...

Robert Susmaga
Instytut Informatyki
ul. Piotrowo 2
Poznań

kontakt mail'owy
Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL
kontakt osobisty
Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

Autor

…

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Definicja wartości własnych macierzy kwadratowej
  - (powtarzalnymi) wartościami własnymi kwadratowej macierzy **A** nazywamy jej (powtarzalne) pierwiastki tzw. wielomianu charakterystycznego, czyli wielomianu $p(\lambda) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$
    - uwaga: macierz $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ nazywamy macierzą charakterystyczną macierzy **A**
  - macierz o rozmiarach nxn posiada
    - dokładnie n powtarzalnych wartości własnych
    - co najwyżej n niepowtarzalnych (unikalnych) wartości własnych
  - oznaczenia:
    - spec(**A**) – zbiór (niepowtarzalnych) wartości własnych (spektrum, widmo) macierzy **A**
    - eig(**A**) – wektor (powtarzalnych) wartości własnych macierzy **A**

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Przykłady:
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
    - spec(**A**) = {1, 4}
    - eig(**A**) = $[4, 1]^T$
  - $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
    - spec(**A**) = {2, 0}
    - eig(**A**) = $[2, 0, 0]^T$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Podstawowe właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ są rozwiązaniami równania $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0$
  - fakt, że λ_0 jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}$ oznacza, że
    - λ_0 jest pierwiastkiem wielomianu $p(\lambda_0) = \det(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I})$
    - $p(\lambda_0) = \det(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I}) = 0$
    - macierz $\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I}$ jest osobliwa
    - macierz $\mathbf{A}$ pod odjęciu wartości λ_0 od wszystkich elementów jej przekątnej jest osobliwa
  - fakt, że istnieje zerowa wartość własna macierzy $\mathbf{A}$, oznacza, że
    - macierz $\mathbf{A}-0\mathbf{I} = \mathbf{A}-\mathbf{O} = \mathbf{A}$ jest osobliwa, ponieważ $\det(\mathbf{A}-0\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}-\mathbf{O}) = \det(\mathbf{A}) = 0$
  - uwaga:
    - fakt, że $\det(\mathbf{A}) = 0$ nie implikuje, że wszystkie jej wartości własne są zerami!

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - cechy macierzy $\mathbf{A}_{nxn}$ takiej, że eig($\mathbf{A}$)=$[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]^T$
    - macierz **A** posiada ślad trace(**A**) = $\sum\lambda_k$
    - macierz **A** posiada wyznacznik det(**A**) = $\prod\lambda_k$
    - macierz **A** jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall$i: $\lambda_i \neq 0$
    - macierz **A** jest nieujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall$i: $\lambda_i \geq 0$
    - macierz **A** jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall$i: $\lambda_i > 0$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - wartości własne macierzy powstałych z macierzy $\mathbf{A}_{nxn}$ takiej, że eig($\mathbf{A}$)=$[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]^T$
    - wartości własne macierzy s$\mathbf{A}$: eig(s$\mathbf{A}$) = $[s\lambda_1, ..., s\lambda_k]^T$
    - wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ + z$\mathbf{I}$: eig($\mathbf{A}$ + z$\mathbf{I}$) = $[\lambda_1 + z, ..., \lambda_k + z]^T$
    - wartości własne macierzy $\mathbf{A}^{-1}$: eig($\mathbf{A}^{-1}$)=$[1/\lambda_1, 1/\lambda_2, ..., 1/\lambda_n]^T$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - jeżeli macierz o rozmiarach nxn jest rzeczywista, to
    - jej wartościami własnymi są zespolone wartości sprzężone c i c^H (dla c = a+bi c^H = a–bi)
      - konsekwencja rzeczywistości współczynników wielomianu charakterystycznego

      (liczba takich /sparowanych/ wartości jest więc zawsze parzysta; przy nieparzystym n co najmniej jedna z nich musi być rzeczywista /czyli: b = 0/)
    - jej wyznacznikiem jest wartość rzeczywista
      - kosekwencja rzeczywistości iloczynu zespolonych wartości sprzężonych

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - macierz $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ nazywamy hermitowską, gdy $\mathbf{M}^{H} = [(m_{ji})^{H}] = \mathbf{M}$
  - wartości własne rzeczywistej macierzy symetrycznej
    - 1) jeżeli macierz jest hermitowska, to jej wartości własne są rzeczywiste
    - 2) jeżeli macierz rzeczywista jest symetryczna, to jest hermitowska
    - wniosek z 1) i 2): wartości własne rzeczywistej macierzy symetrycznej są rzeczywiste
  - jeżeli macierz rzeczywista jest
    - symetryczna, to jej wartości własne są rzeczywiste
    - antysymetryczna, to jej niezerowe wartości własne są urojone

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  – (Weyl) jeżeli macierze **A** i **B** o rozmiarach nxn są rzeczywiste i symetryczne, a ich wartościami własnymi są (odpowiednio) $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_n$ oraz $\beta_1 \leq ... \leq \beta_n$, to **G** = **A** + **B** o rozmiarach nxn jest rzeczywista i symetryczna, a jej wartościami własnymi są γ_i spełniające
  $\alpha_i + \beta_1 \leq \gamma_i \leq \alpha_i + \beta_n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i + \min(\beta_i) \leq \gamma_i \leq \alpha_i + \max(\beta_i)$
  oraz
  $\beta_i + \alpha_1 \leq \gamma_i \leq \beta_i + \alpha_n \quad \Leftrightarrow \quad \beta_i + \min(\alpha_i) \leq \gamma_i \leq \beta_i + \max(\alpha_i)$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  – (Weyl) jeżeli macierze **A** i **B** o rozmiarach nxn są rzeczywiste...

eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$
eig(**B**): $[4, 5, 6]^T$: min(eig(**B**)) = 4, max(eig(**B**)) = 6
eig(**G**) = $[\langle 5,7\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 7,9\rangle]^T$

eig(**B**): $[4, 5, 6]^T$
eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$: min(eig(**A**)) = 1, max(eig(**A**)) = 3
eig(**G**) = $[\langle 5,7\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 7,9\rangle]^T$

eig(**G**) = $[\langle 5,7\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 7,9\rangle]^T$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - (Weyl) jeżeli macierze **A** i **B** o rozmiarach nxn są rzeczywiste...

eig(**A**): $[1, 2, 2]^T$
eig(**B**): $[4, 5, 6]^T$: min(eig(**B**)) = 4, max(eig(**B**)) = 6
eig(**G**) = $[\langle 5,7\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 6,8\rangle]^T$

eig(**B**): $[4, 5, 6]^T$
eig(**A**): $[1, 2, 2]^T$: min(eig(**A**)) = 1, max(eig(**A**)) = 2
eig(**G**) = $[\langle 5,6\rangle, \langle 6,7\rangle, \langle 7,8\rangle]^T$

eig(**G**) = $[\langle 5,6\rangle, \langle 6,7\rangle, \langle 7,8\rangle]^T$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - (Weyl) jeżeli macierze **A** i **B** o rozmiarach nxn są rzeczywiste...

eig(**B**): $[1, 1, 1]^T$
eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$: min(eig(**A**)) = 1, max(eig(**A**)) = 3
eig(**G**) = $[\langle 2,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,4\rangle]^T$

eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$
eig(**B**): $[1, 1, 1]^T$: min(eig(**B**)) = 1, max(eig(**B**)) = 1
eig(**G**) = $[\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle]^T$

eig(**G**) = $[\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle]^T$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - (Weyl) jeżeli macierze **A** i **B** o rozmiarach nxn są rzeczywiste...

    eig(**B**): $[1, 1, 1]^T$
    eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$: min(eig(**A**)) = 1, max(eig(**A**)) = 3
    eig(**G**) = $[\langle 2,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,4\rangle]^T$

    eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$
    eig(**B**): $[1, 1, 1]^T$: min(eig(**B**)) = 1, max(eig(**B**)) = 1
    eig(**G**) = $[\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle]^T$

    eig(**G**) = $[\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle]^T = [2, 3, 4]^T = [1+1, 2+1, 3+1]^T$
    - wartości własne macierzy **A** + z**I**: eig(**A** + z**I**) = $[\lambda_1 + z, ..., \lambda_k + z]^T$

Wartości własne macierzy kwadratowej

- Dalsze właściwości wartości własnych macierzy kwadratowej
  - (Weyl) jeżeli macierze **A** i **B** o rozmiarach nxn są rzeczywiste...

eig(**B**): $[1, 1, 1]^T$
eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$: min(eig(**A**)) = 1, max(eig(**A**)) = 3
eig(**G**) = $[\langle 2,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,4\rangle]^T$

eig(**A**): $[1, 2, 3]^T$
eig(**B**): $[1, 1, 1]^T$: min(eig(**B**)) = 1, max(eig(**B**)) = 1
eig(**G**) = $[\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle]^T$

eig(**G**) = $[\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle]^T = [2, 3, 4]^T = [1+1, 2+1, 3+1]^T$ = eig(**A**+1**I**) =
= eig(**A**+**B**), gdzie **B** = 1**I** = **I**, przy eig(**I**) = $[1, ..., 1]^T$

…

Rozwiązania układów równań liniowych

- Twierdzenie Kronecker'a-Capelli'ego
  - twierdzenie nie zajmuje się rozwiązywaniem układów, zamiast tego podaje warunki istnienia i jednoznaczności ich rozwiązań
  - niech dana będzie macierz $\mathbf{A}_{mxn}$ i wektor $\mathbf{b}_{mx1}$
    - jeżeli rank(**A**)<rank([**A b**]) to układ **Ax**=**b** jest sprzeczny
    - jeżeli rank(**A**)=rank([**A b**]) to układ **Ax**=**b** jest niesprzeczny, przy czym
      - jeżeli rank(**A**)=rank([**A b**])=n to układ jest oznaczony
      - jeżeli rank(**A**)=rank([**A b**])<n to układ jest nieoznaczony, a jego rozwiązanie wykorzystuje n–rank(**A**) różnych parametrów

Rozwiązania układów równań liniowych

- Do samego rozwiązywania układów można zastosować dowolne metody, np.:
  - metodę Cramer'a
  - metodę eliminacji
    - Gaussa
    - Gaussa-Jordana
  - metodę iteracyjną
    - Jacobi'ego
    - Gaussa–Seidla
  - itp.

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metody eliminacyjne
  - przykłady: metoda Gaussa, metoda Gaussa–Jordana
  - polegają na przekształcaniu równań za pomocą operacji elementarnych na macierzy [**A b**]
    - definicja operacji elementarnej: operacja, która nie zmienia rozwiązania układu równań
    - rodzaje operacji elementarnych:
      - OE#1: dodanie do pewnego wiersza macierzy [**A b**] innego wiersza tej macierzy przemnożonego przez dowolny skalar
      - OE#2: przemnożenie wiersza macierzy [**A b**] przez skalar różny od zera
      - OE#3: zamiana miejscami dwu wierszy macierzy [**A b**]

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metoda Gaussa
  - Bardzo popularna i skuteczna metoda rozwiązywania układów równań liniowych
  - Metoda wymaga dwóch faz:
    - faza I: wykorzystanie operacji elementarnych do wyzerowania wartości pod przekątną
    - faza II: ustalanie wartości zmiennych

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metoda Gaussa – przykład

  (1) $2x_1 - 1x_2 = 0$

  (2) $2x_1 + 1x_2 = 4$

  – faza I: zerowania elementów pod przekątną
    - OE#1: dodanie do równania (2) równania (1) pomnożonego przez –1

      (1) $2x_1 - 1x_2 = 0$

      (2) $0x_1 + 2x_2 = 4$

  – koniec fazy I (wszystkie elementy pod przekątną są zerowe)

  – faza II: ustalanie wartości zmiennych
    - (2) $0x_1 + 2x_2 = 4 \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$
    - (1) $2x_1 - 1x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metoda Gaussa –Jordana
  - Popularna i niemal równie skuteczna metoda rozwiązywania układów równań liniowych
  - Polega na przekształcaniu równań za pomocą operacji elementarnych na macierzy [**A b**]
  - Metoda polega na wykorzystaniu operacji elementarnych do wyzerowania wartości nad i pod przekątną i wyjedynkowania wartości na przekątnej

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metoda Gaussa –Jordana – przykład

  (1) $2x_1 - 1x_2 = 0$

  (2) $2x_1 + 1x_2 = 4$

  - OE#1: dodanie do równania (2) równania (1) pomnożonego przez –1

    (1) $2x_1 - 1x_2 = 0$

    (2) $0x_1 + 2x_2 = 4$

  - OE#1: dodanie do równania (1) równania (2) pomnożonego przez 1/2

    (1) $2x_1 + 0x_2 = 2$

    (2) $0x_1 + 2x_2 = 4$

  - OE#2 i OE#2: przemnożenie równania (1) przez 1/2 i przemnożenie równania (2) przez 1/2

    (1) $x_1 + 0x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

    (2) $0x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metody iteracyjne
  - Przykłady: metoda Jacobi'ego, metoda Gaussa–Seidla
  - Metody te wykorzystują przekształcenie:

    $\mathbf{x}_{(n)}=\mathbf{T}\mathbf{x}_{(n-1)}+\mathbf{c}$
  - wychodząc z początkowego x_0 metoda tworzy ciąg wartości:

    $x_1=\mathbf{T}\mathbf{x}_0+\mathbf{c}$, $x_2=\mathbf{T}\mathbf{x}_1+\mathbf{c}$, $x_3=\mathbf{T}\mathbf{x}_2+\mathbf{c}$, ...
    - kres tego ciągu – jeżeli istnieje – jest rozwiązaniem problemu
  - zbieżność: metoda jest zbieżna gdy $r(\mathbf{T})<1$
  - formalne rozwiązanie ciągu iteracyjnego: $\mathbf{x}=(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}\mathbf{c}$
  - metody utworzenie macierzy **T** i wektora **c**
    - tym zajmują się konkretne metody iteracyjne

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metoda iteracyjna Jacobie'ego
  - wzór na **T** i **c**
  - niech **D**, **L** i **U** będą odpowiednio macierzami: diagonalną, dolno-trójkątną i górno-trójkątną macierzy **A** układu **Ax**=**b**
  - wtedy:

$$(\mathbf{D}+\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x}+(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x}=-(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}+\mathbf{b} \quad // \ \mathbf{D}^{-1}$$

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}=-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}=-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metoda iteracyjna Jacobie'ego c.d.:
  - równanie

    $\mathbf{x}=-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

    można wykorzystać do utworzenia zależności:

    $\mathbf{x}_{(n)}=-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}_{(n-1)}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$
  - daje to schemat iteracyjny $\mathbf{x}_{(n)}=\mathbf{T}\mathbf{x}_{(n-1)}+\mathbf{c}$ w którym:

    $\mathbf{T}=-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$

    $\mathbf{c}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$
  - metoda ta jest zbieżna gdy $r(-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}))<1$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Metoda iteracyjna Gauss'a–Seidla
  - Wzór na **T** i **c**

    $(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}_{(n)}+\mathbf{U}\mathbf{x}_{(n-1)}=\mathbf{b}$

    $(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}_{(n)}=-\mathbf{U}\mathbf{x}_{(n-1)}+\mathbf{b}$ // $(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}$

    $(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}_{(n)}=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}_{(n-1)}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$

    $\mathbf{x}_{(n)}=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}_{(n-1)}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$
  - daje to schemat iteracyjny $\mathbf{x}_{(n)}=\mathbf{T}\mathbf{x}_{(n-1)}+\mathbf{c}$ w którym:

    $\mathbf{T}=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$

    $\mathbf{c}=(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$
  - zbieżna gdy $r(-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U})<1$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Rozwiązania układów jednorodnych
  - Układem jednorodnym nazywa się układ **Ax**=**0**
    - każdy układ jednorodny posiada co najmniej jedno rozwiązanie
      - rozwiązaniem jednorodnego układu równań **x**=**0**, czyli tzw. rozwiązanie zerowe
      - **x**=**0** jest rozwiązaniem, ponieważ dla każdej macierzy **A** zachodzi **A0**=**0**
  - Zachodzi pytanie, czy oprócz rozwiązania zerowego układ jednorodny posiada inne rozwiązania?
    - odpowiedź dla macierzy kwadratowych $\mathbf{A}_{mxm}$
      - warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ jednorodny miał rozwiązania niezerowe jest det(**A**)=0
    - odpowiedź dla dowolnych macierzy $\mathbf{A}_{mxn}$
      - warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ jednorodny miał rozwiązania niezerowe jest rank(**A**)<n

Rozwiązania układów równań liniowych

- Przykład układu sprzecznego

  $2x_1 - 1x_2 = 0$

  $2x_1 - 1x_2 = 2$

- Przykład układu oznaczonego

  $2x_1 - 1x_2 = 0$

  $2x_1 + 1x_2 = 4$

- Przykład układu nieoznaczonego

  $2x_1 - 1x_2 = 3$

  $2x_1 - 1x_2 = 3$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Parametryczne rozwiązania układów równań

Rozwiązania układów równań liniowych

- Jak wiadomo, pomiędzy oznaczonymi a nieoznaczonymi układami równań występują
  - podobieństwa:
    - oba układy mają rozwiązania
  - różnice:
    - liczba rozwiązań układów oznaczonych jest skończona a układów nieoznaczonych jest nieskończona
- W czym przejawiają się różnice podczas rozwiązywania układów równań oznaczonych a nieoznaczonych?

Rozwiązania układów równań liniowych

- Przykład: algebraiczne rozwiązanie układu oznaczonego

  (1) $2x_1 – 1x_2 = 0$

  (2) $2x_1 + 1x_2 = 4$

  – z (2) wynika, że:

  (2) $x_2 = 4 – 2x_1$

  – co po podstawieniu do (1) daje:

  (1) $2x_1 – 1(4 – 2x_1) = 0 \Rightarrow 2x_1 – 4 + 2x_1 = 0 \Rightarrow 4x_1 – 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

  – ostatecznie otrzymujemy:

  (2) $x_2 = 4 – 2x_1 \Rightarrow x_2 = 4 – 2 \Rightarrow x_2 = 2$

  – rozwiązanie

  $x_1 = 1$

  $x_2 = 2$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Przykład: algebraiczne rozwiązanie układu nieoznaczonego

  (1) $2x_1 – 1x_2 = 3$

  (2) $2x_1 – 1x_2 = 3$

  – z (2) wynika, że:

  (2) $x_2 = 2x_1 – 3$

  – co po podstawieniu do (1) daje:

  (1) $2x_1 – 1(2x_1 – 3) = 3 \Rightarrow 2x_1 – 2x_1 + 3 = 3 \Rightarrow 3 = 3$

  – wskutek wyzerowania się współczynnika przy zmiennej x_1 otrzymujemy równanie, które jest zawsze prawdziwe (3=3)

    - oznacza to, że równanie to będzie prawdziwe bez względu na wartość zmiennej x_1

Rozwiązania układów równań liniowych

- Przykład: algebraiczne rozwiązanie układu nieoznaczonego c.d.:
  - ostatecznie otrzymujemy wniosek, że dowolna wartość zmiennej x_1 jest elementem prawidłowego rozwiązania tego układu
  - ponieważ jednak rozwiązaniem układu jest wektor dwóch liczb $[x_1, x_2]$ (a nie jedna liczba x_1) powstaje pytanie:
    czy rozwiązaniem układu jest dowolny wektor $[x_1, x_2]$?
    - odpowiedź: nie!
      np. wektor [2 5] nie jest rozwiązaniem, ponieważ:

      (1) $2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \neq 3$

      (2) $2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \neq 3$
    - A jednak rozwiązania układu istnieją!
      np. wektor [5 7] jest rozwiązaniem, ponieważ:

      (1) $2 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 3$

      (2) $2 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 3$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Powstaje pytanie: jak zapisywać rozwiązania układów, w których pewne wartości mogą być dowolne a inne nie?
  - i dodatkowo: jak określać wartości tych innych zmiennych?
- Odpowiedź: rozwiązania parametryczne
  - rozwiązań parametrycznych jest nieskończenie wiele jednak wskutek zależności zachodzących pomiędzy zmiennymi nie każdy wektor jest rozwiązaniem takiego układu
    - rozwiązaniem jest tylko taki wektor, którego elementy spełniają odpowiednie zależności
    - specyfiką parametrycznego rozwiązywania układów równań jest zapisywanie zależności, które muszą być spełniane przez elementy rozwiązania

Rozwiązania układów równań liniowych

- Idea: usunięcie równań zależnych
  - ponieważ poniższy układ dwu równań liniowych zawiera w rzeczywistości jedno równanie (ale powtórzone dwa razy) należy z niego usunąć wszystkie (zbędne) powtórzenia
  - powstaje jedno równanie z dwoma niewiadomymi

    $2x_1 – 1x_2 = 3$
- W rezultacie jego przekształcenia otrzymujemy
  - zależność na x_2:

    $x_2 = 2x_1 – 3$
  - zależność na x_1:

    $x_1 = 3/2 + 1/2x_2$

  (obie te zależności wyraża oryginalne równanie)

    $2x_1 – 1x_2 = 3$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Rozwiązania parametryczne układu:
  - jedno równanie z dwoma niewiadomymi:

    $2x_1–1x_2=3$
  - wiedząc, że w postaci $x_2=2x_1–3$ tylko na x_2 nałożona jest zależność (a x_1 jest niezależne), pod x_1 możemy podstawić dowolną wartość
    - wartość tę oznaczamy przez α, co daje:
    - $x_1=\alpha$ (x_1 zależy tylko od parametru)
  - wtedy:

    $x_2=2x_1–3=2\alpha–3$
  - ostateczne rozwiązanie jest więc wektorem postaci:

    $[\alpha, 2\alpha–3]^T$

    gdzie α jest dowolną wartością rzeczywistą

Rozwiązania układów równań liniowych

- Sprawdzenie rozwiązania:
  - oczywiście istnieje nieskończenie wiele takich wektorów:
  - przy czym każdy jest rozwiązaniem, np.:
    - dla $\alpha=1$: $[1, -1]^T$
    - dla $\alpha=5$: $[5, 7]^T$
    - itd.
  - jako rozwiązanie każdy z nich spełnia wyjściowe równanie:
    - $2\cdot 1-1\cdot(-1)=3$
    - $2\cdot 5-1\cdot 7=3$
    - itd.
  - rozwiązanie można zweryfikować także w postaci parametrycznej:

    $2\cdot\alpha-1(2\alpha-3)=2\cdot\alpha-2\alpha+3=3$

Rozwiązania układów równań liniowych

- Oczywiście rozwiązanie parametryczne można także utworzyć wychodząc od zależności:

  $x_1=3/2+1/2x_2$

  – wtedy pod x_2 możemy podstawić dowolną wartość
    - wartość tę oznaczamy przez β, co daje:
    - $x_2=\alpha$

  – wtedy:

  $x_1=3/2+1/2x_2=3/2+1/2\alpha$

  – ostateczne rozwiązanie jest więc wektorem postaci:

  $[3/2+1/2\alpha, \alpha]^T$

  gdzie α jest dowolną wartością rzeczywistą

Rozwiązania układów równań liniowych

- Pomimo różnic postaci wektory $[\alpha, 2\alpha–3]^T$ oraz $[3/2+1/2\alpha, \alpha]^T$ reprezentują to samo rozwiązanie
  - dla $\alpha=–1$ otrzymujemy $[1, –1]^T$
  - dla $\alpha=7$ otrzymujemy $[5, 7]^T$
  - itd.
- Uwaga: pomimo faktu, że istnieją dwie różne postaci rozwiązania parametrycznego, normalne rozwiązanie układu równań nieoznaczonych wymaga znalezienia tylko jednego (dowolnego) z nich
  - rozwiązując można przekształcać dowolne równania (i w dowolnej kolejności)

Rozwiązania układów równań liniowych

- Powyższy przykład dotyczył jedynie dwóch równań, metoda rozwiązywania parametrycznego może być jednak zastosowana do rozwiązywania dowolnych układów nieoznaczonych
- O istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układów równań decyduje twierdzenie Kronecker'a-Capelli'ego
  - dla danej macierzy $\mathbf{A}_{mxn}$ i wektora $\mathbf{b}_{mx1}$
    - jeżeli rank(**A**)<rank([**A b**]) to układ **Ax**=**b** jest sprzeczny
      - brak rozwiązań układu
    - jeżeli rank(**A**)=rank([**A b**])=n to układ jest oznaczony
      - istnieje jedno rozwiązanie tego układu
    - jeżeli rank(**A**)=rank([**A b**])<n to układ jest nieoznaczony
      - istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego układu
      - rozwiązania te wykorzystują n–rank(**A**) różnych parametrów

Rozwiązania układów równań liniowych

- Drugi przykład: algebraiczne rozwiązanie układu nieoznaczonego

  (1) $1x_1 – 1x_2 + 3x_3 = 5$

  (2) $2x_1 + 1x_2 – 5x_3 = 7$

  – z (1) wynika, że:

  $x_1 = 5 + 1x_2 – 3x_3$

  – co po podstawieniu do (2) daje:

  (2) $2(5 + 1x_2 – 3x_3) + 1x_2 – 5x_3 = 7 \Rightarrow 10 + 2x_2 – 6x_3 + 1x_2 – 5x_3 = 7 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 3x_2 – 11x_3 = –3 \Rightarrow x_2 = –1 + 11/3x_3$

  – powstałe równania wskazują, że:
    - x_1 zależy od x_2 i x_3
    - x_2 zależy od x_3
    - x_3 jest niezależna (zostanie uzależniona tylko od parametru)

Rozwiązania układów równań liniowych

- Drugi przykład: algebraiczne rozwiązanie układu nieoznaczonego c.d.:

  $x_3=\alpha$

  $x_2=–1+11/3\alpha$

  $x_1=5+1(–1+11/3\alpha)–3\alpha=5–1+11/3\alpha–3\alpha=4+11/3\alpha–9/3\alpha=4+2/3\alpha$

  – rozwiązaniem jest wektor postaci:

  $[4+2/3\alpha, –1+11/3\alpha, \alpha]^T$

  gdzie α jest dowolną wartością rzeczywistą

- Konkretne rozwiązania:
  – dla $\alpha=3$: $[6, 10, 3]^T$
  – dla $\alpha=0$: $[4, –1, 0]^T$
  – itd.

Rozwiązania układów równań liniowych

- Trzeci przykład: algebraiczne rozwiązanie układu nieoznaczonego

  (1) $1x_1+2x_2+1x_3+3x_4=10$

  (2) $1x_1+0x_2-5x_3-1x_4=12$

  – z (1) wynika, że:

  $x_1=10-2x_2-1x_3-3x_4$

  – co po podstawieniu do (2) daje:

  (2) $1(10-2x_2-1x_3-3x_4)+0x_2-5x_3-1x_4=12 \Rightarrow$

  $\Rightarrow -2x_2-6x_3-4x_4=2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x_2=-1-3x_3-2x_4 \Rightarrow$

  – powstałe równania wskazują, że:
    - x_1 zależy od x_2, x_3 i x_4
    - x_2 zależy od x_3 i x_4
    - x_3 i x_4 są niezależne (zostaną uzależniona od parametrów)

Rozwiązania układów równań liniowych

- Trzeci przykład: algebraiczne rozwiązanie układu nieoznaczonego c.d.:

  $x_4=\alpha$

  $x_3=\beta$

  $x_2=-1-2\alpha-3\beta$

  $x_1=10-2x_2-1x_3-3x_4=10+2+6\beta+4\alpha-\beta-3\alpha=12+\alpha+5\beta$

  – rozwiązaniem jest wektor postaci:

  $[12+\alpha+5\beta, -1-2\alpha-3\beta, \beta, \alpha]^T$

  gdzie α i β są dowolnymi wartościami rzeczywistymi

- Konkretne rozwiązania:
  – dla $\alpha=1$, $\beta=5$: $[38, -18, 5, 1]^T$
  – dla $\alpha=2$, $\beta=-2$: $[4, 1, -2, 2]^T$
  – itd.

…

Przekształcenie niezmiennicze wektora

- Niech
  - **x** będzie wektorem n-elementowym
  - **A** – macierzą o wymiarach nxn
- Operacja **Ax** przekształca **x** w pewien inny wektor **y** (czyli **Ax** = **y**)
- Problem przekształcenia niezmienniczego:
  - pytanie: czy dla danej macierzy **A** istnieją takie wektory **x**, że **Ax** = **x**?
    - uwaga: jest jasne, że dla macierzy jednostkowej **I** i dowolnego wektora **x** zachodzi: **Ix** = **x**, stawiane pytanie dotyczy jednakże dowolnej macierzy **A**
  - odpowiedź: tak, dla każdej macierzy **A** istnieje wektor **x** taki, **Ax** = **x**, jest nim **x** = **0** (ponieważ dla każdej macierzy **A** zachodzi: **A0** = **0**)
    - komentarz: jest to rozwiązanie trywialne

Przekształcenie niezmiennicze wektora

- Pytanie: czy istnieją zatem nietrywialne rozwiązania powyższego problemu, a więc takie niezerowe wektory, których przemnożenie przez macierz **A** przekształca je na nie same? A konkretniej:
  - czy istnieją takie wektory **x** ≠ **0**, że **Ax** jest równe **x**, czyli **Ax** = **x**?
- Dla macierzy **A** z poprzedniego przykładu:
  - wektory nie będące rozwiązaniami problemu niezmienniczego:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Przekształcenie niezmiennicze wektora

- Pytanie: czy istnieją zatem <u>nietrywialne</u> rozwiązania powyższego problemu, a więc takie niezerowe wektory, których przemnożenie przez macierz **A** przekształca je na nie same? A konkretniej:
  - czy istnieją takie wektory $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, że $\mathbf{Ax}$ jest równe $\mathbf{x}$, czyli $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$?
- Dla macierzy **A** z poprzedniego przykładu:
  - wektory będące rozwiązaniami problemu niezmienniczego:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Przekształcenie niezmiennicze wektora

- Okazuje się, że macierz może przekształcać niezerowy wektor **x** na wektor proporcjonalny do **x** (różniący się od **x** pewną niezerową stałą, czyli współliniowy z **x**)
- Aby poszukiwać tak przekształcanych wektorów problem przekształcenia niezmienniczego można uogólnić do postaci:
  - czy istnieją takie wektory $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, że $\mathbf{Ax}$ jest proporcjonalne do **x**, czyli $\mathbf{Ax} = s\mathbf{x}$? (gdzie s jest różnym od zera skalarem)

Przekształcenie niezmiennicze wektora

- Pytanie: czy istnieją zatem nietrywialne rozwiązania powyższego problemu, a więc takie niezerowe wektory, których przemnożenie przez macierz **A** przekształca je na ich inne wersje? A konkretniej:
  - czy istnieją takie wektory $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, że $\mathbf{Ax}$ jest równe s$\mathbf{x}$, czyli $\mathbf{Ax}$ = s$\mathbf{x}$?
- Dla macierzy **A** z poprzedniego przykładu:
  - wektory będące rozwiązaniami problemu niezmienniczego:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Przekształcenie niezmiennicze wektora

- Zakładając, że $\mathbf{k}=[k_1,k_2, ..., k_n]^T$, rozwiązania „ścisłego” problemu przekształcenia niezmienniczego można poszukiwać zapisując i rozwiązując równanie:

  $\mathbf{Ak} = \mathbf{k}$

  lub równoważną mu postać:

  $(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{0}$
- Podobnie, rozwiązania problemu przekształcenia proporcjonalnościowego można poszukiwać rozwiązując:

  $\mathbf{Ak} = s\mathbf{k}$

  lub równoważną mu postać:

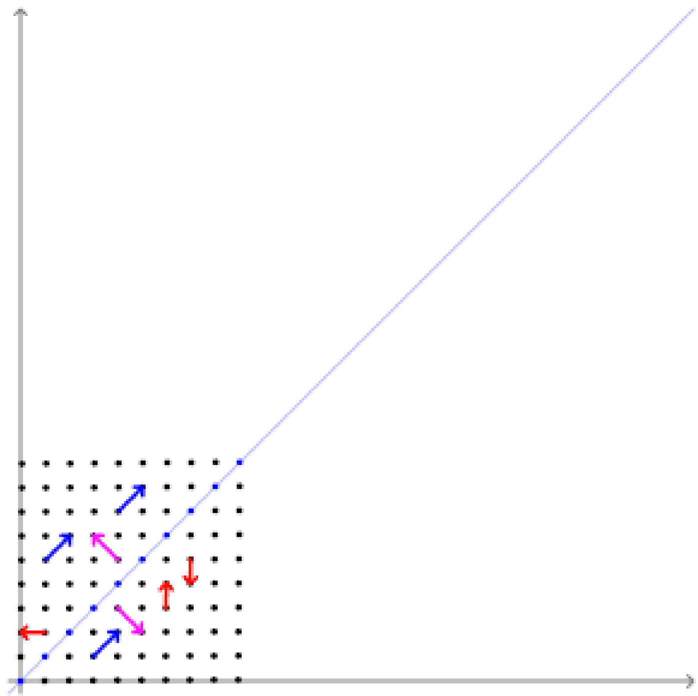
  $(\mathbf{A}-\mathbf{I}s)\mathbf{k} = \mathbf{0}$
- Jeżeli w powyższym równaniu za współczynnik proporcjonalności s przyjmie się wartość własną λ macierzy, to niezerowe rozwiązanie tego równania nazywa się wektorem własnym macierzy (odpowiadającym wartości własnej λ)

Wektory własne macierzy

- Ponieważ każda macierz o rozmiarze nxn posiada co najwyżej n (niekoniecznie różnych) wartości własnych, to oznacza to, że macierz ta posiada także co najwyżej n (niekoniecznie różnych) wektorów własnych
- Wektor własny macierzy to taki niezerowy wektor, który w wyniku przemnożenia przez tę macierz ulega przekształceniu na wektor proporcjonalny do samego siebie (a więc nie zmienia „kierunku” /choć może zmienić długość/)
  - współczynnikami proporcjonalności są odpowiednie wartości własne macierzy
  - jeżeli jedna z wartości własnych macierzy jest równa 1, to istnieje wektor własny tej macierzy, który w wyniku przemnożenia przez tę macierz nie ulega zmianie (przekształcenie identycznościowe)

Wektory własne macierzy

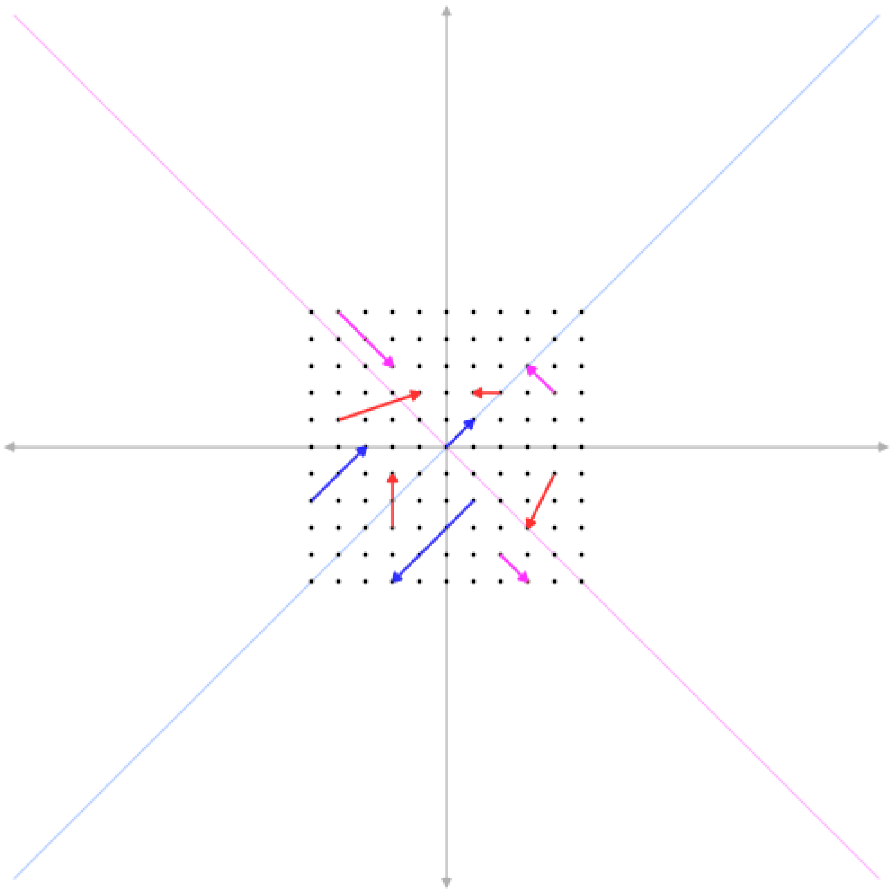
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eigenvectors.gif

Wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eigenvectors-extended.gif

Właściwości wektorów własnych

- Wektory własne są niezerowymi rozwiązaniami następującego równania:

  (**A**–**I**λ)**k** = **0** (gdzie λ jest wartością własną macierzy **A**)

  co pociąga za sobą następujące konsekwencje:

  – jeżeli **k** jest wektorem własnym, to jest nim także każdy wektor postaci s**k**, gdzie s jest niezerowym skalarem (współczynnikiem proporcjonalności)

  – ponieważ wartości własne λ macierzy są tak dobrane, aby wyznacznik macierzy **A**–**I**λ wynosił 0, to rozwiązanie **k** równania (**A**–**I**λ)**k** = **0** jest określone niejednoznacznie (istnieje wiele takich rozwiązań)

Obliczanie wektorów własnych -- przykład

- Przykład
  - λ_1 = 1, lewe strony równań

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\lambda_1\right)\cdot\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot 1\right)\cdot\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k_1+k_2\\2k_1+k_2\end{bmatrix}$$

  - układ równań:

    $2k_1+k_2 = 0$

    $2k_1+k_2 = 0$
  - rozwiązanie (parametryczne, parametr α)

    $k_1 = \alpha$

    $k_2 = -2k_1$
  - odpowiadający wektor własny -- każdy wektor postaci: $\begin{bmatrix}\alpha\\-2\alpha\end{bmatrix}$

Obliczanie wektorów własnych -- przykład

- Przykład (c.d.)
  - λ_1 = 4, lewe strony równań

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\lambda_1\right)\cdot\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot 4\right)\cdot\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1+k_2\\ 2k_1-2k_2\end{bmatrix}$$

  - układ równań:

    $-k_1+k_2 = 0$

    $2k_1-2k_2 = 0$
  - rozwiązanie (parametryczne, parametr β)

    $k_1 = \beta$

    $k_2 = k_1$
  - odpowiadający wektor własny -- każdy wektor postaci: $\begin{bmatrix}\beta\\ \beta\end{bmatrix}$

Obliczanie wektorów własnych -- przykład

- Rozwiązanie (postać ogólna)
  - wektor własny odpowiadający wartości λ_1=1: $\begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix}$
  - wektor własny odpowiadający wartości λ_1=4: $\begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix}$
- Rozwiązanie (postać szczególna dla α=1, β=1)
  - wektor własny odpowiadający wartości λ_1=1: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
  - wektor własny odpowiadający wartości λ_1=4: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

…