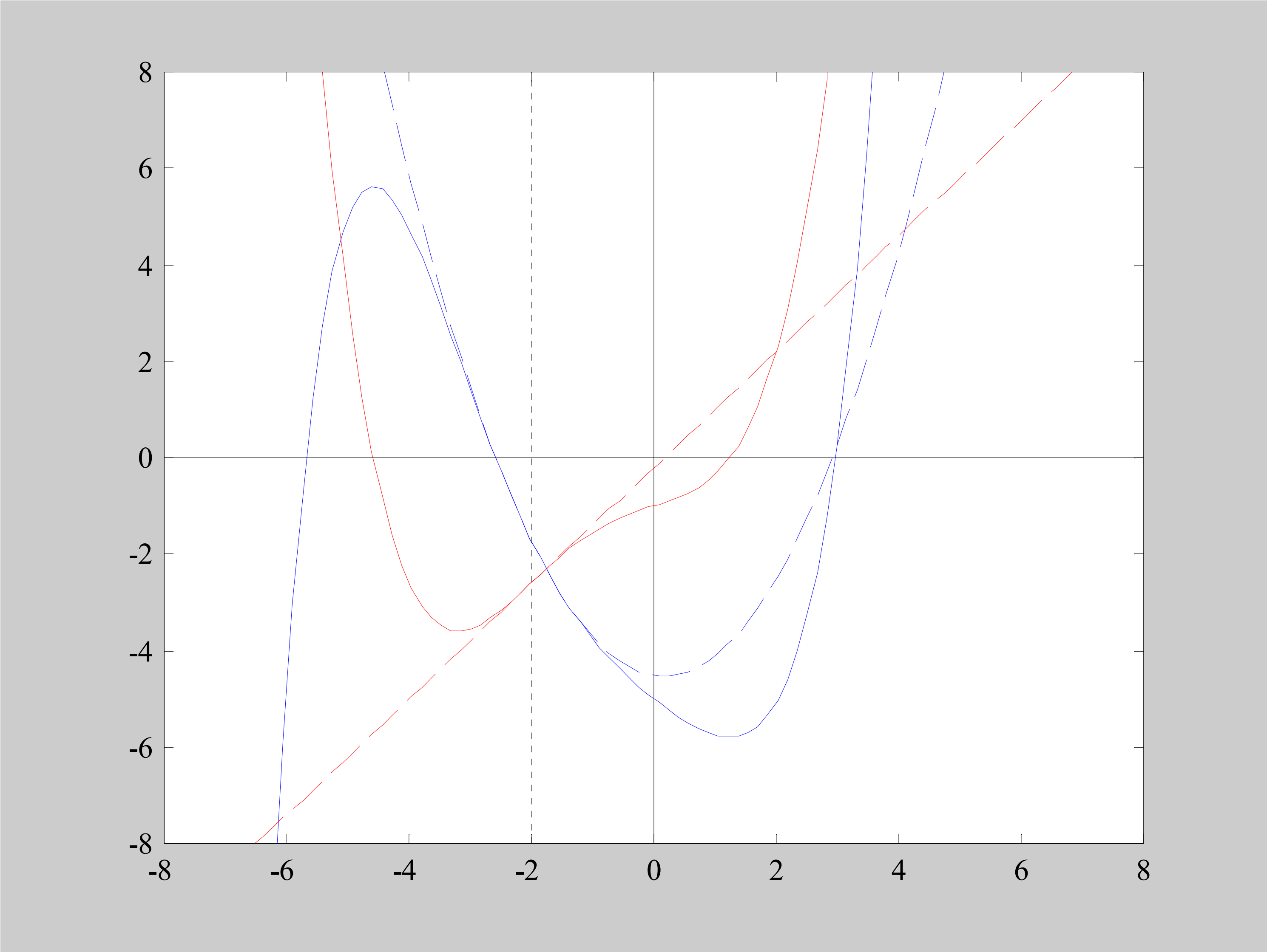
wraz z jednoczesnym

  - znajdowaniem miejsca zerowego pochodnej funkcji danej
    - funkcja

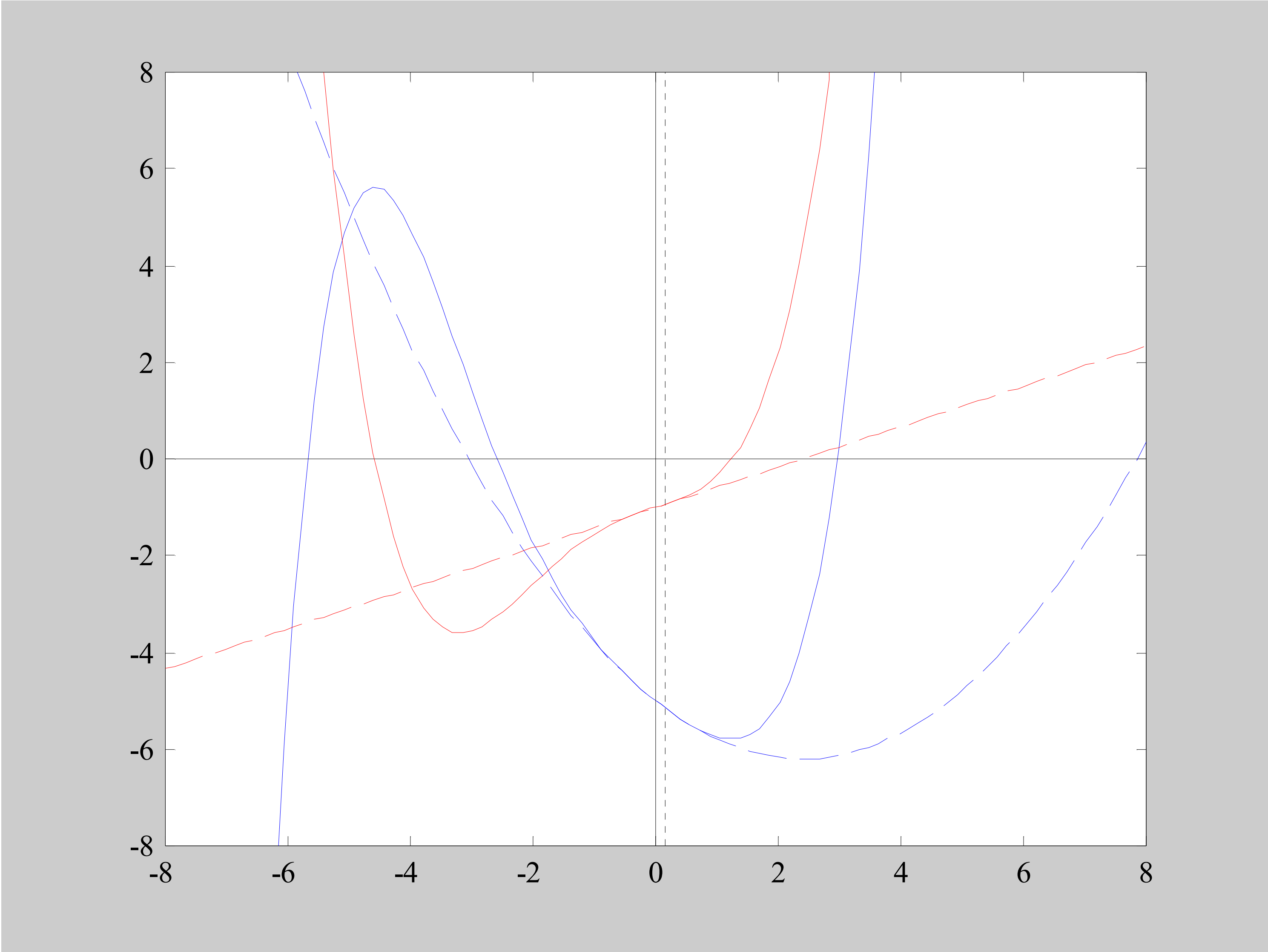
    $f'(x) = 0.05x^4 + 0.2x^3 + 0x^2 + 0.4x - 1$
    - wartość początkowa

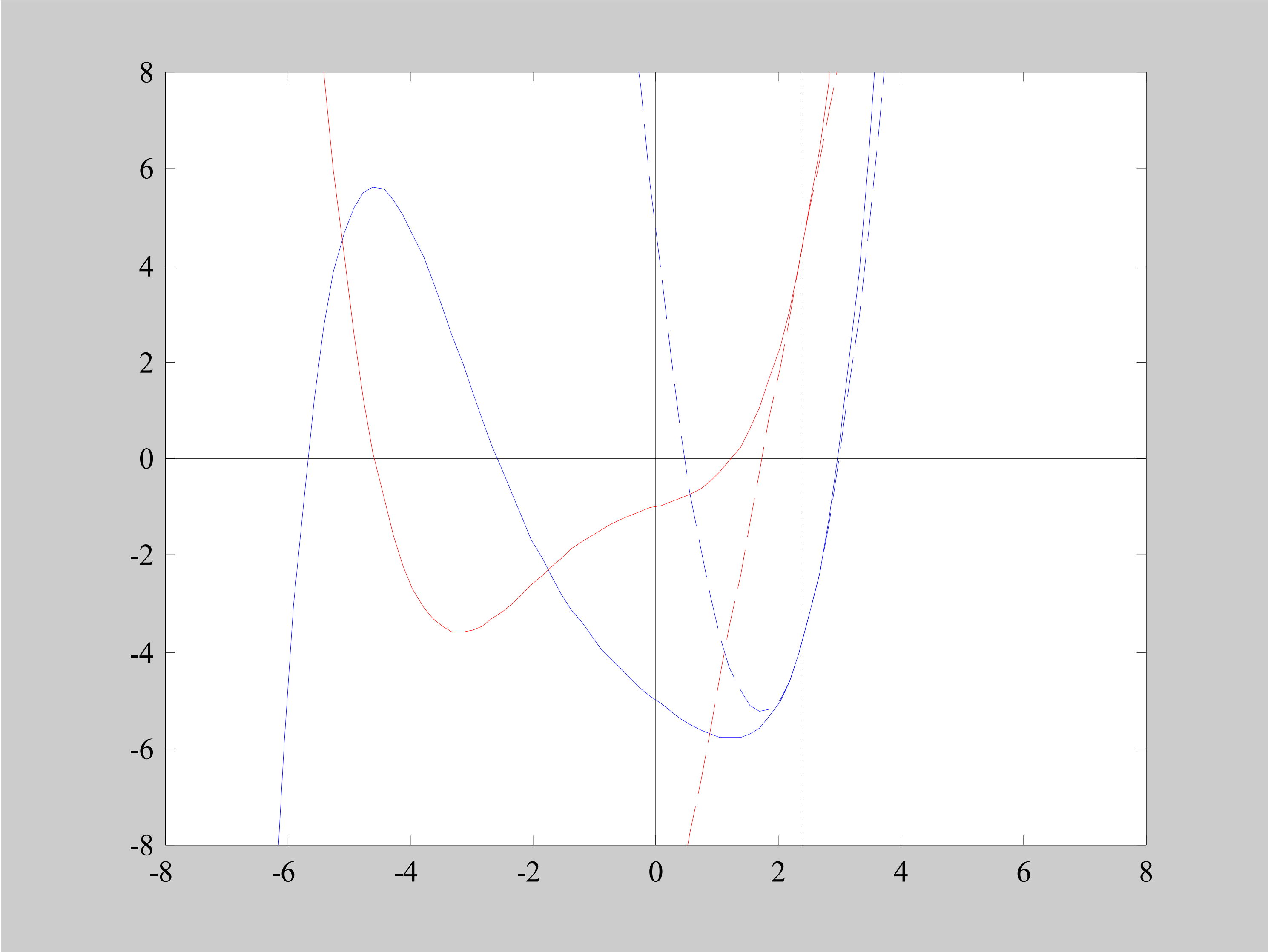
    $x_0 = -2$

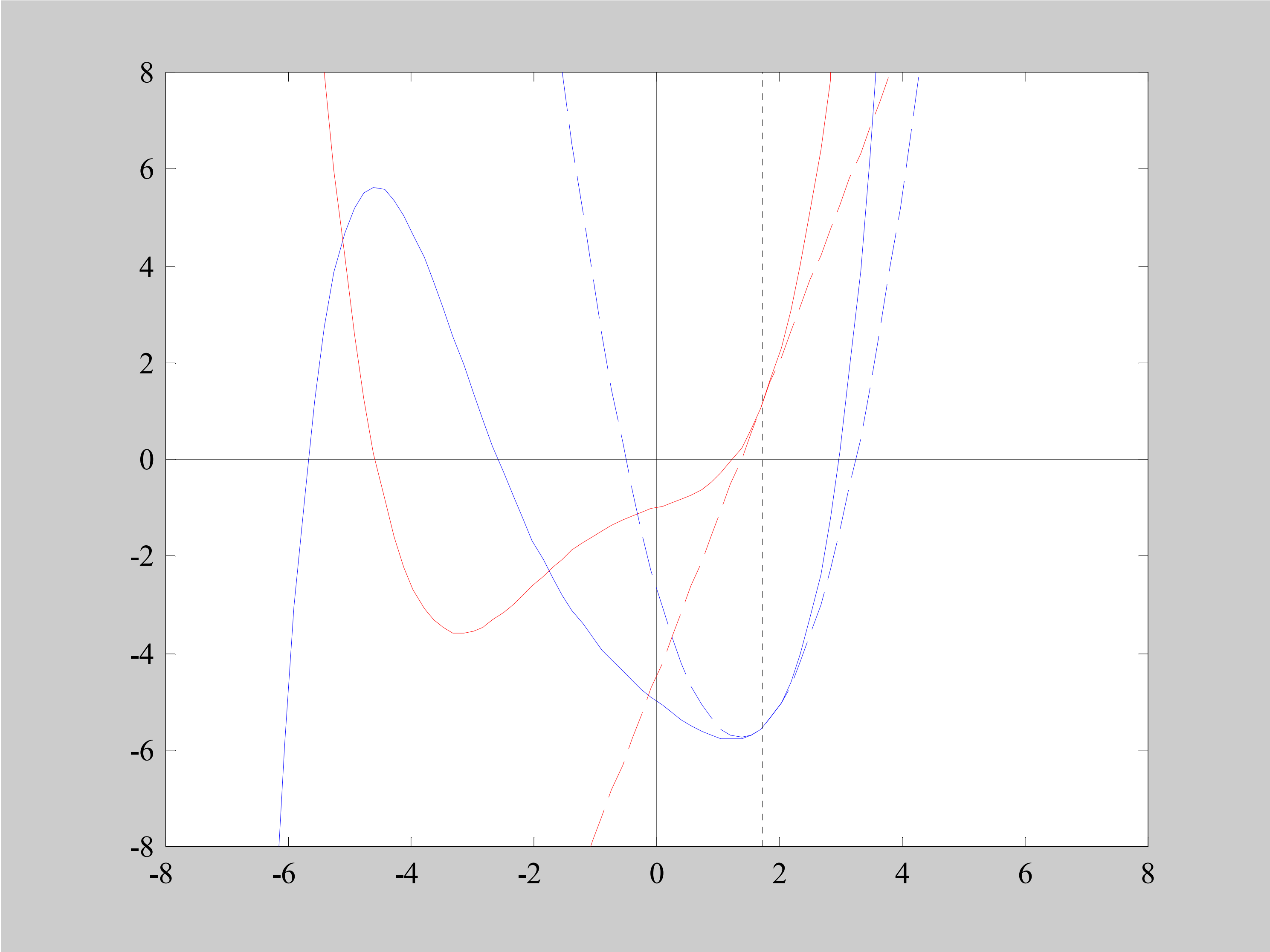

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8



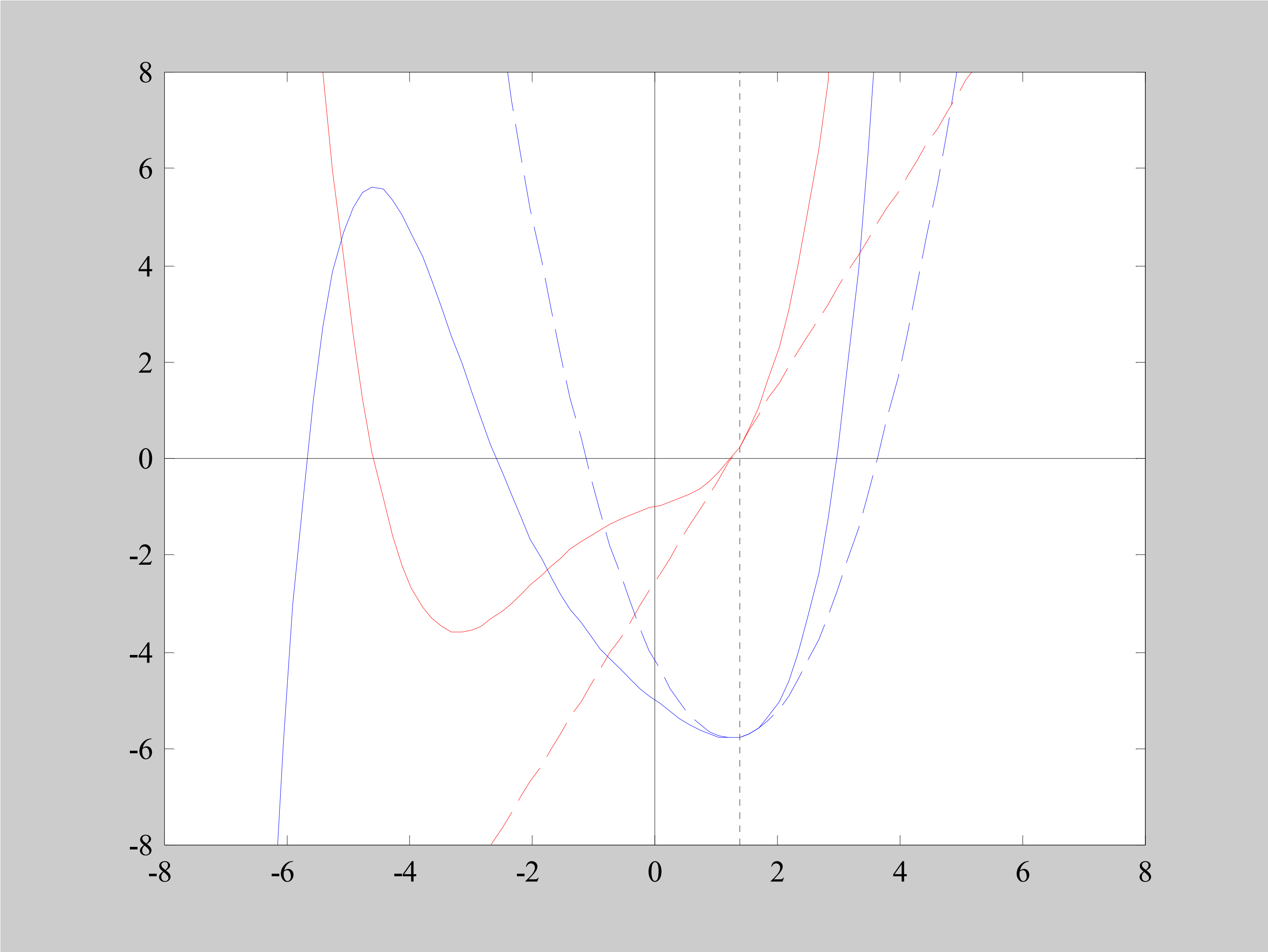
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

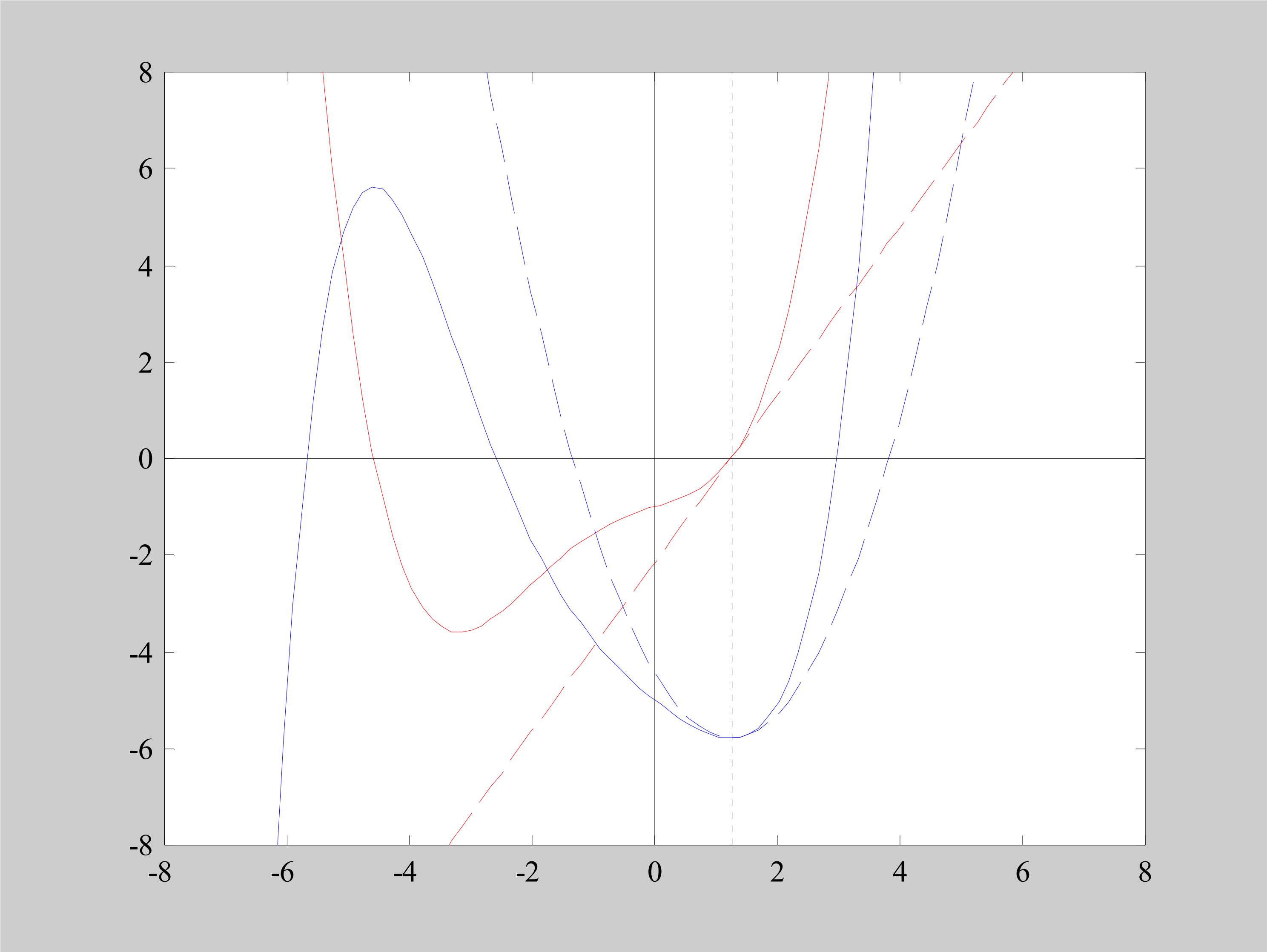

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

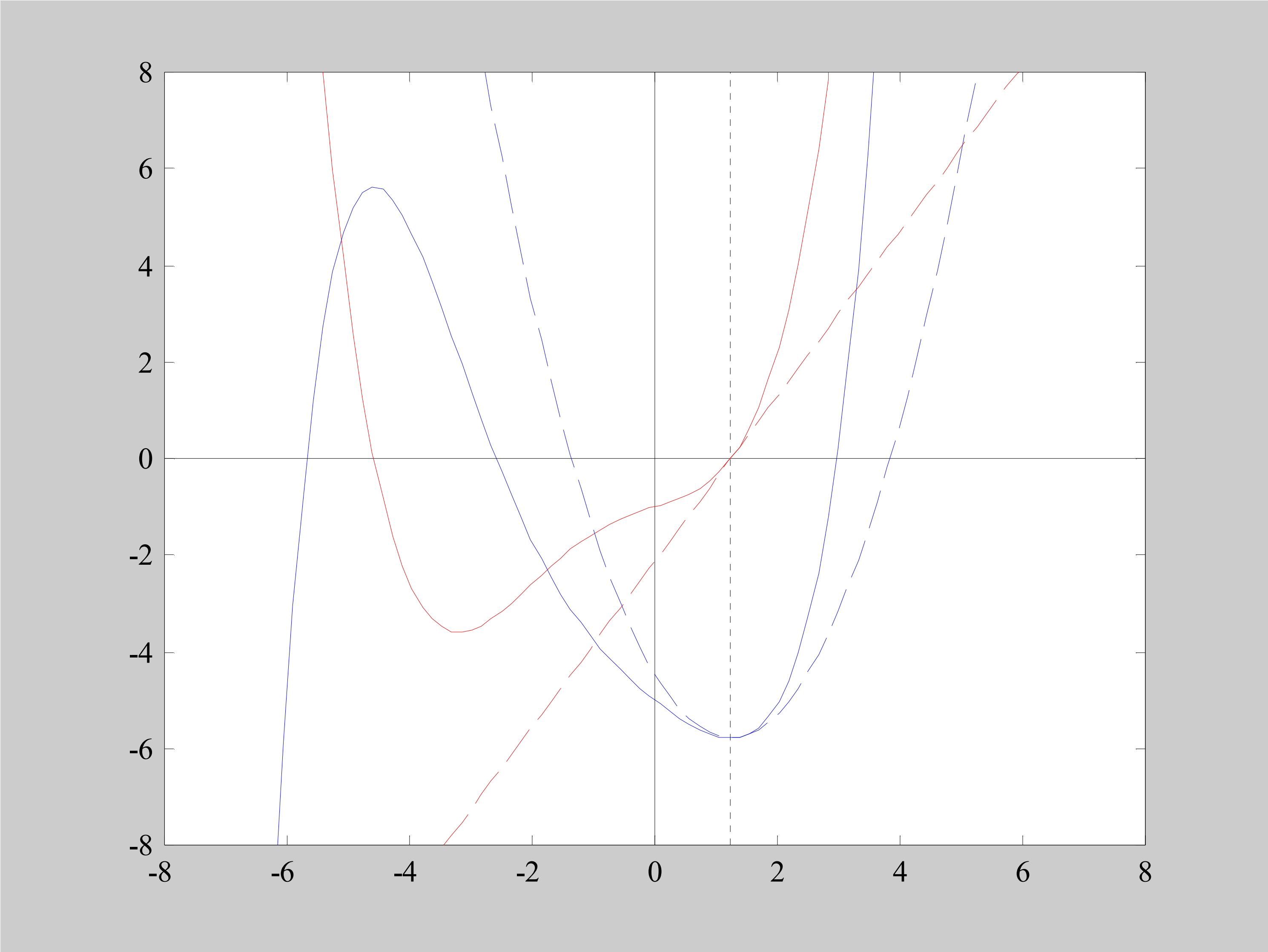

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

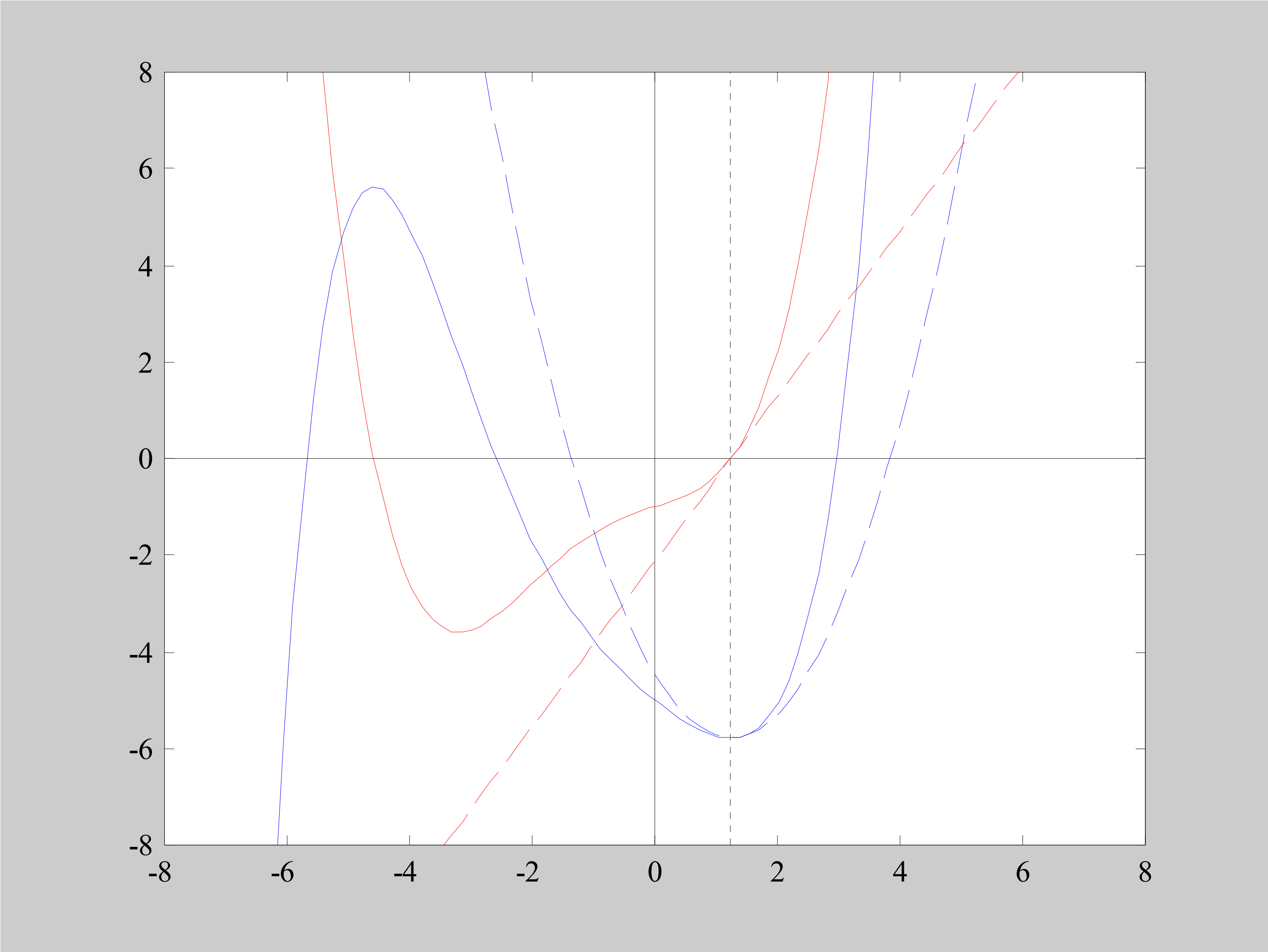


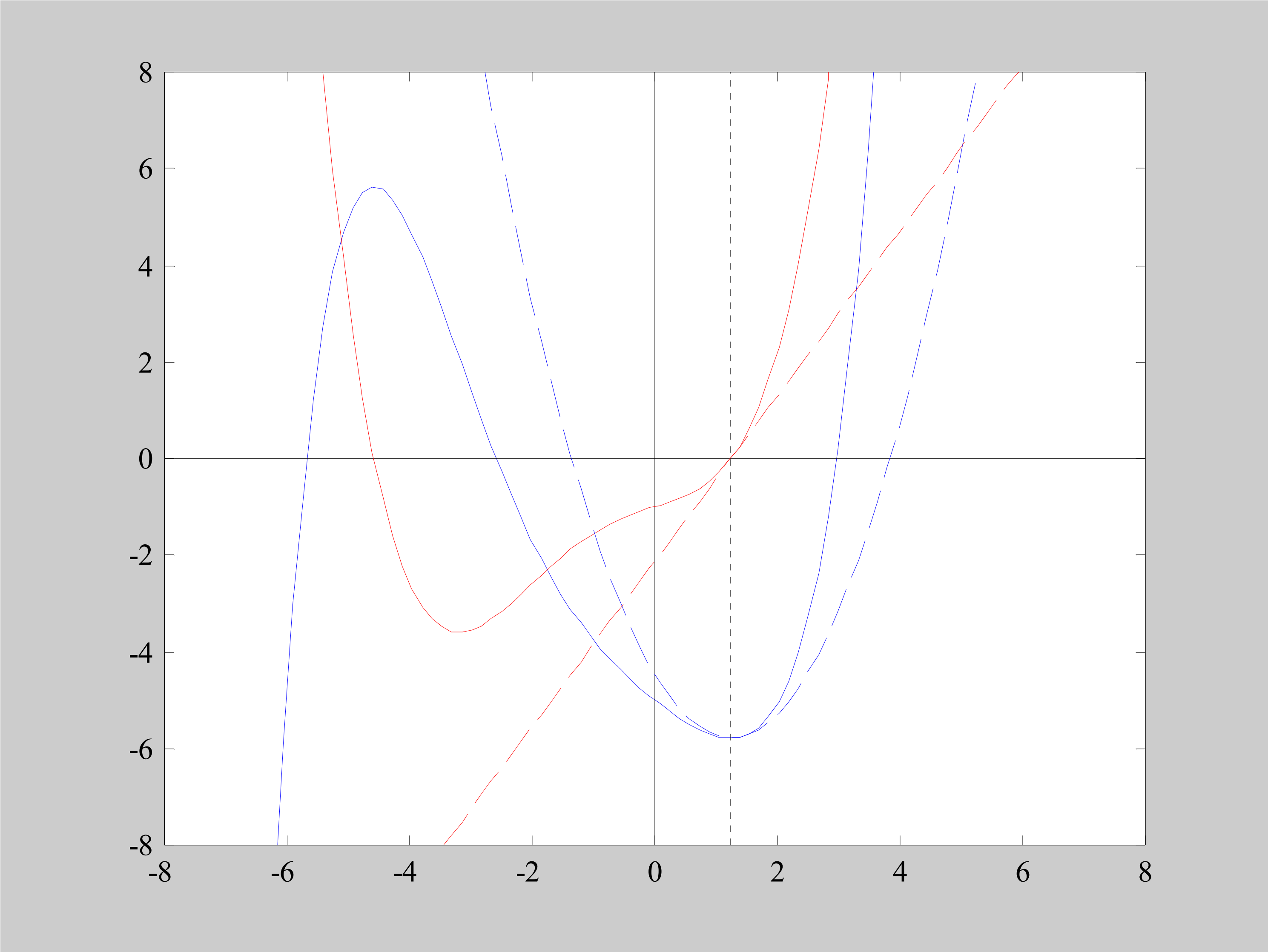
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

...