...

Robert Susmaga
Instytut Informatyki
ul. Piotrowo 2
Poznań

<u>kontakt mail'owy</u>
Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL
<u>kontakt osobisty</u>
Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

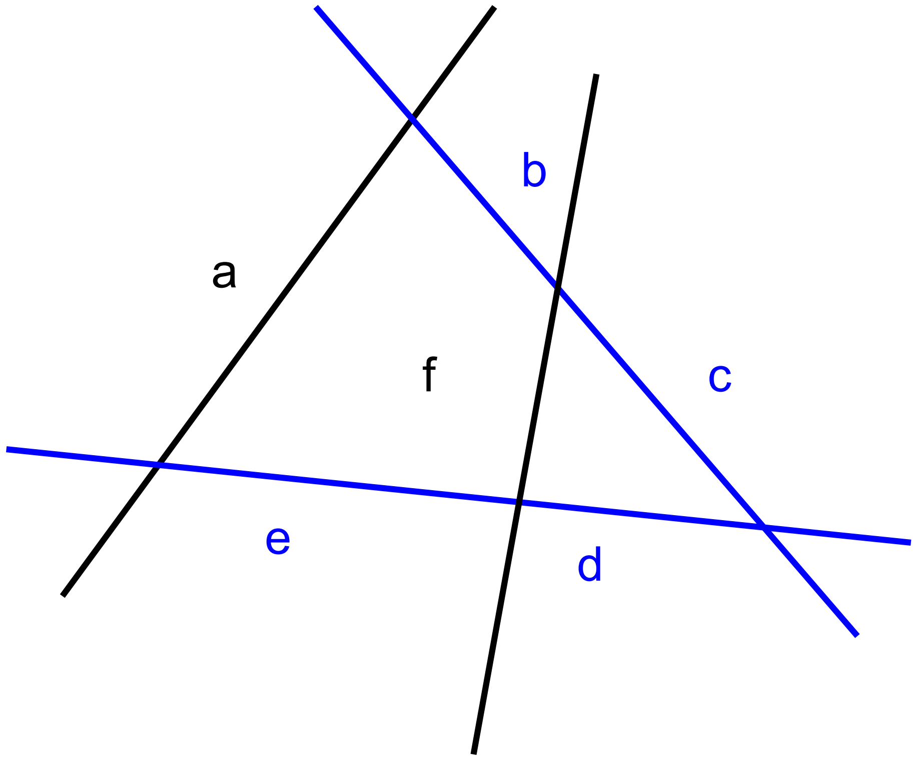
Autor

...

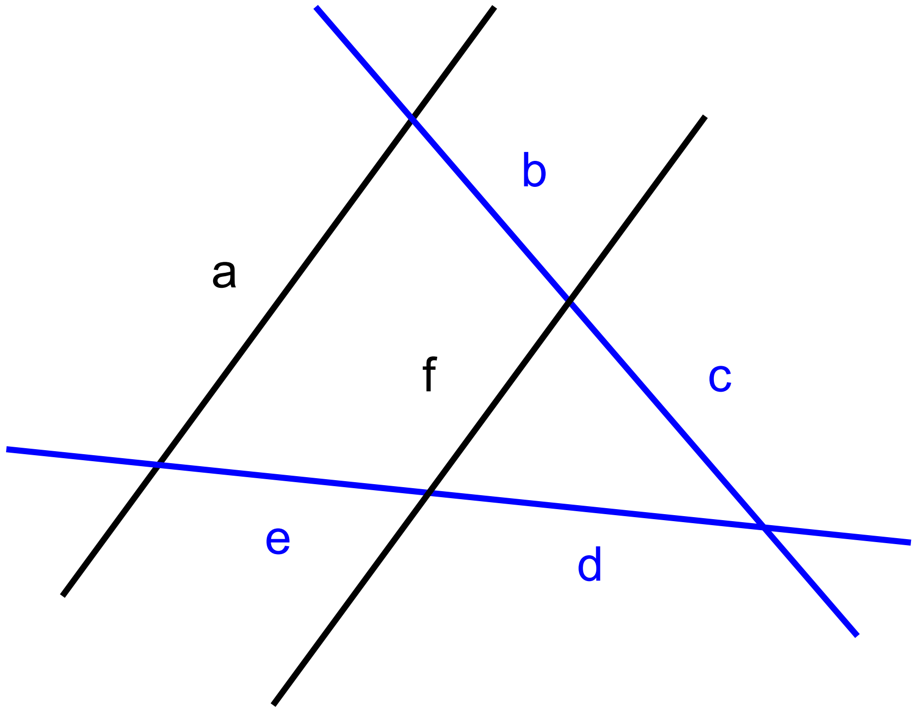
Barycentryczny układ współrzędnych

- Twierdzenie Talesa

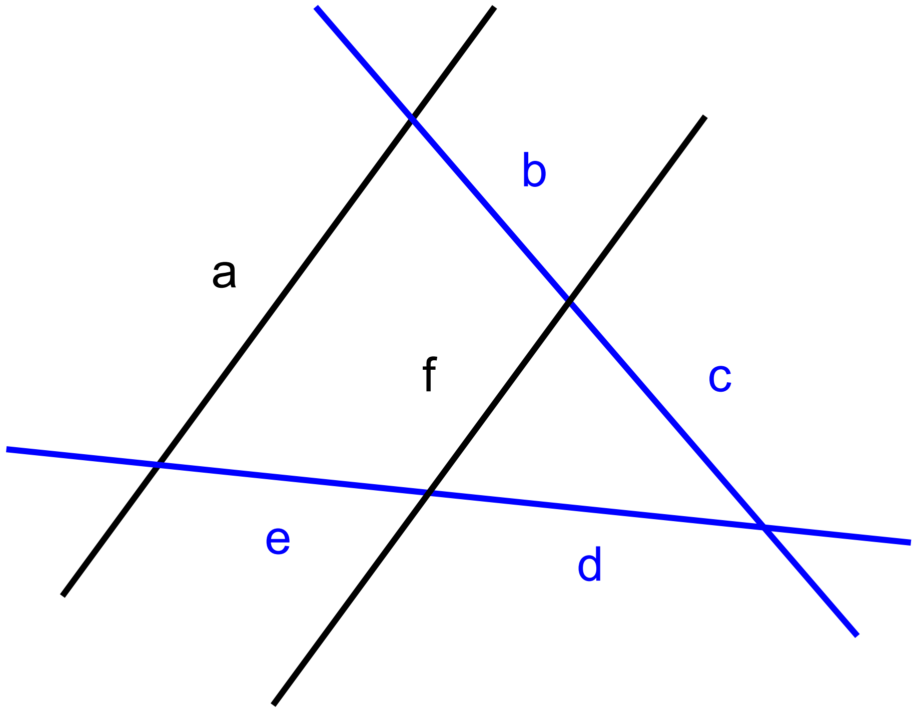
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

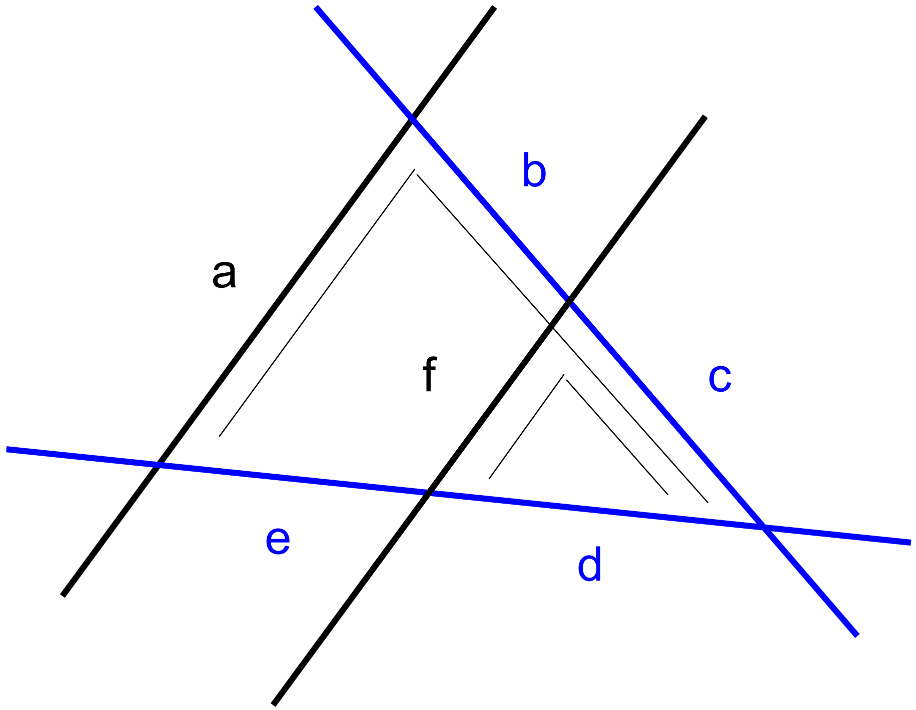


Barycentryczny układ współrzędnych



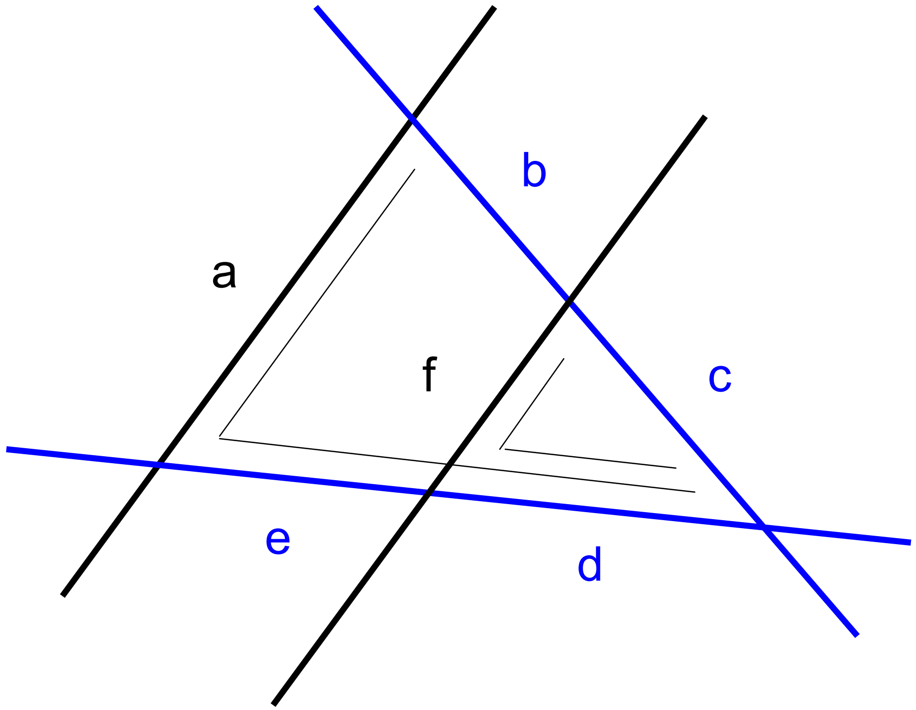
- Jeżeli czarne linie są równoległe, to zachodzi:

Barycentryczny układ współrzędnych



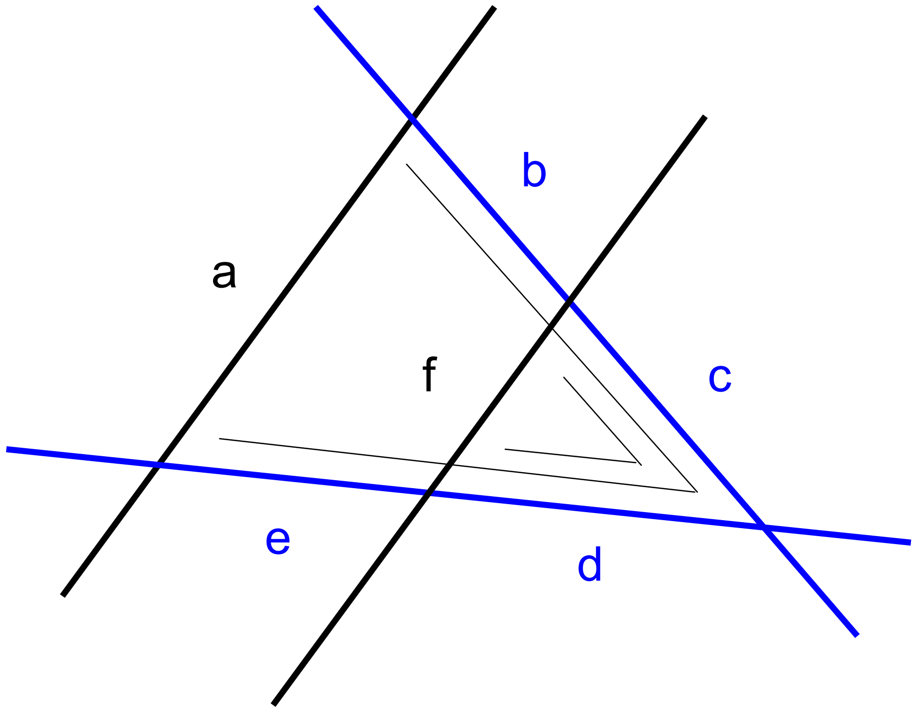
$f/c = a/(b+c)$

Barycentryczny układ współrzędnych



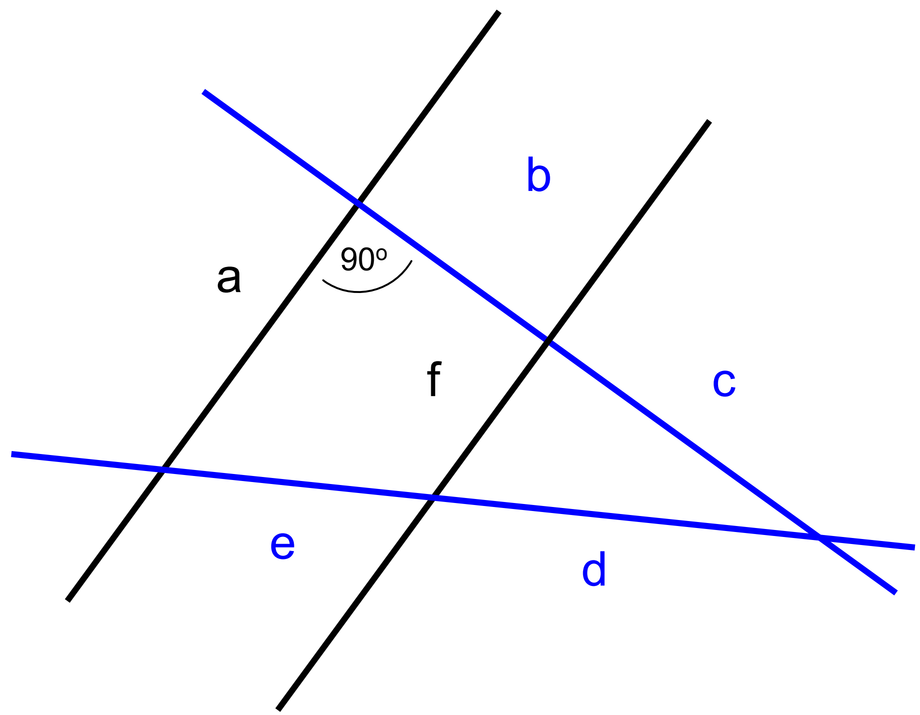
f/d = a/(e+d)

Barycentryczny układ współrzędnych



c/d = (b+c)/(e+d)

Barycentryczny układ współrzędnych

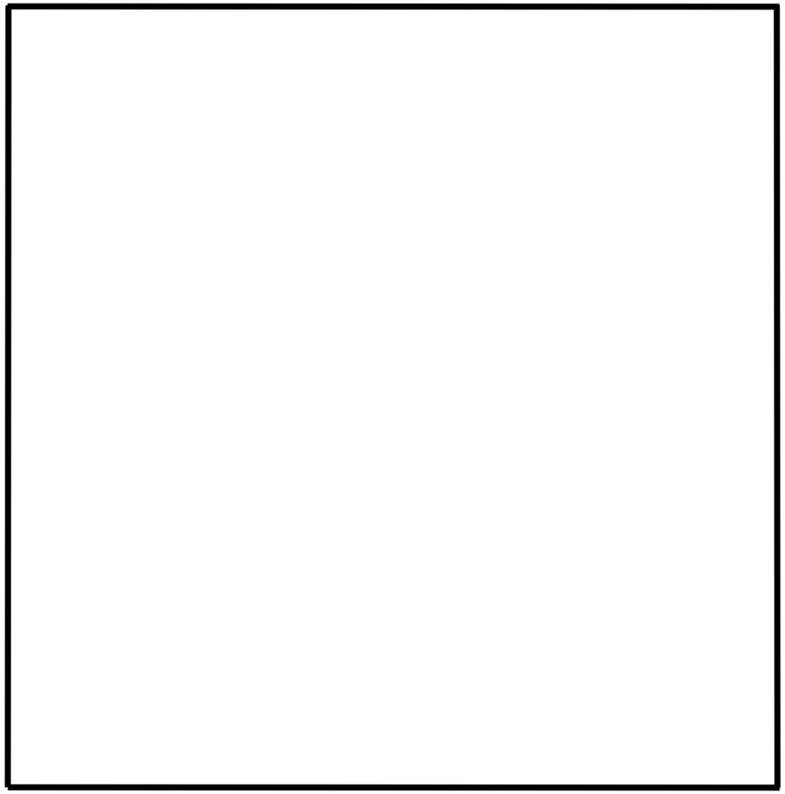


...

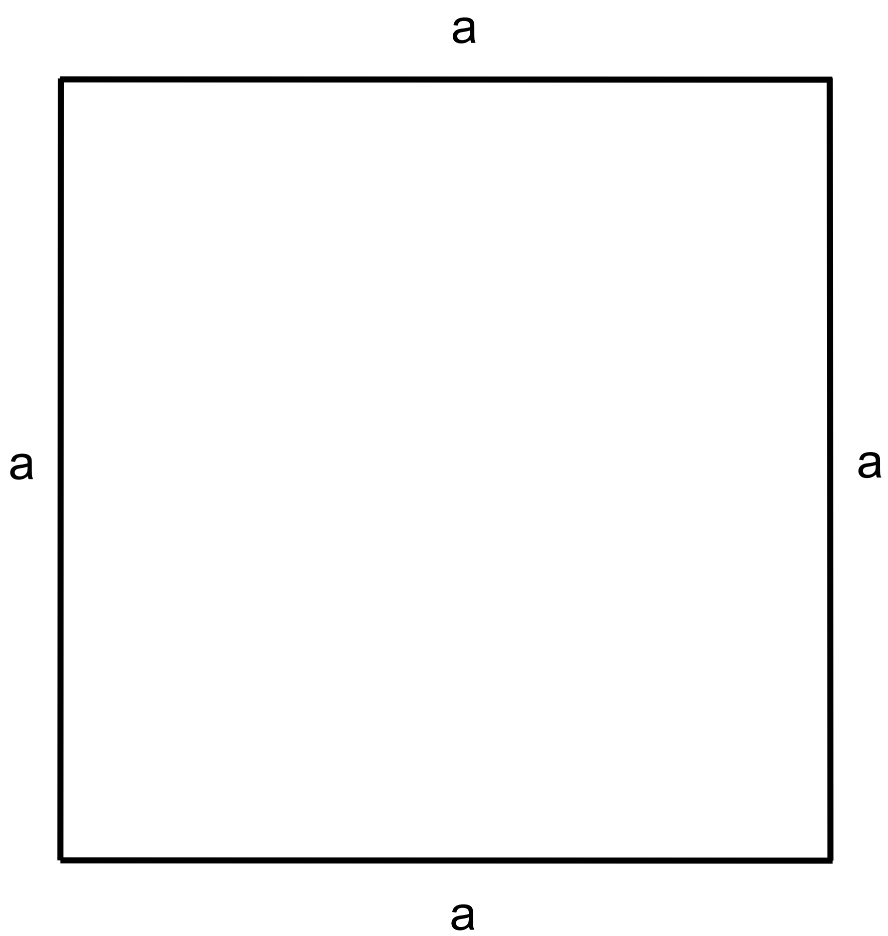
Barycentryczny układ współrzędnych

- Kwadrat
  - długość krawędzi: a
  - długość wysokości: h = a
  - pole powierzchni: $P = a^2$

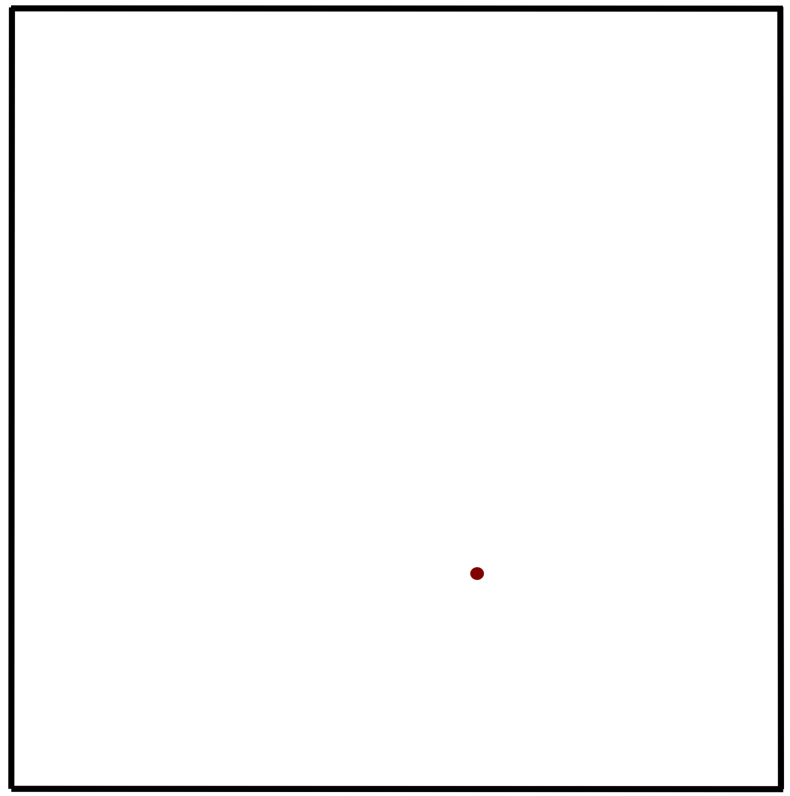
Barycentryczny układ współrzędnych



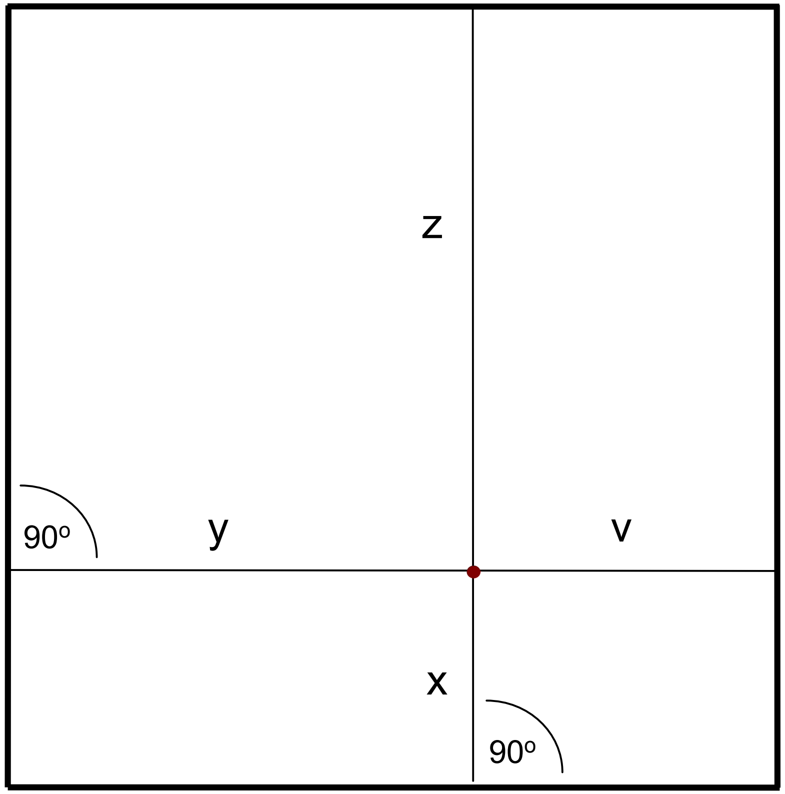
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

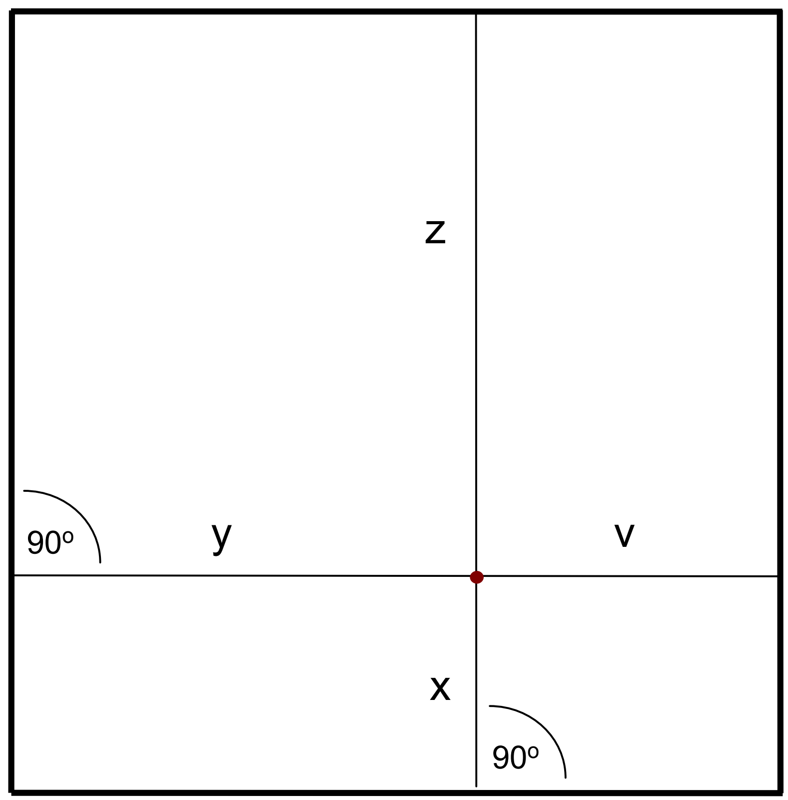


Barycentryczny układ współrzędnych



$$x + y + z + v = ?$$

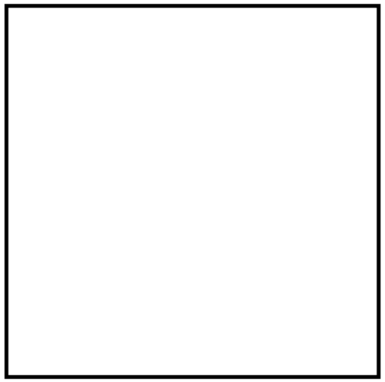
Barycentryczny układ współrzędnych

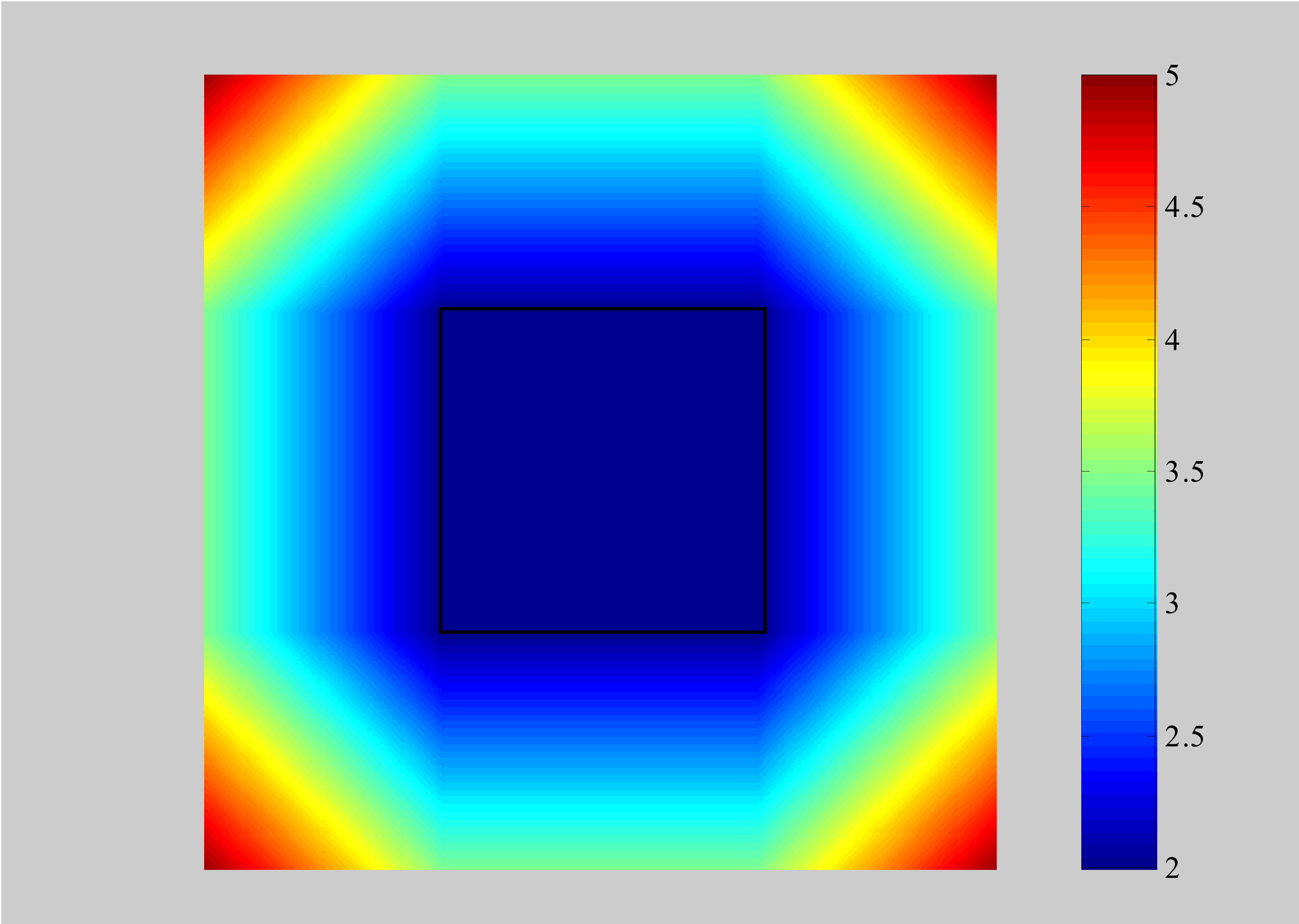


$$x + y + z + v = 2a$$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Ilustracja „obliczeniowa”? (wizualizacja)



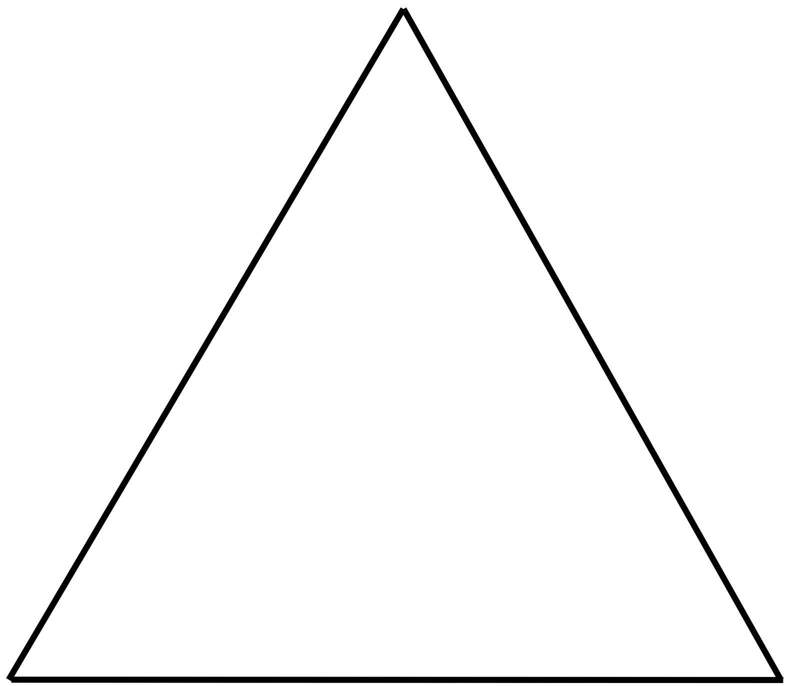


- Suma odległości każdego punktu od czterech boków kwadratu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz kwadratu mają jednakowy kolor

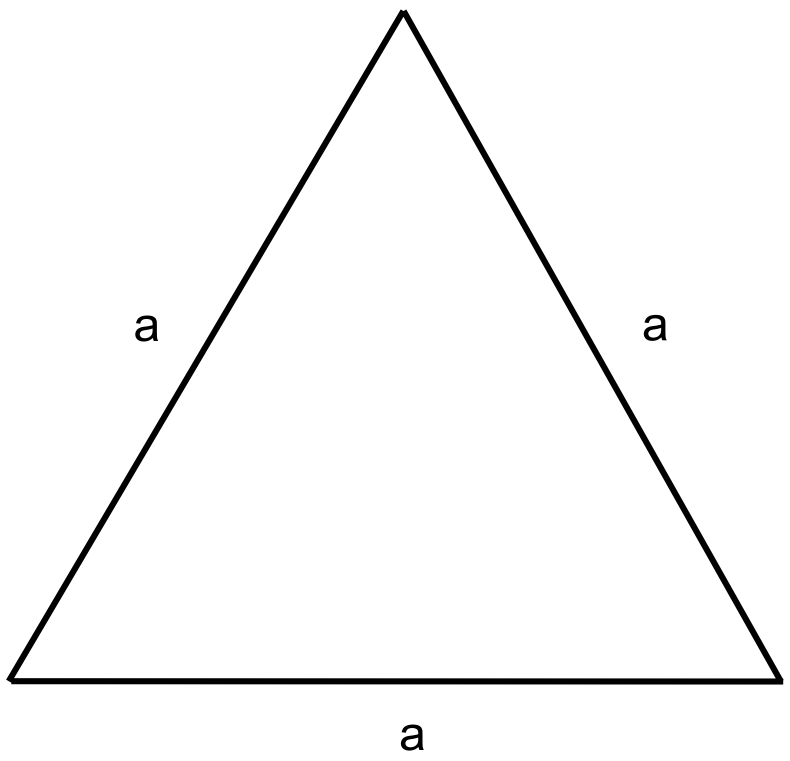
Barycentryczny układ współrzędnych

- Trójkąt równoboczny
  - długość krawędzi: a
  - długość wysokości: $h = 3^{1/2}/2 \cdot a$
  - pole powierzchni: $P = 3^{1/2}/4 \cdot a^2$

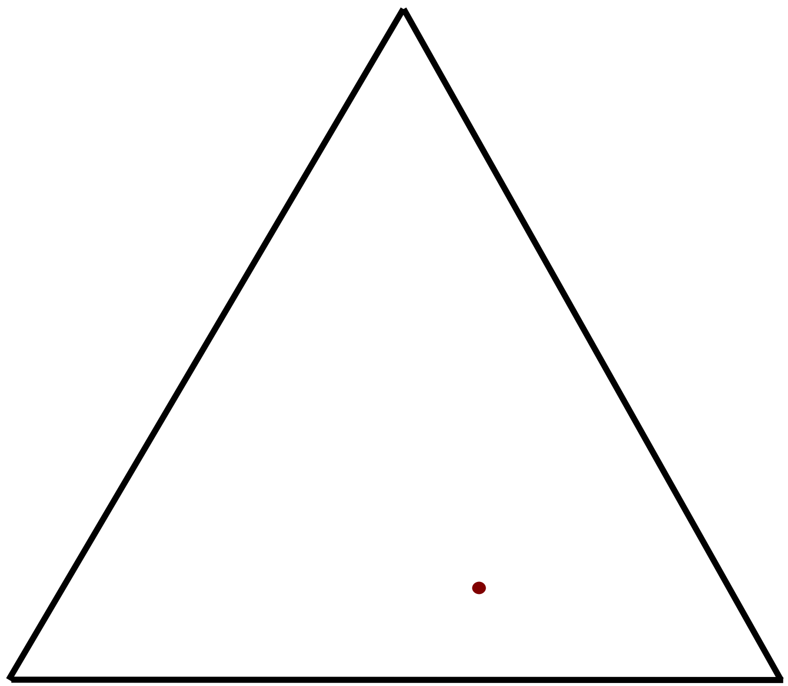
Barycentryczny układ współrzędnych



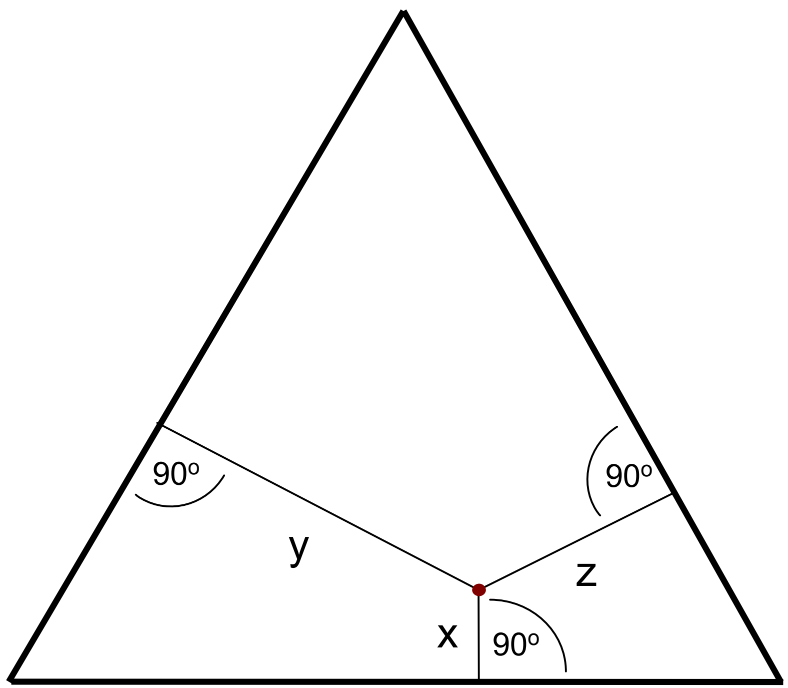
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

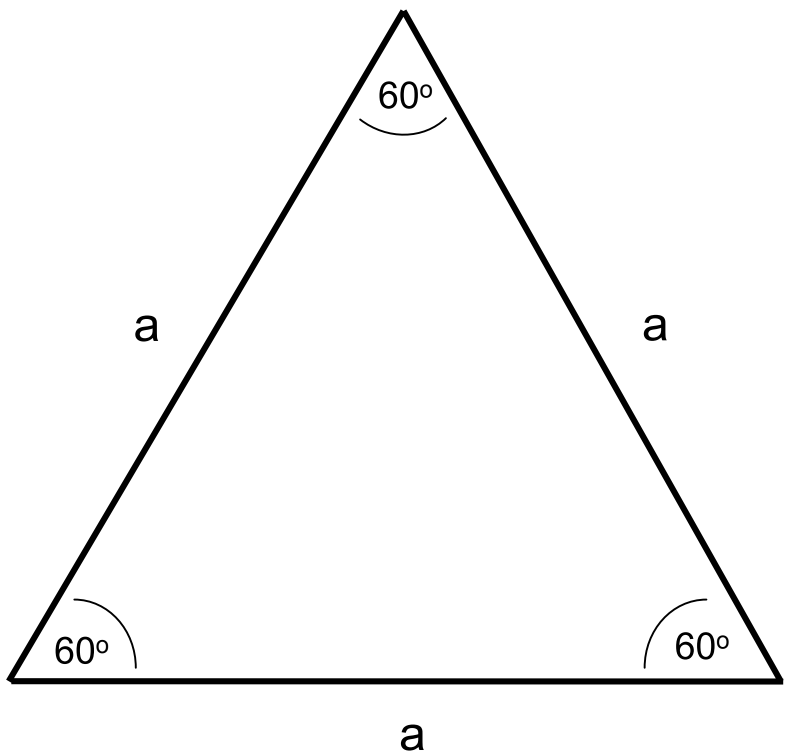


Barycentryczny układ współrzędnych

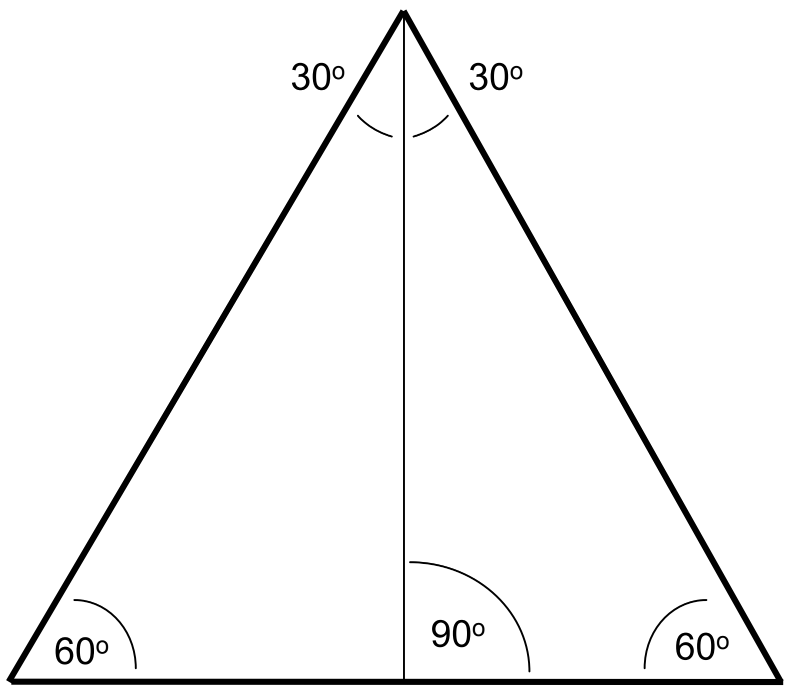


$$x + y + z = ?$$

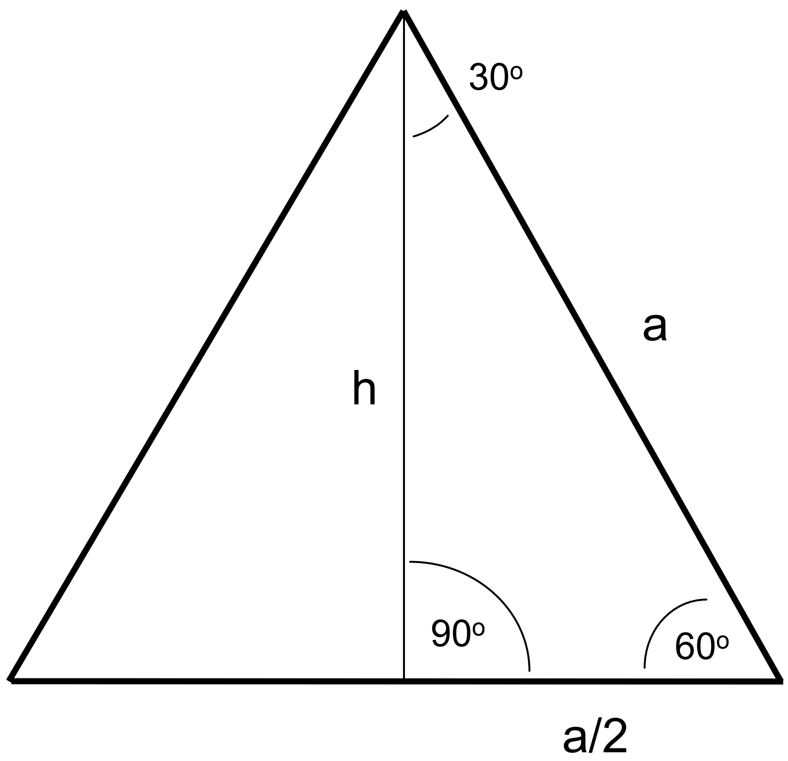
Barycentryczny układ współrzędnych



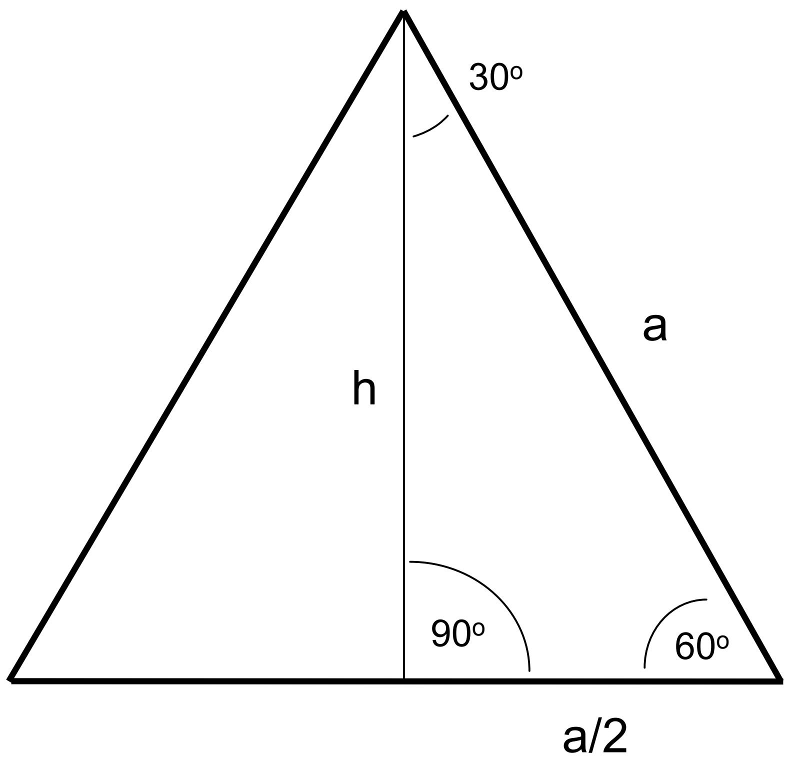
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

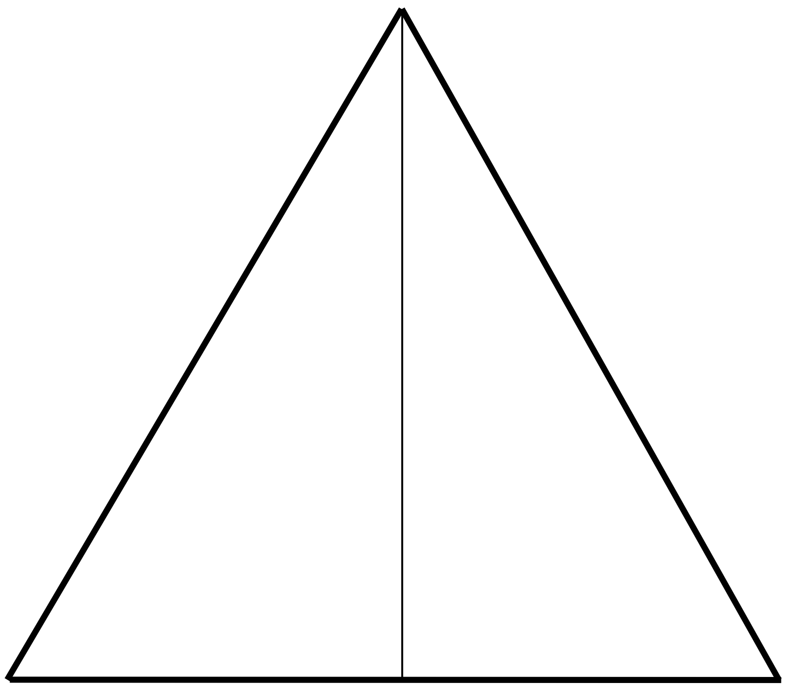


Barycentryczny układ współrzędnych

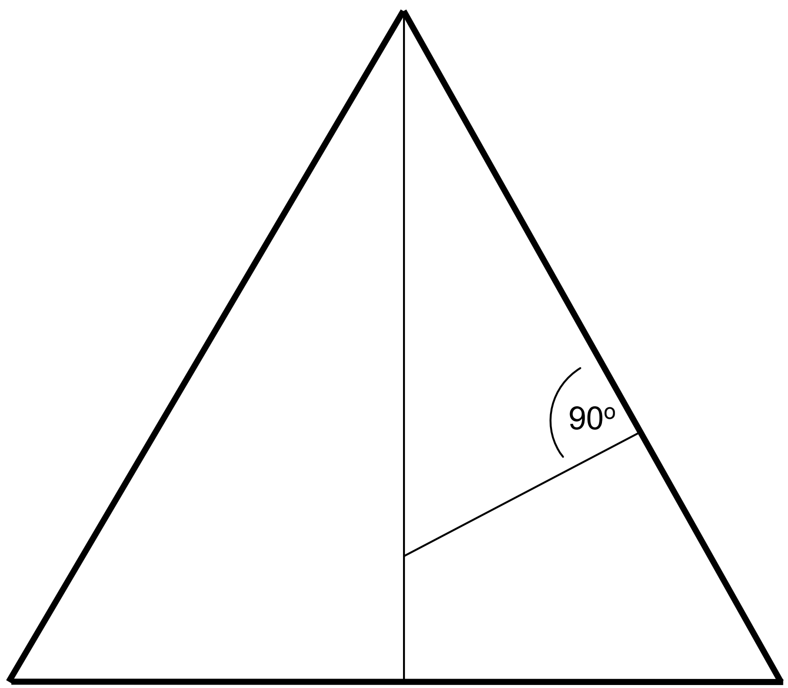


$h = (3^{1/2}/2)a$

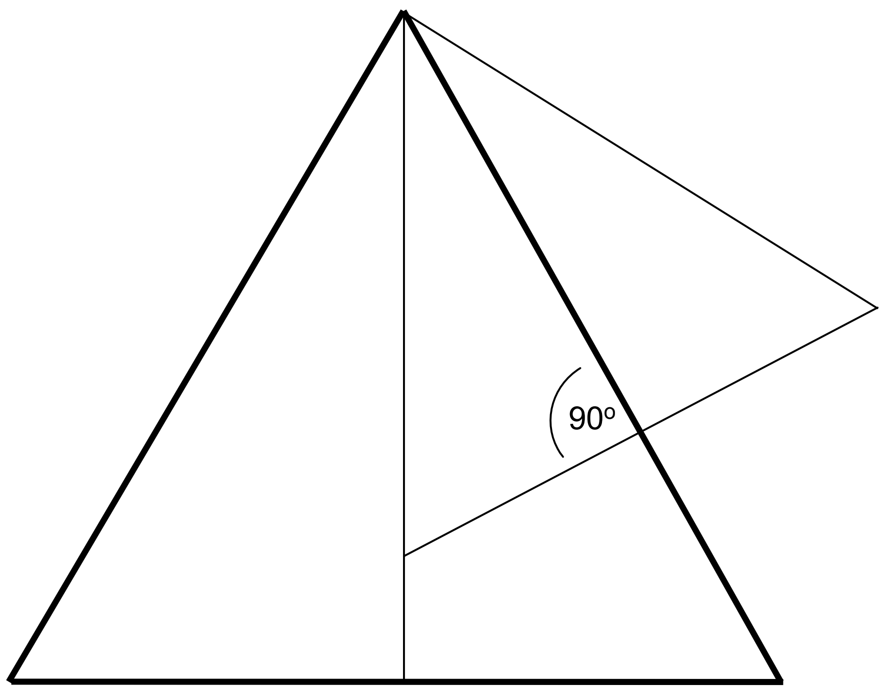
Barycentryczny układ współrzędnych



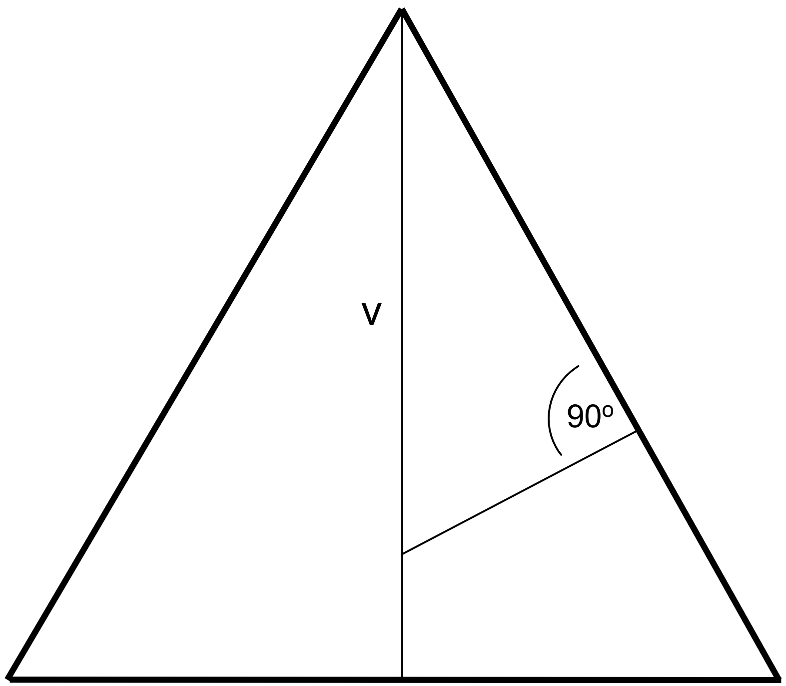
Barycentryczny układ współrzędnych



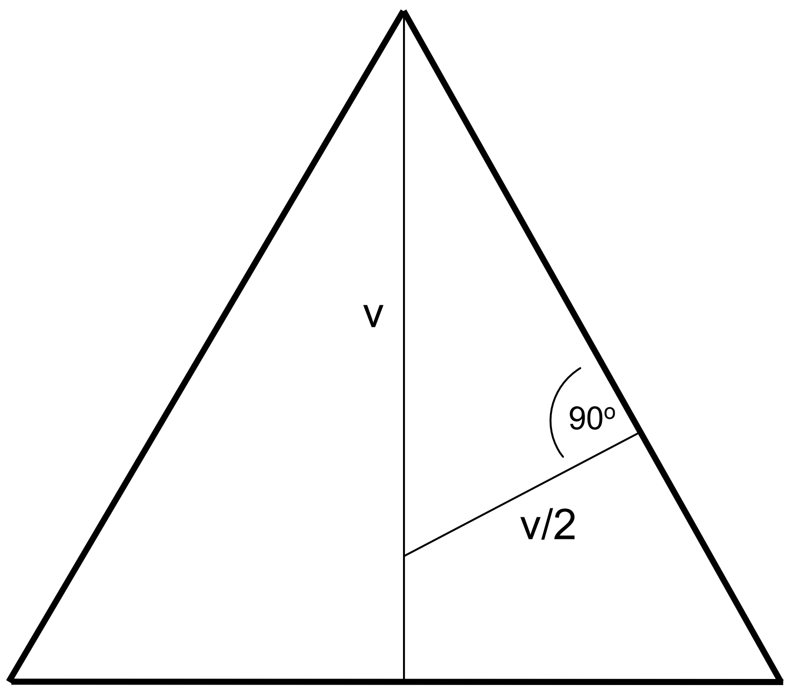
Barycentryczny układ współrzędnych



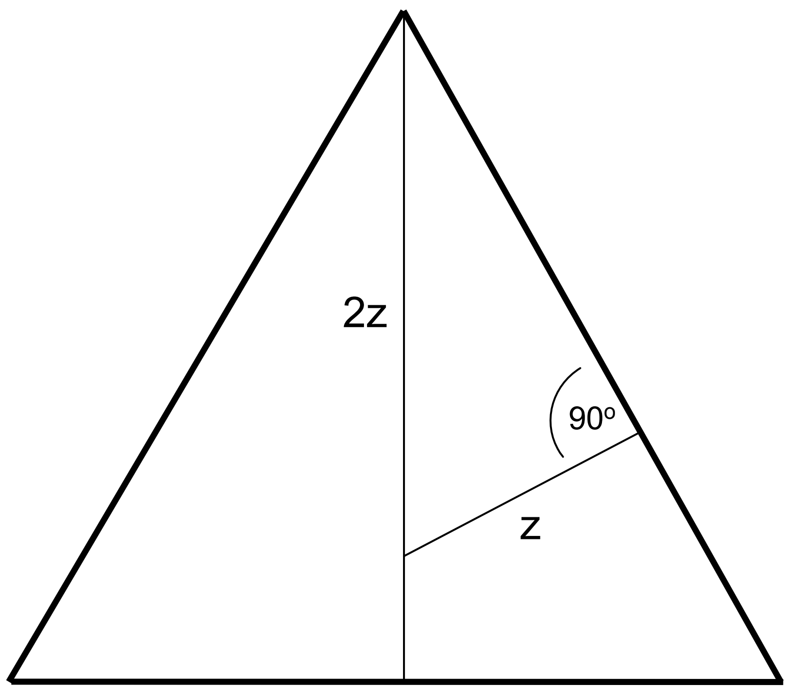
Barycentryczny układ współrzędnych



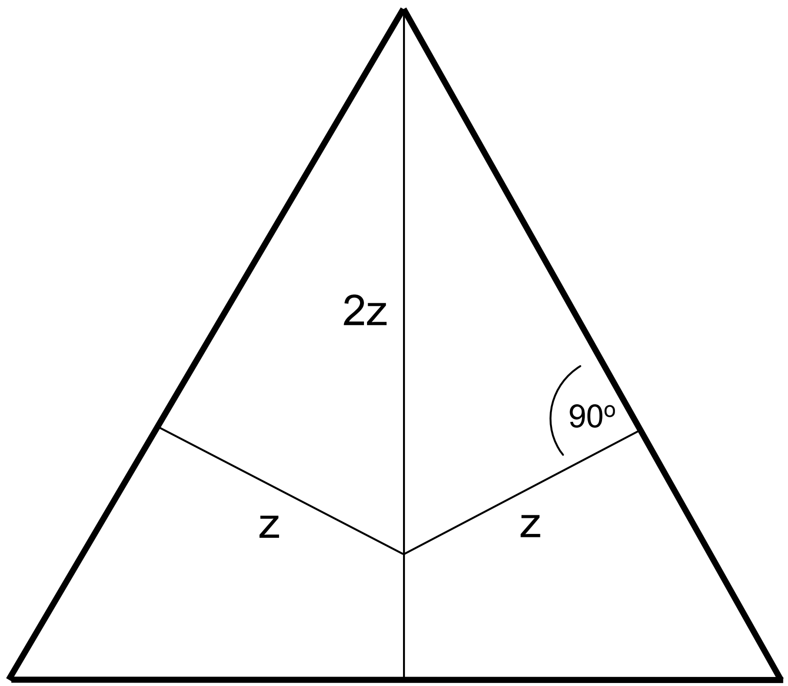
Barycentryczny układ współrzędnych



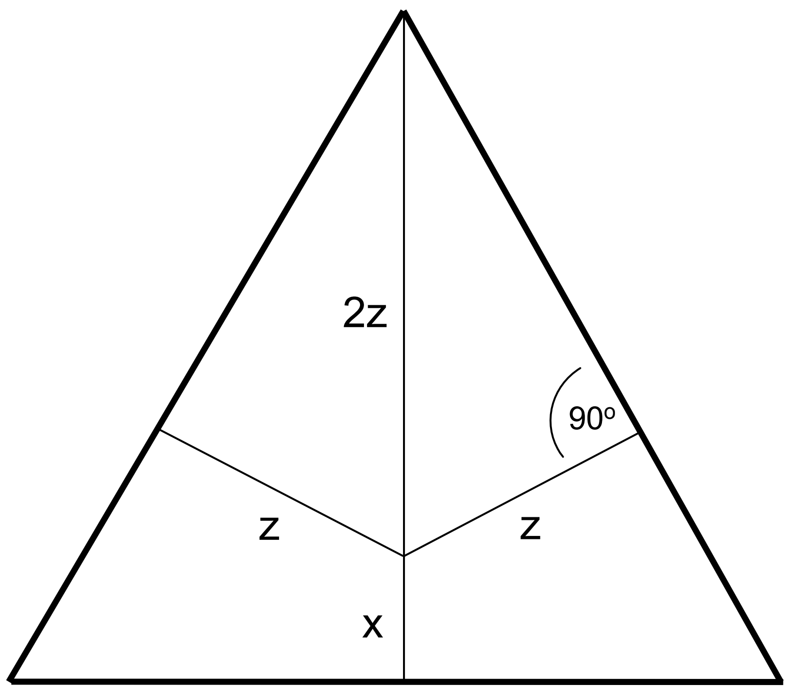
Barycentryczny układ współrzędnych



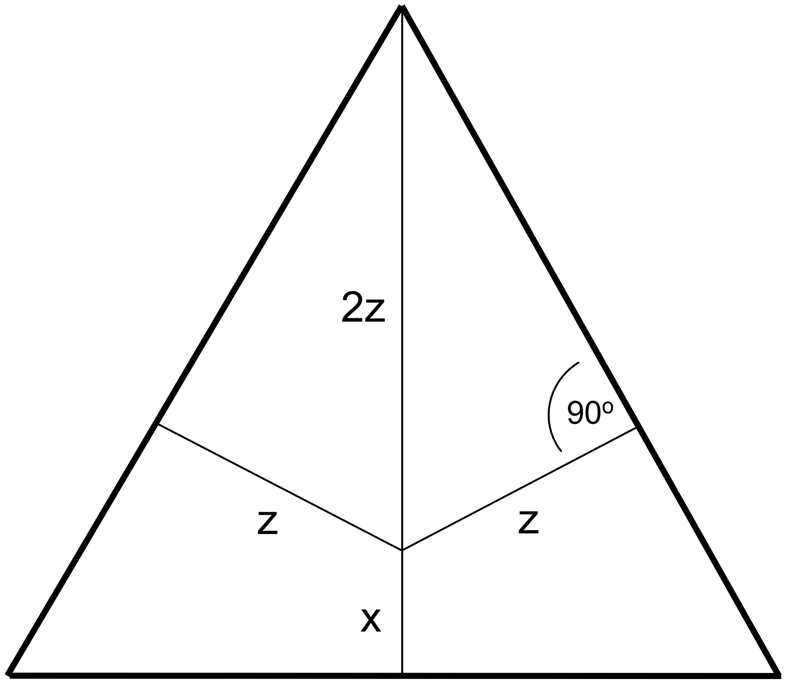
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

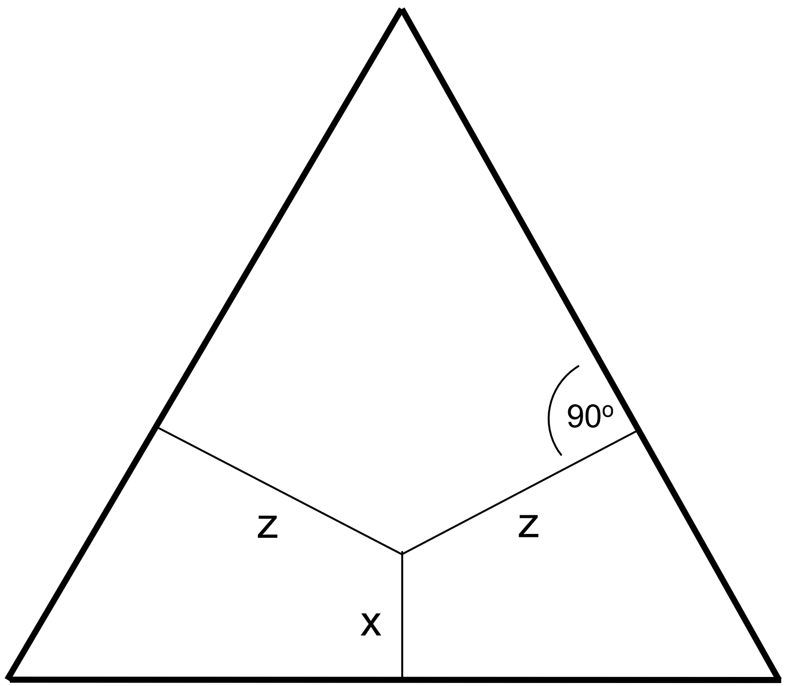


Barycentryczny układ współrzędnych



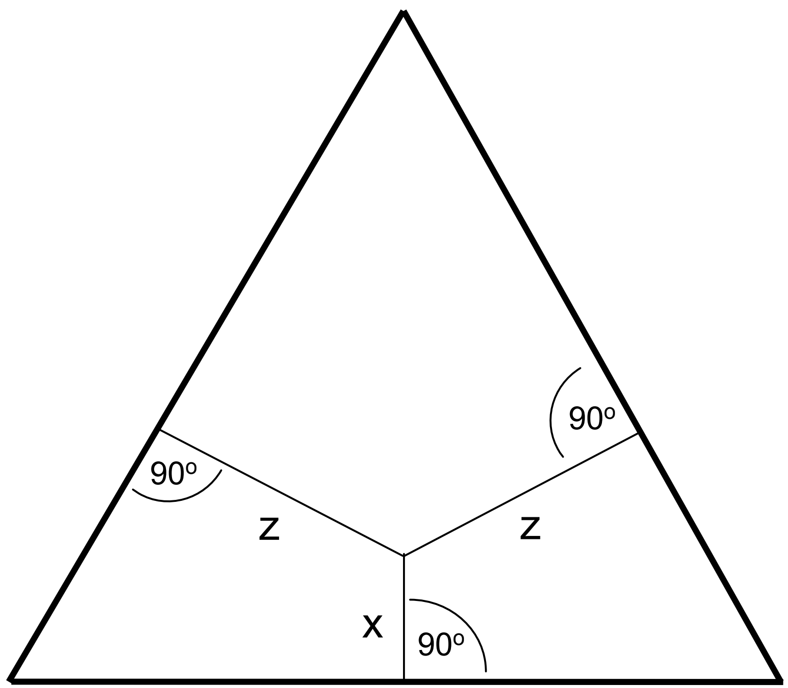
$$x + 2z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych

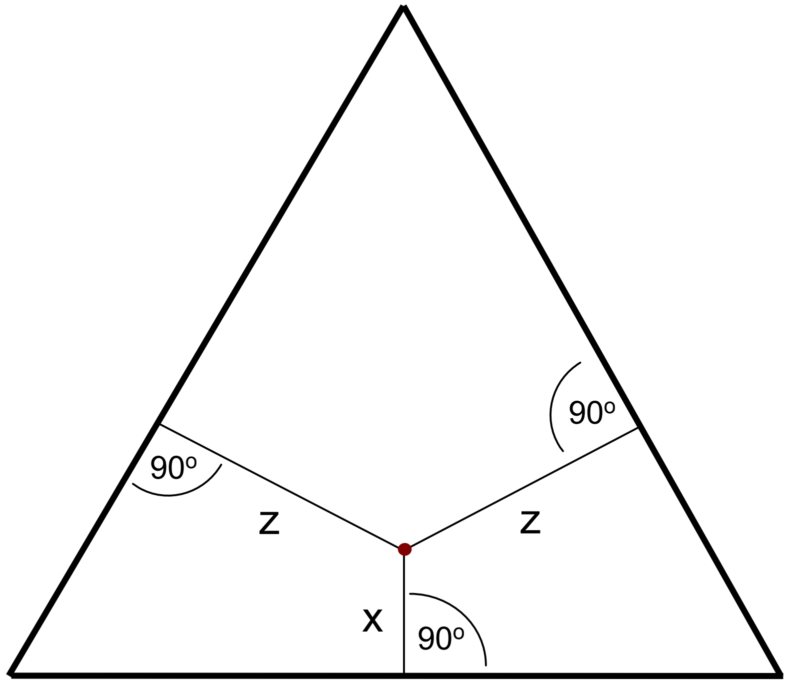


$$x + 2z = h$$

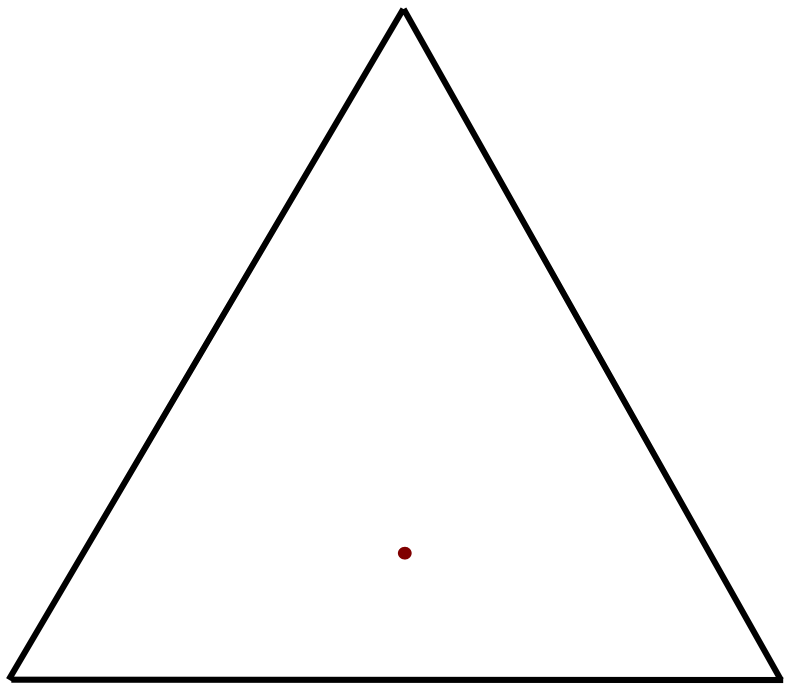
Barycentryczny układ współrzędnych



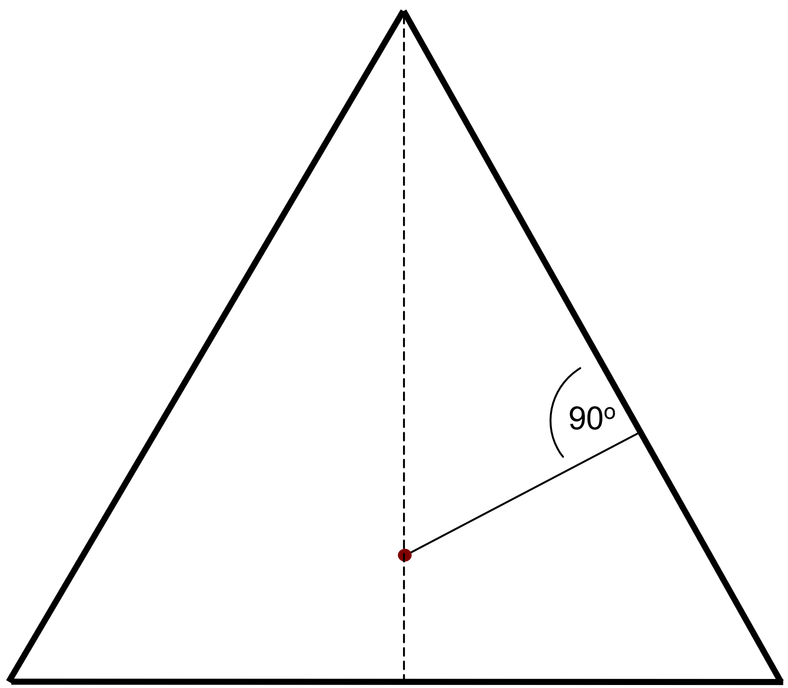
Barycentryczny układ współrzędnych



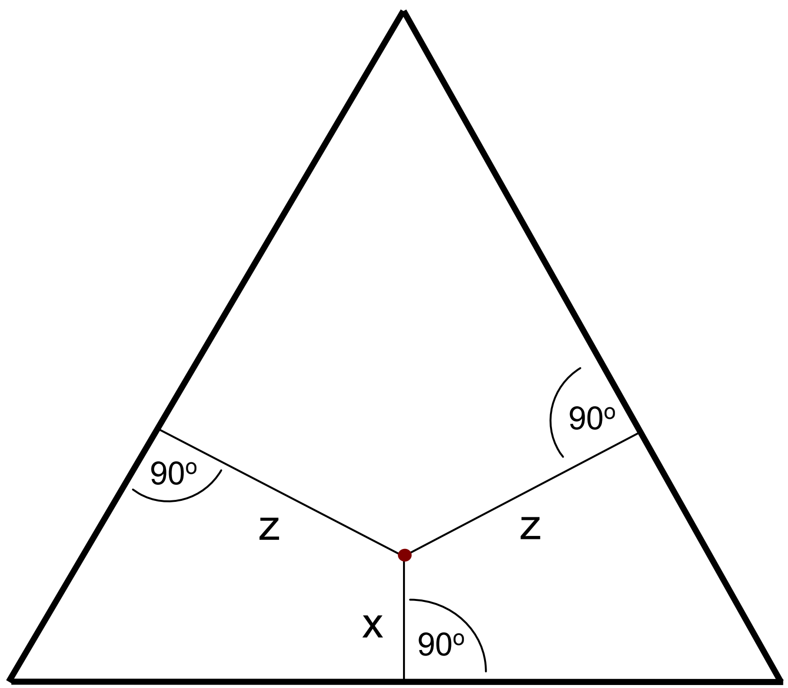
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

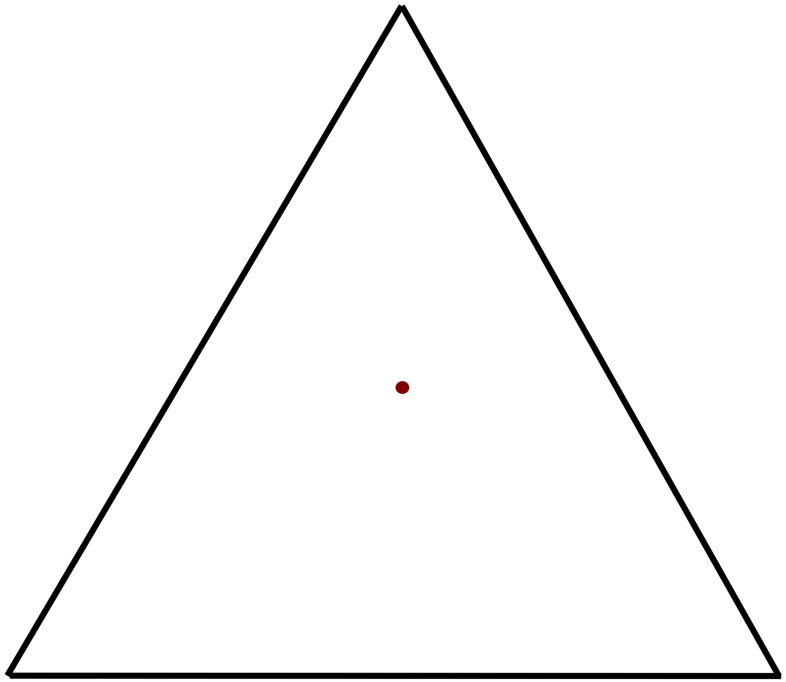


Barycentryczny układ współrzędnych

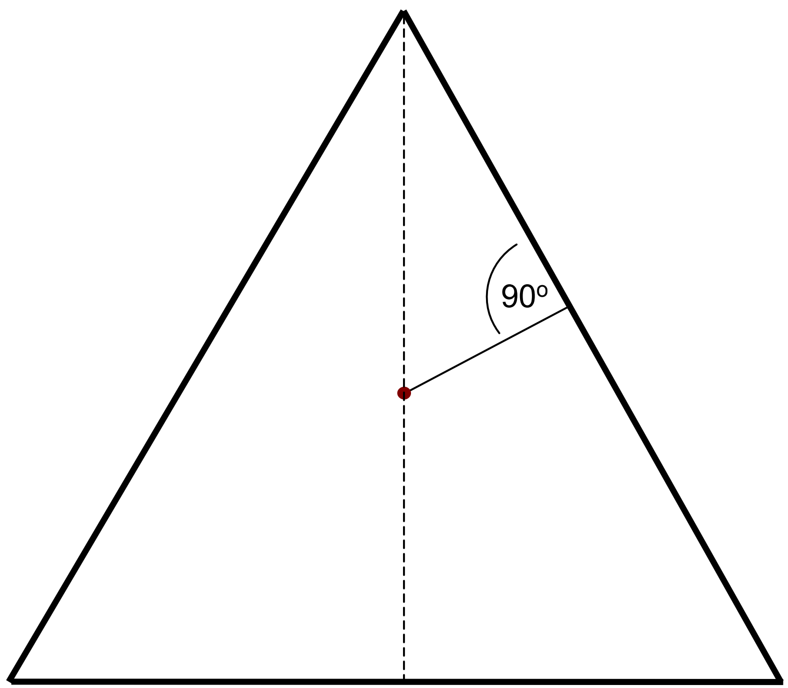


x + 2z = h

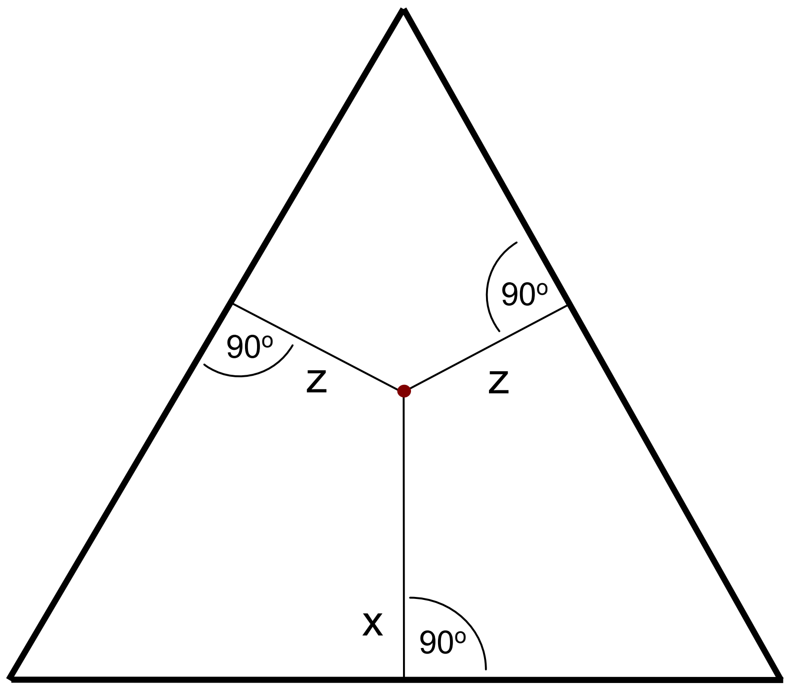
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

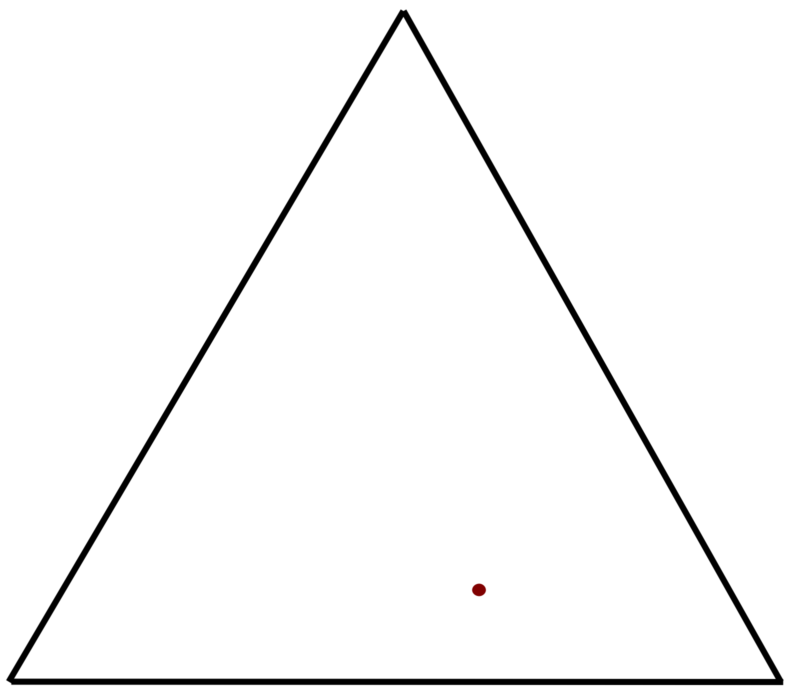


Barycentryczny układ współrzędnych

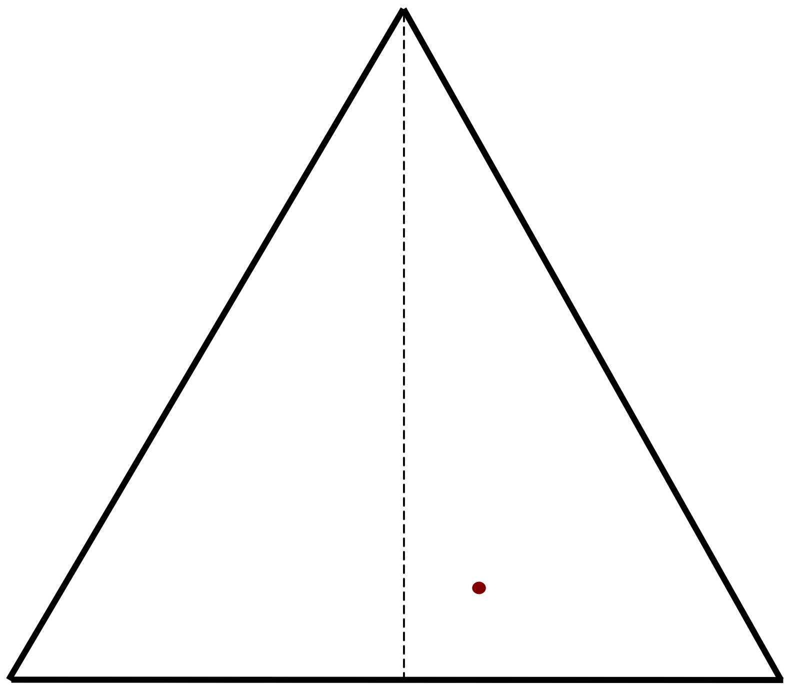


x + 2z = h

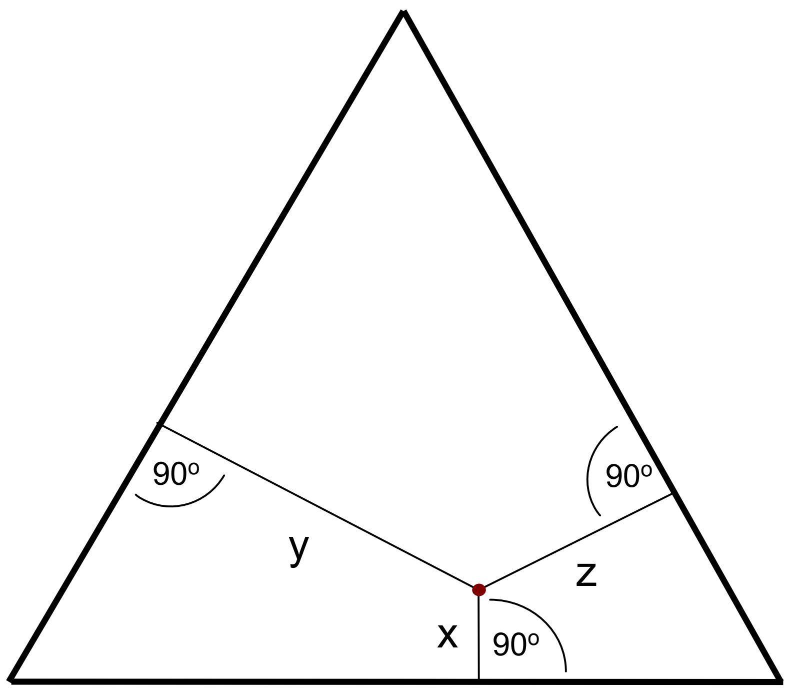
Barycentryczny układ współrzędnych



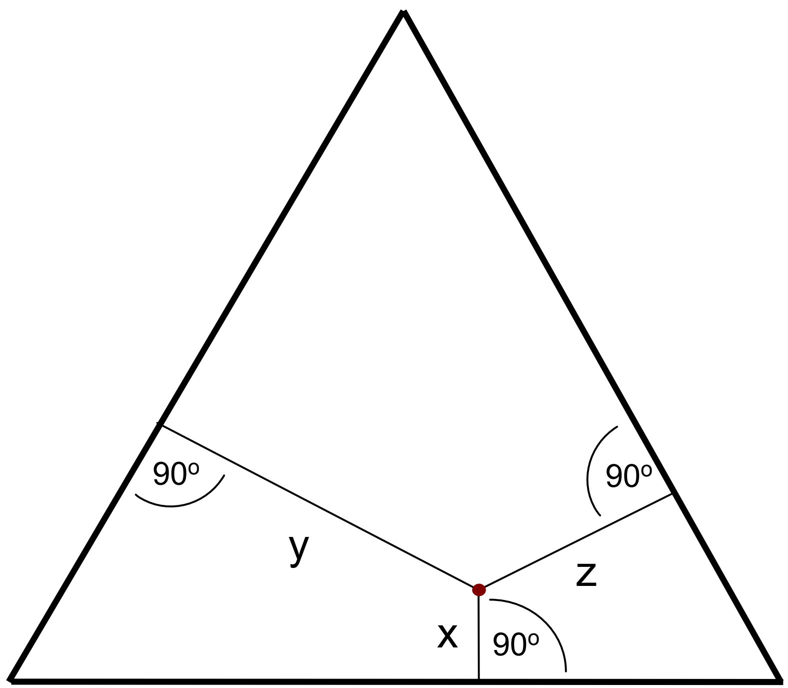
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

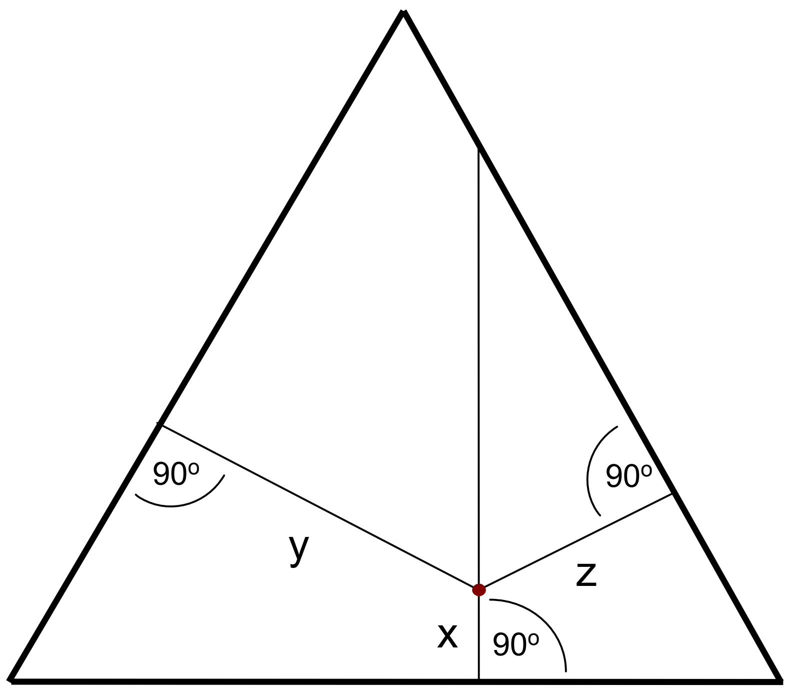


Barycentryczny układ współrzędnych

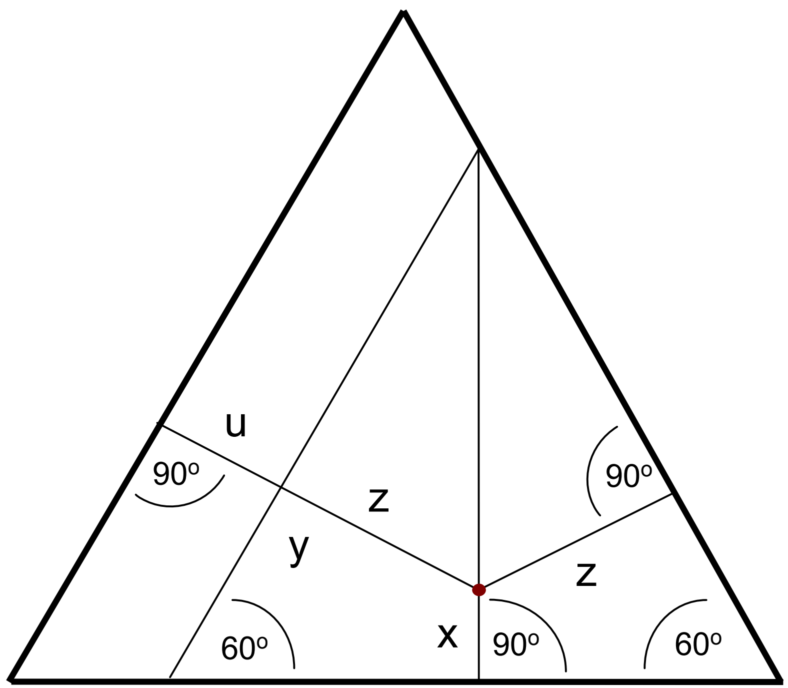


$x + y + z = ?$

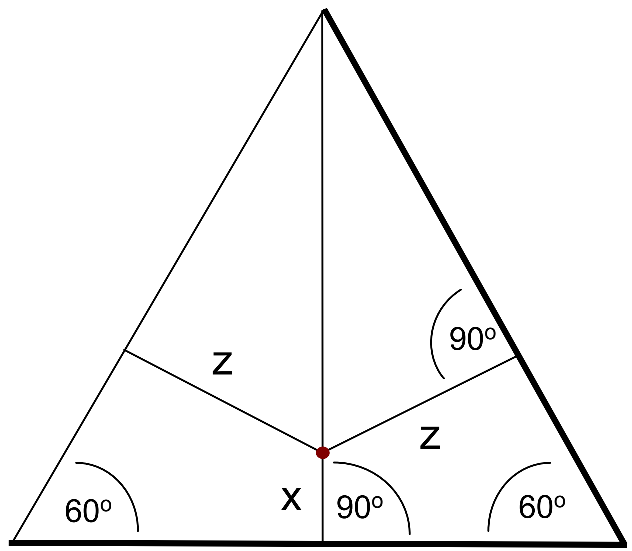
Barycentryczny układ współrzędnych



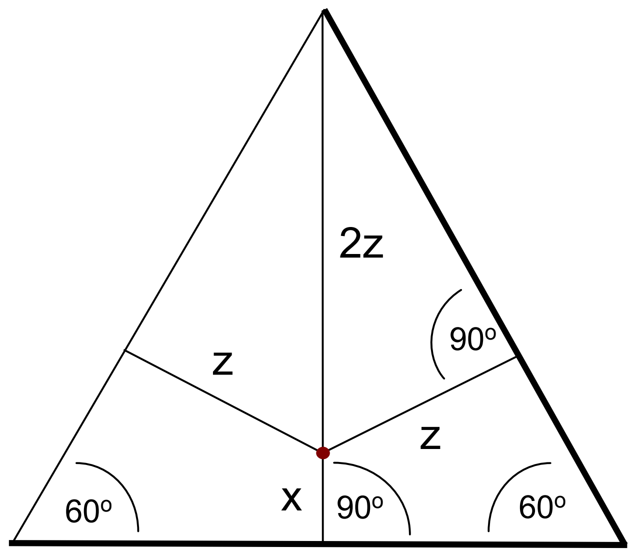
Barycentryczny układ współrzędnych



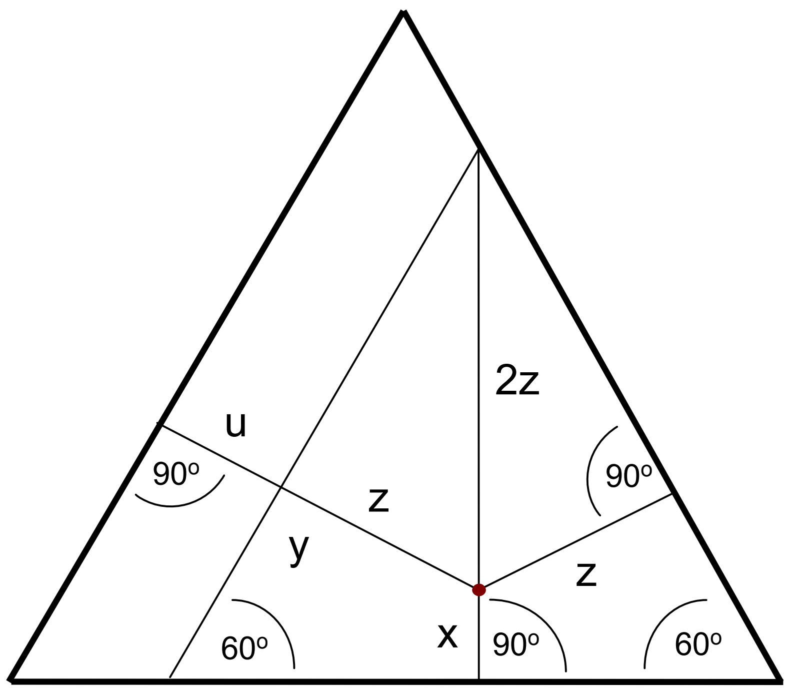
Barycentryczny układ współrzędnych



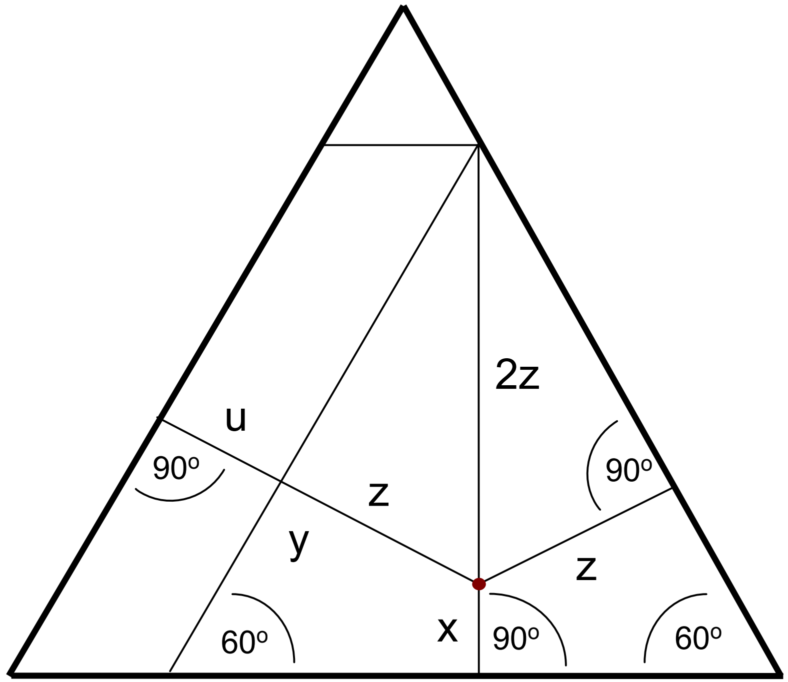
Barycentryczny układ współrzędnych



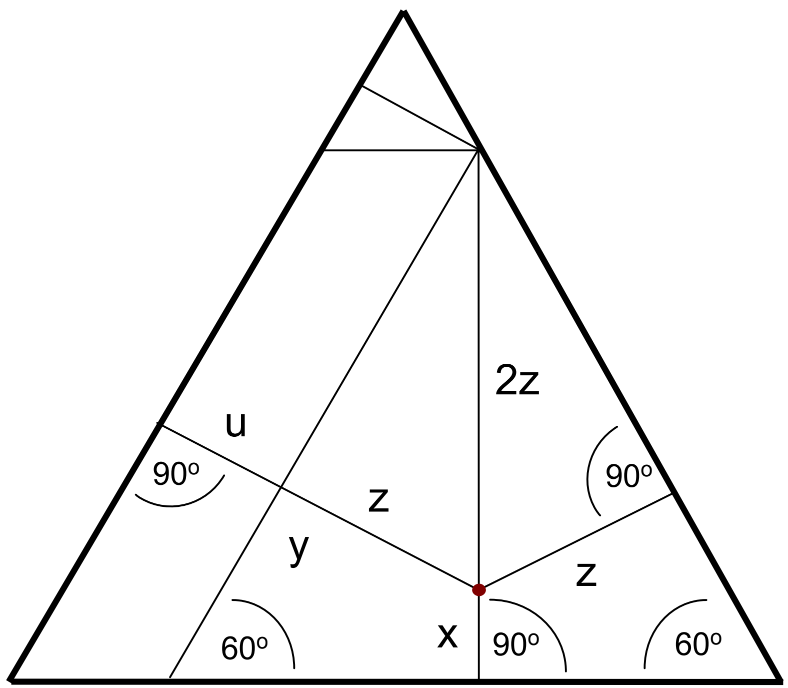
Barycentryczny układ współrzędnych



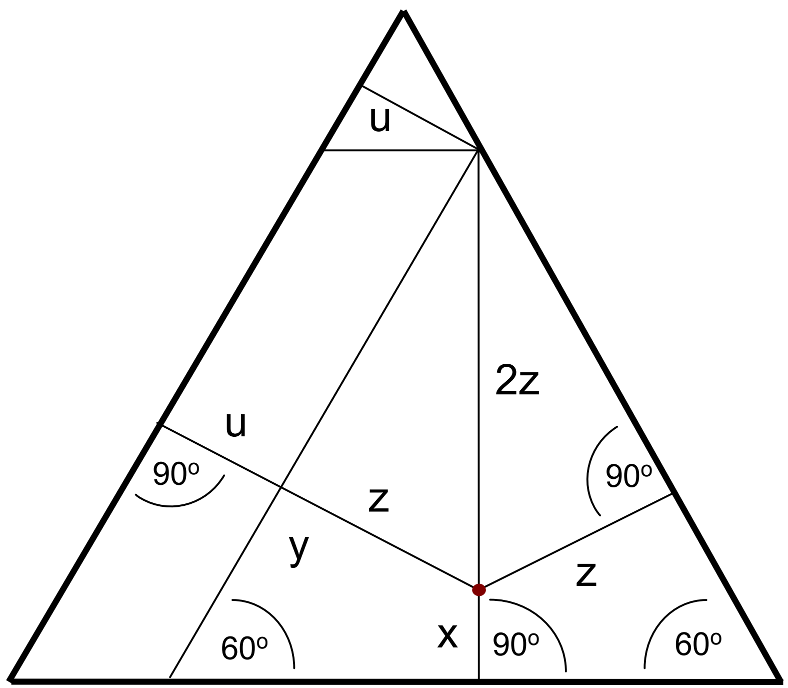
Barycentryczny układ współrzędnych



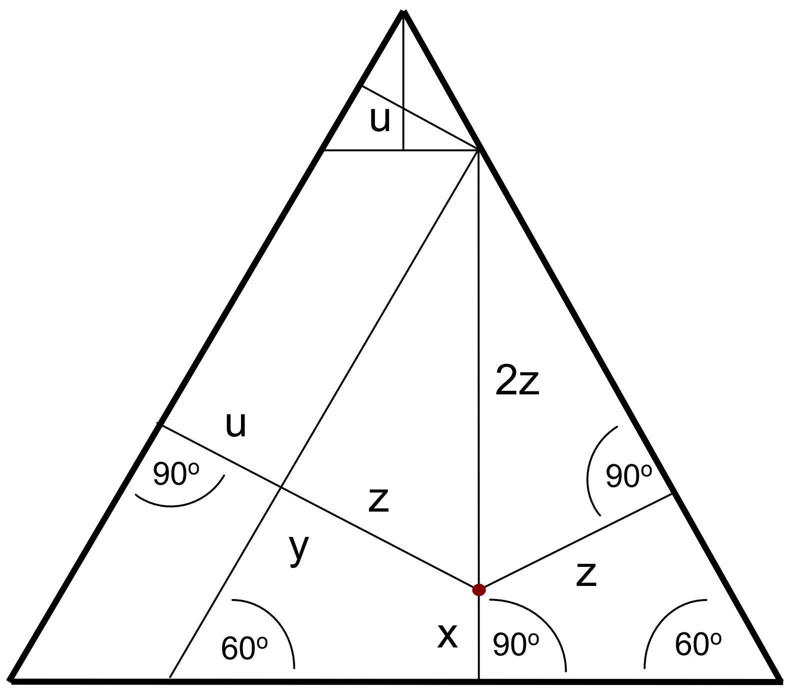
Barycentryczny układ współrzędnych



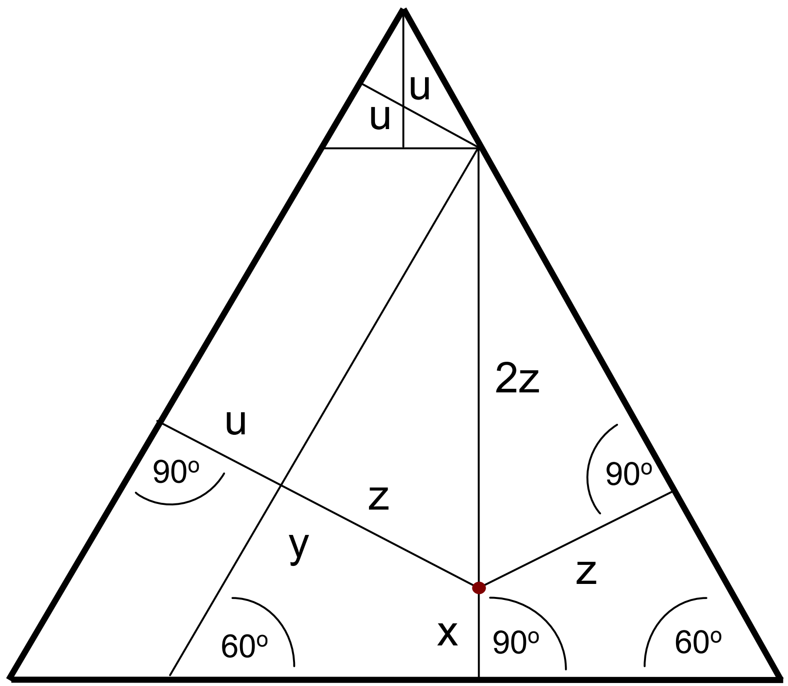
Barycentryczny układ współrzędnych



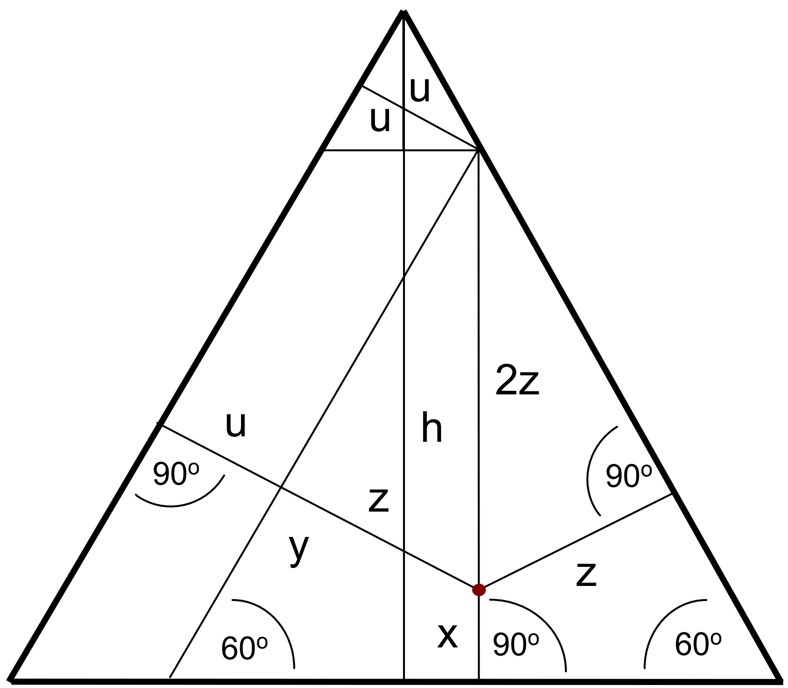
Barycentryczny układ współrzędnych



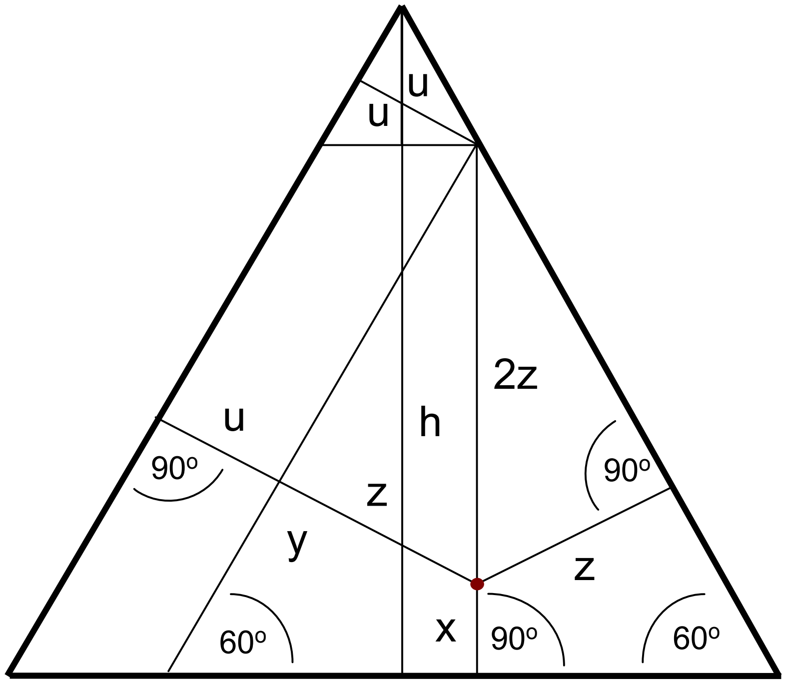
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

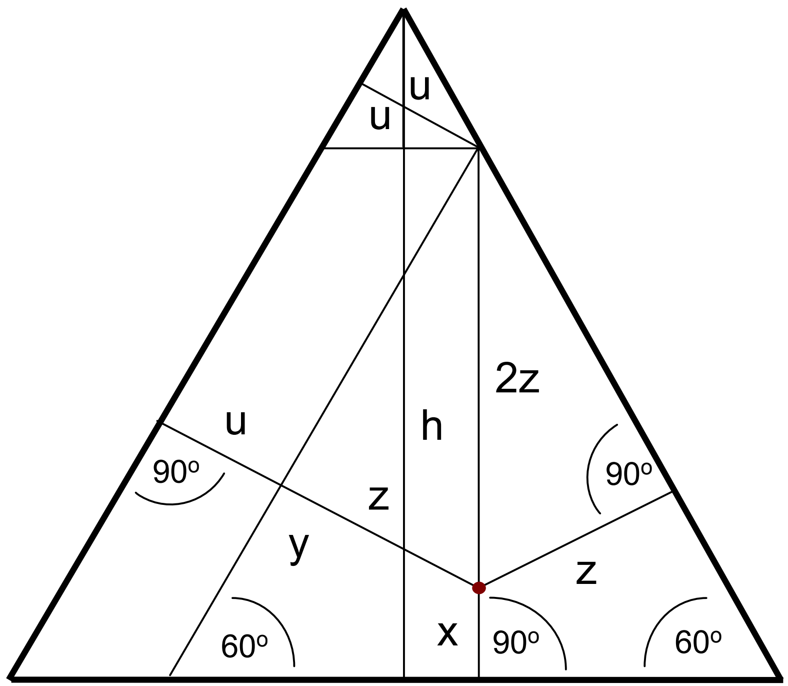


Barycentryczny układ współrzędnych



$$x + 2z = h - u$$

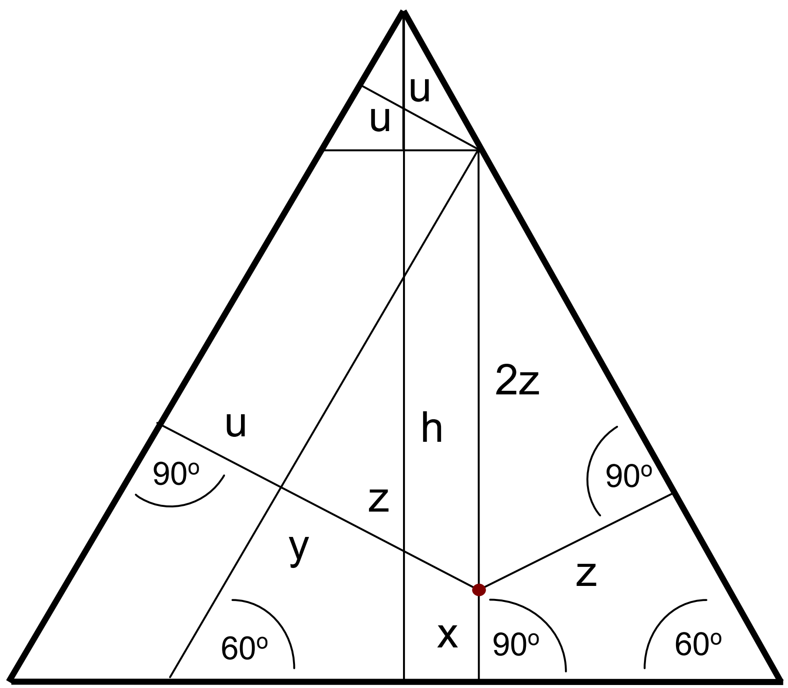
Barycentryczny układ współrzędnych



$$x + 2z = h - u$$

$$x + 2z + u = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych

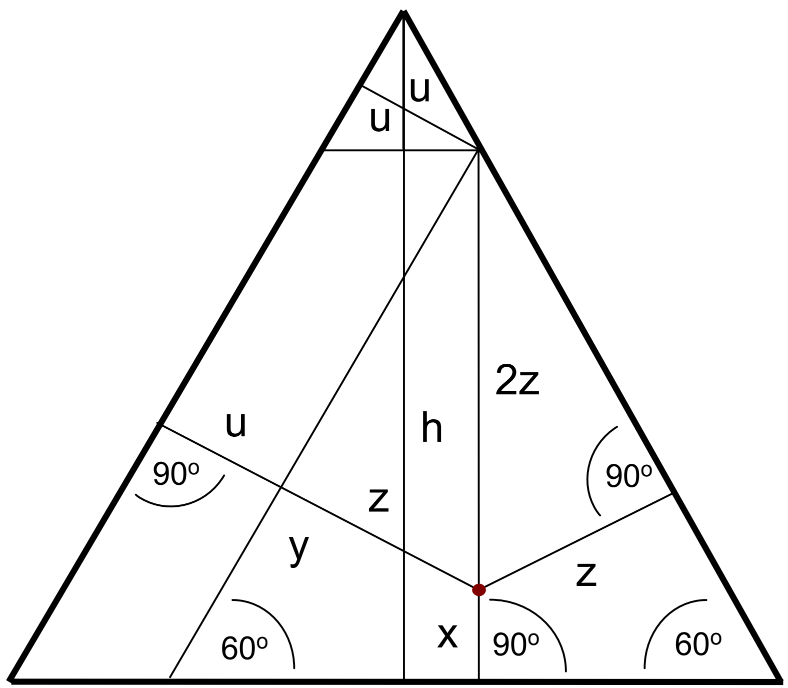


$$x + 2z = h - u$$

$$x + 2z + u = h$$

ale $y = u + z$, a więc

Barycentryczny układ współrzędnych



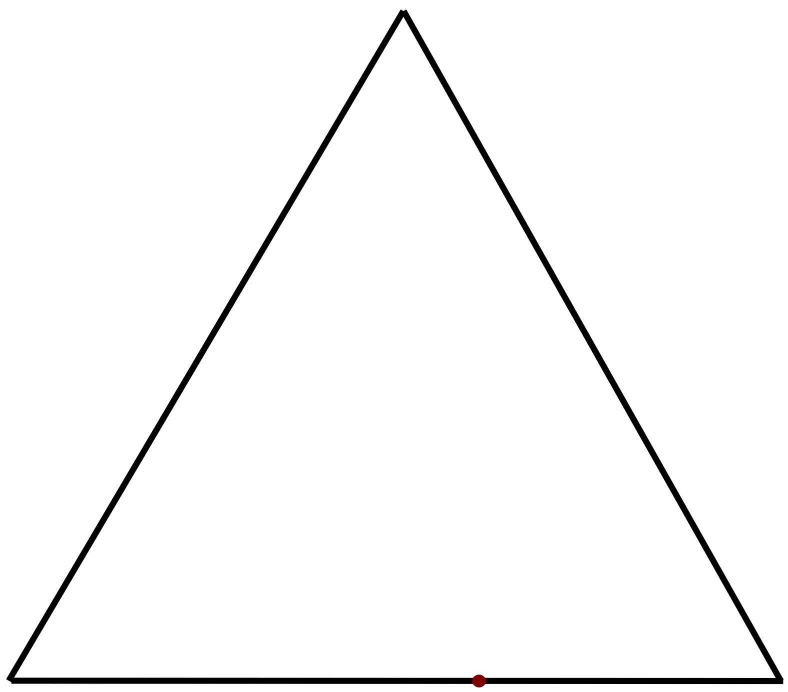
$$x + 2z = h - u$$

$$x + 2z + u = h$$

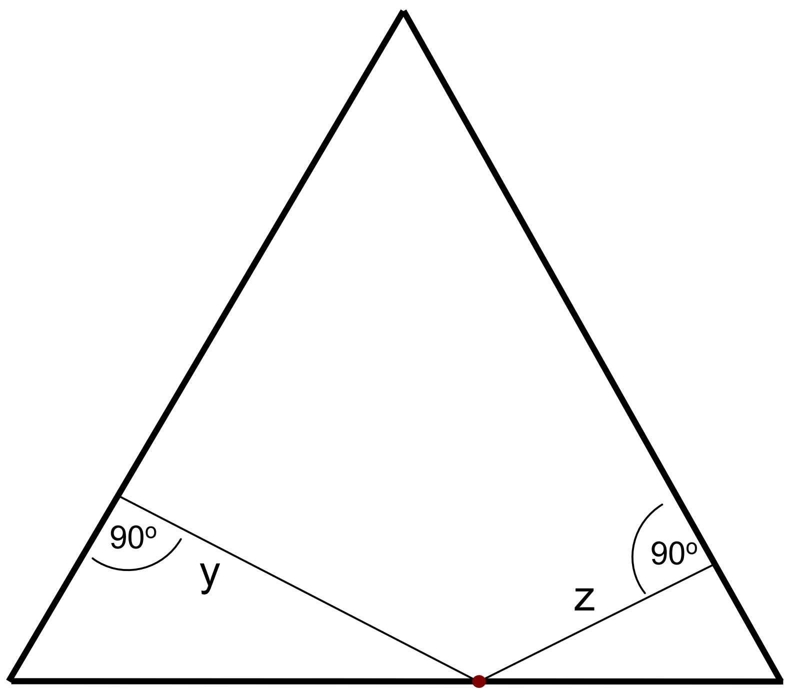
ale $y = u + z$, a więc

$$x + y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



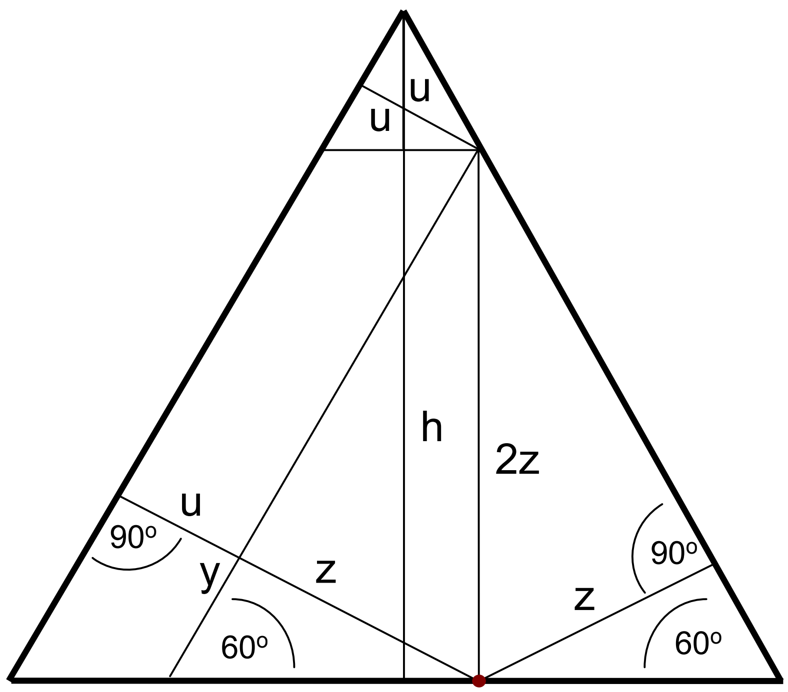
Barycentryczny układ współrzędnych



$x = 0$

$y + z = ?$

Barycentryczny układ współrzędnych



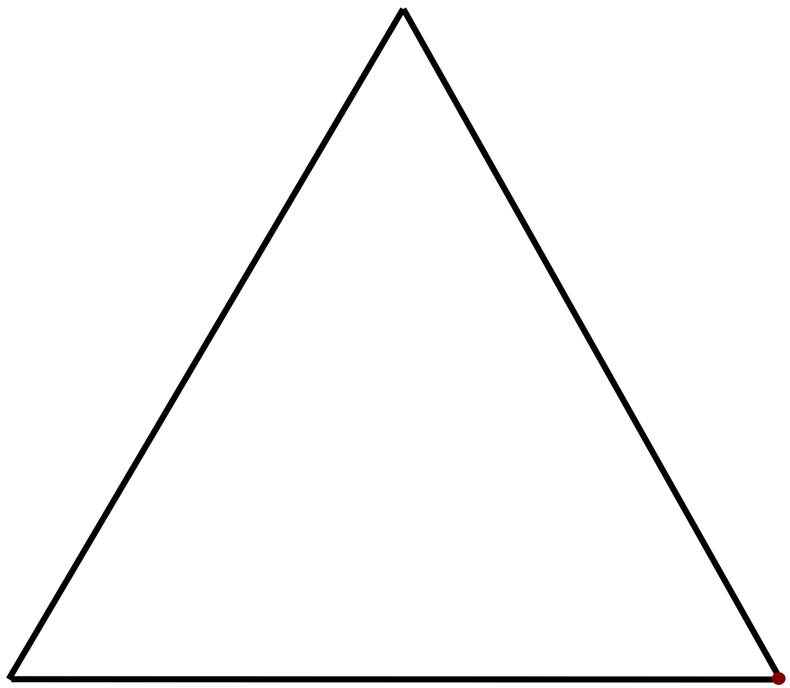
$$2z = h - u$$

$$2z + u = h$$

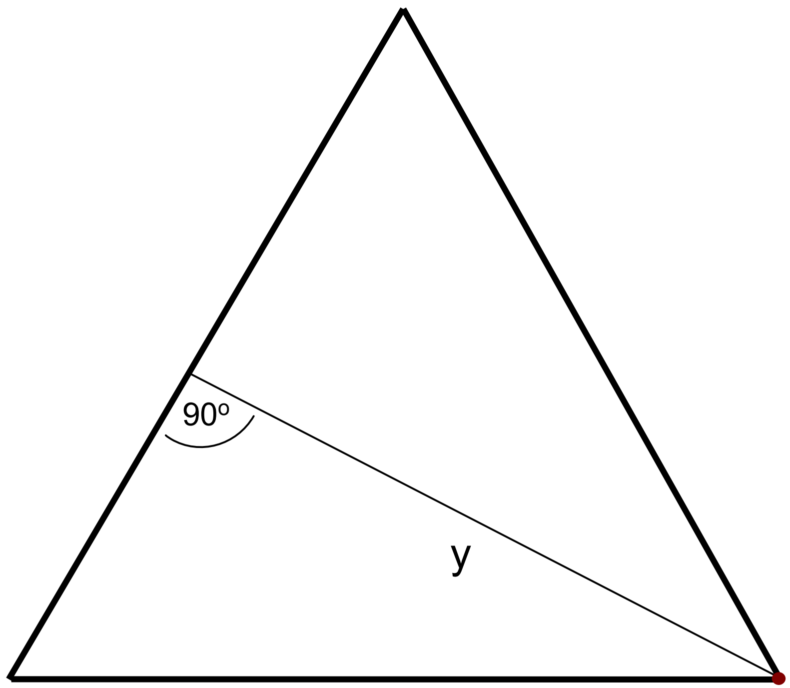
ale $y = u + z$, a więc

$$y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

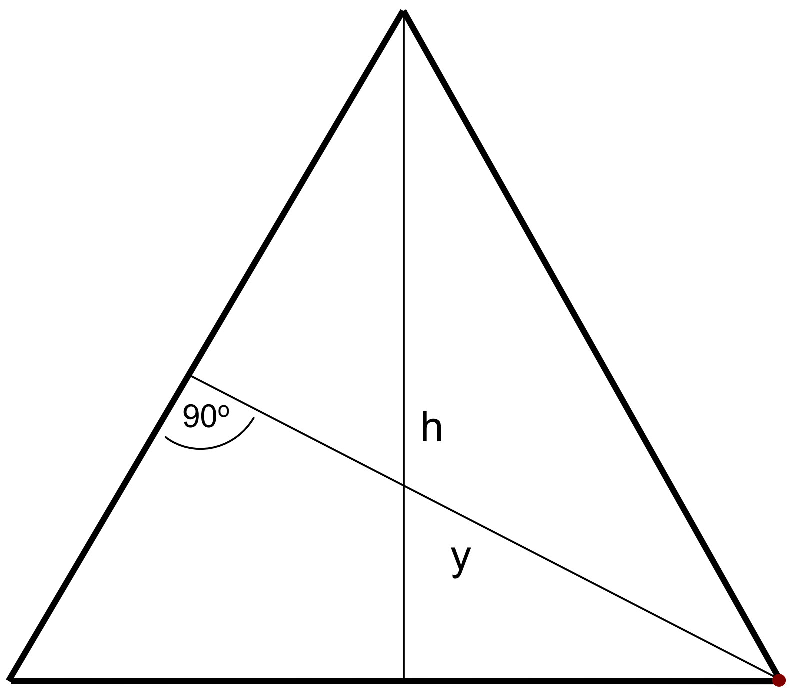


x = 0

z = 0

y = ?

Barycentryczny układ współrzędnych

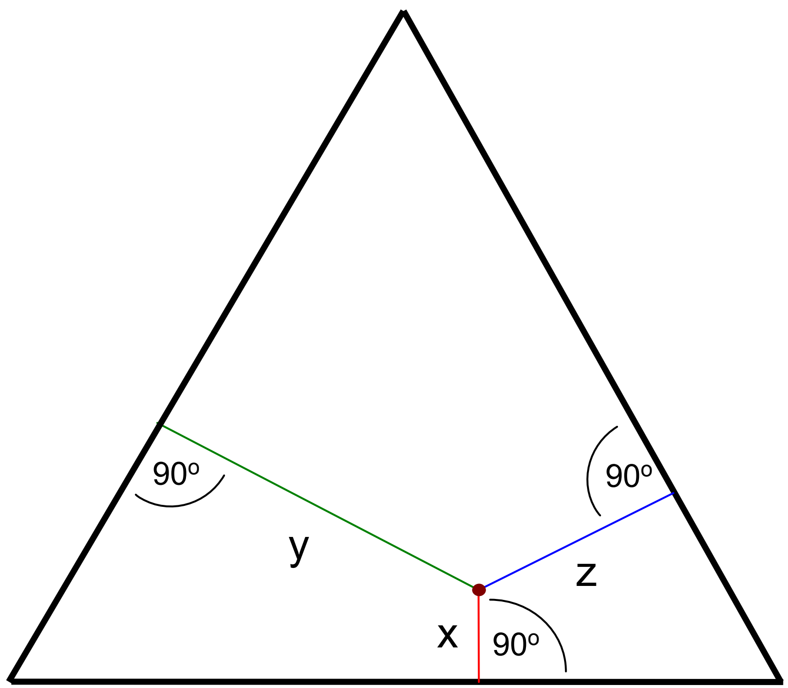


$x = 0$

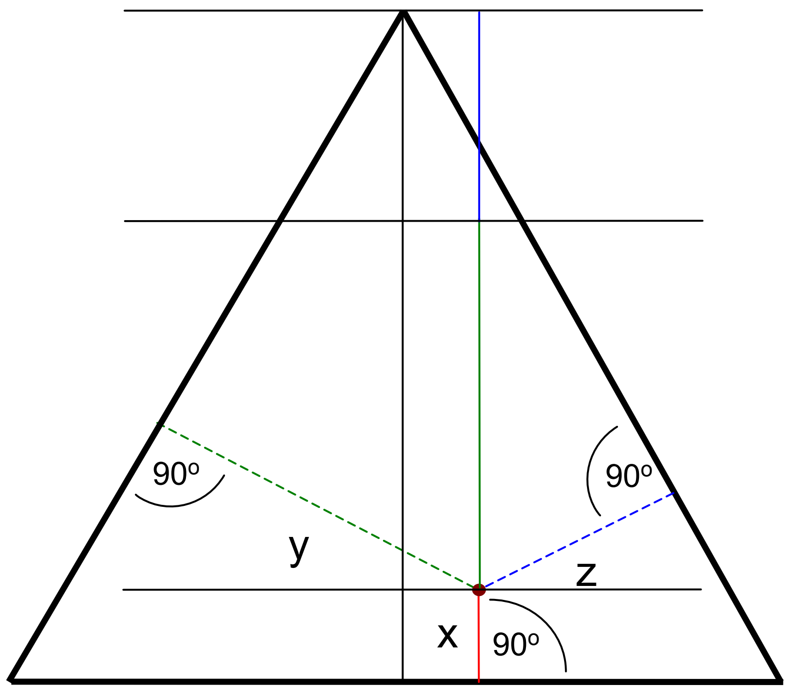
$z = 0$

$y = h$

Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



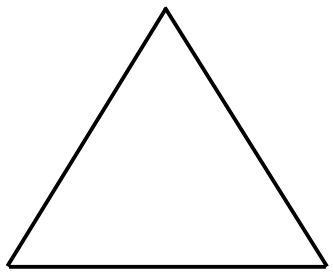
Barycentryczny układ współrzędnych

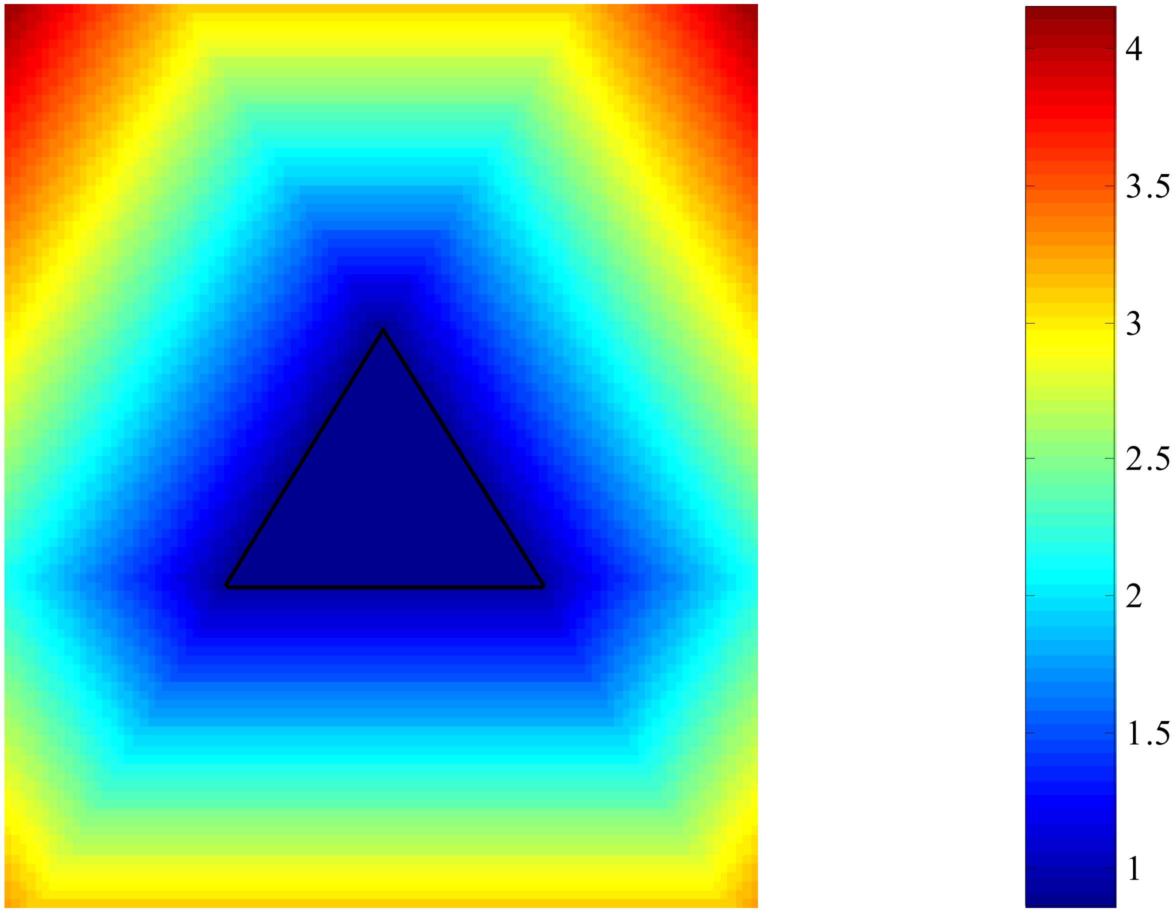
- Twierdzenie Viviani'ego*:
  - w trójkącie równobocznym suma odległości dowolnego punktu znajdującego się wewnątrz tego trójkąta od wszystkich jego boków jest równa wysokości trójkąta
- Twierdzenie (ciekawe samo w sobie) posiada kilka równie ciekawych (ciekawszych?) uogólnień

* Vincenzo Viviani (1622–1703, Florencja)

Barycentryczny układ współrzędnych

- Ilustracja „obliczeniowa”? (wizualizacja)





- Suma odległości każdego punktu od trzech boków trójkąta wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz trójkąta mają jednakowy kolor

...

Barycentryczny układ współrzędnych

- Niech będą dane pewne obiekty scharakteryzowane w kategoriach zmiennych $a \geq 0$, $b \geq 0$ i $c \geq 0$
  - każdy obiekt jest więc opisany wektorem trójelementowym **t** = $[u, v, w]^T$, gdzie
    - u jest wartością zmiennej a
    - v jest wartością zmiennej b
    - w jest wartością zmiennej c

    - (wektory **u** w zapisie wierszowym)

Barycentryczny układ współrzędnych

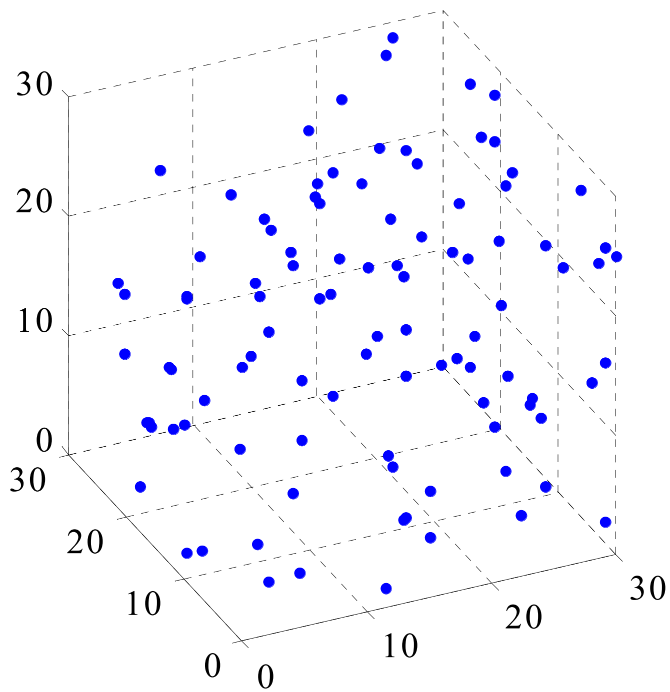
- Przykładowe dane

a	b	c
3.00	8.00	4.00
6.00	9.00	8.00
5.00	7.00	1.00
9.00	2.00	2.00
7.00	4.00	2.00
5.00	9.00	2.00
1.00	9.00	6.00
	...	
	...	
	...	
5.00	9.00	2.00

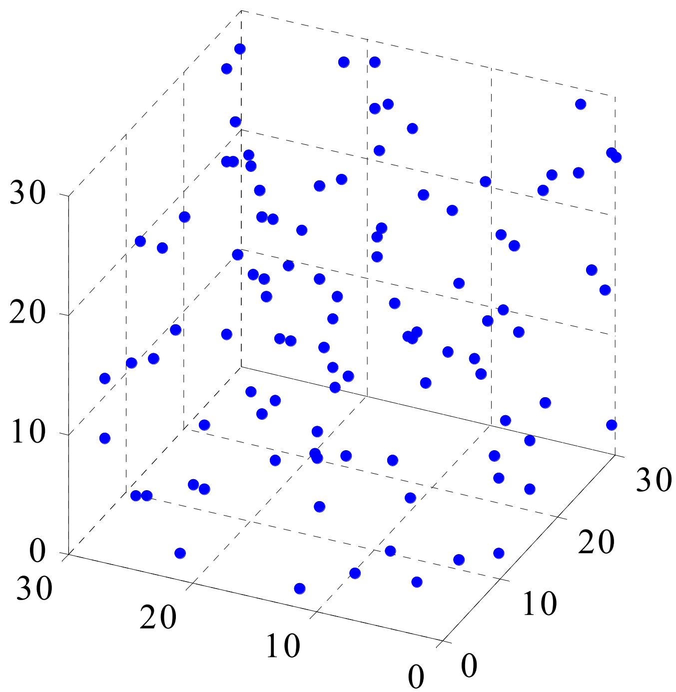
Barycentryczny układ współrzędnych

- Wizualizacja: wykres 3-wymiarowy (wykres rozrzutu)

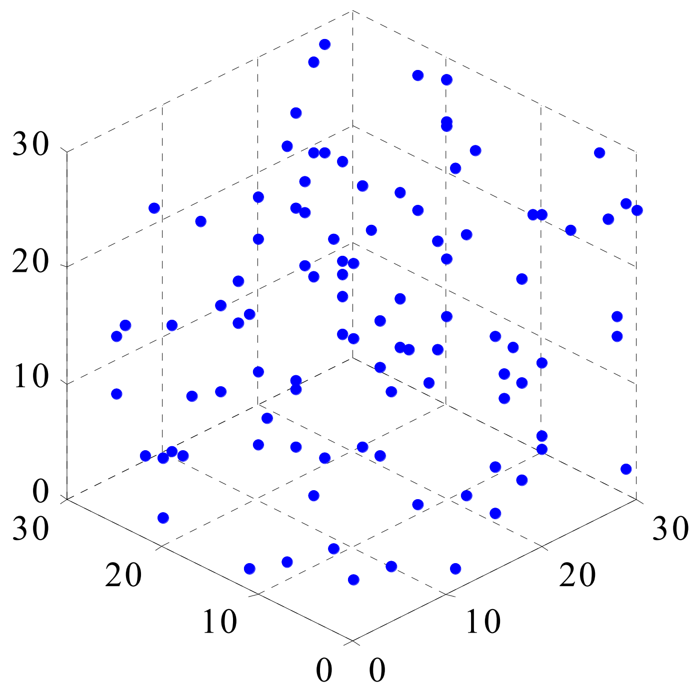
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

- Jeżeli zmienne a, b i c spełniają $a + b + c = n$, gdzie $n > 0$ jest stałą, to do skutecznej wizualizacji wystarczy wykres 2-wymiarowy
  - (dlaczego?)

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a+b+c** = n·**1**

a	**b**	**c**
1.00	10.00	19.00
3.00	12.00	15.00
21.00	4.00	5.00
7.00	8.00	15.00
16.00	7.00	7.00
5.00	14.00	11.00
0.00	9.00	21.00
	...	
a	b	c
	...	
5.00	11.00	14.00

Barycentryczny układ współrzędnych

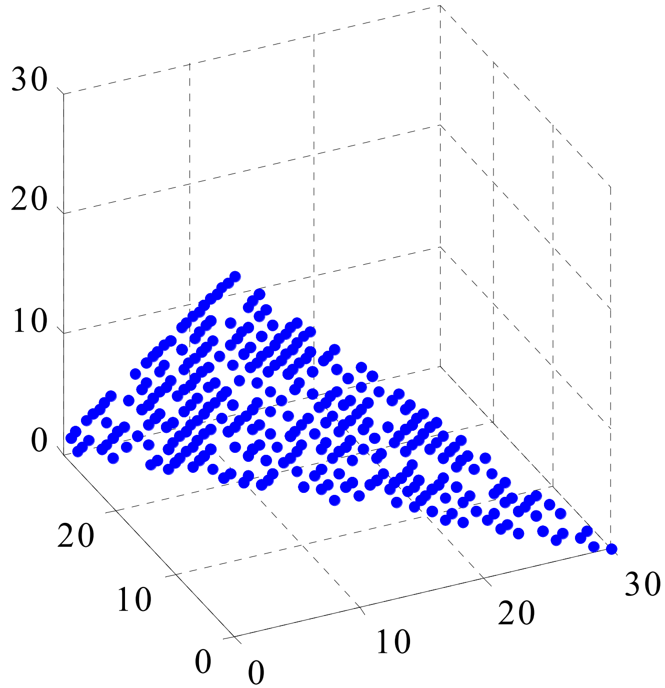
- Przykładowe dane spełniające **a+b+c** = n·**1** (n = 30)

a	**b**	**c**	**a+b+c**
1.00	10.00	19.00	30
3.00	12.00	15.00	30
21.00	4.00	5.00	30
7.00	8.00	15.00	30
16.00	7.00	7.00	30
5.00	14.00	11.00	30
0.00	9.00	21.00	30
	...		
a	b	c	a+b+c = 30
	...		
5.00	11.00	14.00	30

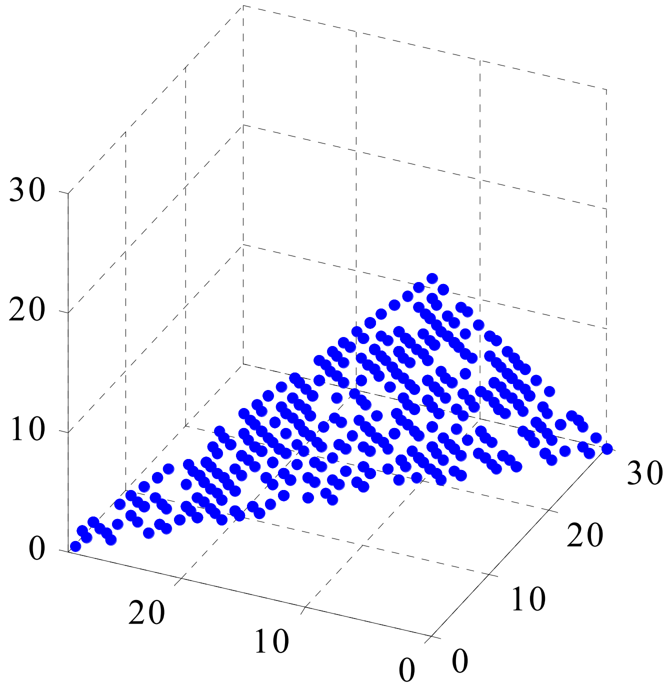
Barycentryczny układ współrzędnych

- Wizualizacja: pierwsze podejście
  wykres 3-wymiarowy (wykres rozrzutu)

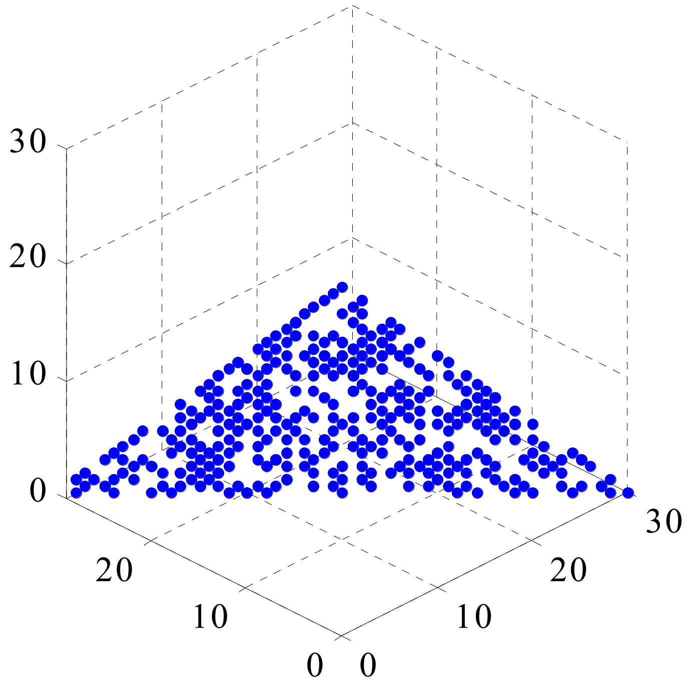
Barycentryczny układ współrzędnych



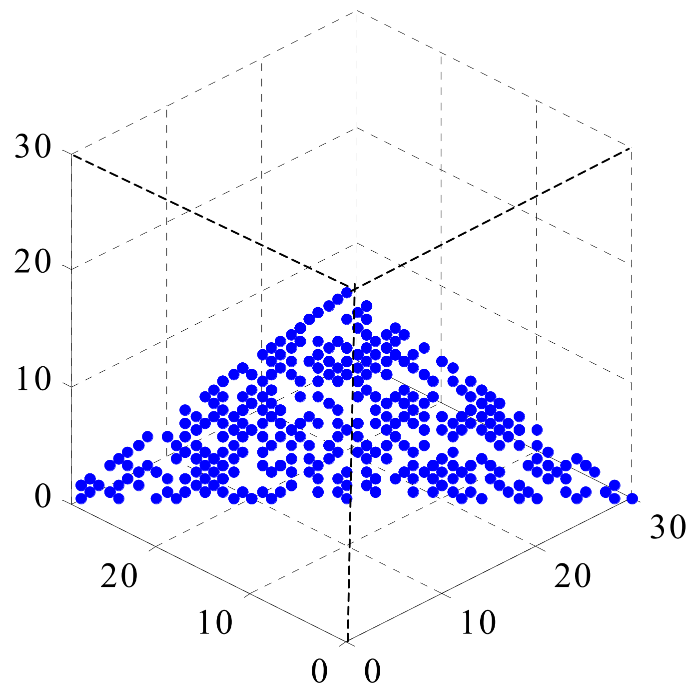
Barycentryczny układ współrzędnych



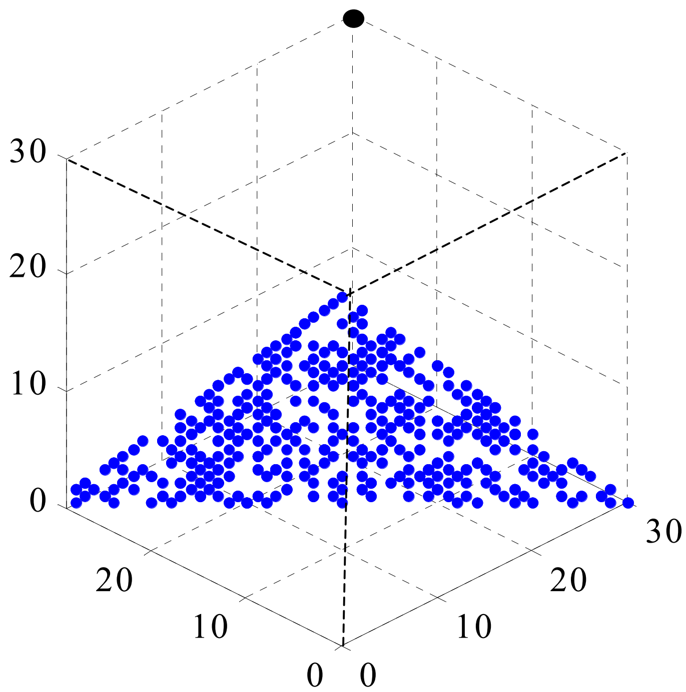
Barycentryczny układ współrzędnych



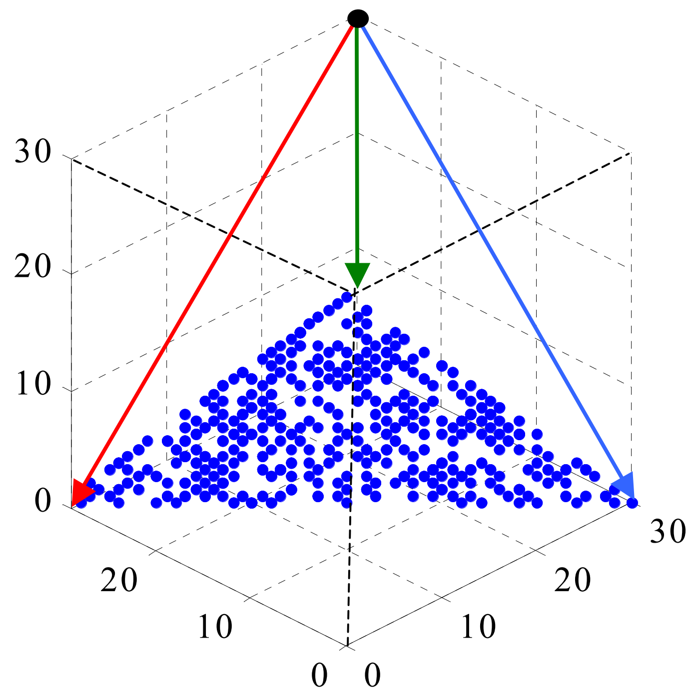
Barycentryczny układ współrzędnych



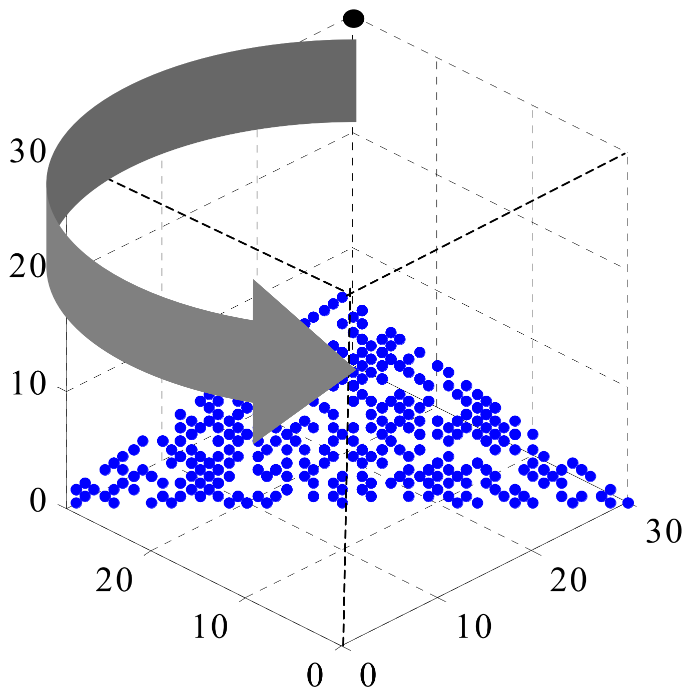
Barycentryczny układ współrzędnych



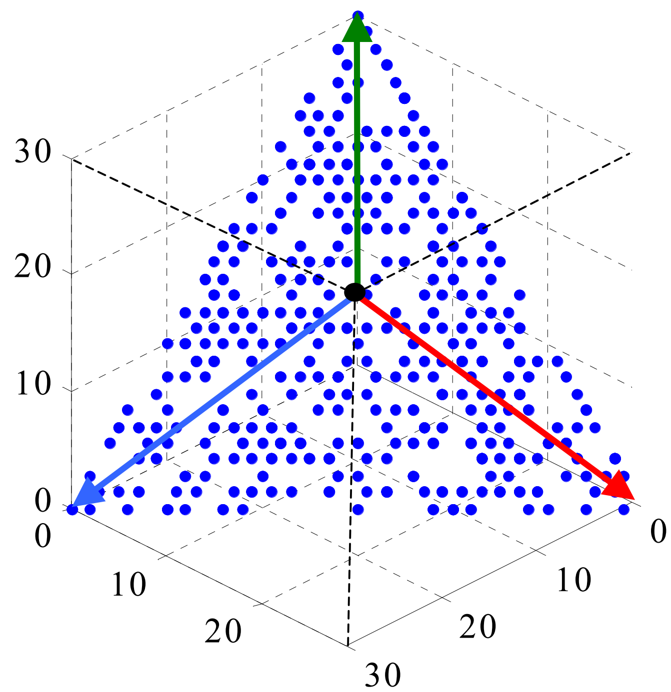
Barycentryczny układ współrzędnych



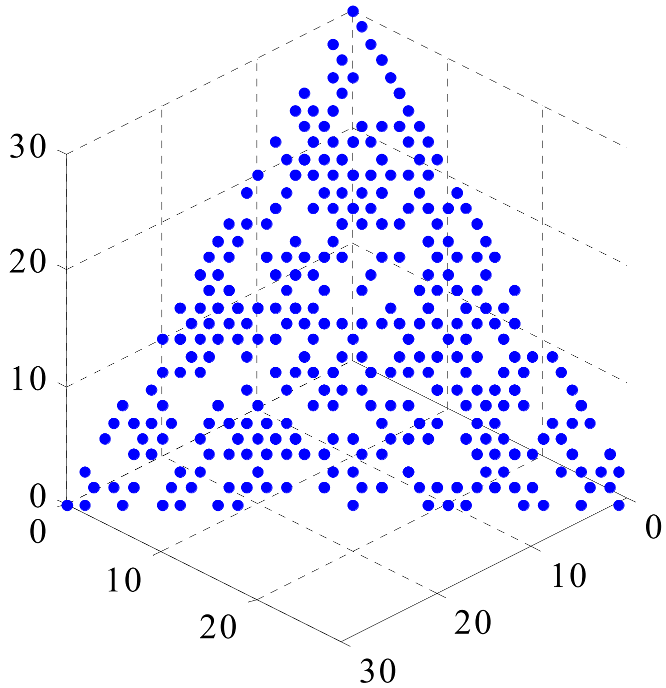
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

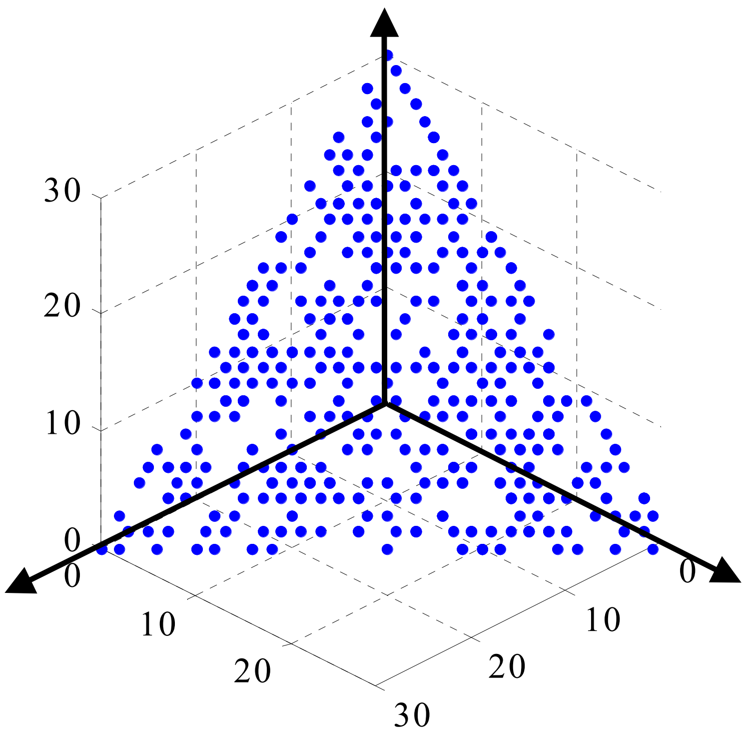


Barycentryczny układ współrzędnych

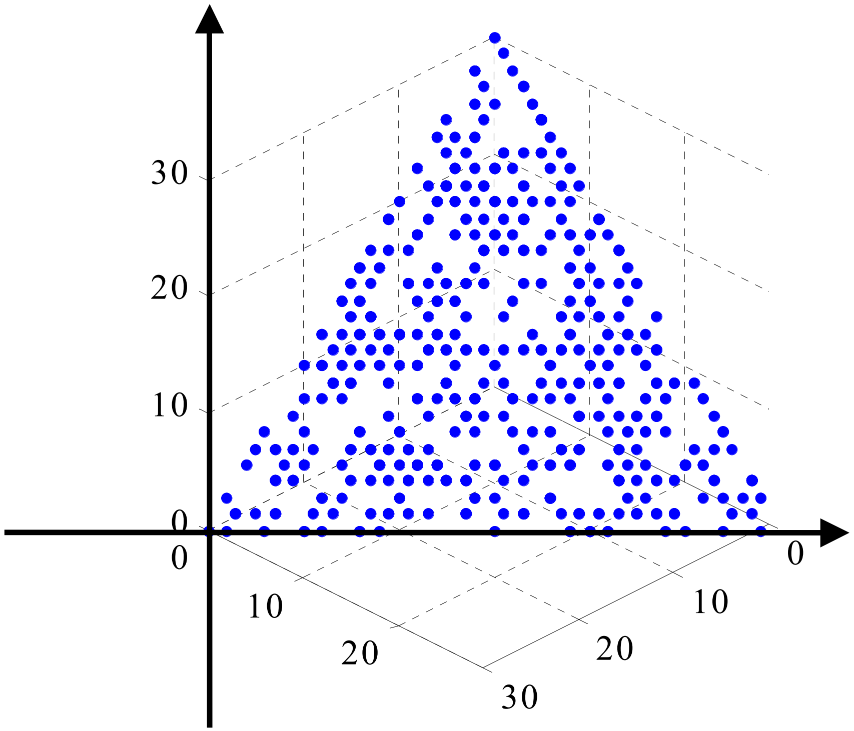


- Trójkąt jest równoboczny ponieważ długość każdego z jego boków wynosi $(30^2 + 30^2)^{1/2} = 30 \cdot (2^{1/2})$

Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

- Ewidentny wniosek: jeden wymiar jest zbędny!

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a**+**b**+**c** = n·**1**
  - takie wartości mogą być bezpośrednio przedstawiane w trójkątnym układzie barycentrycznym (który jest układem dwuwymiarowym)
  - dane warto przekształcić do postaci, w której n = 1
    - w tym przypadku polega to na podzieleniu obu stron równania **a**+**b**+**c** = n·**1** przez n (które jest z założenia dodatnie)
    - mamy więc

      a+**b**+**c** = n·**1**

      (**a**+**b**+**c**)/n = n·**1**/n

      a/n+**b**/n+**c**/n = **1**
    - wektorom **a**/n, **b**/n i **c**/n można nadać nowe nazwy, np. **u**, **v** i **w**

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a**+**b**+**c** = n·**1**
  - przeskalowanie

a/n	**b**/n	**c**/n	(**a**+**b**+**c**)/n
0.03	0.33	0.63	1.00
0.10	0.40	0.50	1.00
0.70	0.13	0.17	1.00
0.23	0.27	0.50	1.00
0.53	0.23	0.23	1.00
0.17	0.47	0.37	1.00
0.00	0.30	0.70	1.00
	...		
u	v	w	u+v+w = 1
	...		
0.17	0.37	0.47	1.00

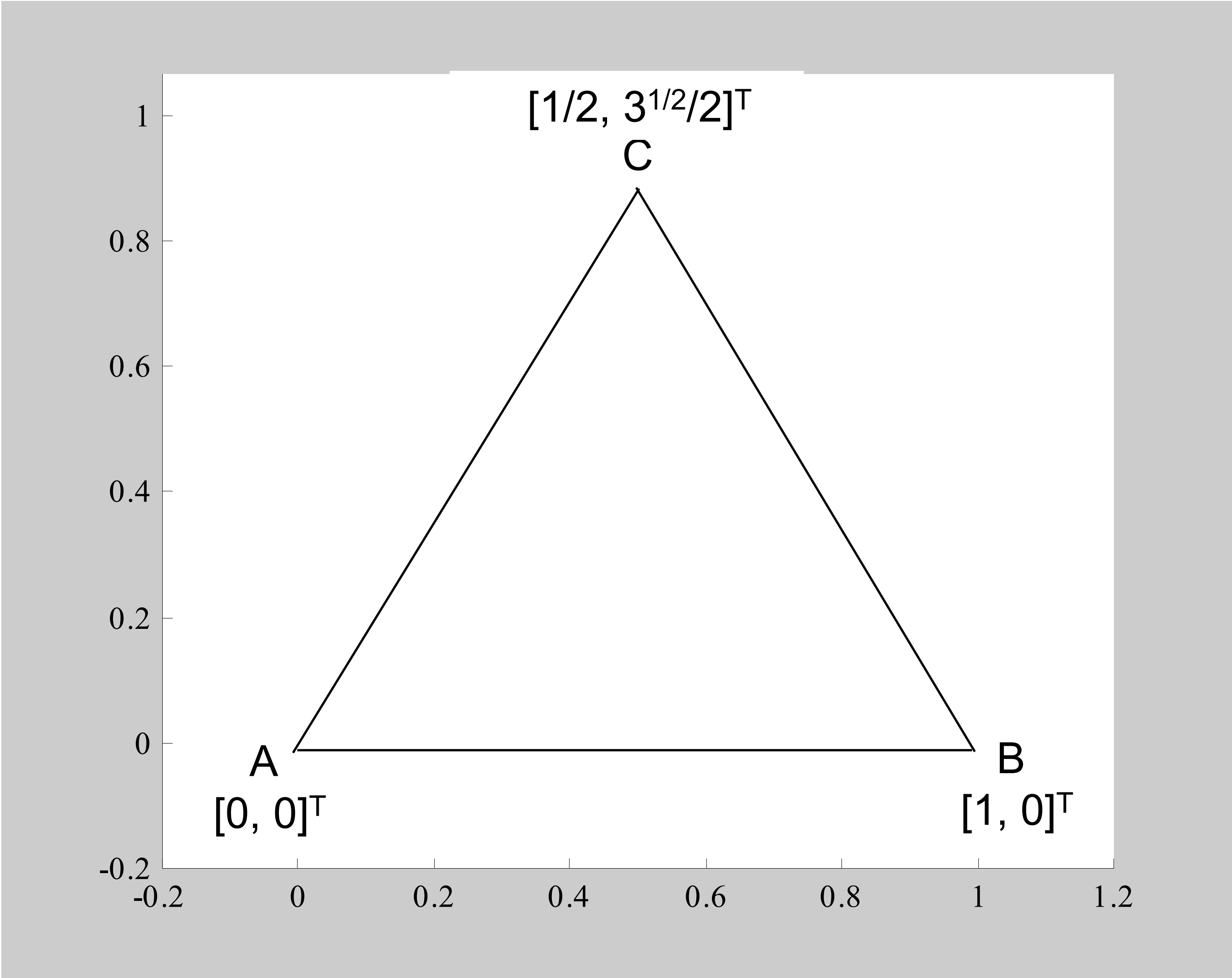
Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a**+**b**+**c** = n·**1**

a/n	**b**/n	**c**/n
0.03	0.33	0.63
0.10	0.40	0.50
0.70	0.13	0.17
0.23	0.27	0.50
0.53	0.23	0.23
0.17	0.47	0.37
0.00	0.30	0.70
	...	
u	v	w
	...	
0.17	0.37	0.47

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = n\cdot\mathbf{1}$
  - niech wierzchołki A, B i C trójkąta równobocznego (reprezentującego odpowiedni układ barycentryczny) mają współrzędne dane wektorami (odpowiednio) $[0,0]^T$, $[1,0]^T$ i $[1/2,3^{1/2}/2]^T$



[1/2, 3^{1/2}/2]^T
C
A
[0, 0]^T
B
[1, 0]^T
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a**+**b**+**c** = n·**1**
  - współrzędne dwuwymiarowe dla punktów reprezentowanych przez (przekształcone) wartości $[u,v,w]^T$ tworzy się wykorzystując wzór:

    $[x, y]^T = u\cdot[0,0]^T + v\cdot[1,0]^T + w\cdot[1/2,3^{1/2}/2]^T = [v+w/2, w\cdot 3^{1/2}/2]^T$

    który, dzięki faktowi, że $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$ i $u+v+w = 1$, reprezentuje elementy kombinacji wypukłej wektorów $[0,0]^T$, $[1,0]^T$ i $[1/2,3^{1/2}/2]^T$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a+b+c** = n·**1**
  - te same współrzędne można utworzyć bezpośrednio z (oryginalnych) wartości $[a,b,c]^T$, wykorzystując wzór

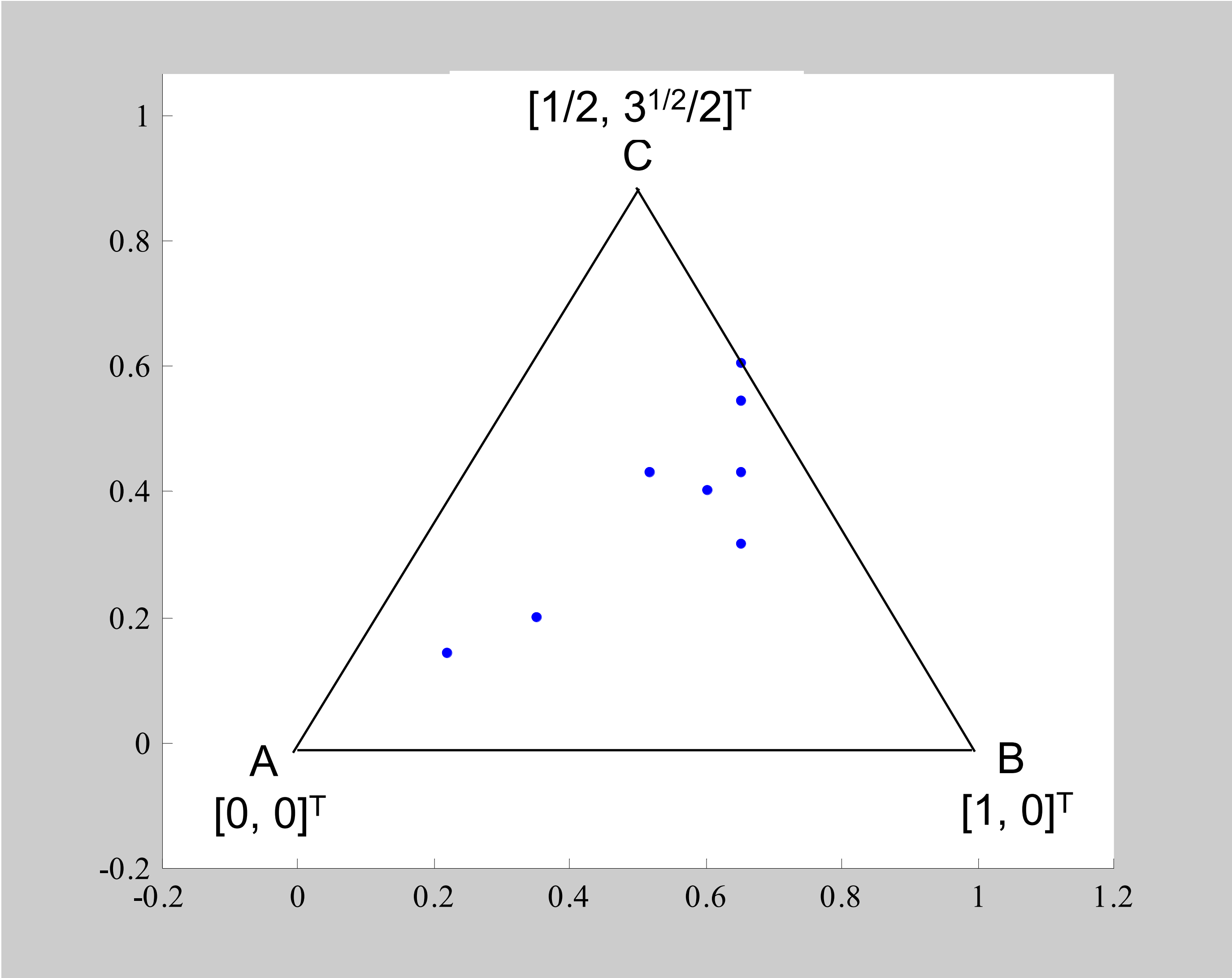
    $[x, y]^T =$
    $= a/(a+b+c)\cdot[0,0]^T + b/(a+b+c)\cdot[1,0]^T + a/(a+b+c)\cdot[1/2,3^{1/2}/2]^T =$
    $= [2b+c,\ 3^{1/2}c]^T / (2a+2b+2c)$

    - w którym uwzględniono: $u = a/(a+b+c)$, $v = b/(a+b+c)$, $w = c/(a+b+c)$
      - oczywiście pamiętamy, że a, b, c ≥ 0

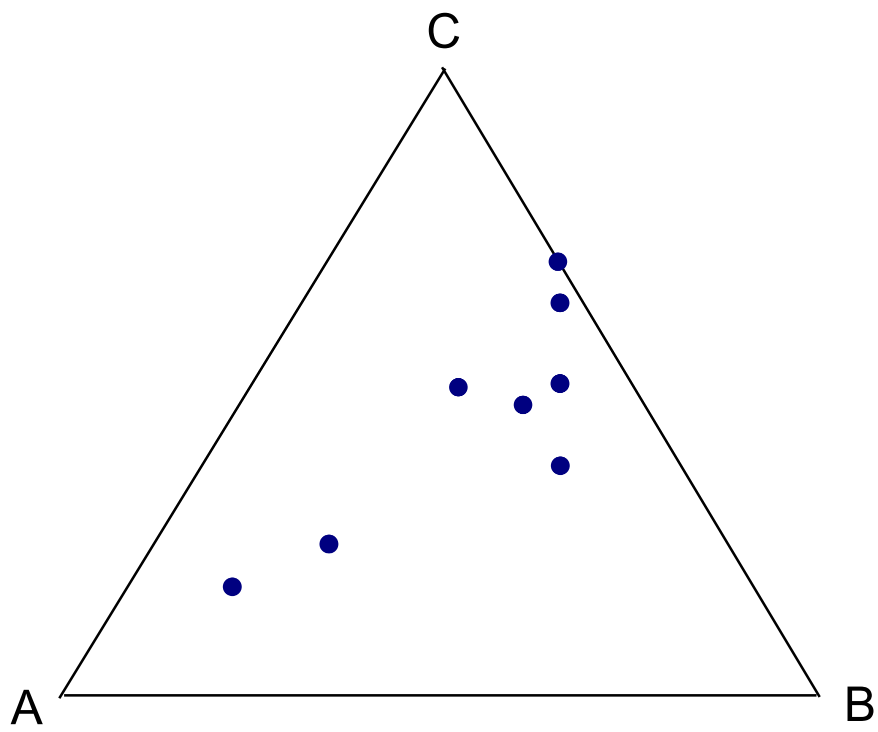
Barycentryczny układ współrzędnych

- Współrzędne dwuwymiarowe danych spełniających **a**+**b**+**c** = n·**1**

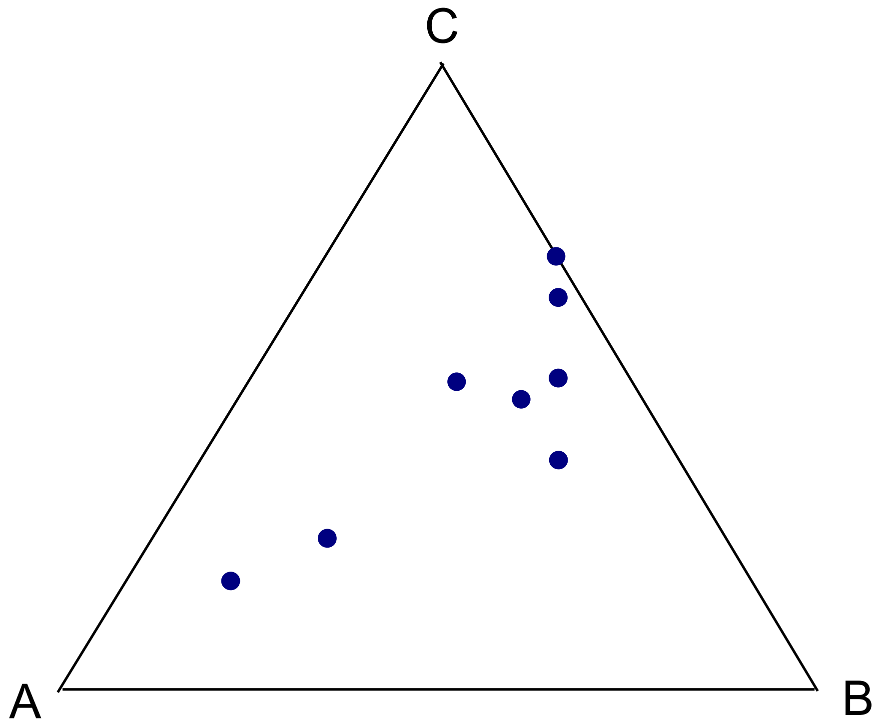
x	**y**
0.65	0.55
0.65	0.43
0.22	0.14
0.52	0.43
0.35	0.20
0.65	0.32
0.65	0.61
...	
x	y
...	
0.60	0.40

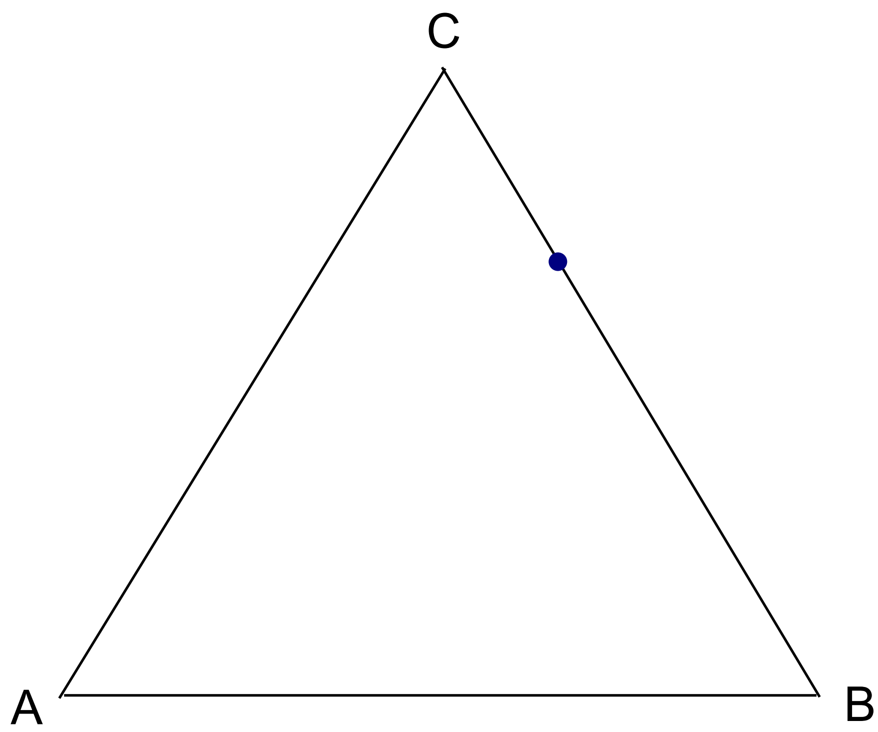


[1/2, 3^{1/2}/2]^T
C
A
[0, 0]^T
B
[1, 0]^T
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

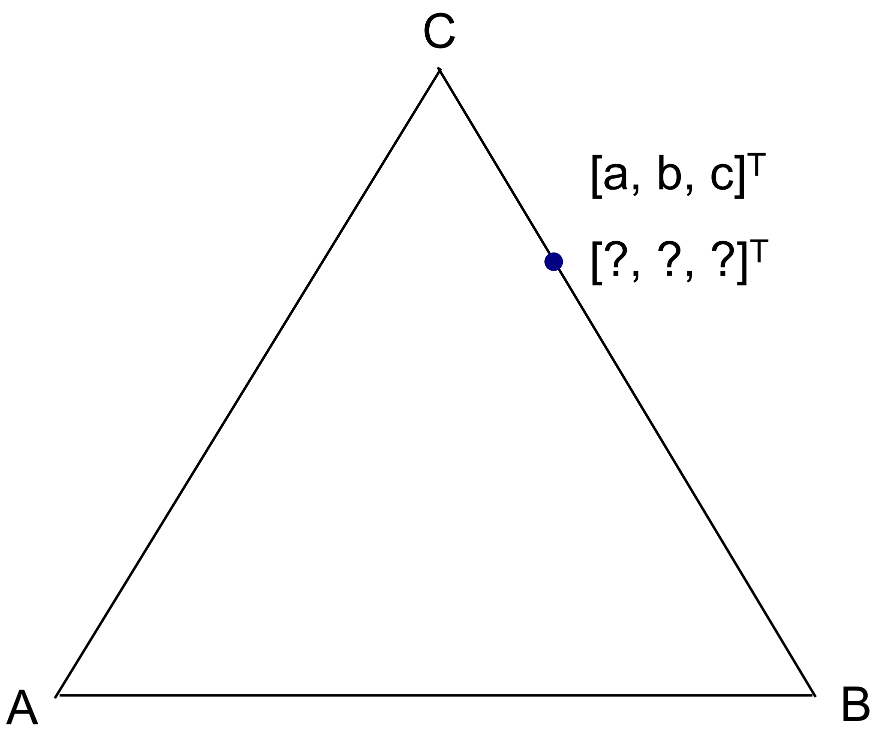

C
A
B

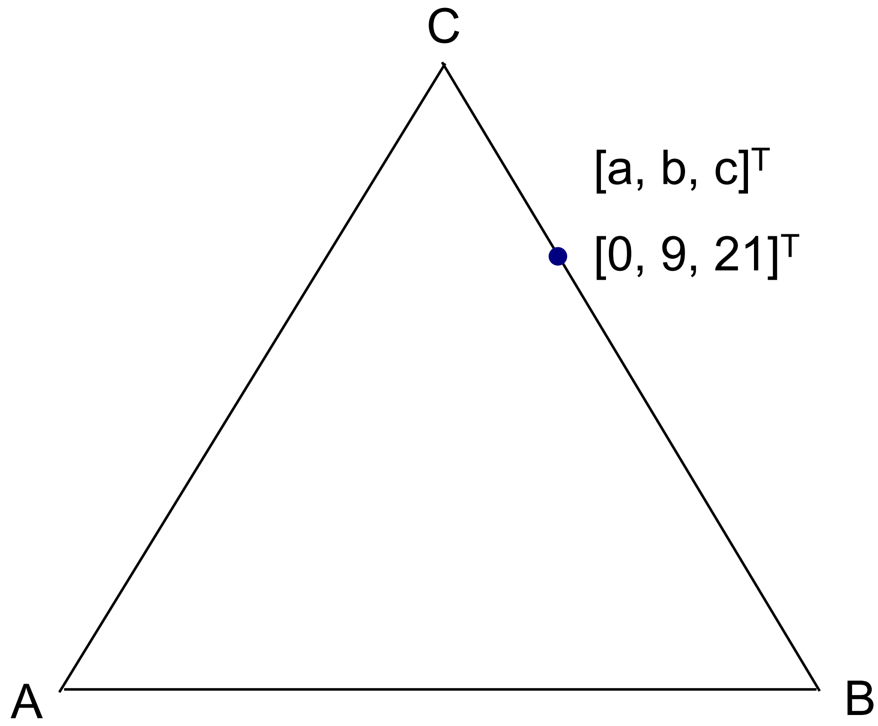
a	b	c
1.00	10.00	19.00
3.00	12.00	15.00
21.00	4.00	5.00
7.00	8.00	15.00
16.00	7.00	7.00
5.00	14.00	11.00
0.00	9.00	21.00
	...	
a	b	c
	...	
5.00	11.00	14.00

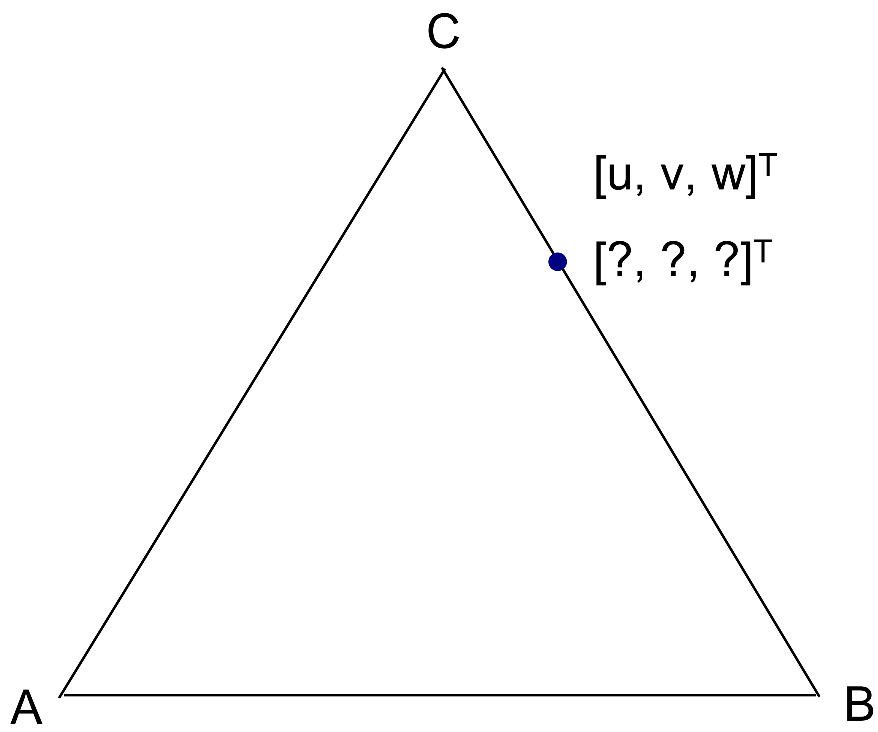


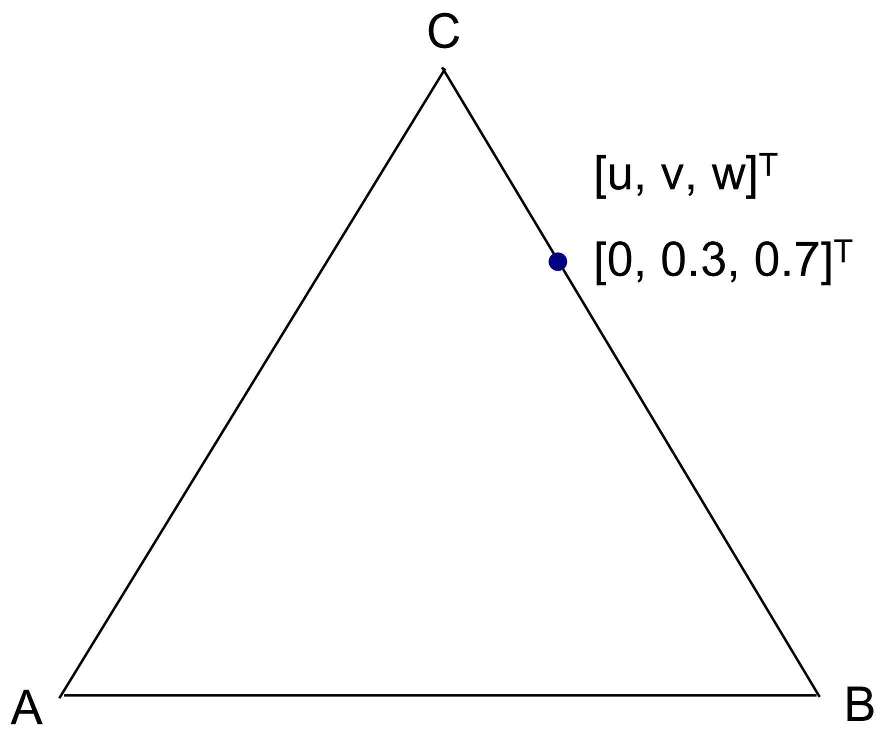

C
A
B

a	**b**	**c**
1.00	10.00	19.00
3.00	12.00	15.00
21.00	4.00	5.00
7.00	8.00	15.00
16.00	7.00	7.00
5.00	14.00	11.00
0.00	9.00	21.00
	...	
a	b	c
	...	
5.00	11.00	14.00

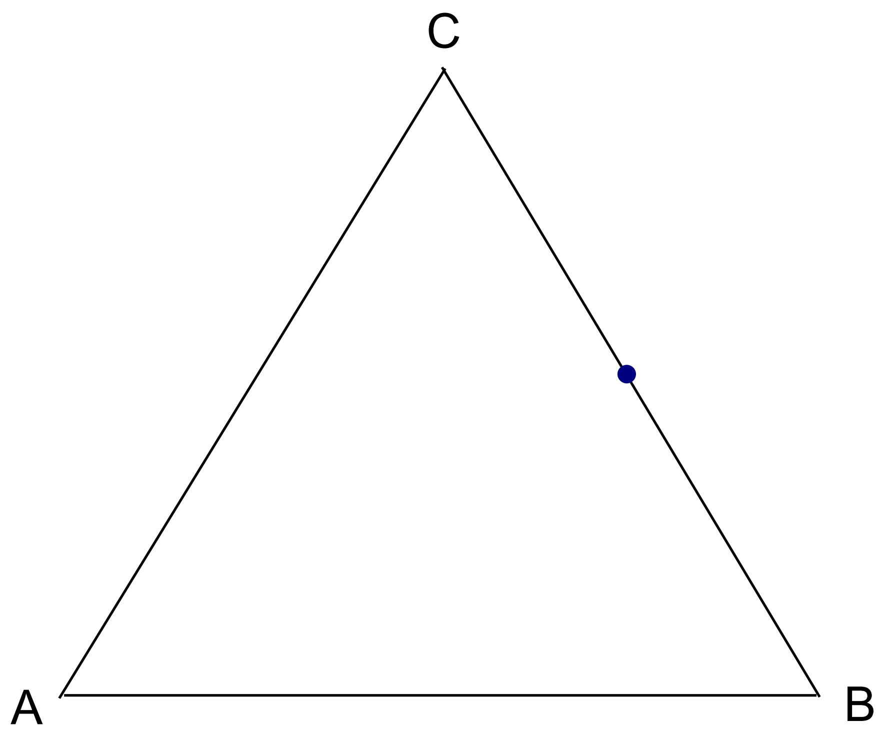


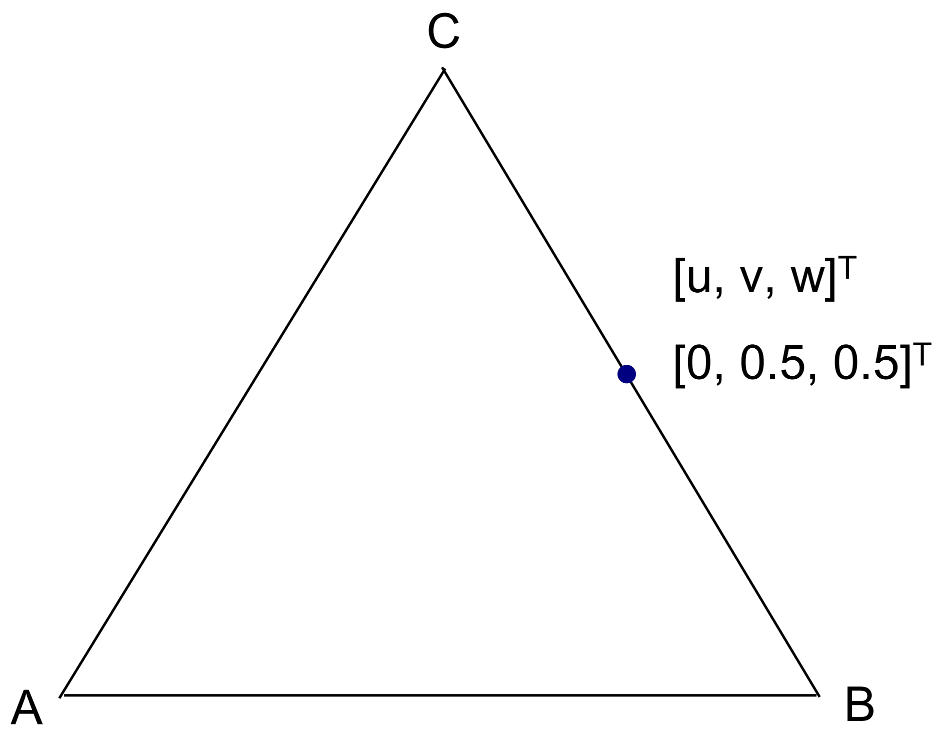

C
[a, b, c]^T
[0, 9, 21]^T
A
B

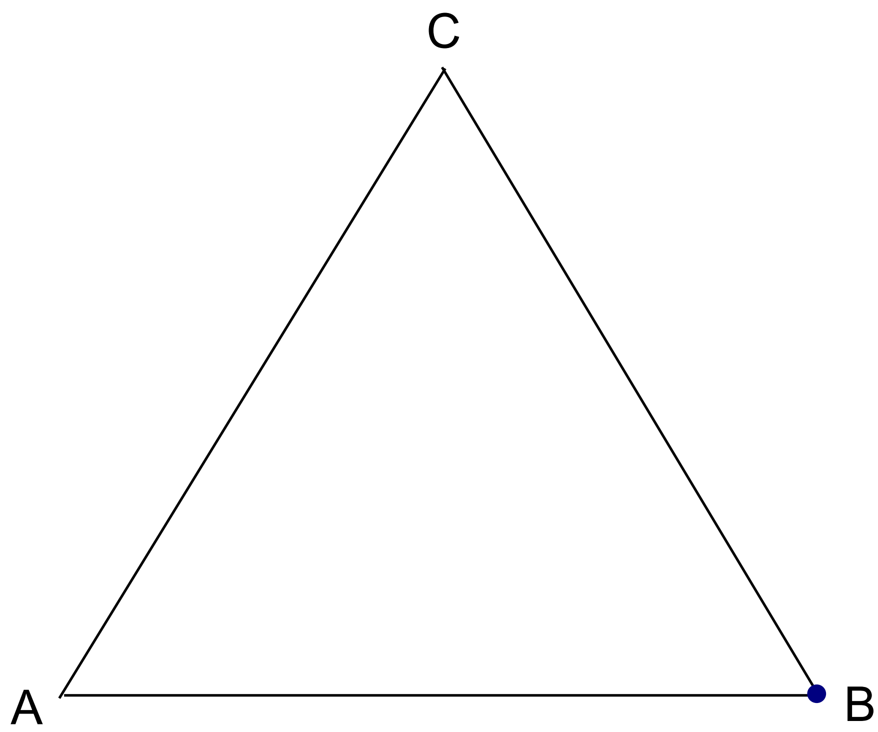

C
[u, v, w]^T
[?, ?, ?]^T
A
B

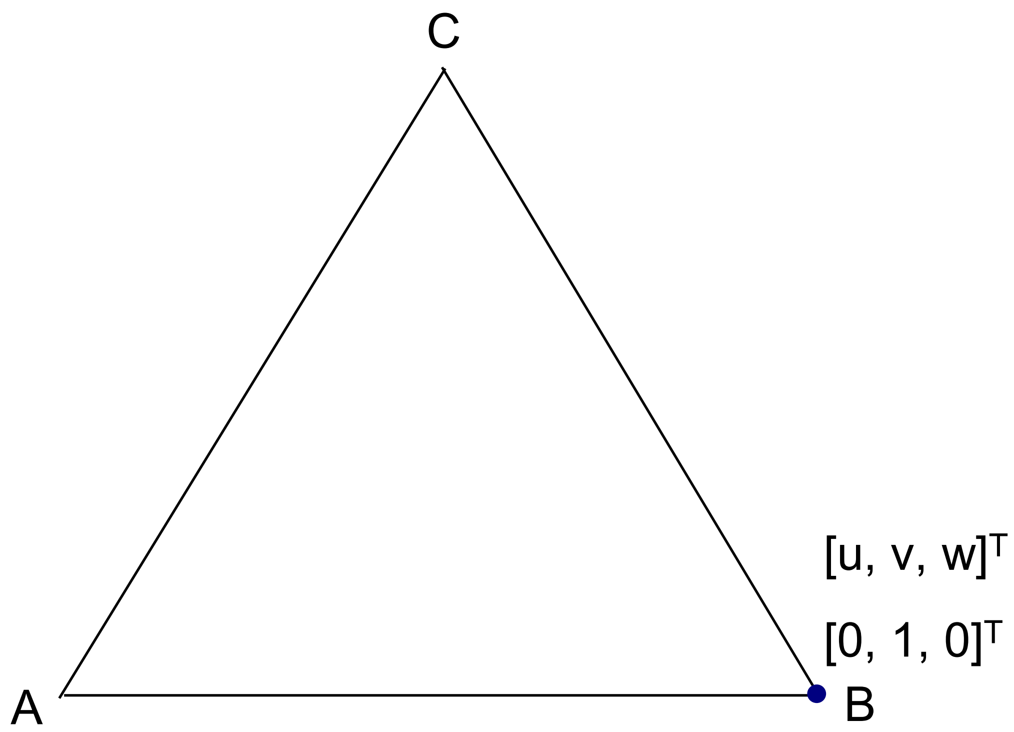


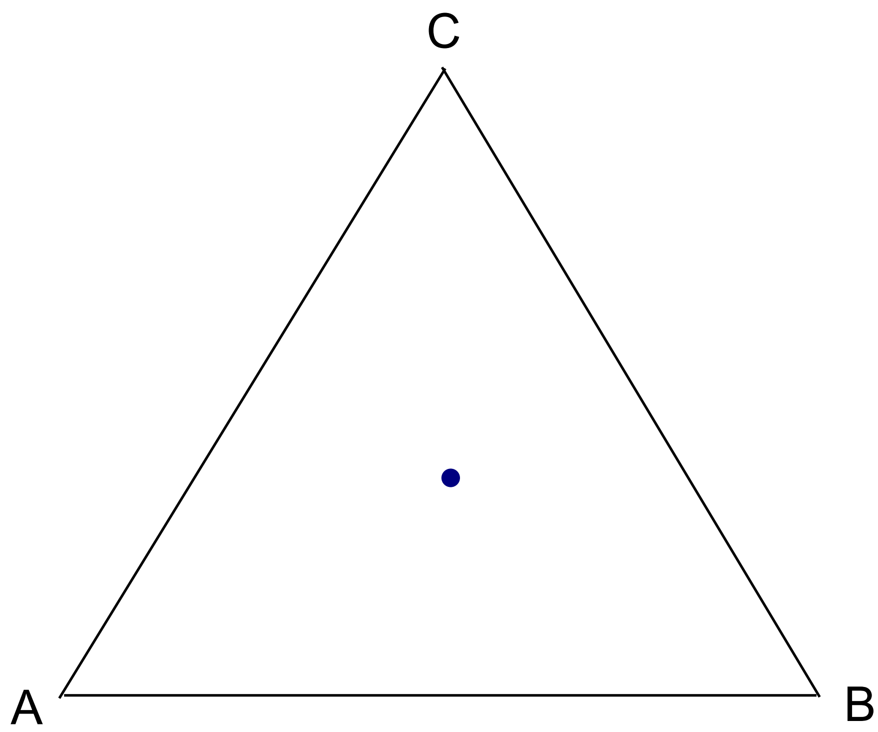
C
[u, v, w]^T
[0, 0.3, 0.7]^T
A
B

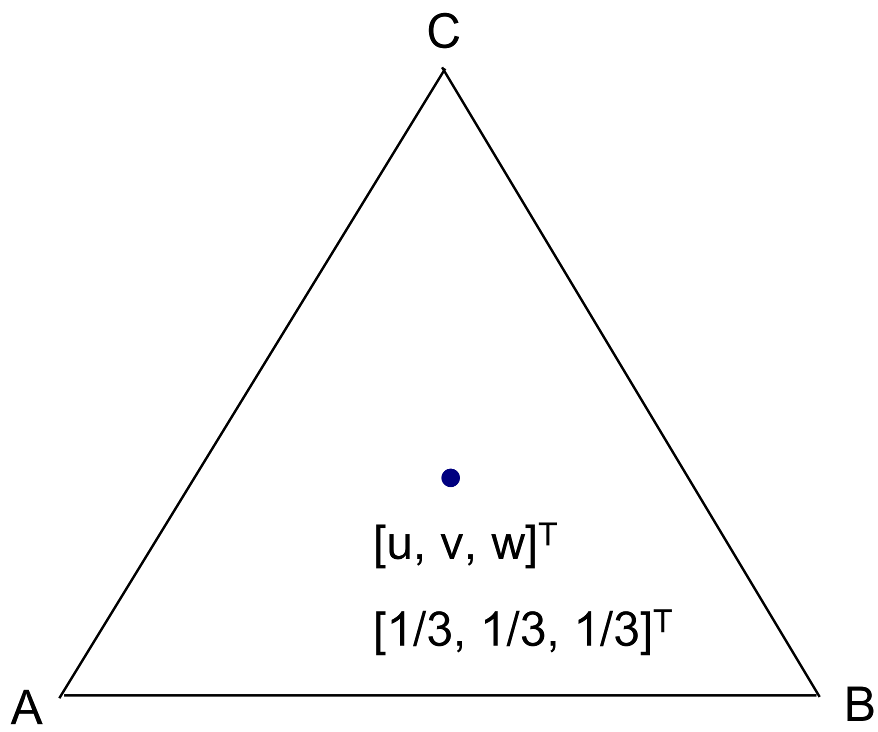

C
A
B


C
[u, v, w]T
[0, 0.5, 0.5]T
A
B


C
A
B

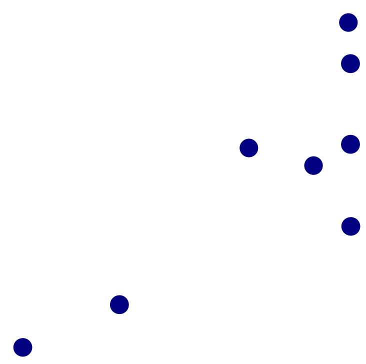

C
$[u, v, w]^T$
$[0, 1, 0]^T$
A
B


C
A
B

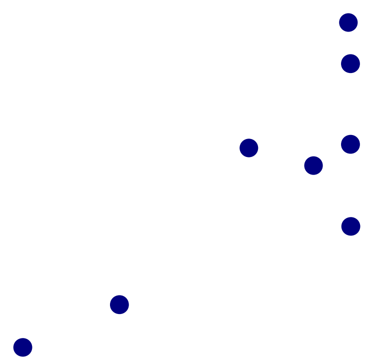


C
[u, v, w]^T
[1/3, 1/3, 1/3]^T
A
B

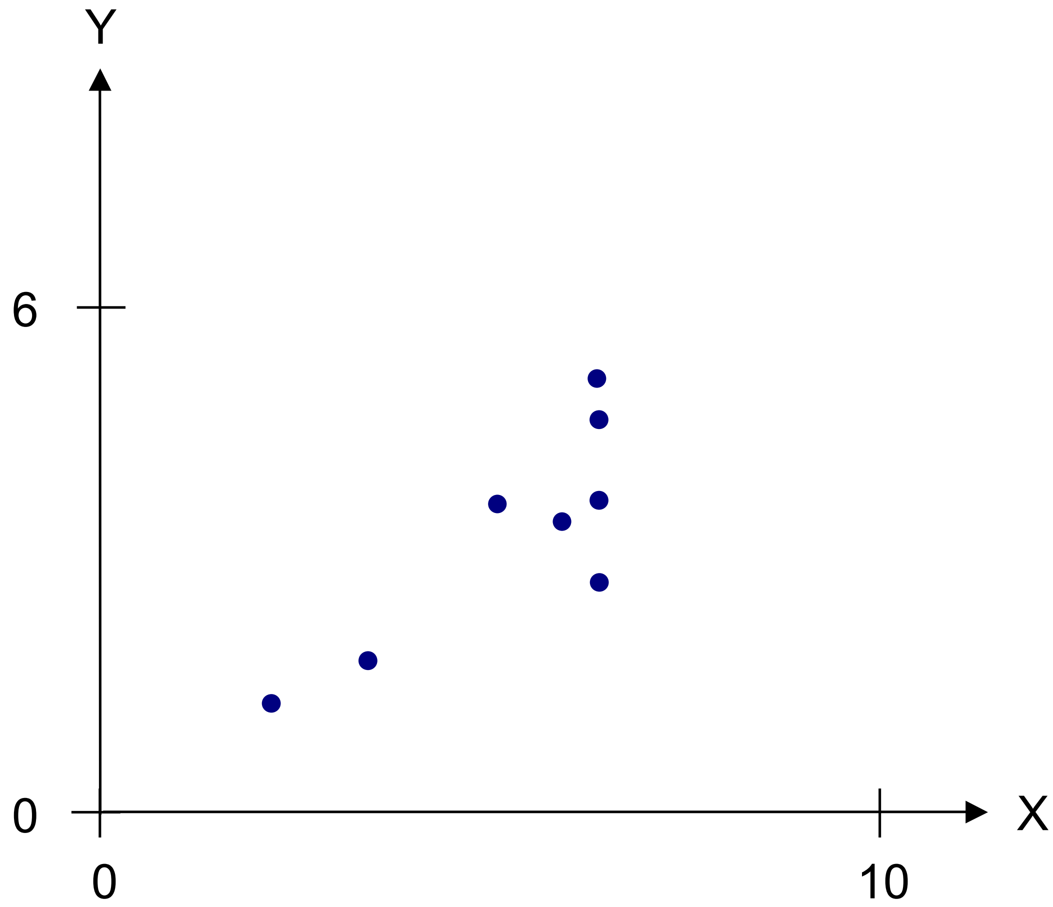
...



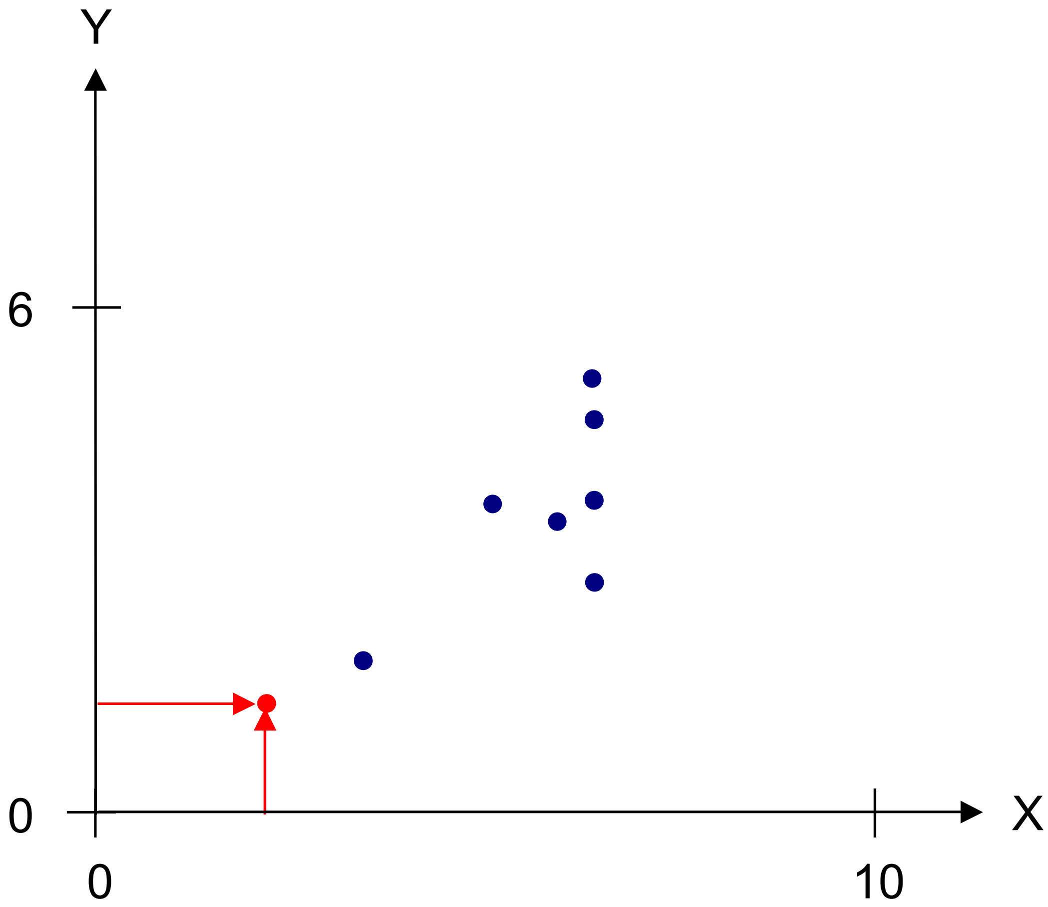
6.50	4.48
6.50	3.54
2.17	1.18
5.17	3.54
3.50	1.65
6.50	2.59
6.50	4.95
6.00	3.30

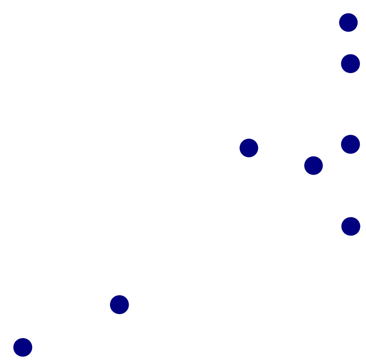


x	y
6.50	4.48
6.50	3.54
2.17	1.18
5.17	3.54
3.50	1.65
6.50	2.59
6.50	4.95
6.00	3.30

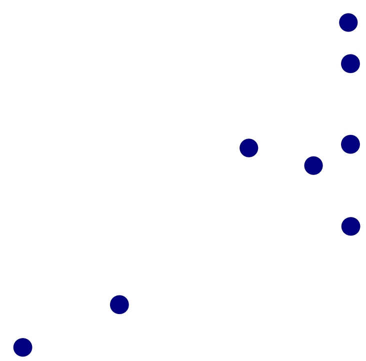


x	y
6.50	4.48
6.50	3.54
2.17	1.18
5.17	3.54
3.50	1.65
6.50	2.59
6.50	4.95
6.00	3.30

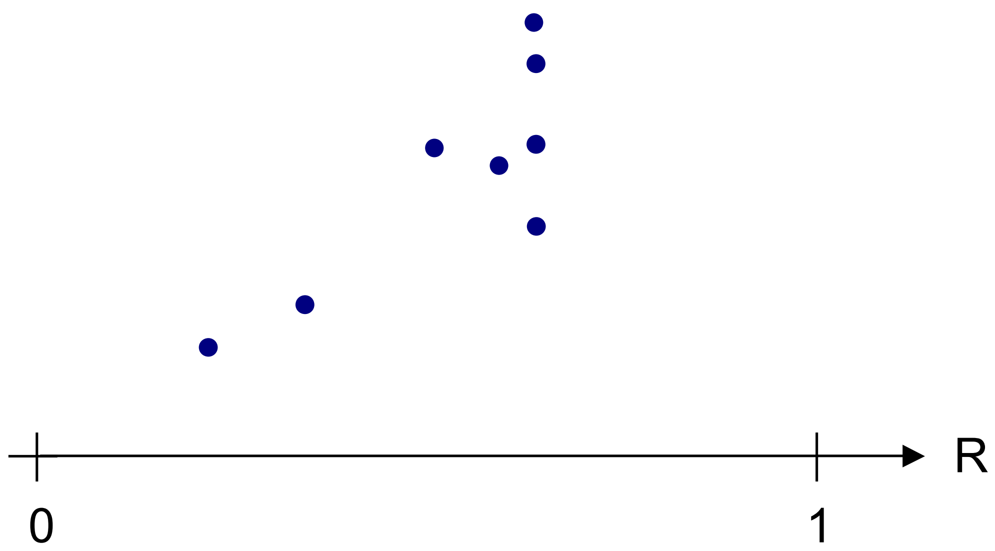




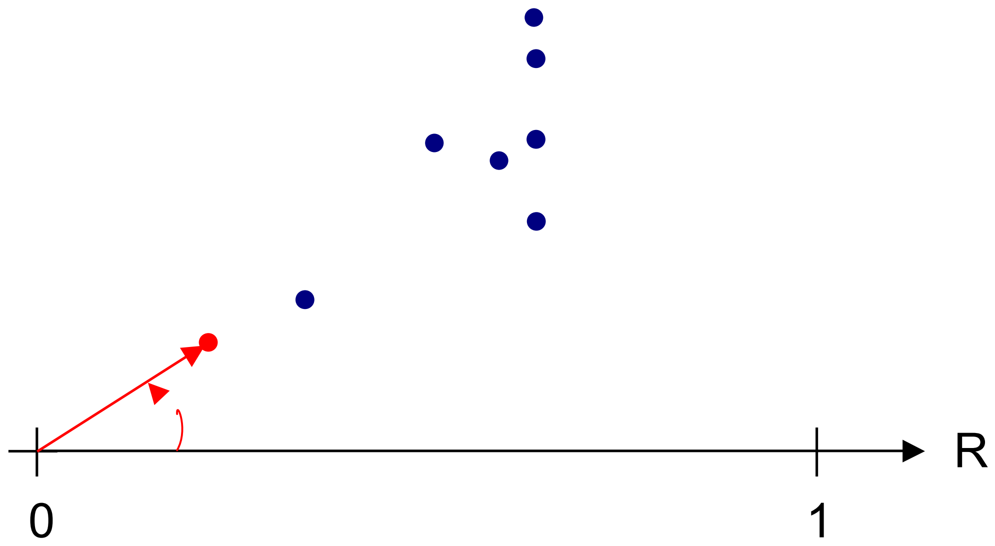
0.60	0.79
0.50	0.74
0.50	0.25
0.60	0.63
0.44	0.39
0.38	0.70
0.65	0.82
0.50	0.68

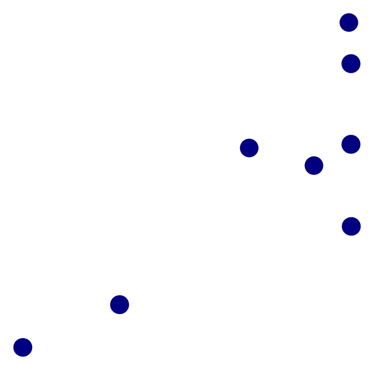


θ	r
0.60	0.79
0.50	0.74
0.50	0.25
0.60	0.63
0.44	0.39
0.38	0.70
0.65	0.82
0.50	0.68

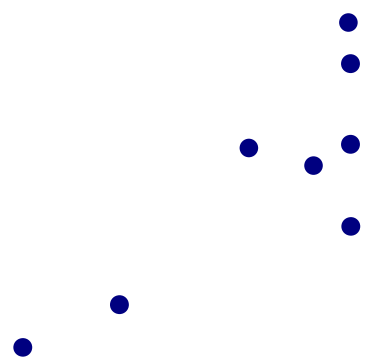


θ	**r**
0.60	0.79
0.50	0.74
0.50	0.25
0.60	0.63
0.44	0.39
0.38	0.70
0.65	0.82
0.50	0.68

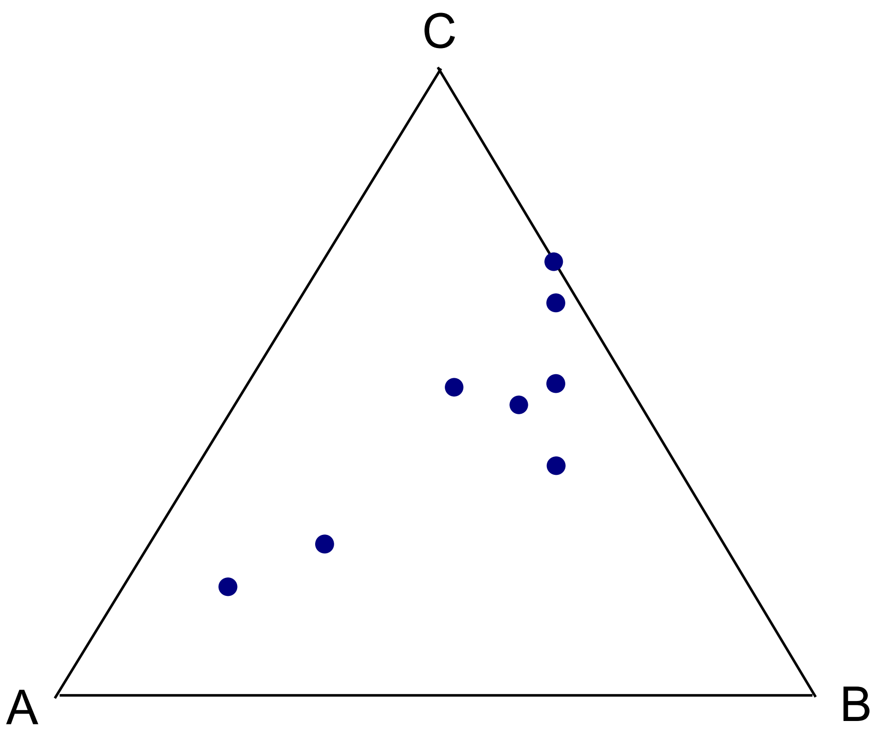




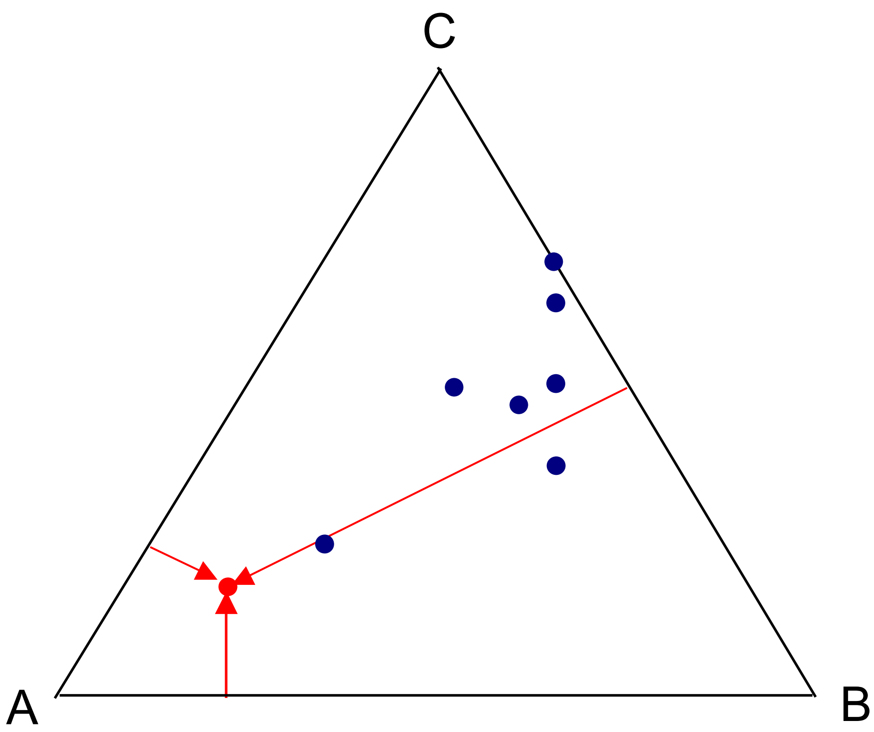
1.00	10.00	19.00
3.00	12.00	15.00
21.00	4.00	5.00
7.00	8.00	15.00
16.00	7.00	7.00
5.00	14.00	11.00
0.00	9.00	21.00
5.00	11.00	14.00



a	b	c
1.00	10.00	19.00
3.00	12.00	15.00
21.00	4.00	5.00
7.00	8.00	15.00
16.00	7.00	7.00
5.00	14.00	11.00
0.00	9.00	21.00
5.00	11.00	14.00



a	b	c
1.00	10.00	19.00
3.00	12.00	15.00
21.00	4.00	5.00
7.00	8.00	15.00
16.00	7.00	7.00
5.00	14.00	11.00
0.00	9.00	21.00
5.00	11.00	14.00

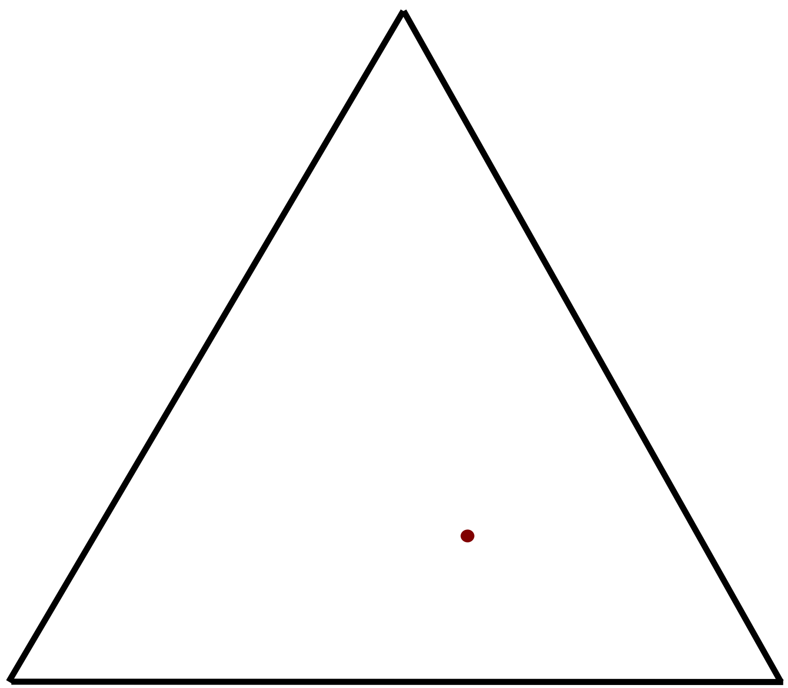


...

Barycentryczny układ współrzędnych

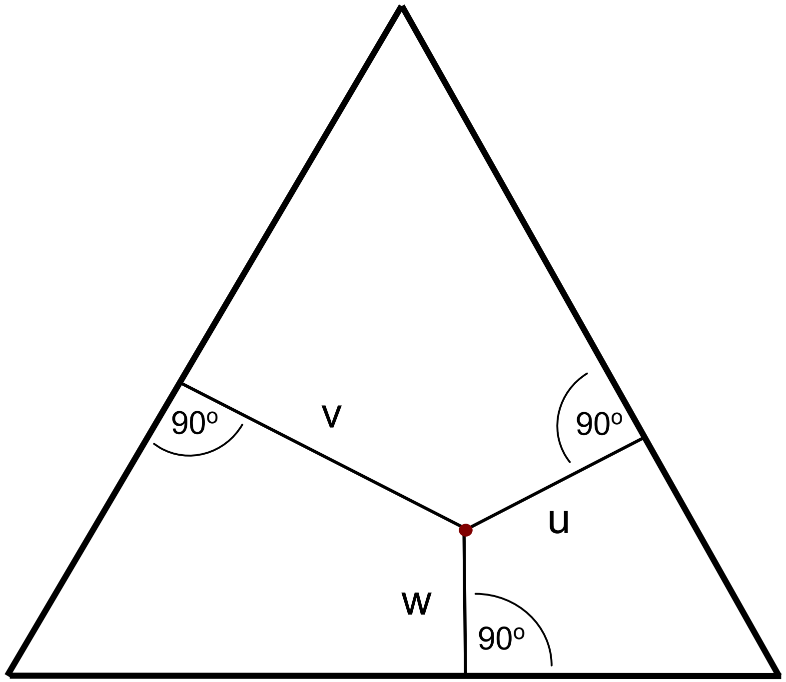
- Wzór oparty na kombinacji wypukłej pozwala na znalezienie w trójkącie położenia punktu na podstawie jego współrzędnych barycentrycznych
- Pytanie: jak (w ogólnym przypadku) znaleźć współrzędne barycentryczne punktu znając jego położenie w trójkącie?

Barycentryczny układ współrzędnych



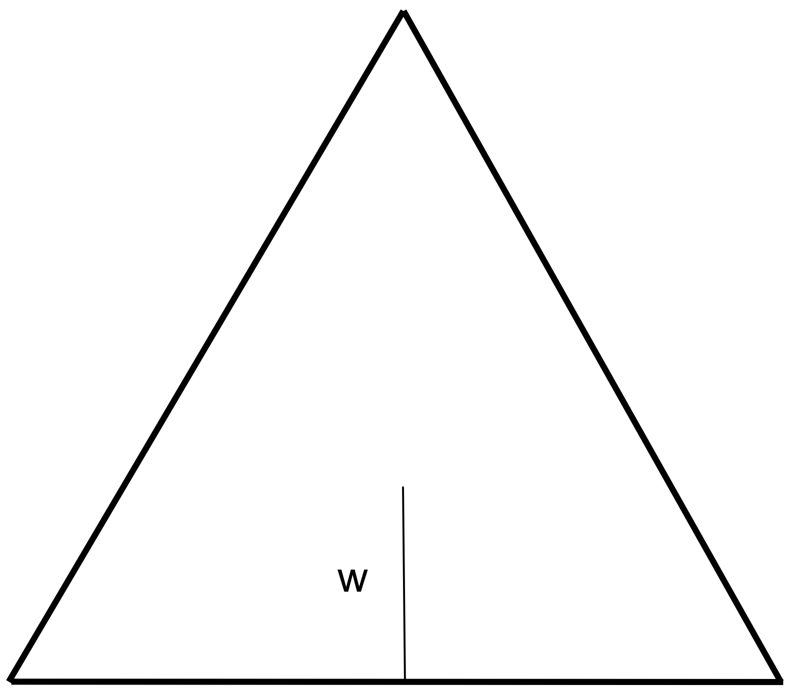
$[?, ?, ?]^T$

Barycentryczny układ współrzędnych

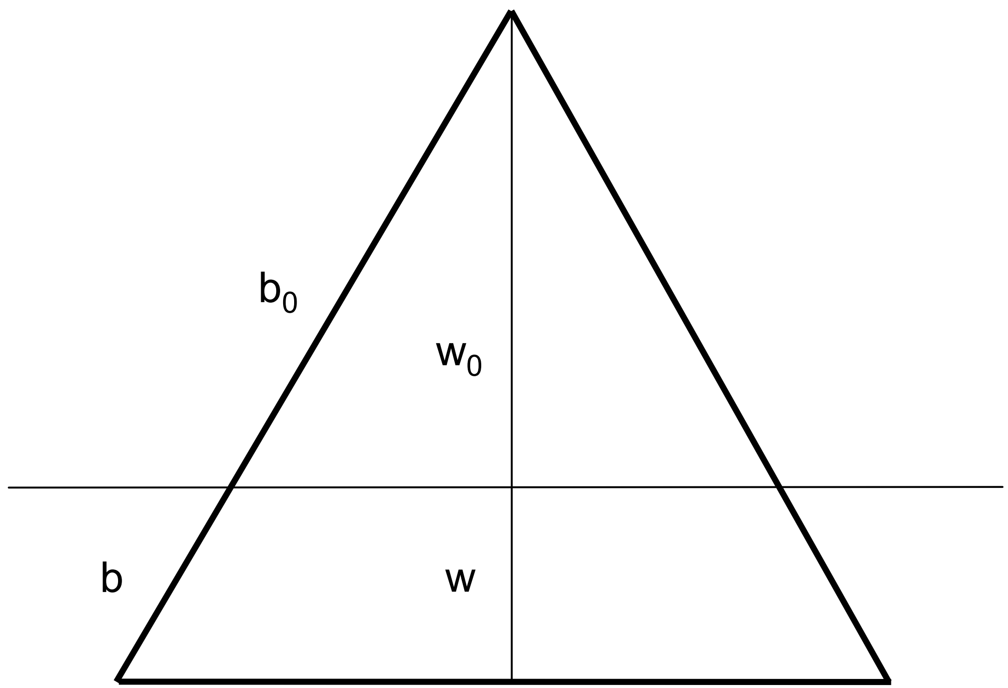


$[u, v, v]^T$

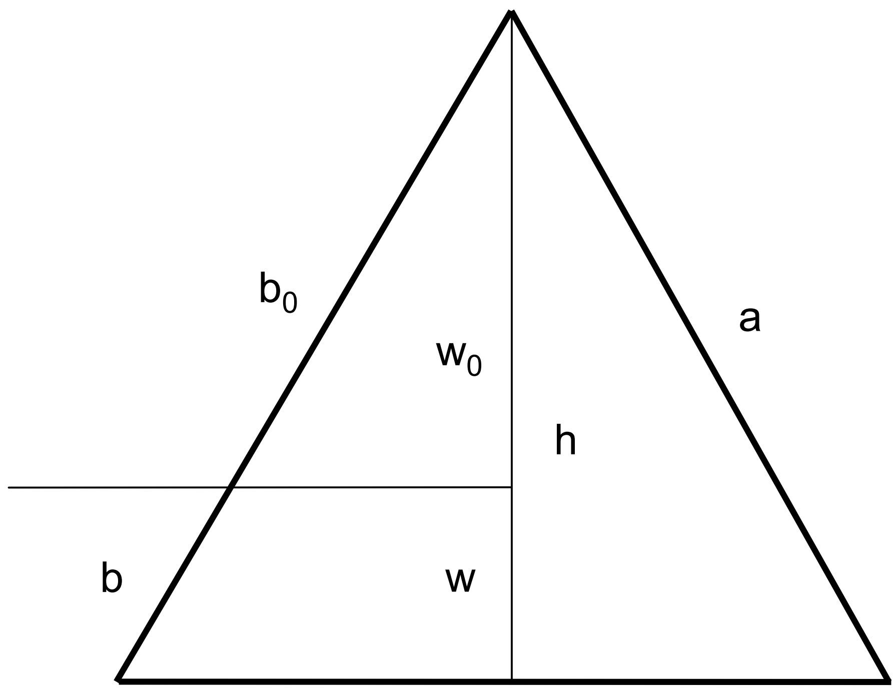
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



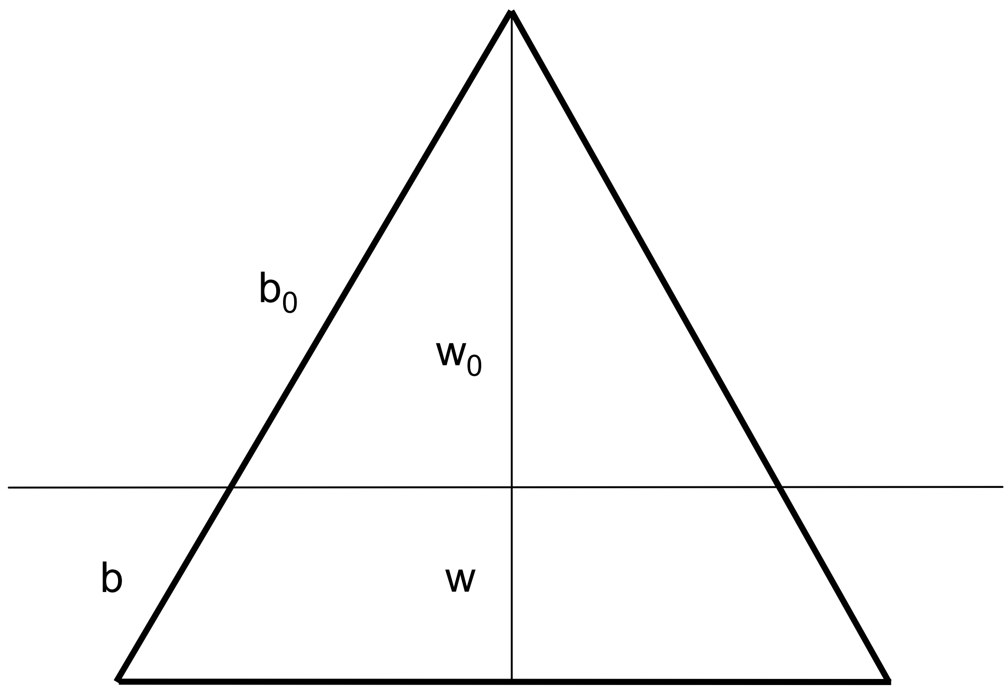
Barycentryczny układ współrzędnych



$$w_0 + w = h$$

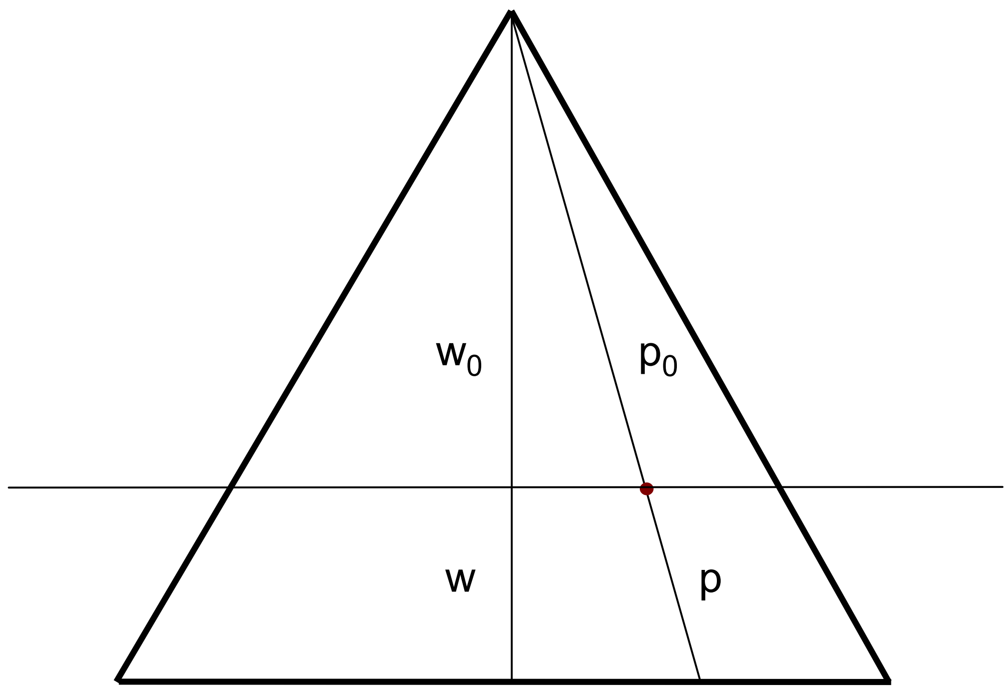
$$b_0 + b = a$$

Barycentryczny układ współrzędnych



$$w_0/b_0 = (w_0+w)/(b_0+b)$$

Barycentryczny układ współrzędnych



$$w_0/p_0 = (w_0+w)/(p_0+p)$$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Zależność

  $w_0/p_0 = (w_0+w)/(p_0+p)$

  implikuje kolejno

  (przy wszystkich wartościach niezerowych)

  $w_0/p_0 = (w_0+w)/(p_0+p)$

  $w_0(p_0+p) = p_0(w_0+w)$

  $w_0p_0+w_0p = p_0w_0+p_0w$

  $w_0p = p_0w$

  $w_0p/p_0 = w$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Ale w_0+w = h, czyli w_0 = h – w, a więc

  $(h - w)p/p_0 = w$

  $hp/p_0 - wp/p_0 = w$

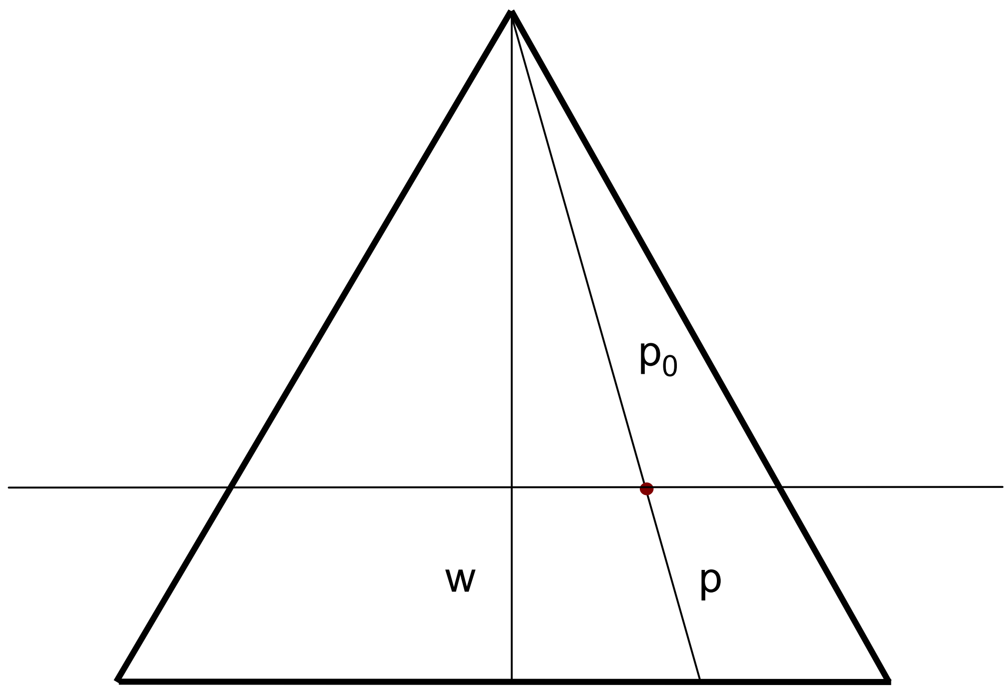
  $hp/p_0 = w + wp/p_0$

  $hp/p_0 = wp_0/p_0 + wp/p_0$

  $hp = wp_0 + wp$

  $hp = w(p_0 + w)$

  $hp/(p_0 + p) = w$



$$hp/(p_0 + p) = w$$

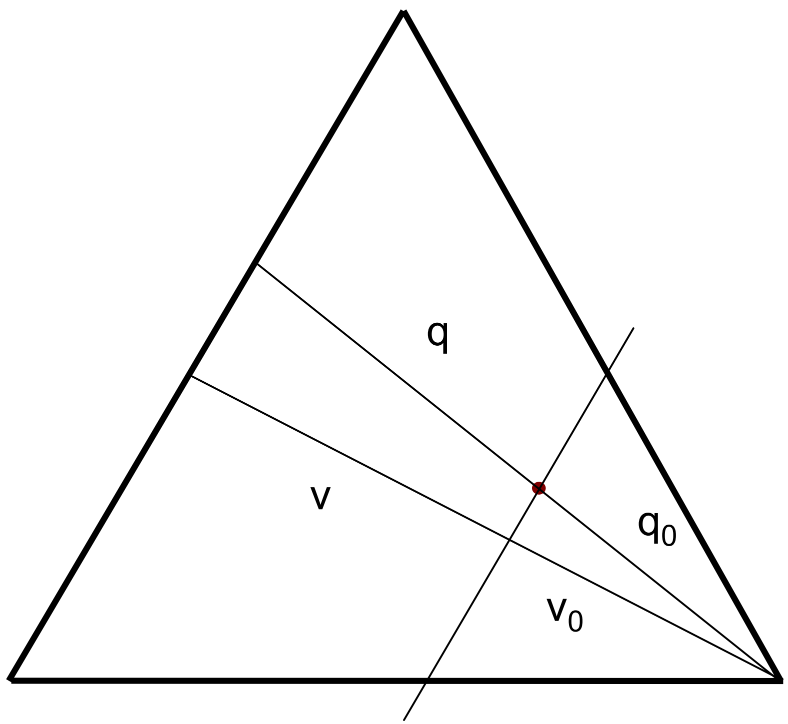
Barycentryczny układ współrzędnych

- Analogicznie dla pozostałych odcinków, czyli

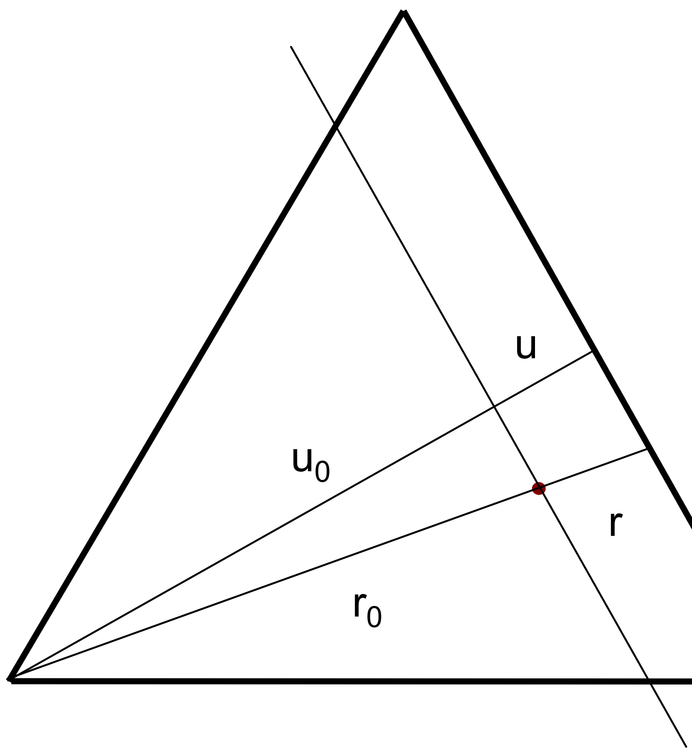
  $hq/(q_0 + q) = v$

  oraz

  $hr/(r_0 + r) = u$



$$hq/(q_0 + q) = v$$



$$hr/(r_0 + r) = u$$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Łącznie powstają trzy analogiczne równania

  $hp/(p_0 + p) = w$

  $hq/(q_0 + q) = v$

  $hr/(r_0 + r) = u$

- Dodając je stronami, otrzymujemy

  $hp/(p_0 + p) + hq/(q_0 + q) + hr/(r_0 + r) = u+v+w$

- Ale u + v + w = h, a więc

  $hp/(p_0 + p) + hq/(q_0 + q) + hr/(r_0 + r) = h$

- A ostatecznie

  $p/(p_0 + p) + q/(q_0 + q) + r/(r_0 + r) = 1$

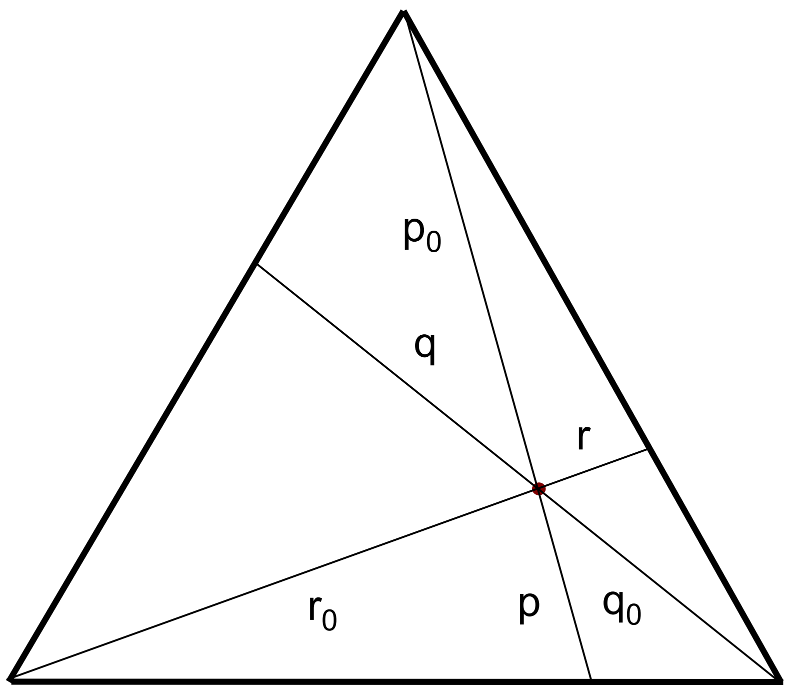
Barycentryczny układ współrzędnych

- Wniosek:
  - w układzie współrzędnych trójkątnych wartości $p/(p_0 + p)$, $q/(q_0 + q)$ oraz $r/(r_0 + r)$ sumują się do stałej, mogą być więc interpretowane identycznie jak u, v i w (mogą służyć za współrzędne punktów)

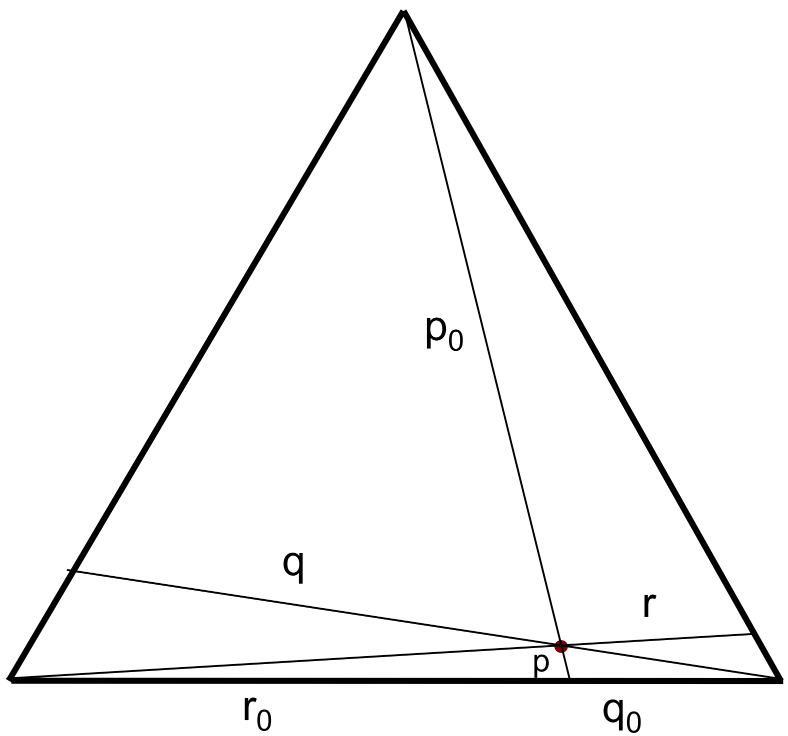
Barycentryczny układ współrzędnych

- W kategoriach $p/(p_0 + p)$, $q/(q_0 + q)$ oraz $r/(r_0 + r)$ szczególnie proste jest zinterpretowanie współrzędnych punktów „granicznych”

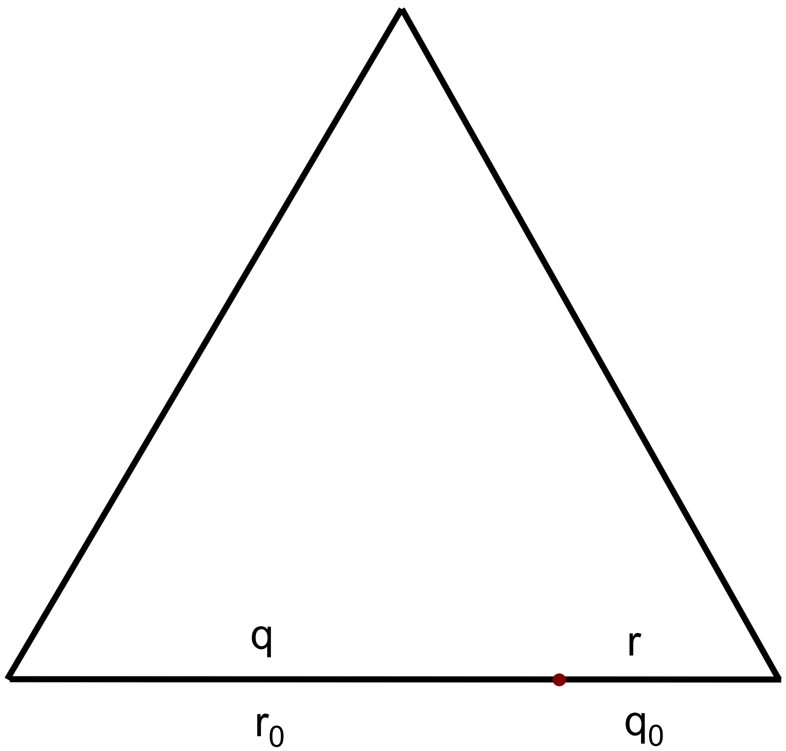
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

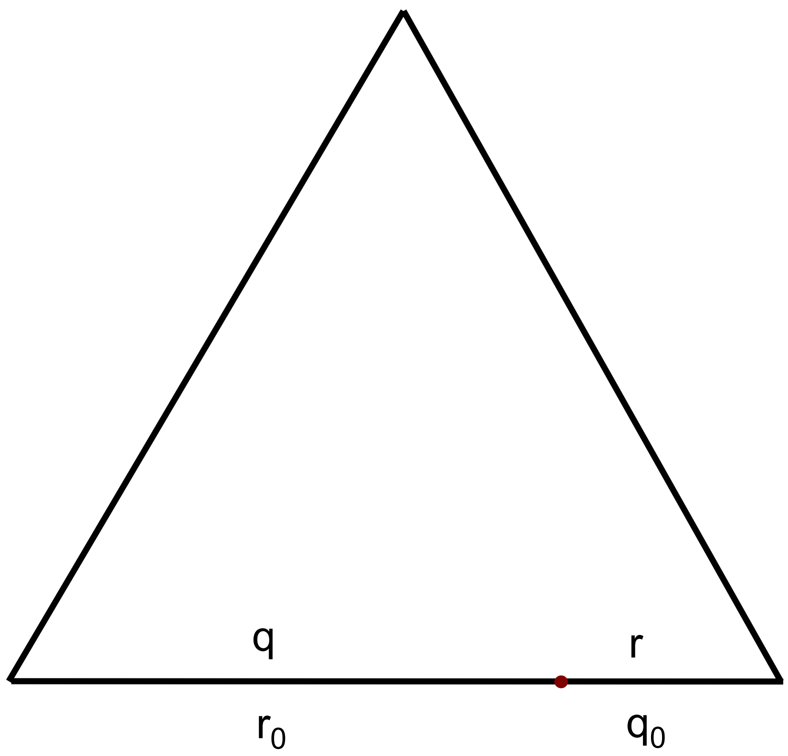


Barycentryczny układ współrzędnych



$$q_0 + q = a$$
$$r_0 + r = a$$

Barycentryczny układ współrzędnych



$w = p/(p_0 + p) = 0/(p_0 + p) = 0$

$v = q/(q_0 + q) = q/(r + q) = q/a$

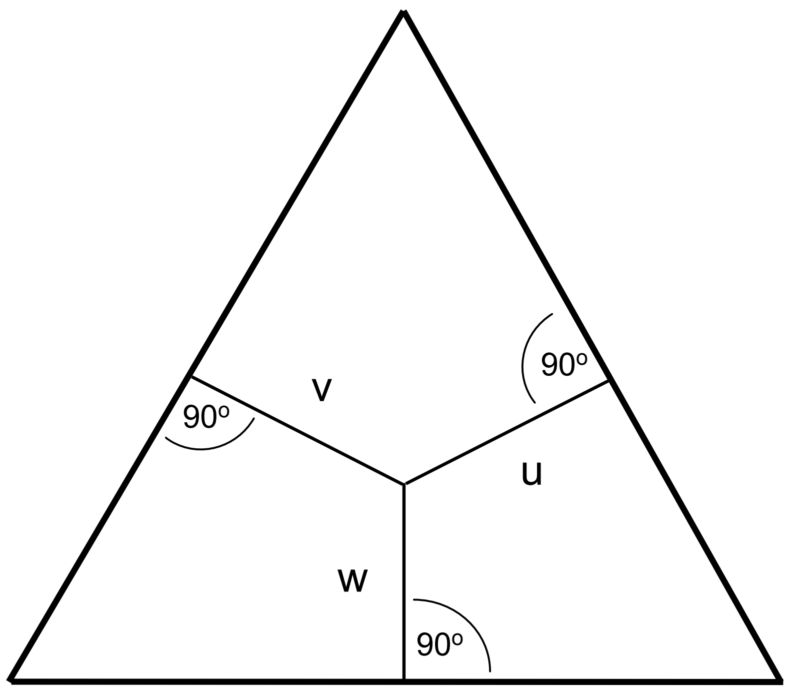
$u = r/(r_0 + r) = r/(q + r) = r/a$

...

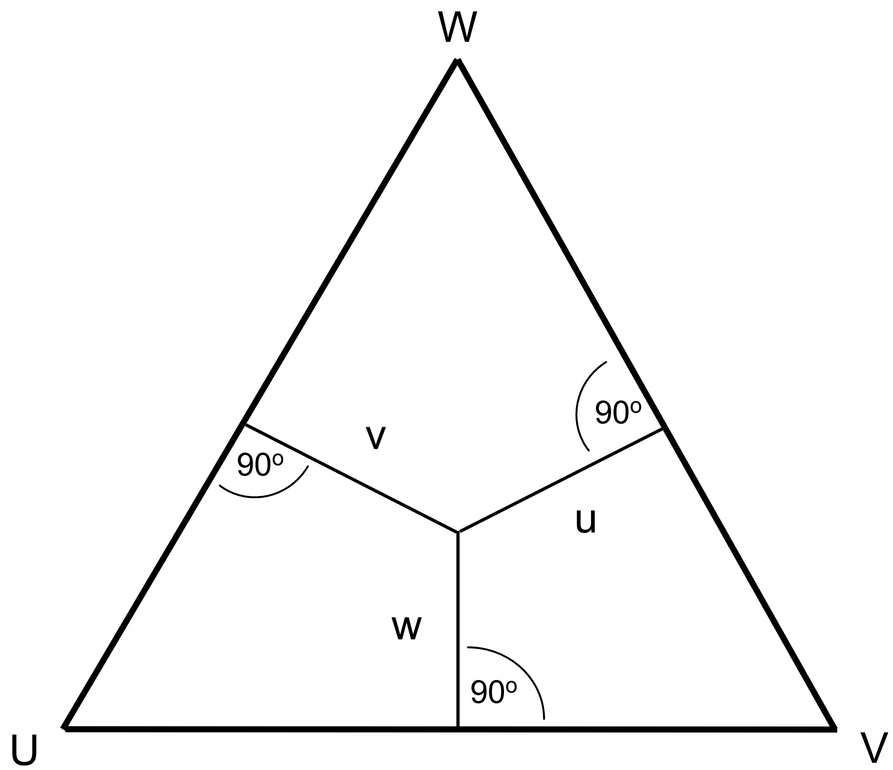
Barycentryczny układ współrzędnych

- Problem orientacji osi w trójkątnym układzie współrzędnych

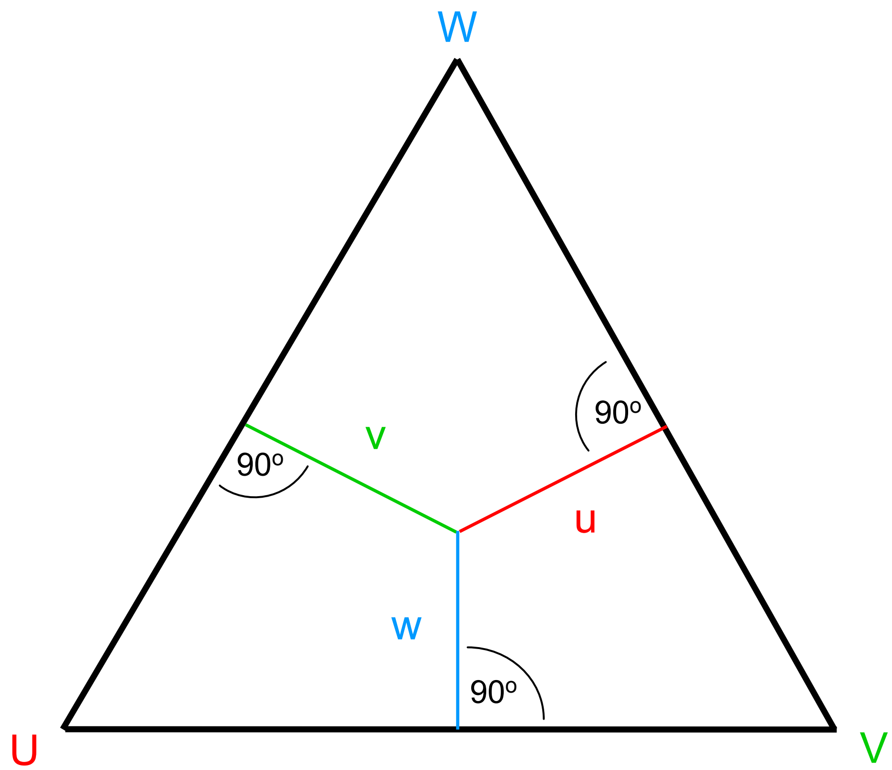
Barycentryczny układ współrzędnych



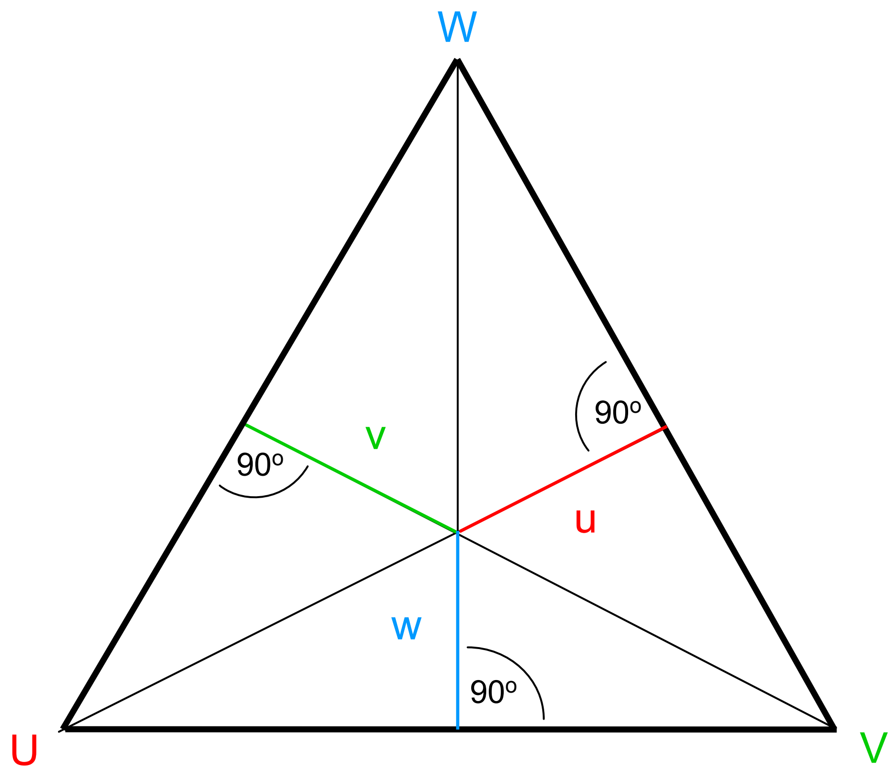
Barycentryczny układ współrzędnych



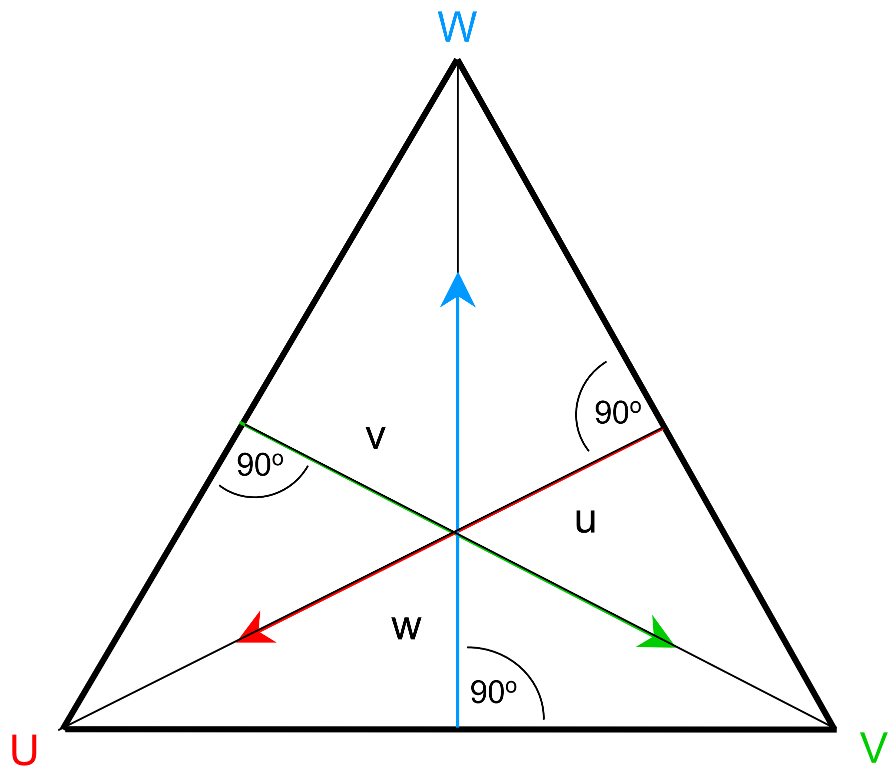
Barycentryczny układ współrzędnych



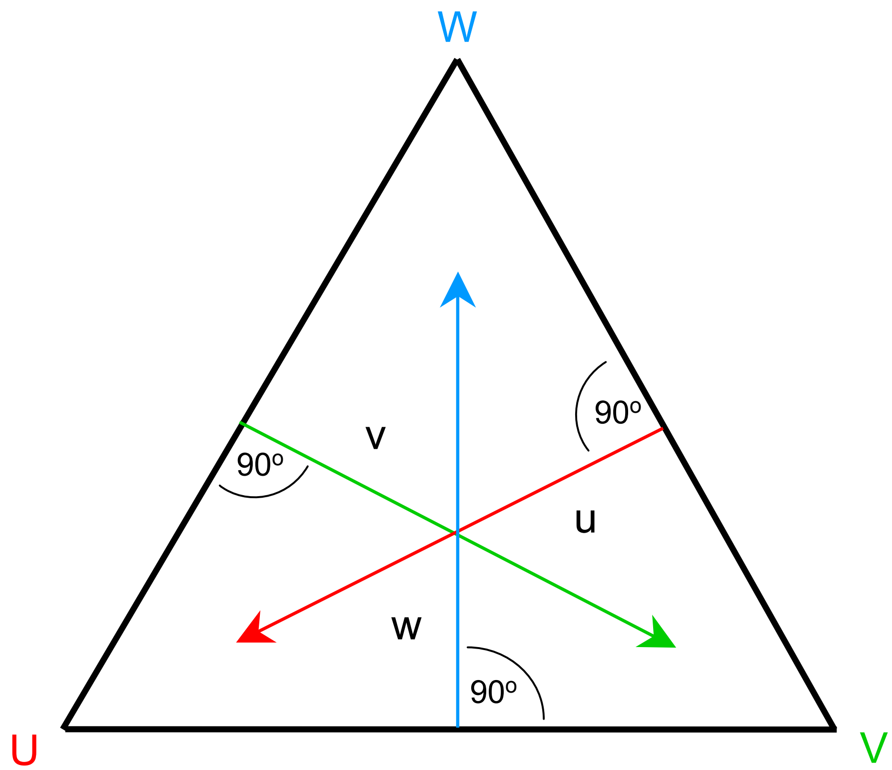
Barycentryczny układ współrzędnych



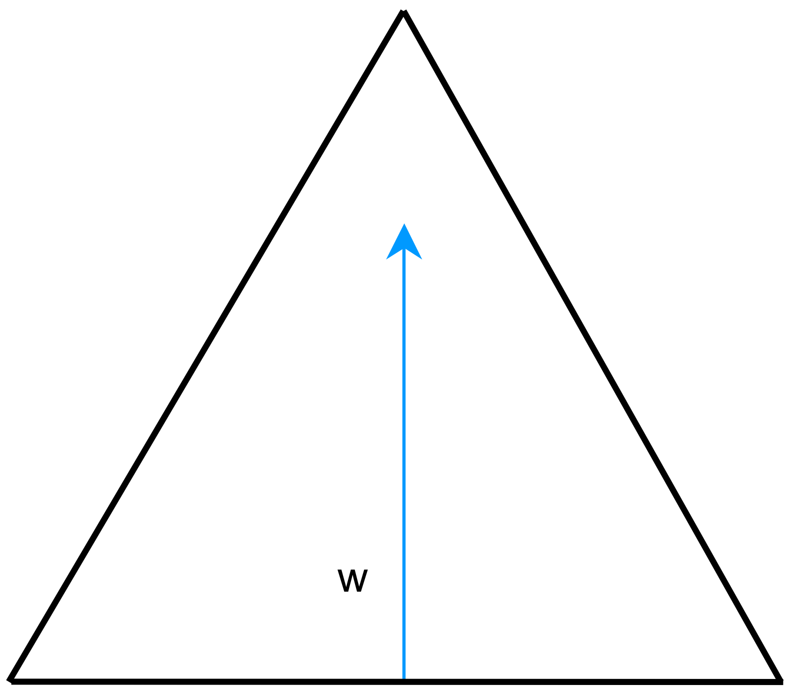
Barycentryczny układ współrzędnych



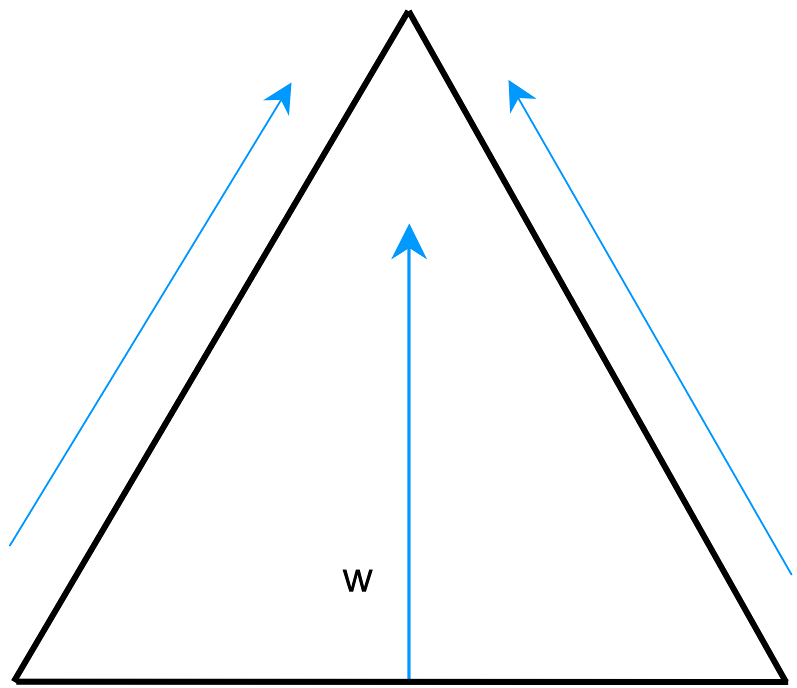
Barycentryczny układ współrzędnych



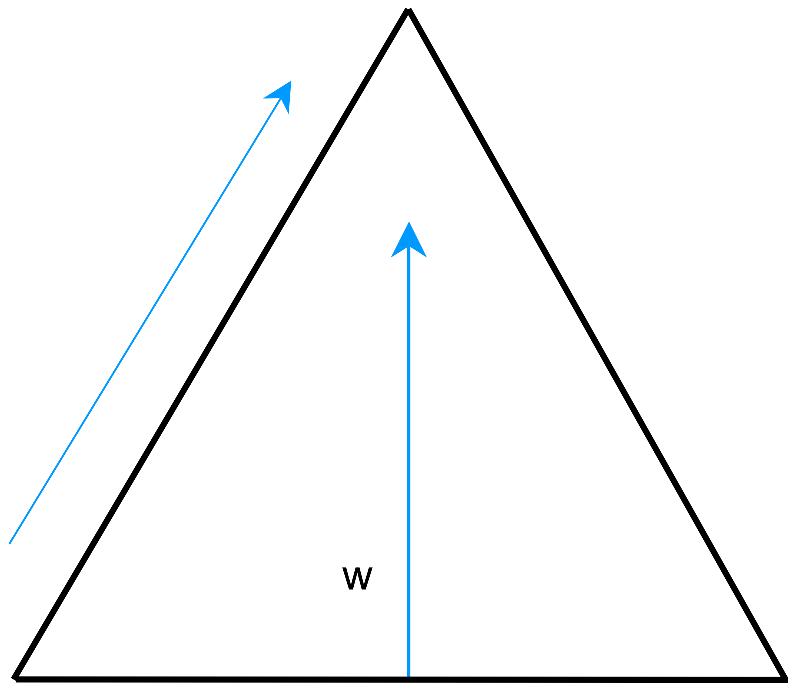
Barycentryczny układ współrzędnych



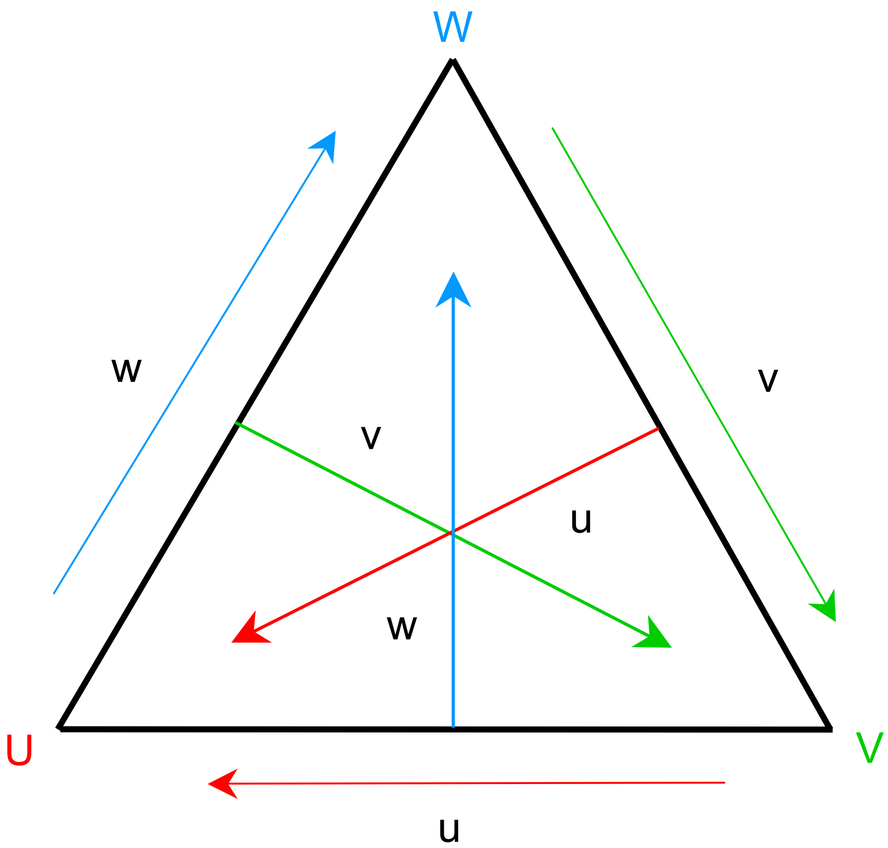
Barycentryczny układ współrzędnych



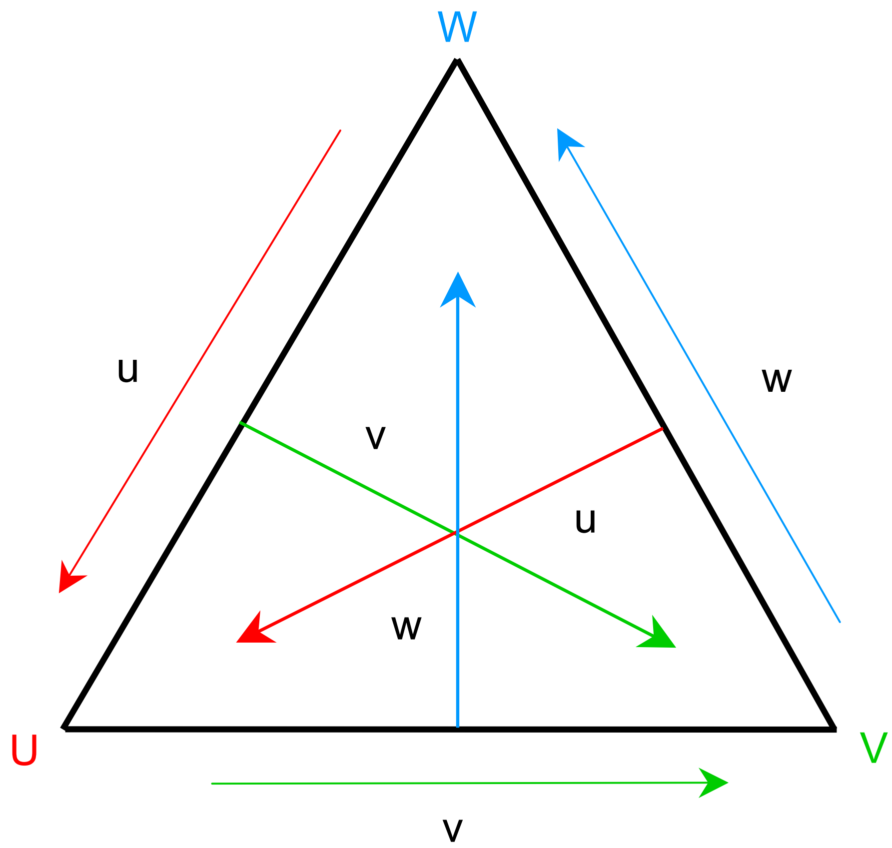
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

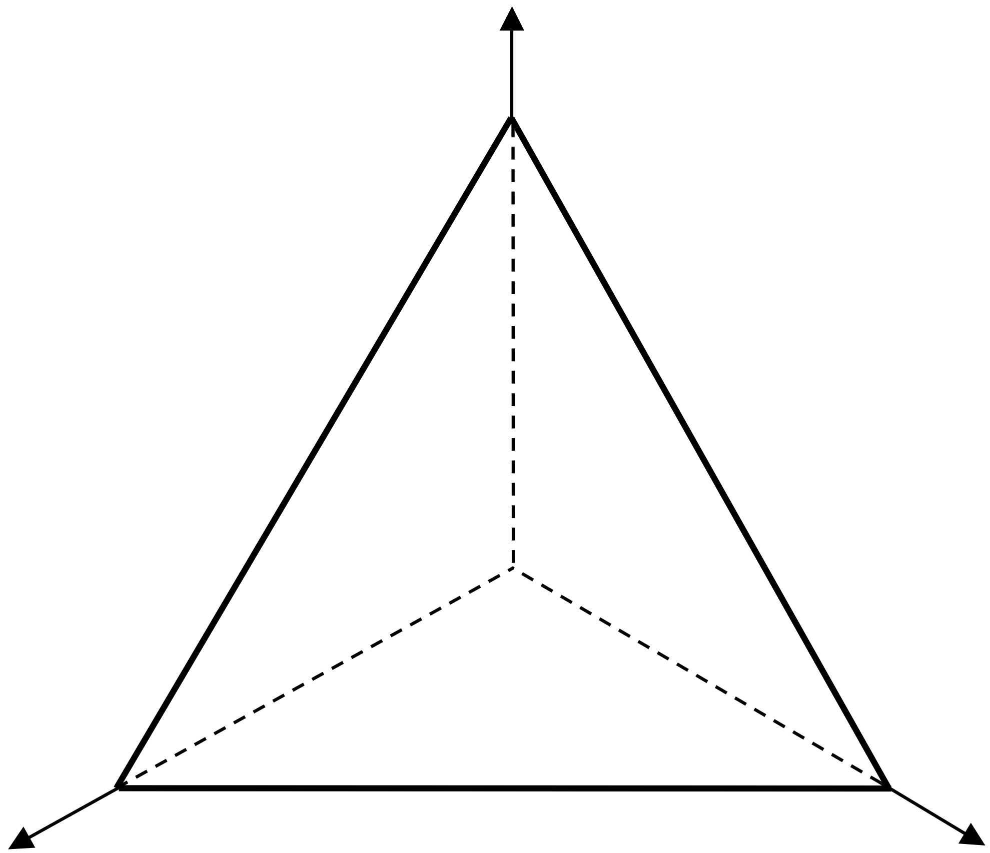
- Przedstawiany układ współrzędnych trójkątnych wykorzystujacy trójkąt równoboczny jest właściwie szczególnym przypadkiem układu barycentrycznego (ang. barycentric coordinate system)
  - popularne nazwy angielskie szczególnego przypadku
    - ternary plot
    - areal coordinate system
    - de Finetti diagram
  - inne układy współrzędnych oparte na trójkątach (ang. triangular coordinate systems)
    - trilinear coordinate systems
- Dodatkowe elementy układów
  - siatka (grid)

Barycentryczny układ współrzędnych

- Wielokąt: trójkąt = stożek* $\cap$ płaszczyzna
  - jest to zasadniczo rzut stożka na płaszczyznę: $x + y + z = n$
- Szczególny przypadek: układ barycentryczny

*"stożek" = „stożek algebraiczny"

Barycentryczny układ współrzędnych

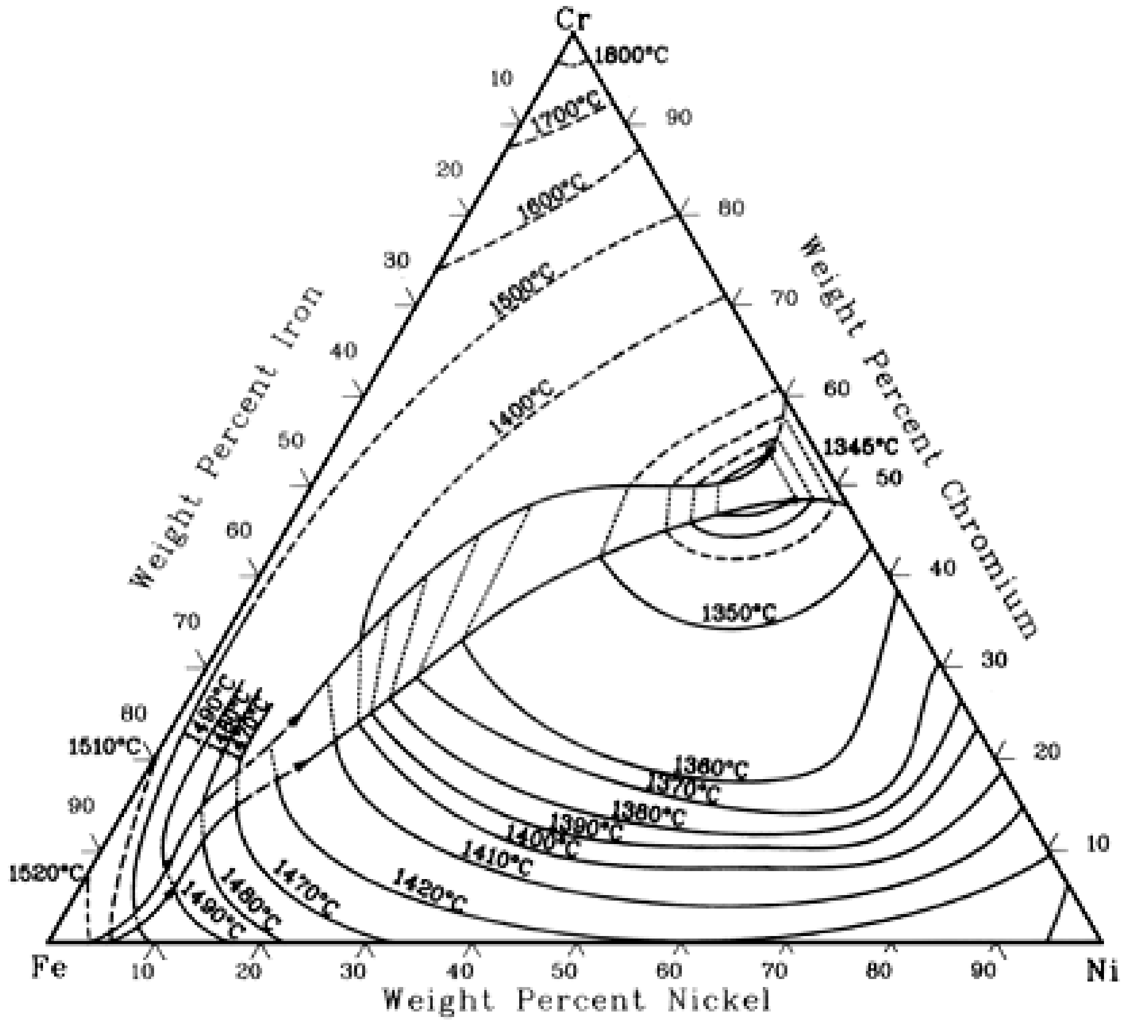


Barycentryczny układ współrzędnych

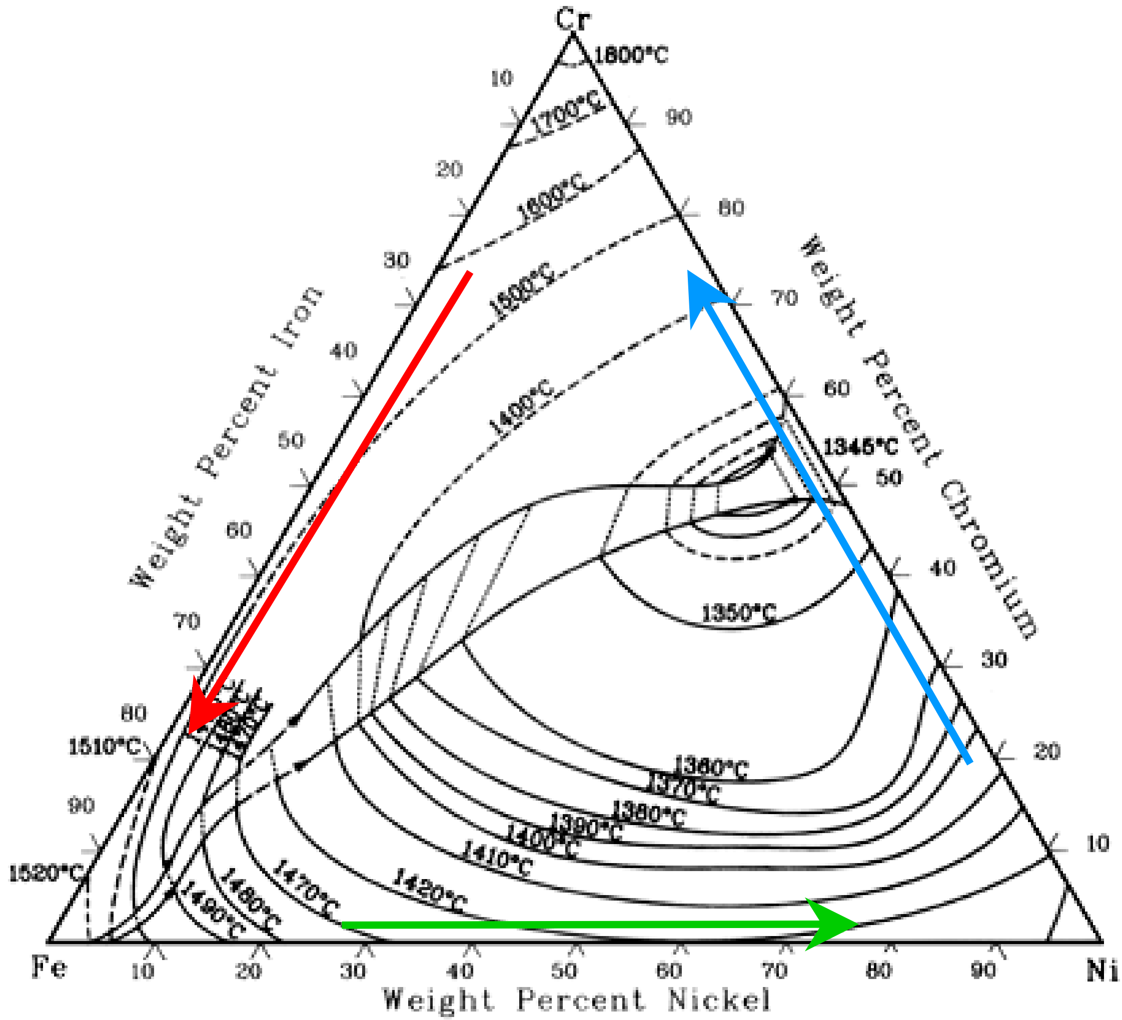
- Praktyczne zastosowania
  - wizualizacja parametrów mieszanin/stopów
    - jeżeli mieszanina/stop składa się z trzech składników, to często interesuje nas zależność jej pewnych parametrów od jej procentowego składu (wagowego, masowego, molowego, itp.), a to idealnie nadaje się do ilustracji w postaci wykresu w trójkątnym układzie współrzędnych

Barycentryczny układ współrzędnych

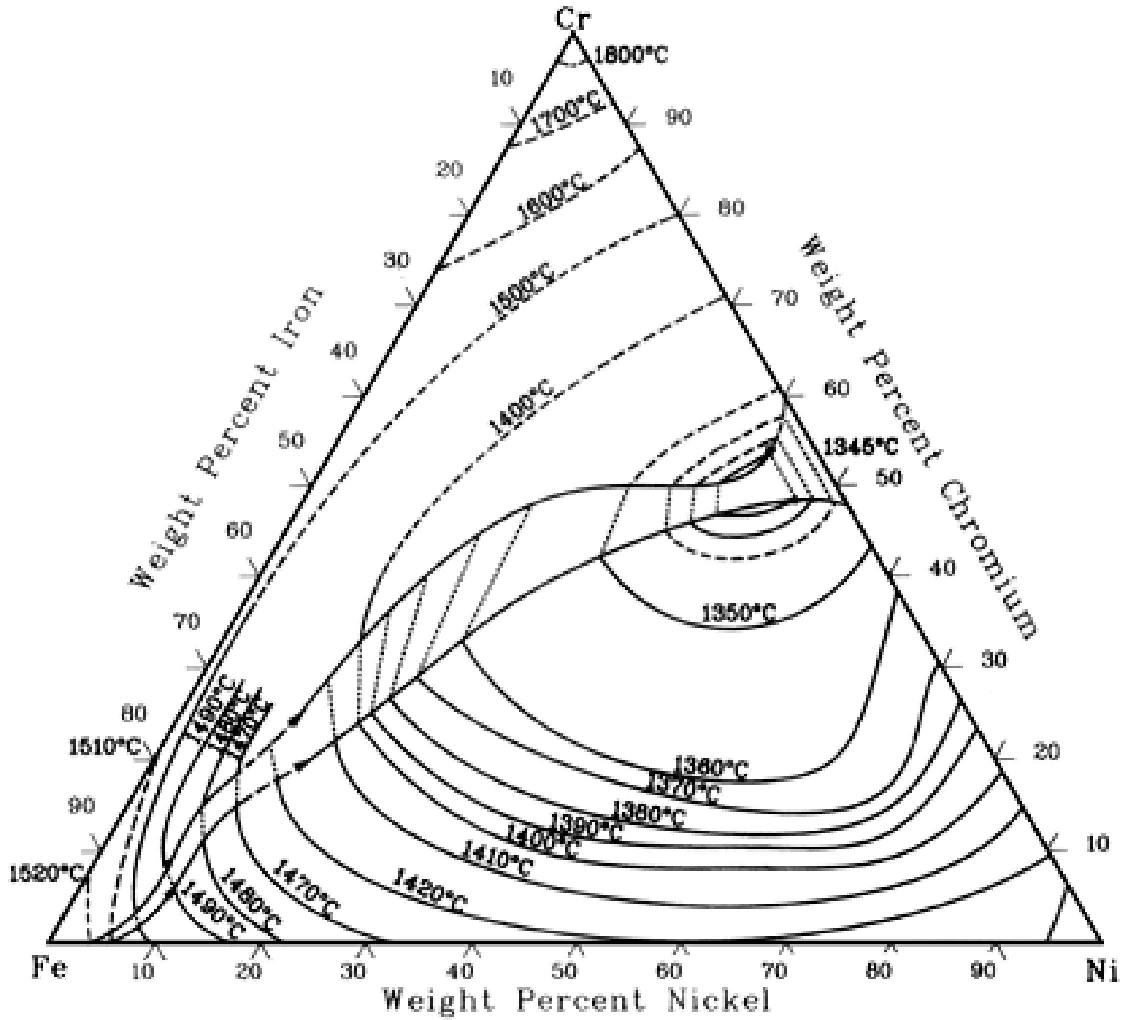
- Praktyczne zastosowania
  - temperatura topnienia stopu chromu, żelaza i niklu



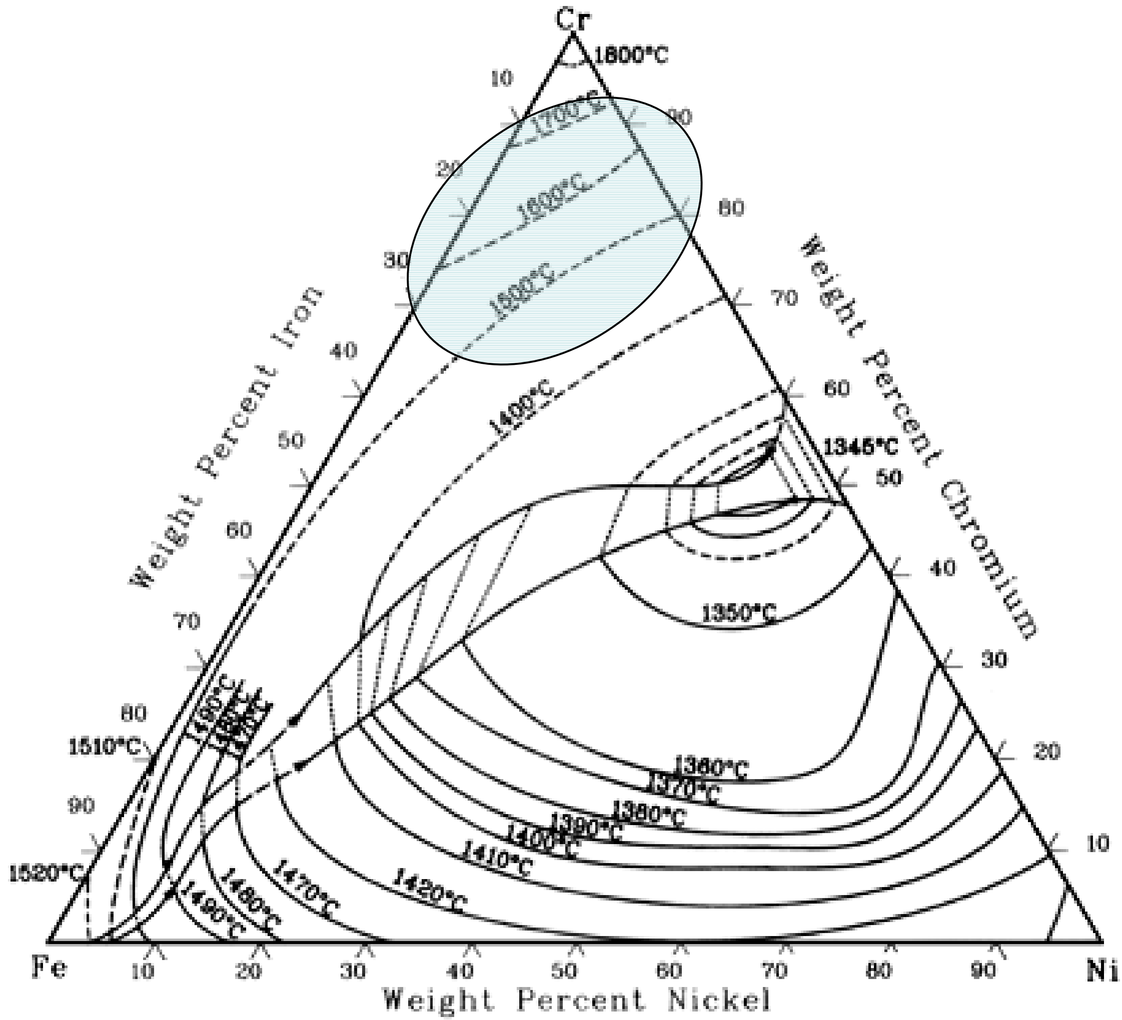
http://www.sv.vt.edu/classes/MSE2094_NoteBook/96ClassProj/experimental/tern2.html



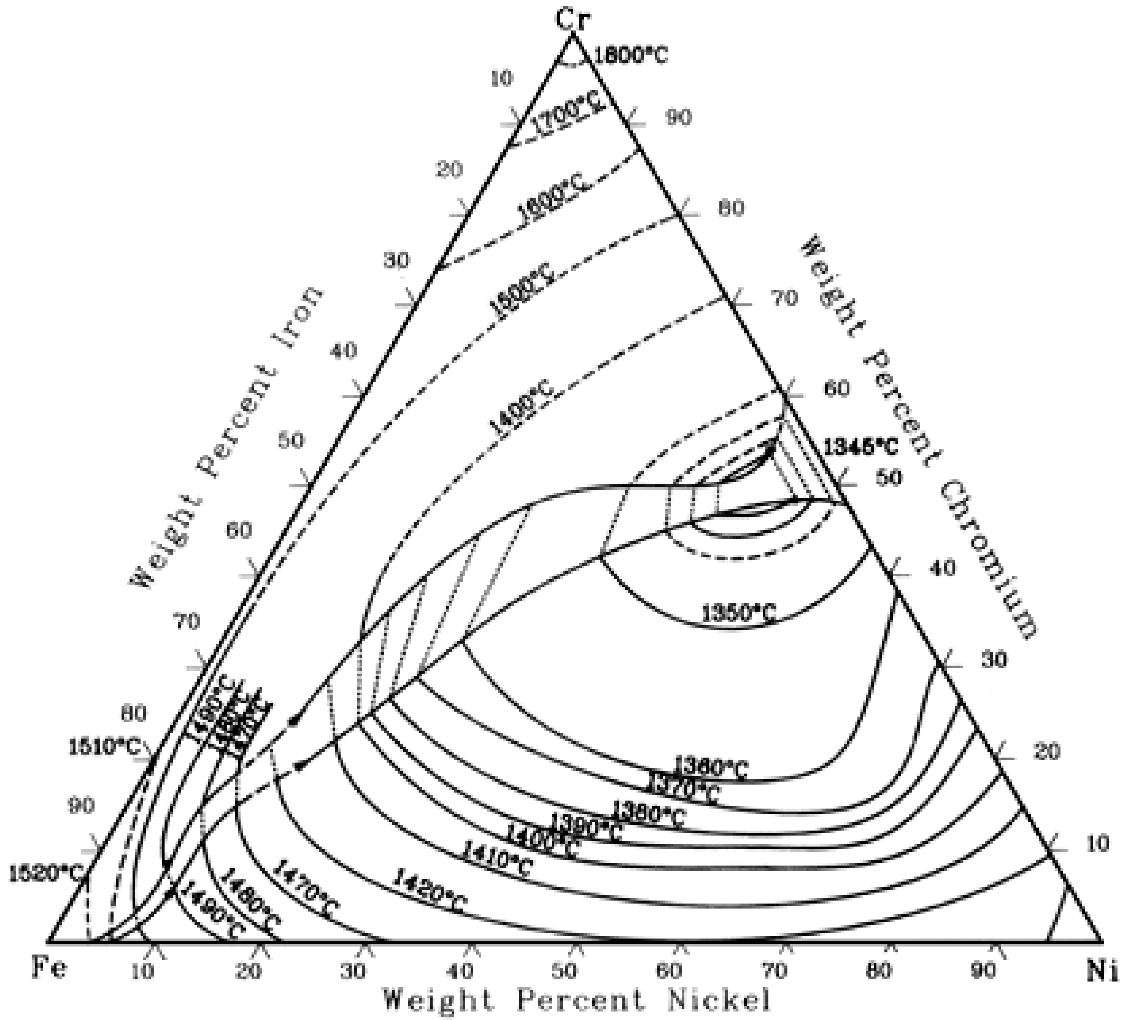
http://www.sv.vt.edu/classes/MSE2094_NoteBook
/96ClassProj/experimental/tern2.html



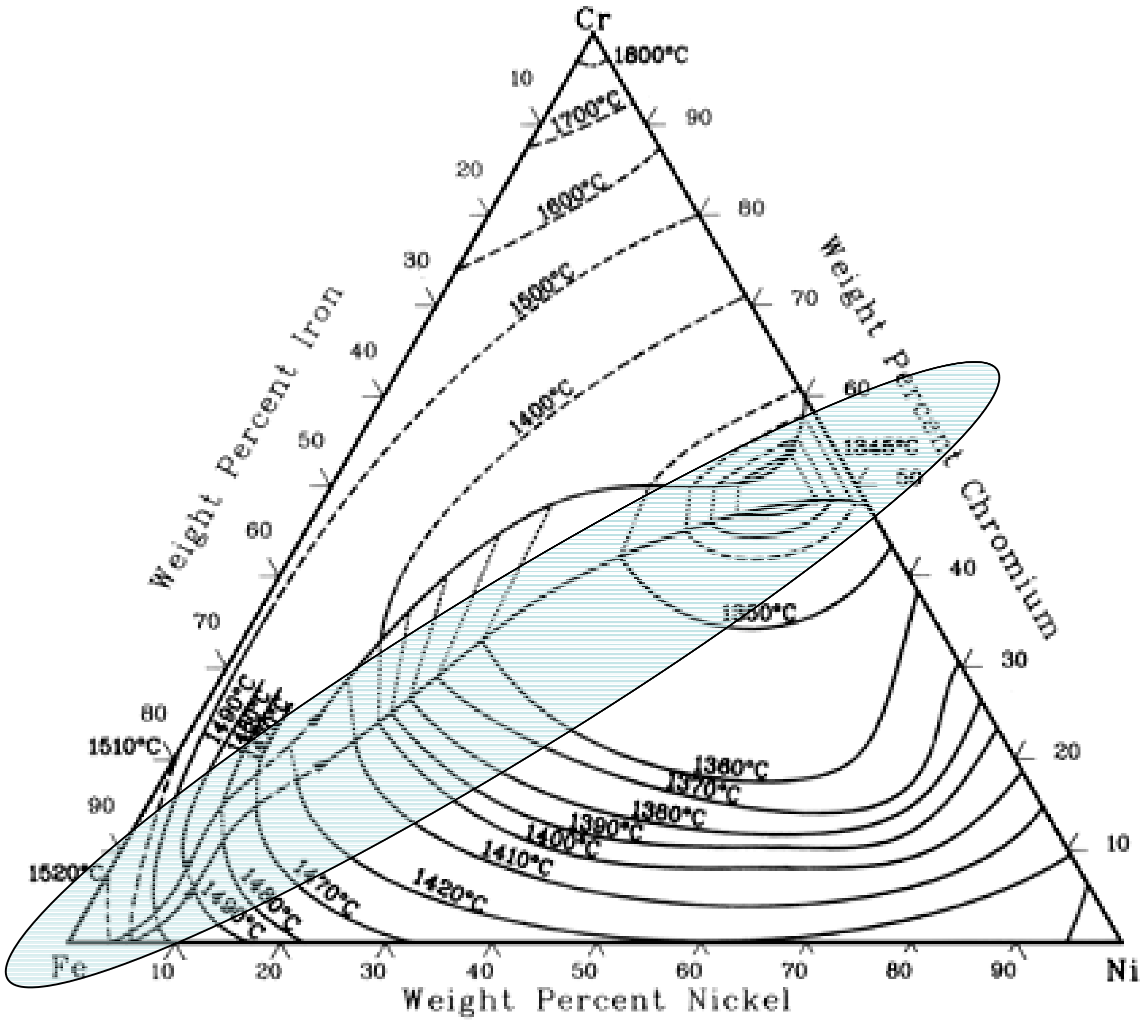
– gdy ilość chromu jest ponad czterokrotnie razy większa od ilości niklu, to temperatura topnienia nie zależy zbytnio od ilości żelaza



– gdy ilość chromu jest ponad czterokrotnie razy większa od ilości niklu, to temperatura topnienia nie zależy zbytnio od ilości żelaza



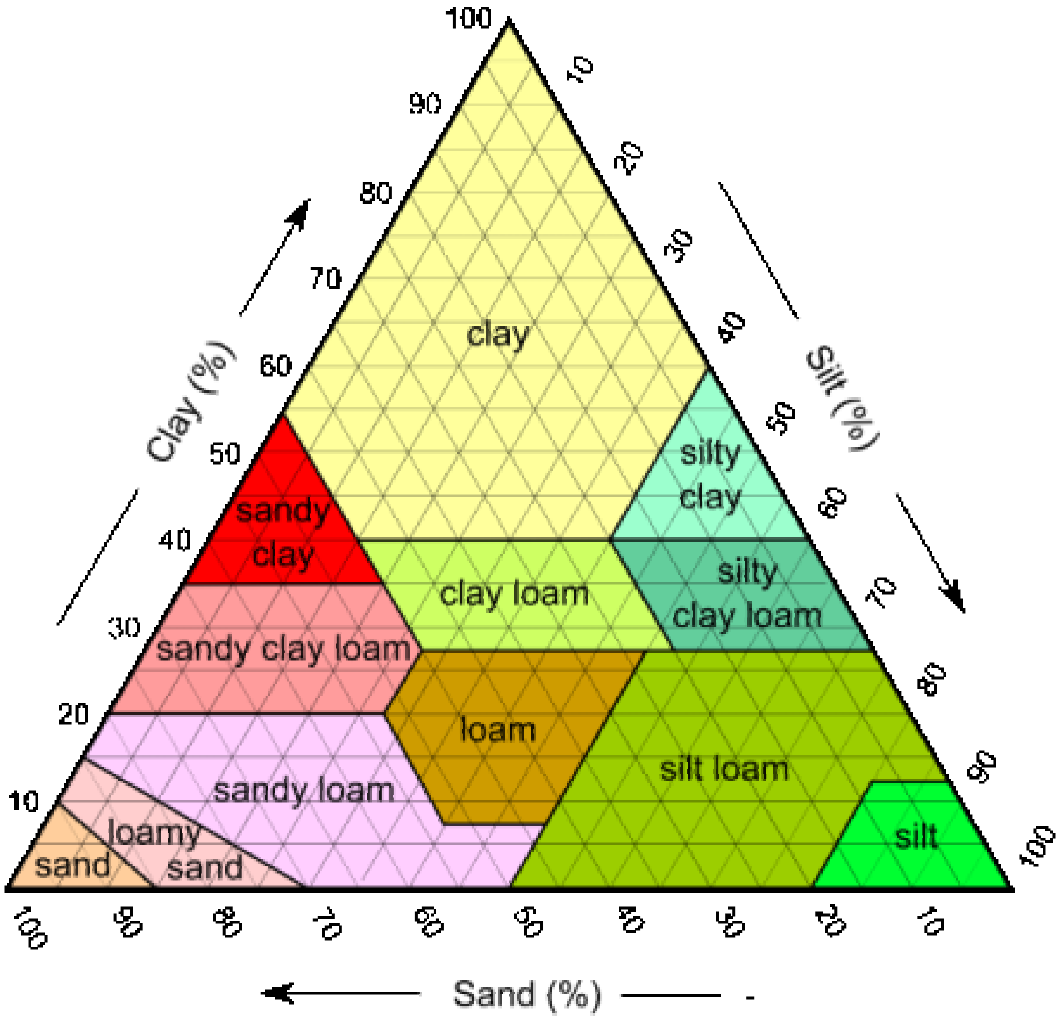
– gdy ilość chromu jest w przybliżeniu równa ilości niklu, to temperatura topnienia zależy głównie od ilości żelaza



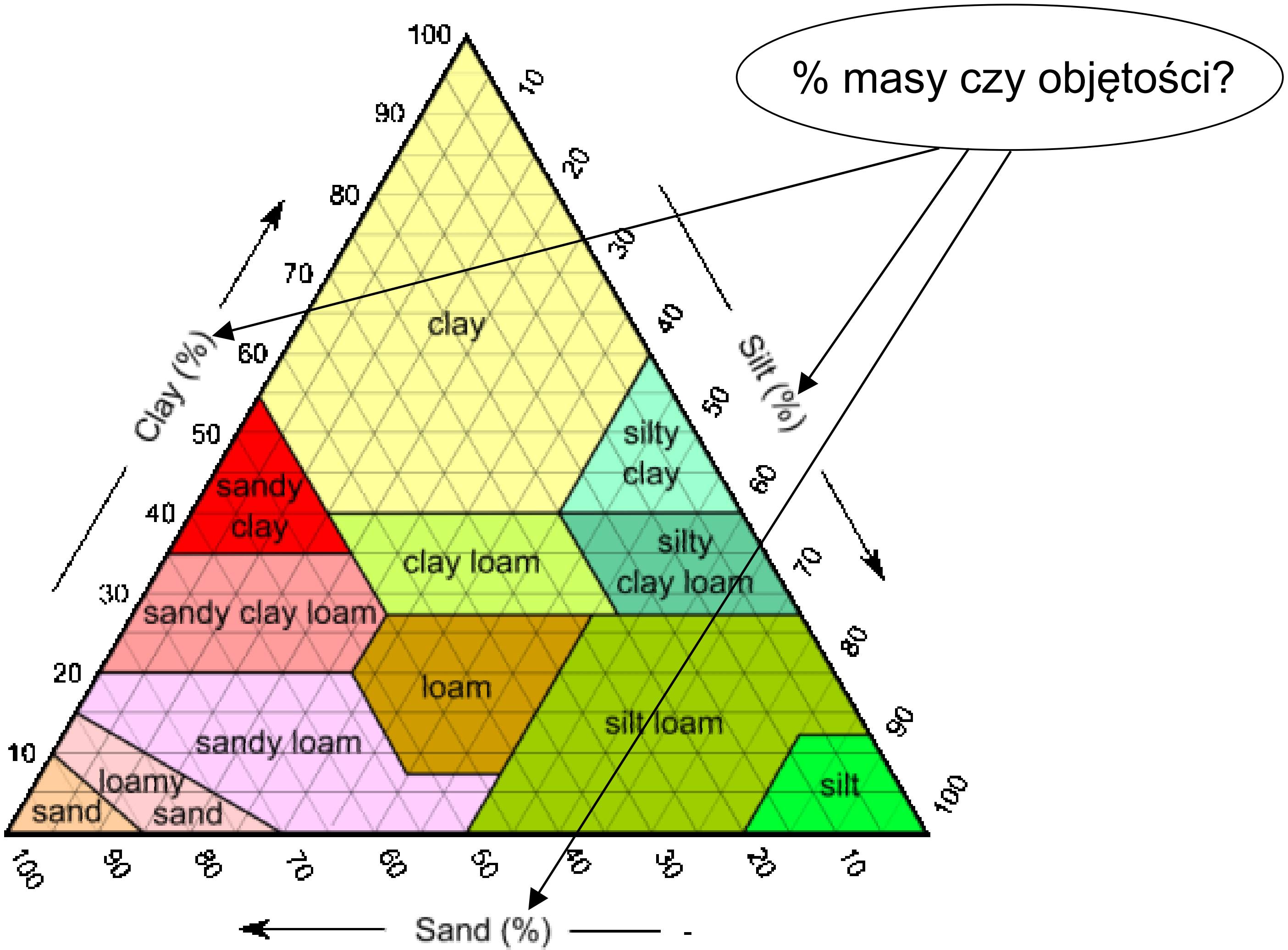
– gdy ilość chromu jest w przybliżeniu równa ilości niklu, to temperatura topnienia zależy głównie od ilości żelaza

Barycentryczny układ współrzędnych

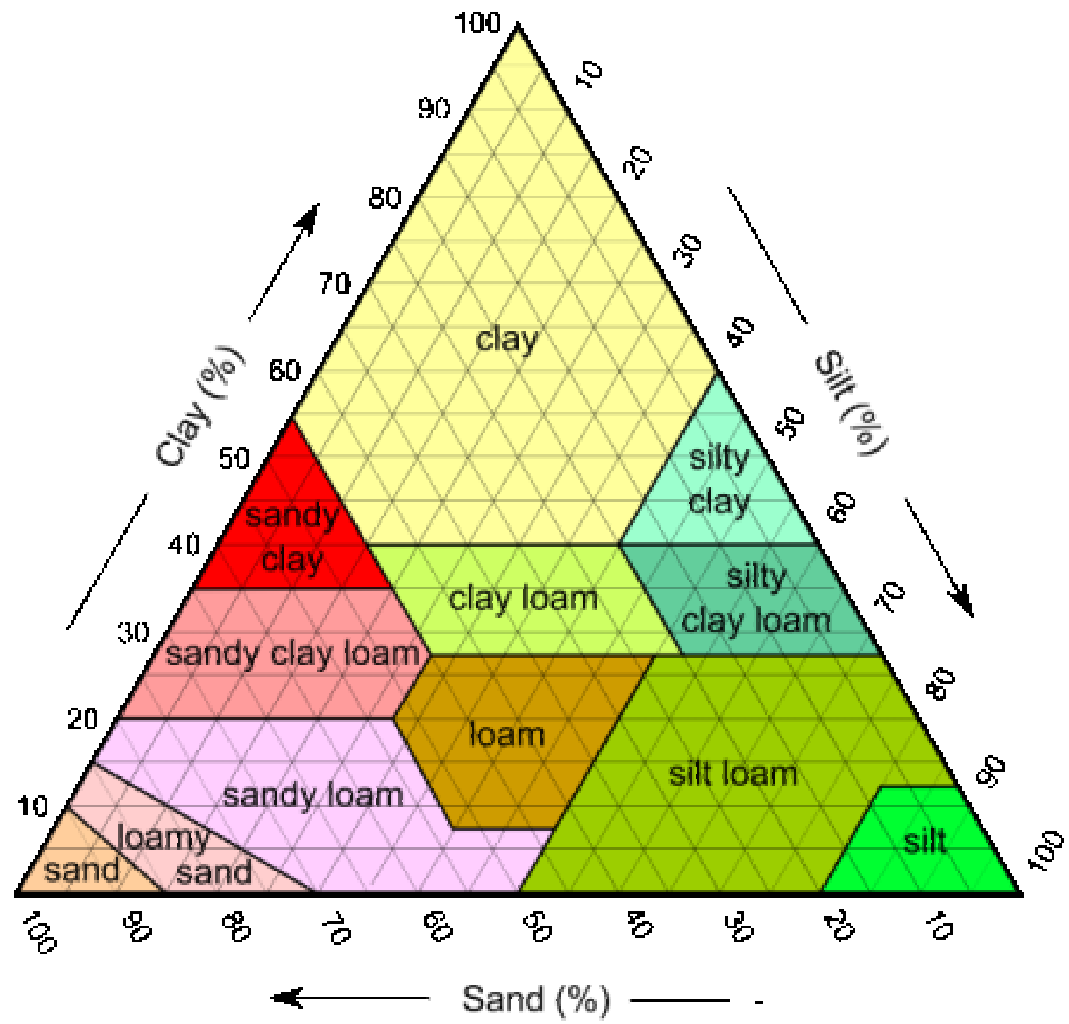
- Praktyczne zastosowania, c.d.
  - klasyfikacja gruntów piaskowo-iłowo-glinowych



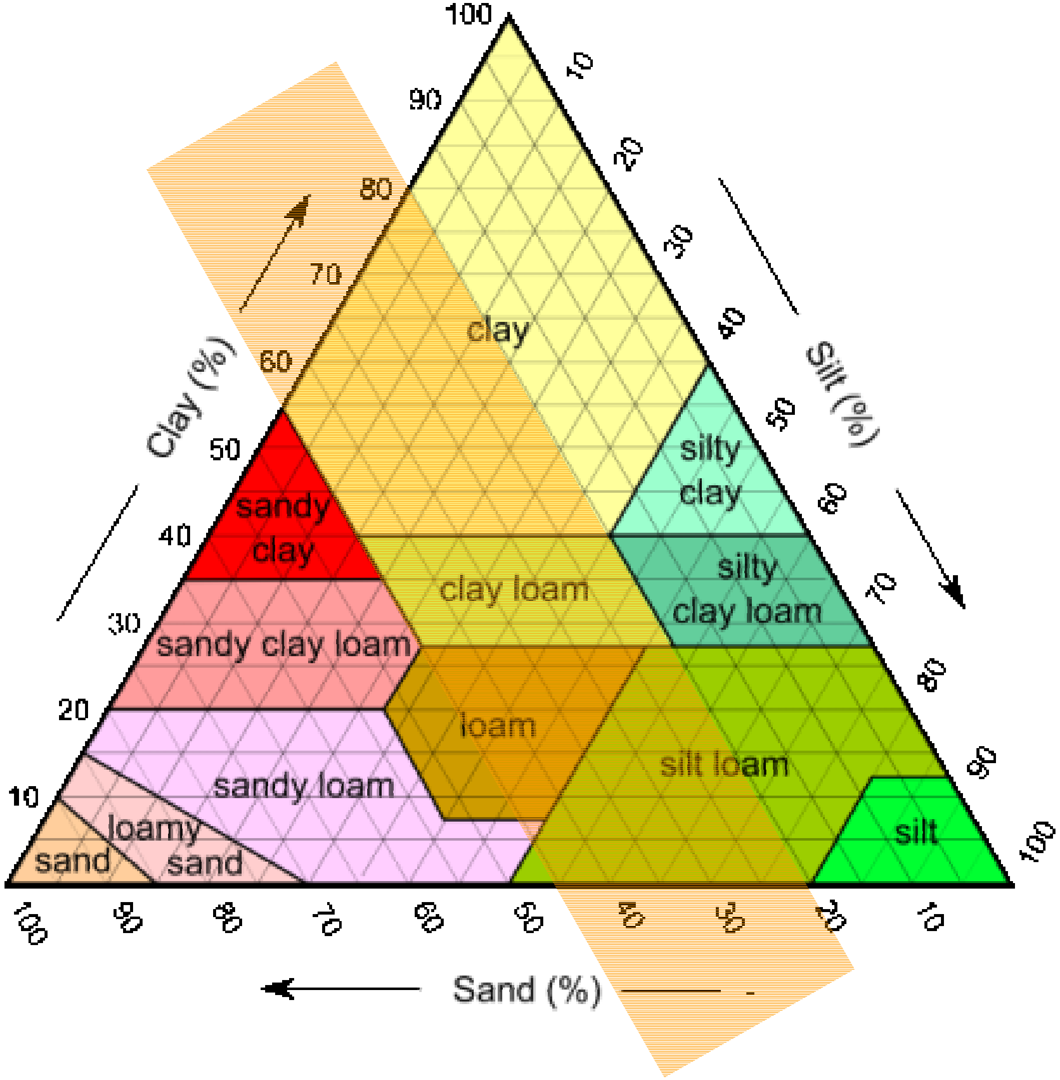
http://stackoverflow.com/questions/12520003
/representing-ternary-plot-data-for-lookups



– prezentowane pojęcia nie są przesadnie precyzyjne...

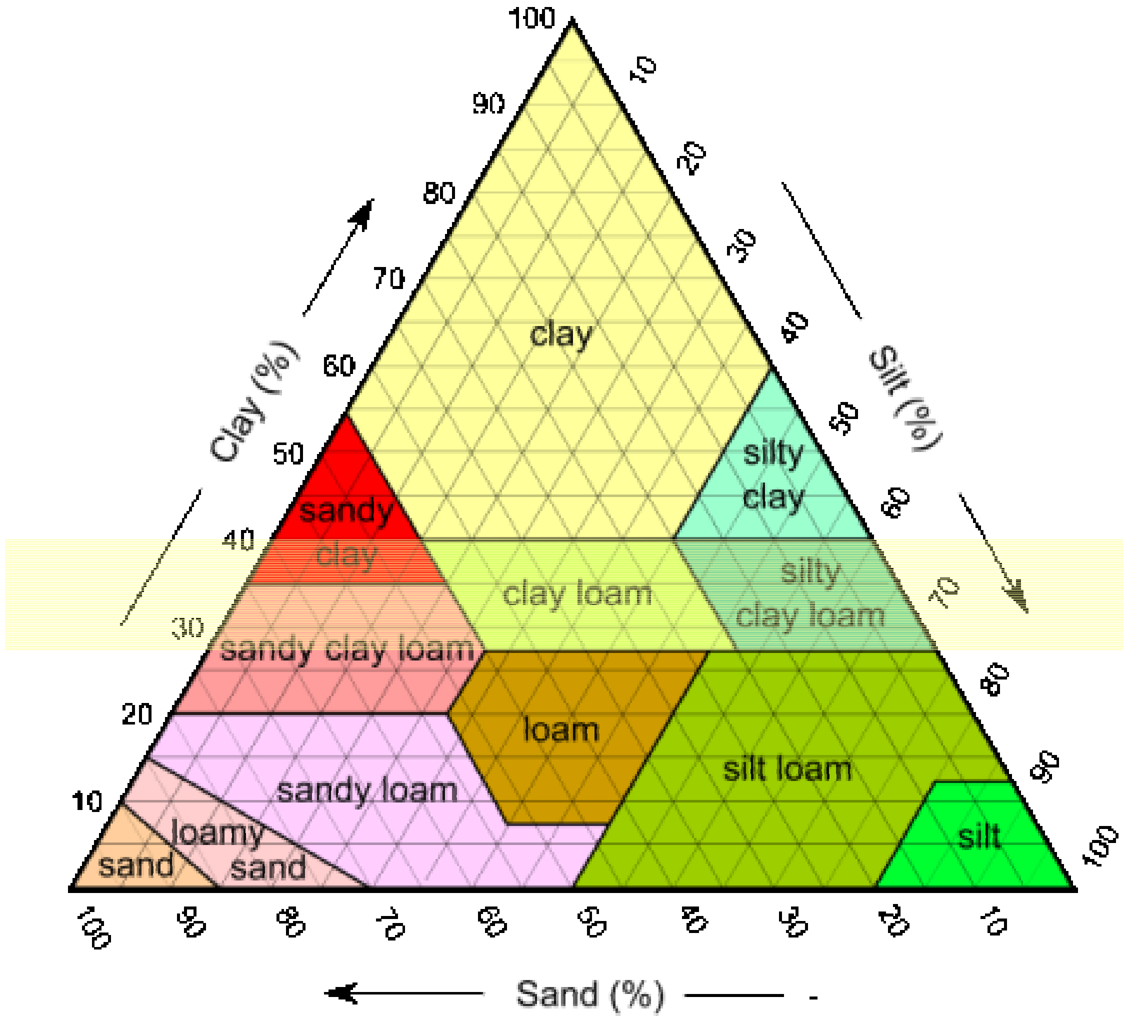


– wykres bezpośrednio demonstruje/ilustruje definicje mieszanin



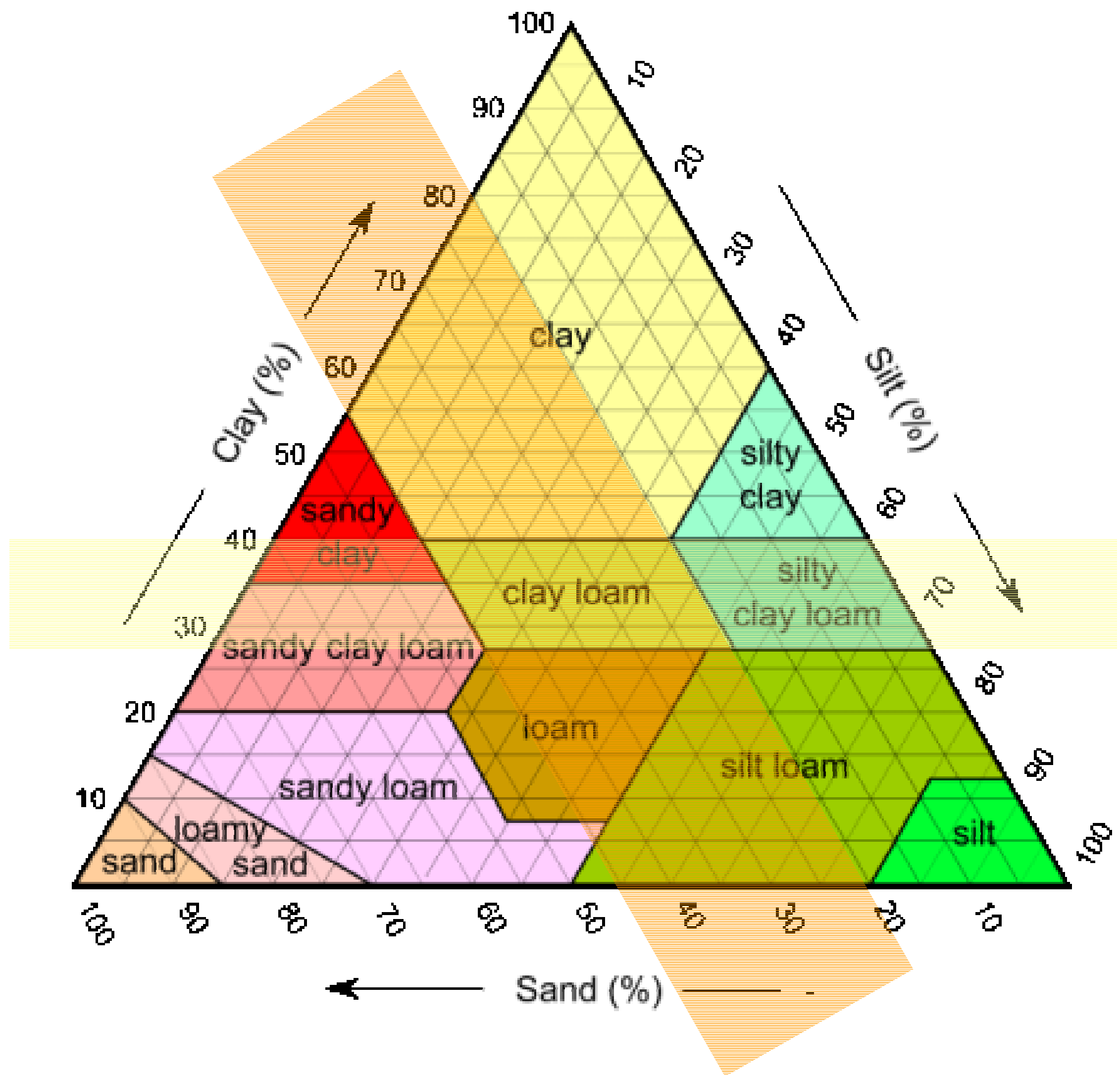
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Clay (%)
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Silt (%)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Sand (%)
clay
silty clay
sandy clay
silty clay loam
clay loam
sandy clay loam
loam
silt loam
sandy loam
silt
loamy sand
sand

20 ≤ sand ≤ 45



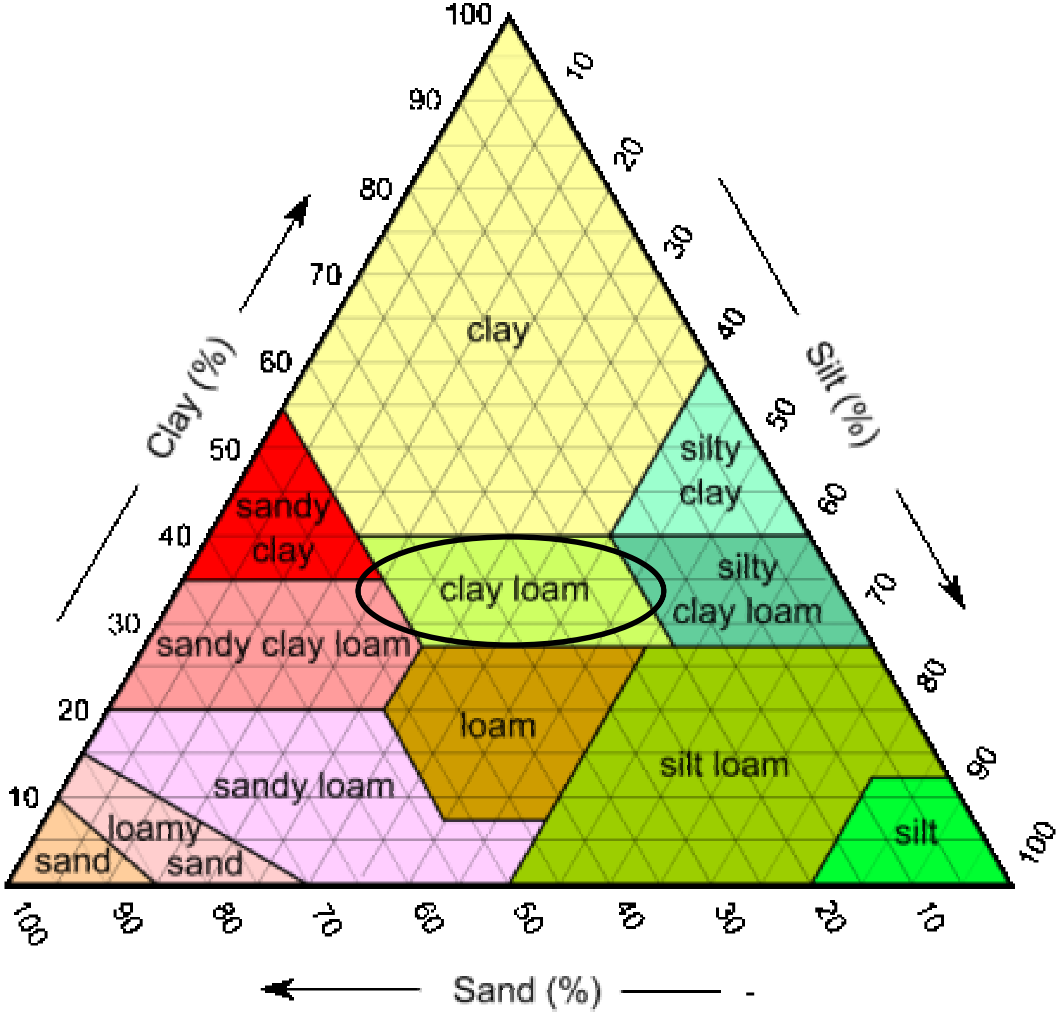
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Clay (%)
Silt (%)
Sand (%)
clay
silty
clay
sandy
clay
clay loam
silty
clay loam
sandy clay loam
loam
silt loam
sandy loam
loamy
sand
sand
silt

27.5 ≤ clay ≤ 40

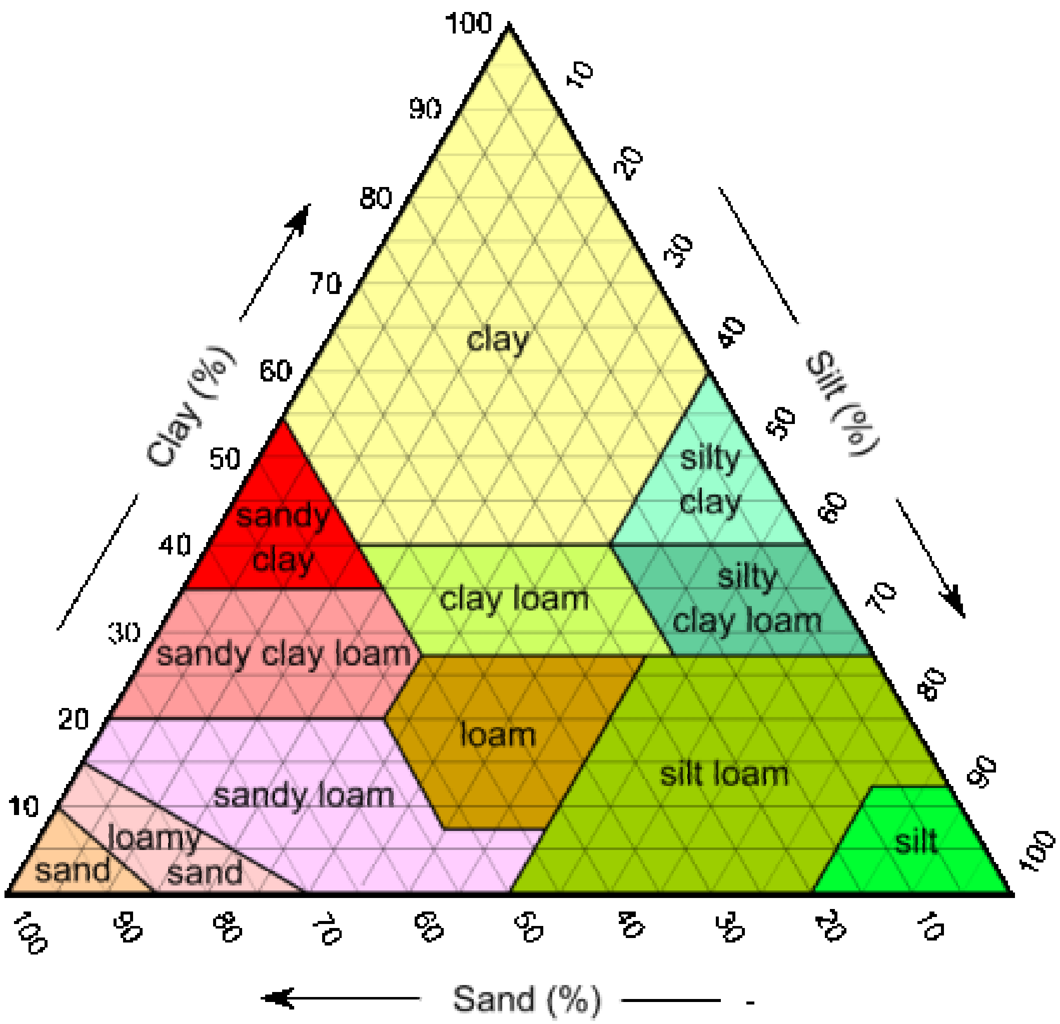


$$20 \leq \text{sand} \leq 45$$

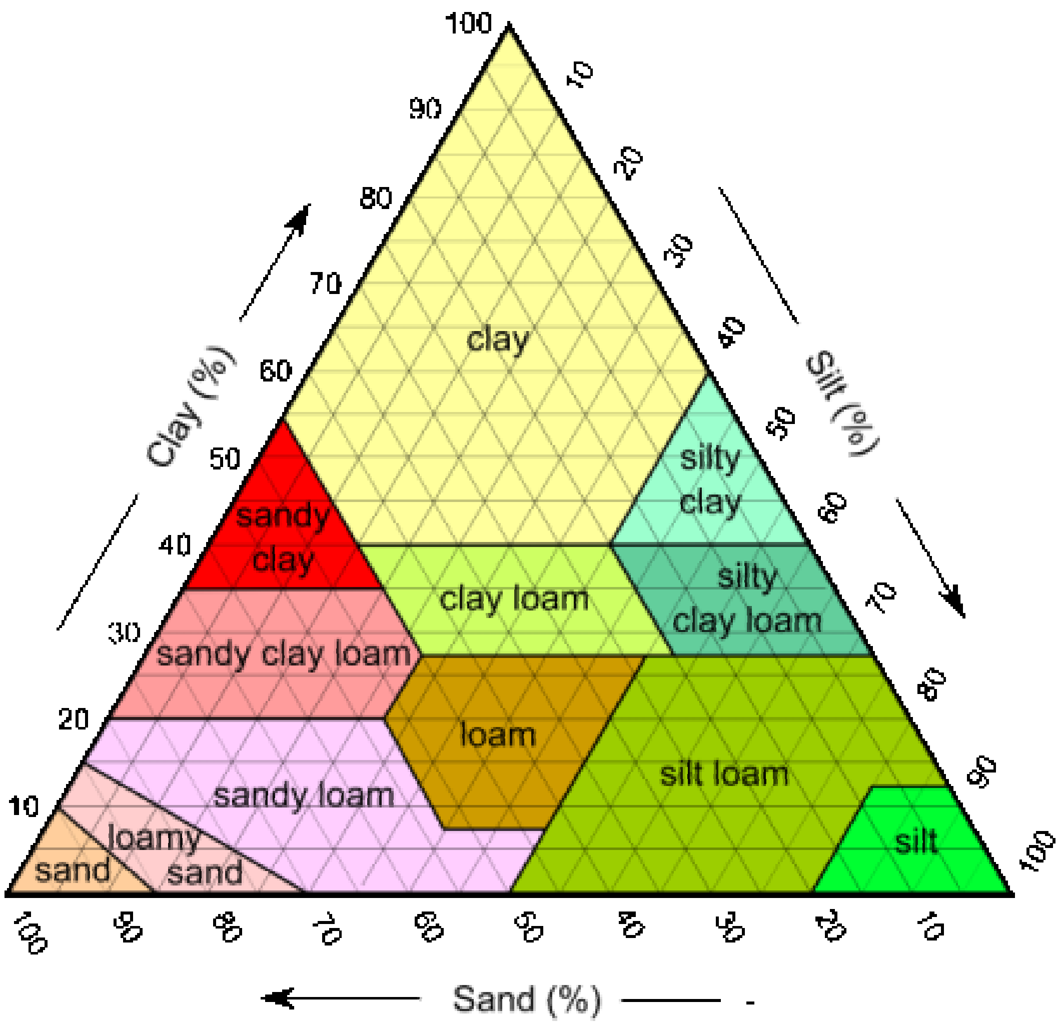
$$27.5 \leq \text{clay} \leq 40$$



„clay loam”: $20 \leq$ sand $\leq 45 \;\wedge\; 27.5 \leq$ clay ≤ 40



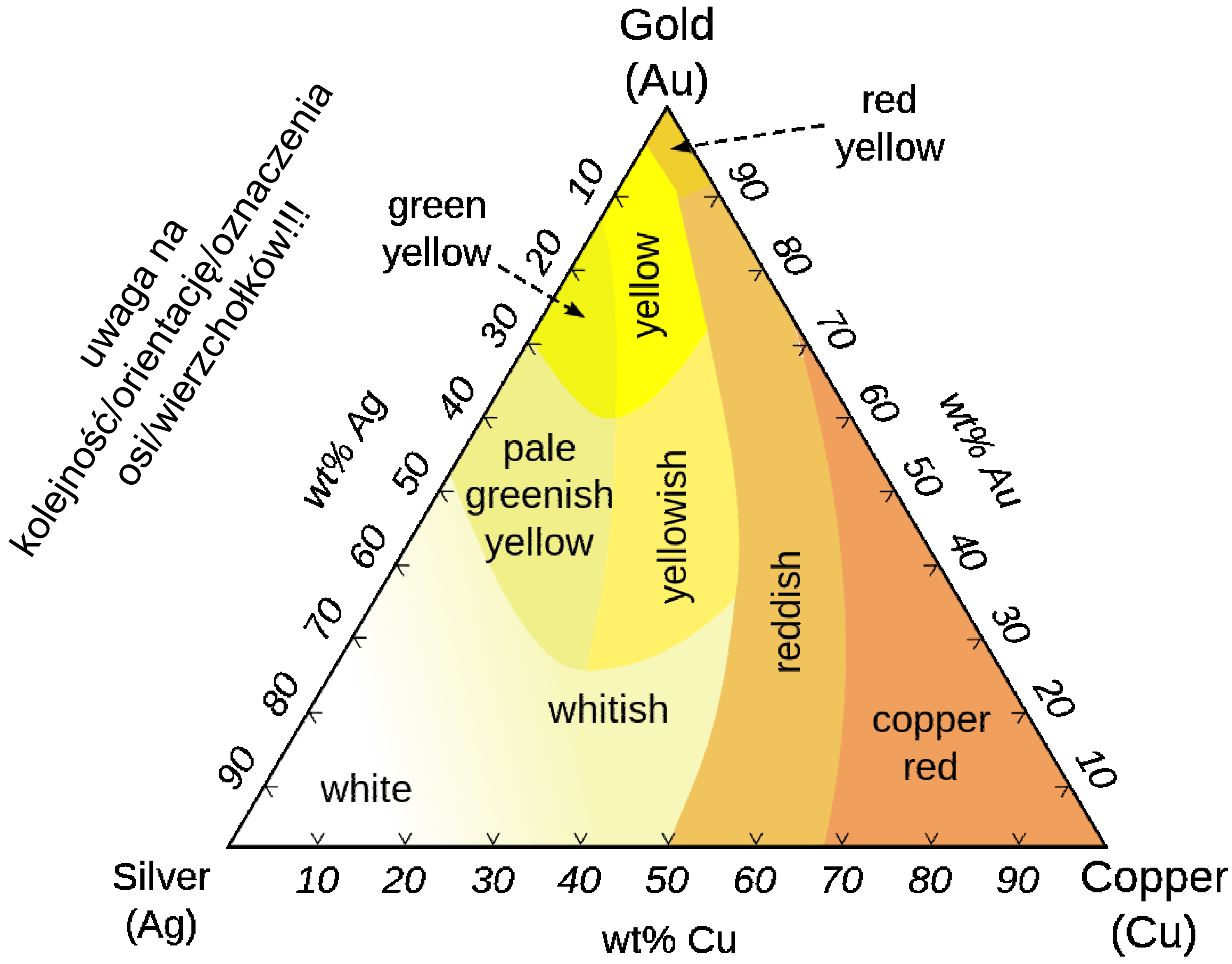
„???": sand $\leq 45 \;\wedge\;$ silt $\leq 40 \;\wedge\;$ clay ≥ 40



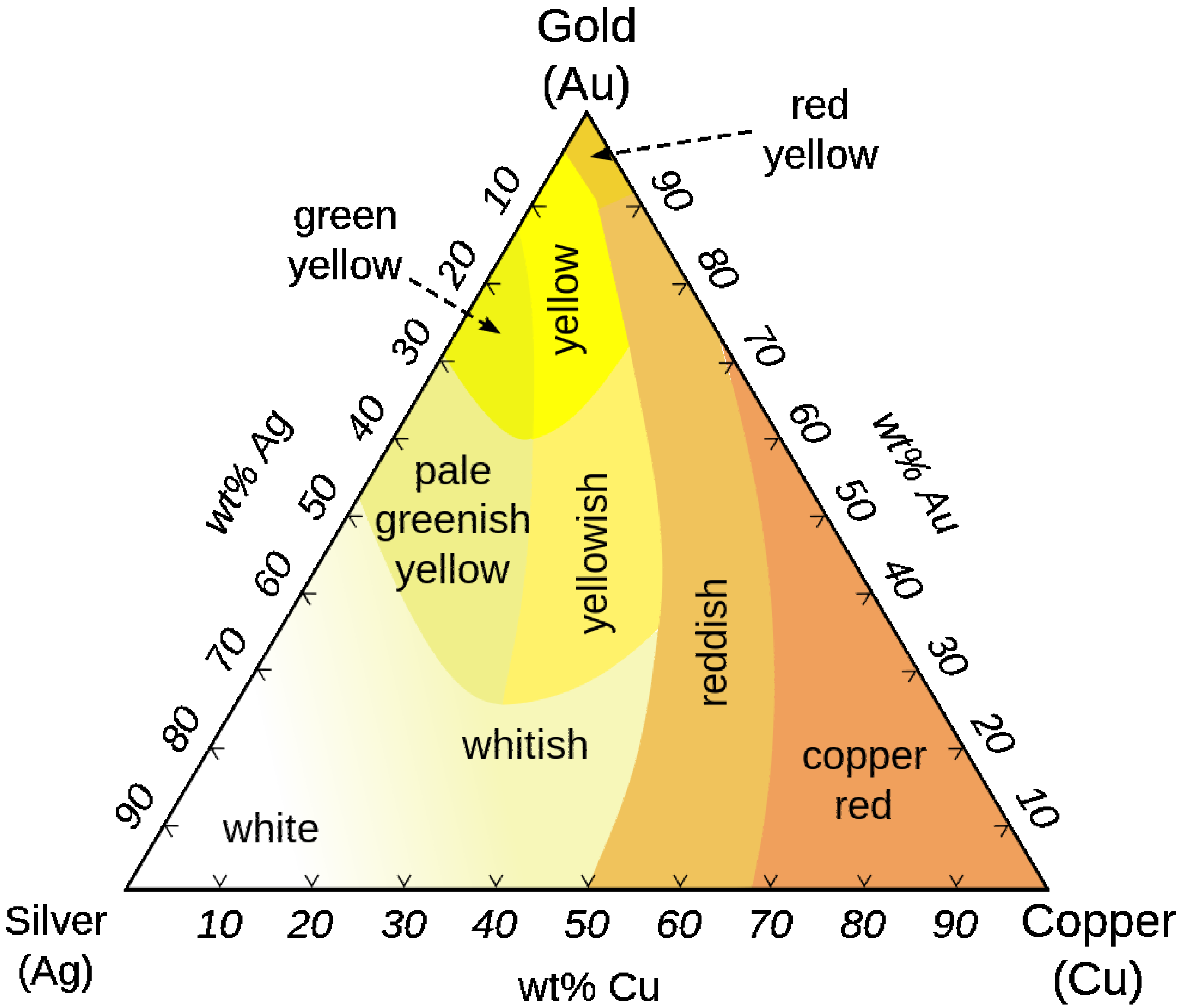
„clay”: sand ≤ 45 $\wedge$ silt ≤ 40 $\wedge$ clay ≥ 40

Barycentryczny układ współrzędnych

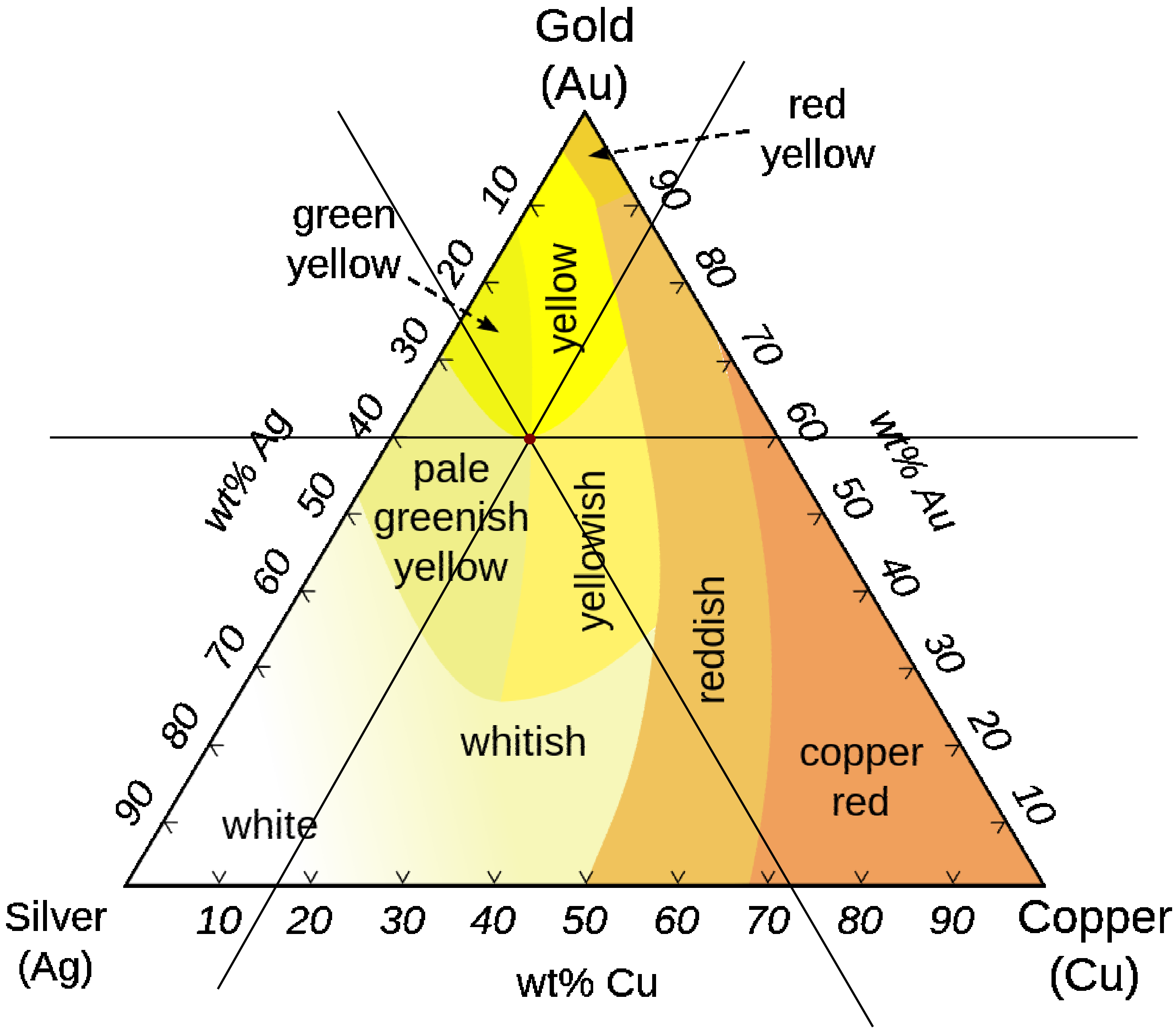
- Praktyczne zastosowania, c.d.
  - kolor stopu srebra, miedzi i złota



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ag-Au-Cu-colours-english.svg



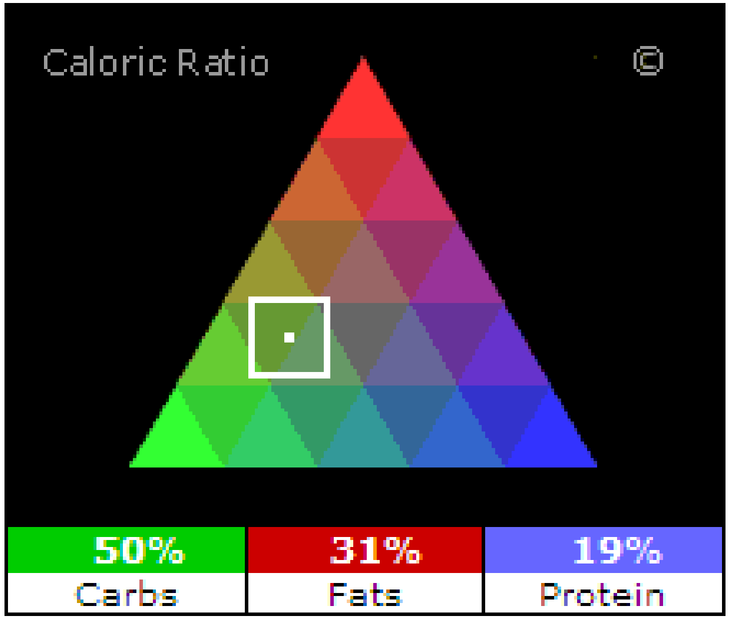
– przy jakiej minimalnej ilości złota można uzyskać żółty kolor stopu? Jaka musi być wtedy proporcja srebro/miedź?



– minimalna ilość złota: 60%
– proporcja srebro/miedź: 3/2 (czyli 24% i 16%)

Barycentryczny układ współrzędnych

- Praktyczne zastosowania, c.d.
  - charakterystyka (poszczególnych) produktów żywnościowych w kategoriach udziału cukru, białka i tłuszczu (tzw. caloric ratio pyramid)



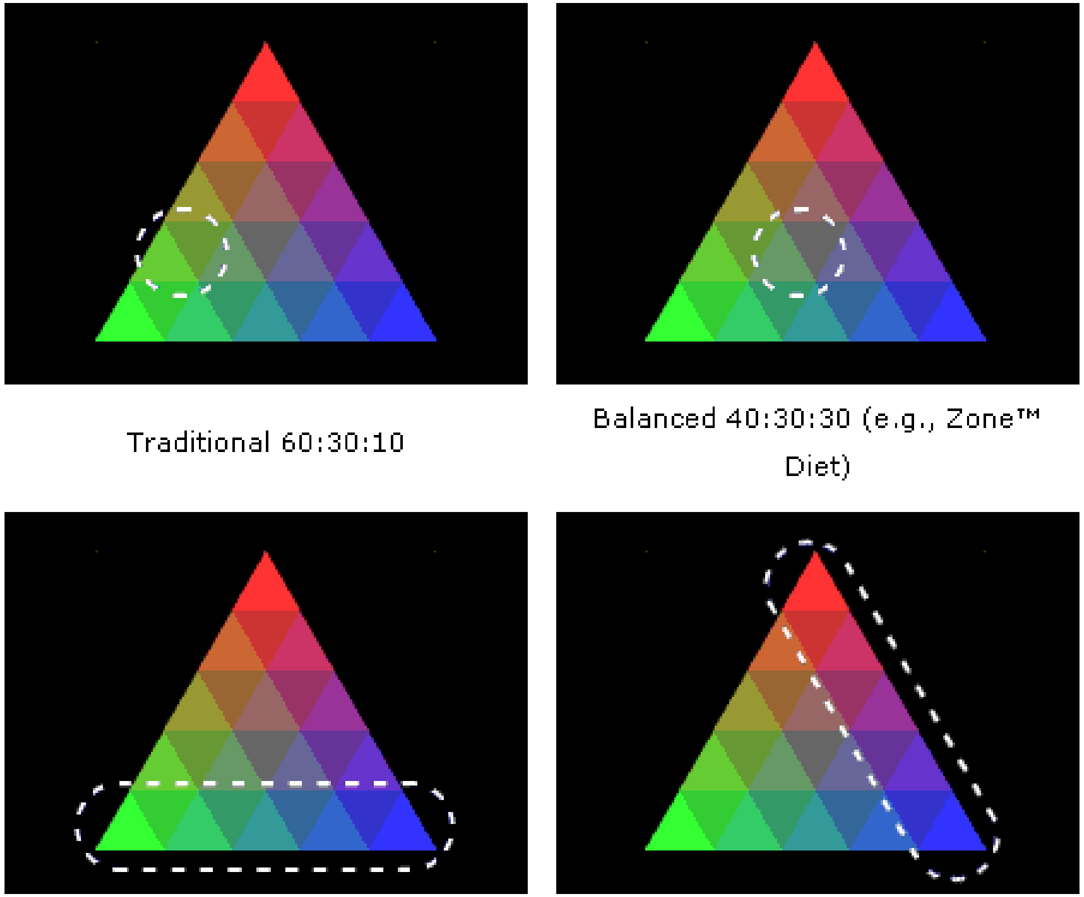
black eyed pea

http://nutritiondata.self.com/images/home/crp.gif

Barycentryczny układ współrzędnych

- Praktyczne zastosowania, c.d.
  - definicje diet w kategoriach udziału cukru, białka i tłuszczu

Barycentryczny układ współrzędnych



Traditional 60:30:10

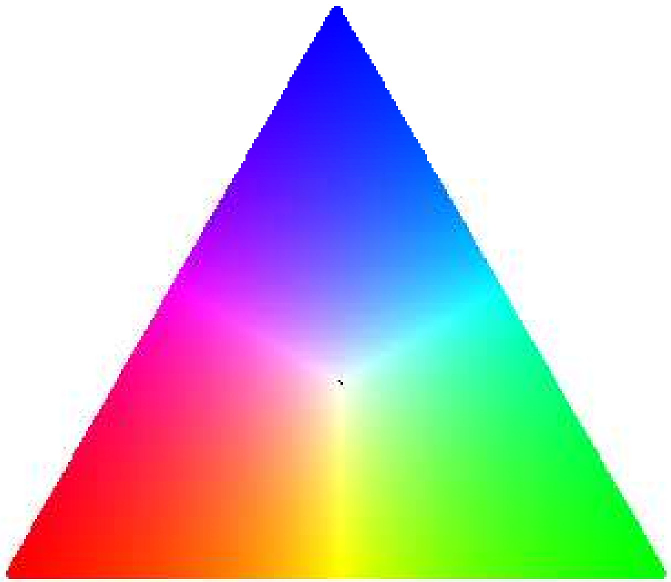
Balanced 40:30:30 (e.g., Zone™ Diet)

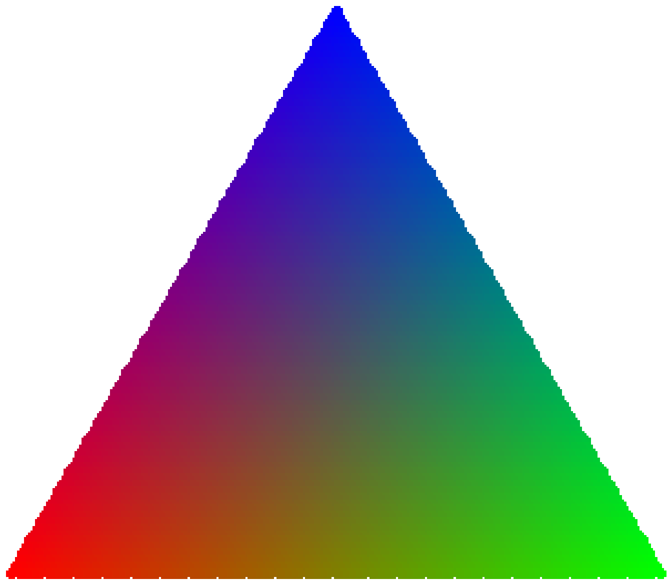
Low-Fat

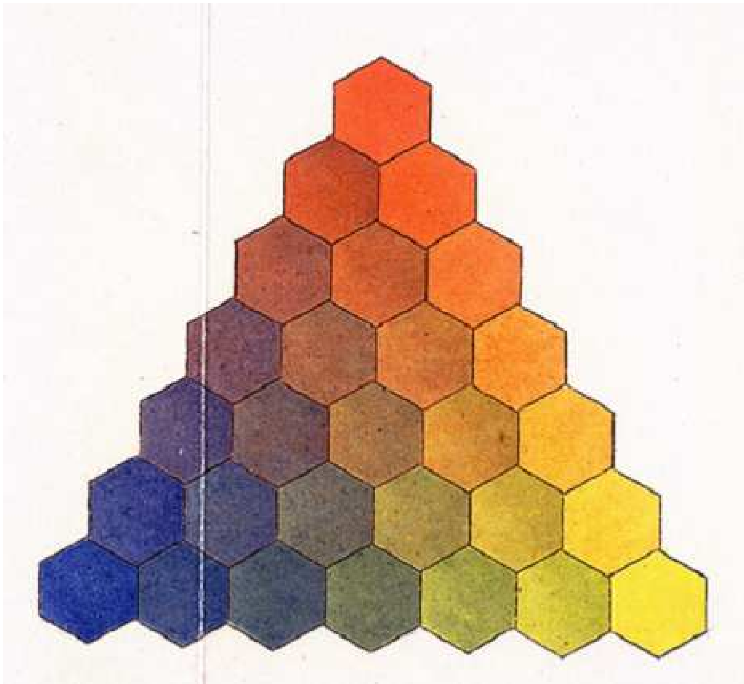
Low-Carb (e.g., Atkins™ Diet)

Barycentryczny układ współrzędnych

- Praktyczne zastosowania, c.d.
  - trójkąt kolorów Maxwella
    - „Chyba nie można uniknąć wniosku, że światło polega na poprzecznym falowaniu tego samego ośrodka, który wywołuje zjawiska elektryczne i magnetyczne.”



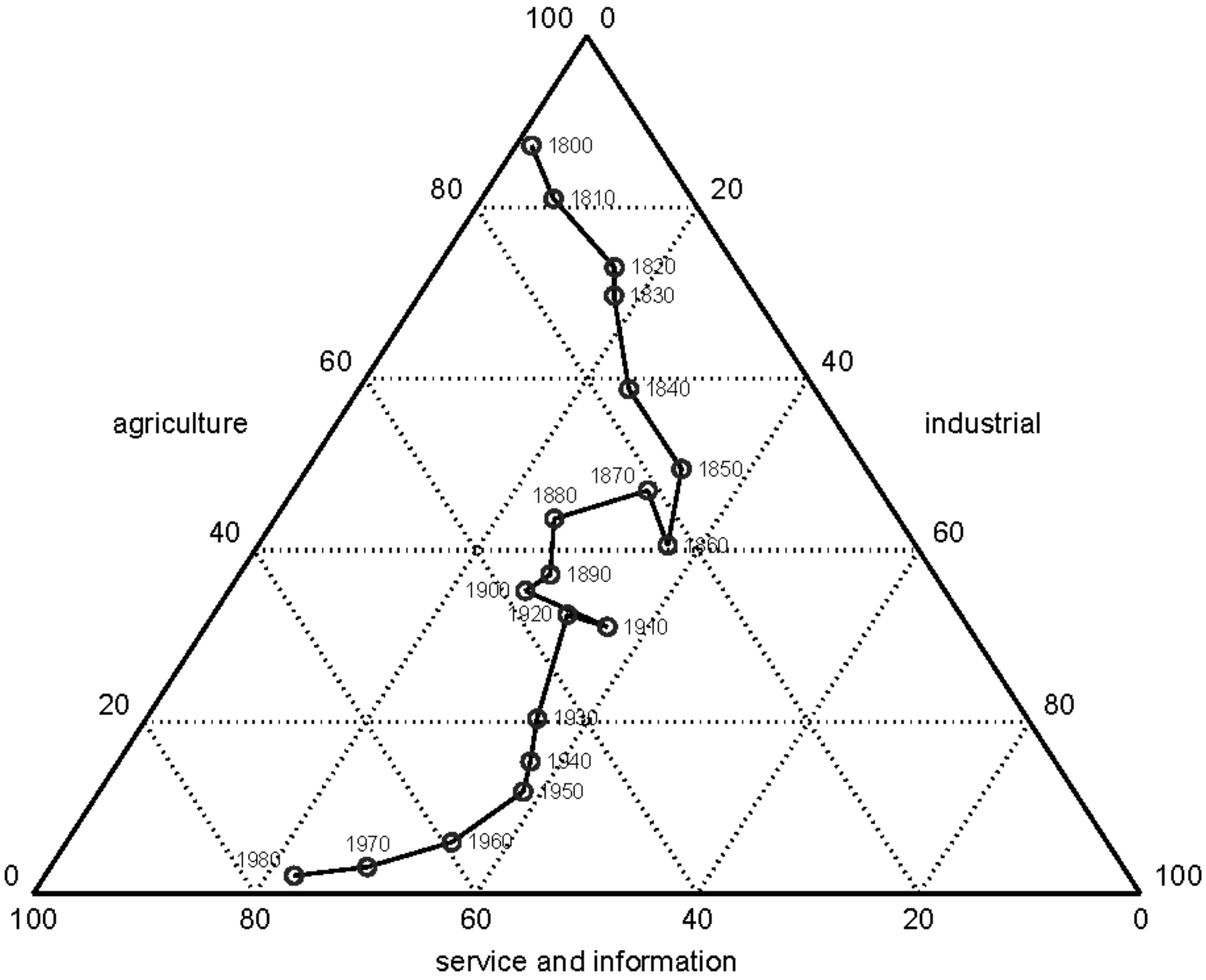




http://en.wikipedia.org/wiki/File:
Lichtenberg_color_triangle_Tobias_Mayer_1775.jpg

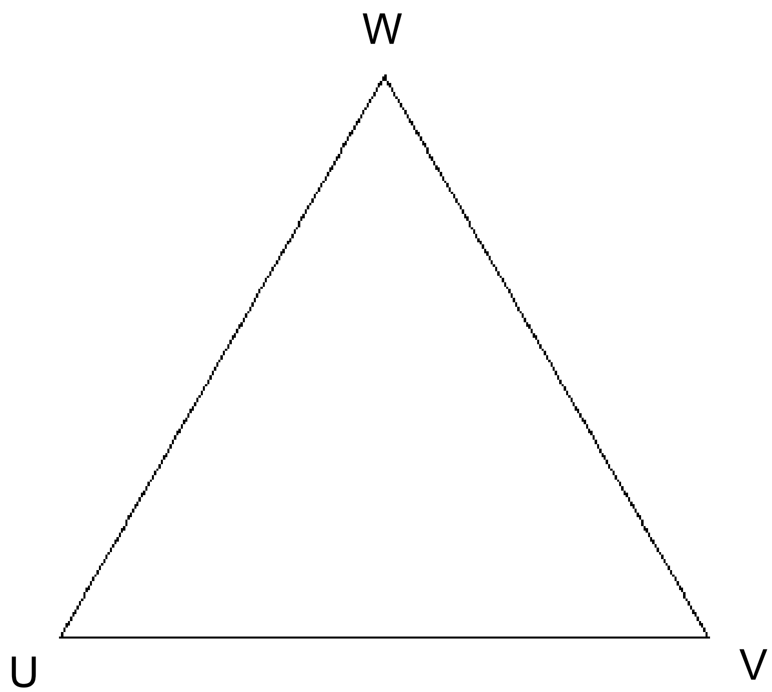
Barycentryczny układ współrzędnych

- Praktyczne zastosowania, c.d.
  - charakterystyka gospodarki w kategoriach usług+informacji, przemysłu i rolnictwa (w poszczególnych latach)

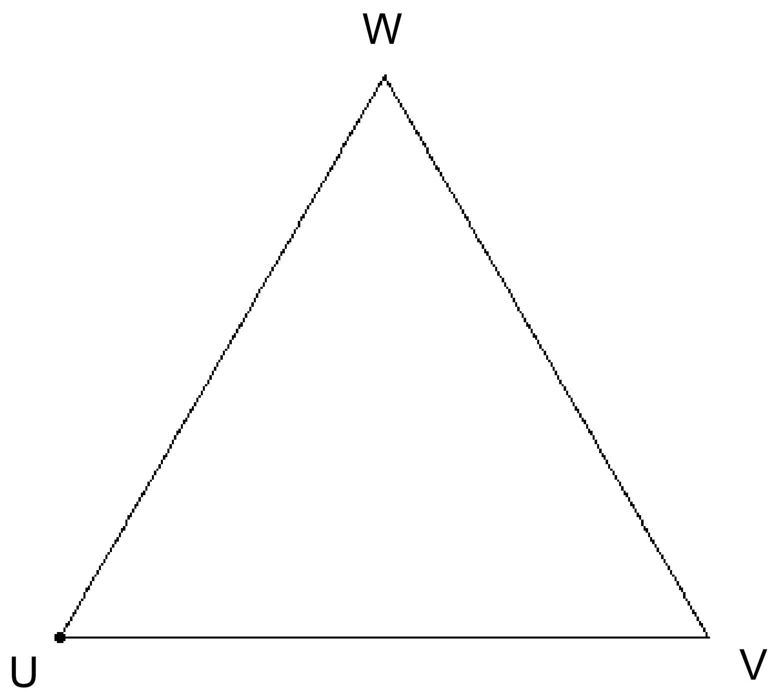


http://ethanfosse.blogspot.com/2012/03/triaxial-graphs.html

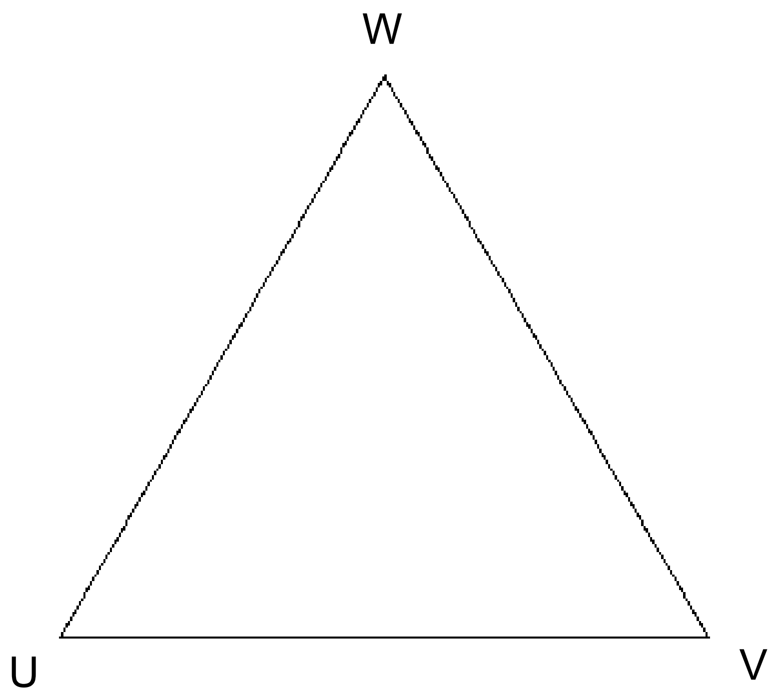
...



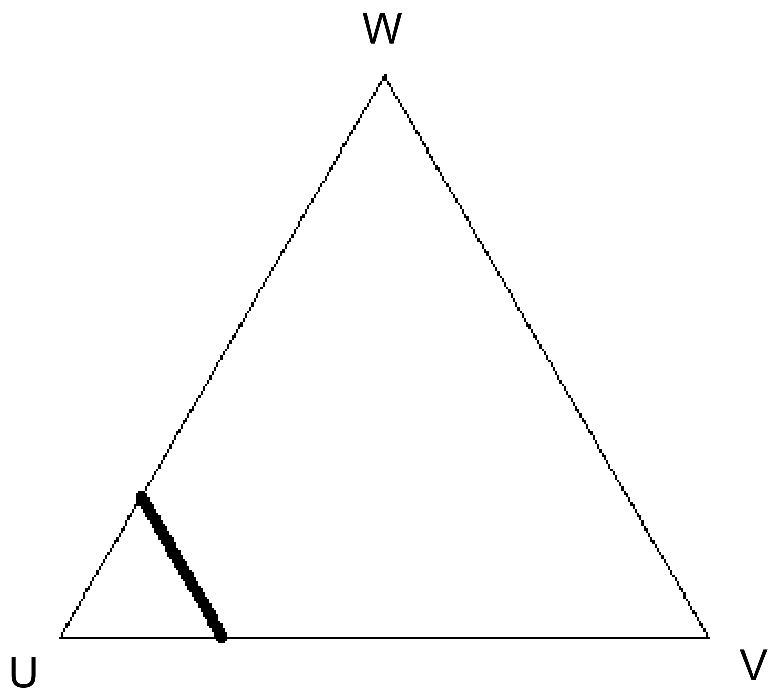
$u = 1.0?$



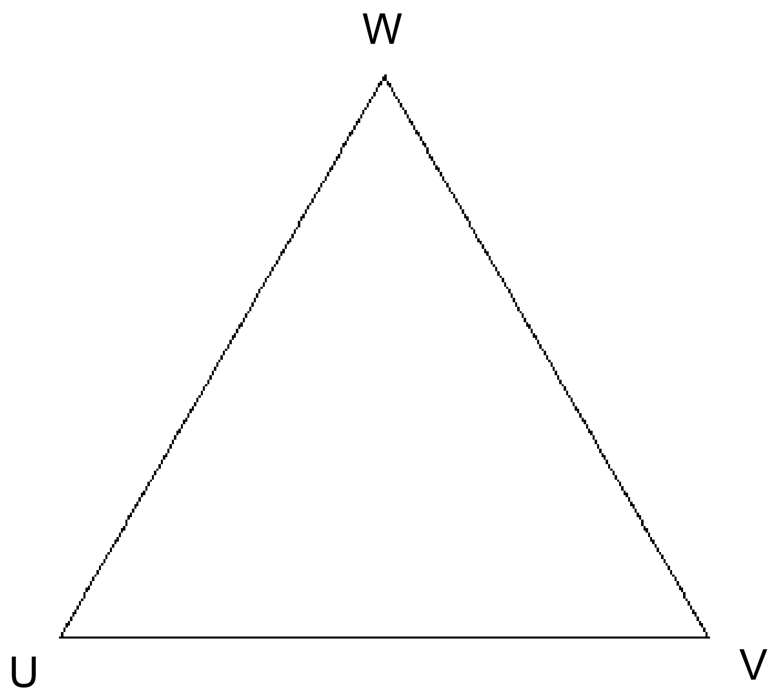
u = 1.0



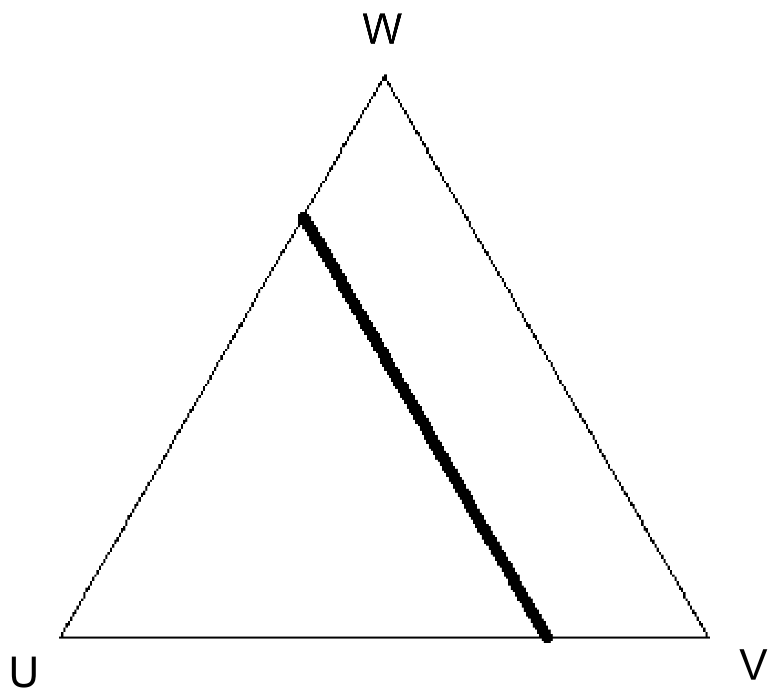
u = 0.75?



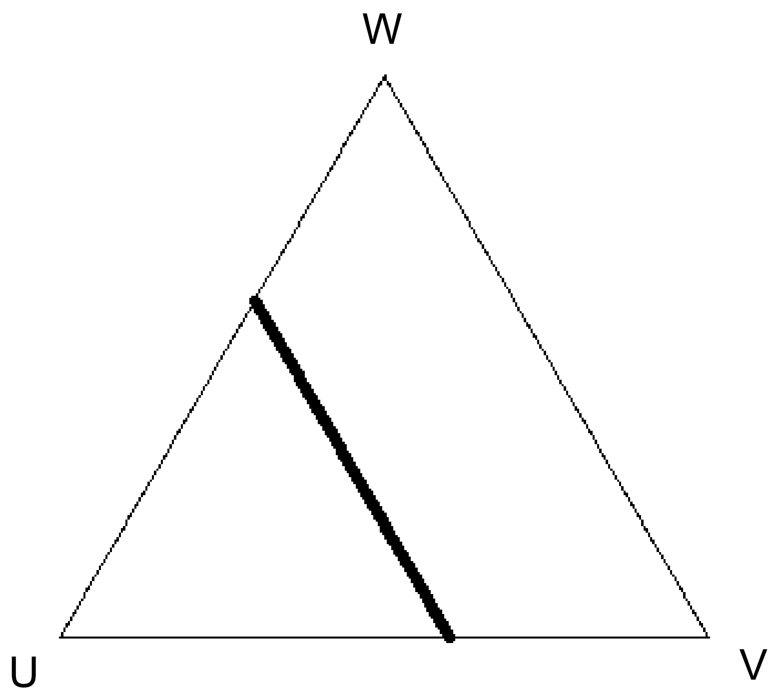
u = 0.75



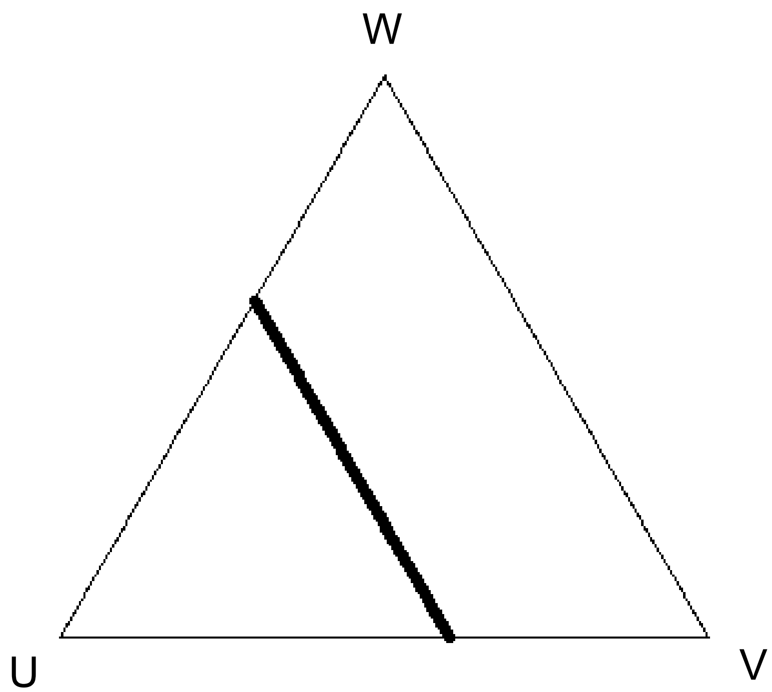
u = 0.25?



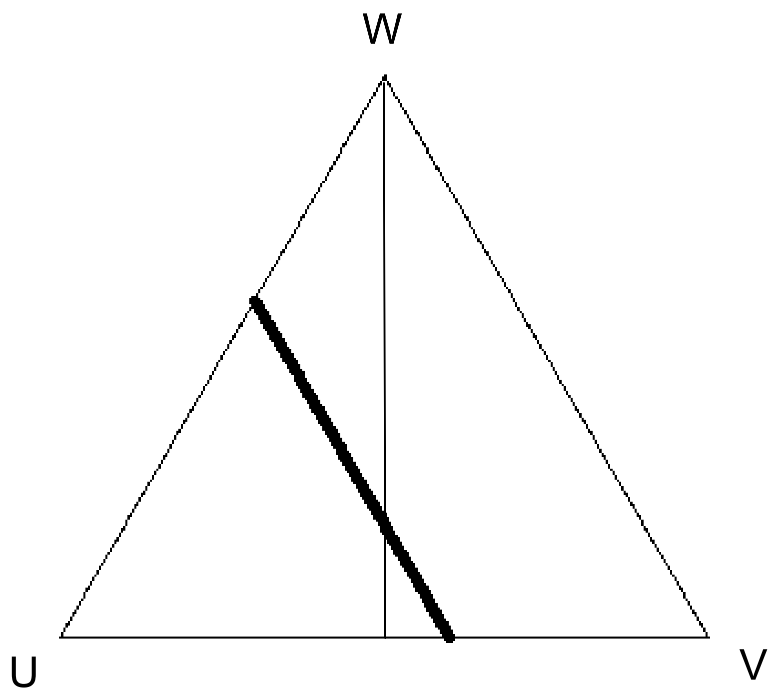
u = 0.25



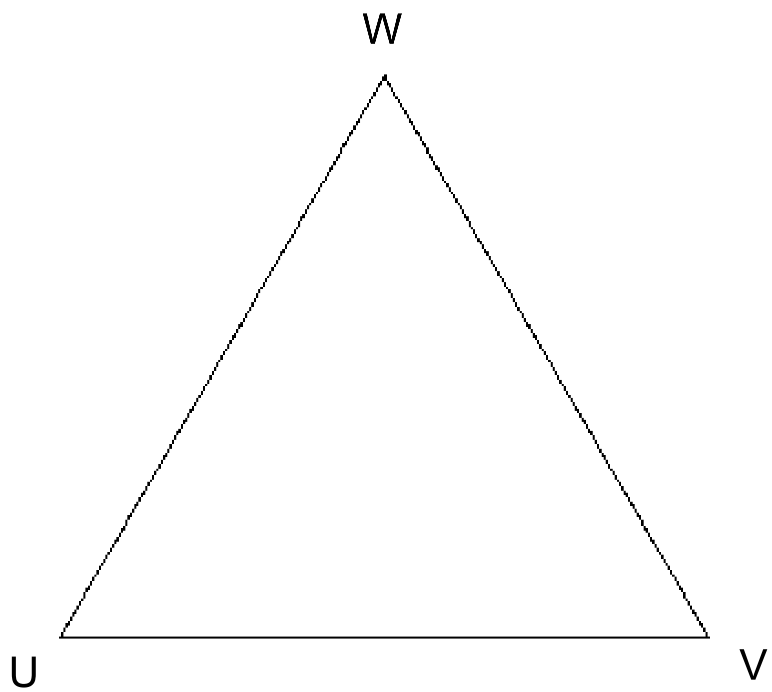
u = ???



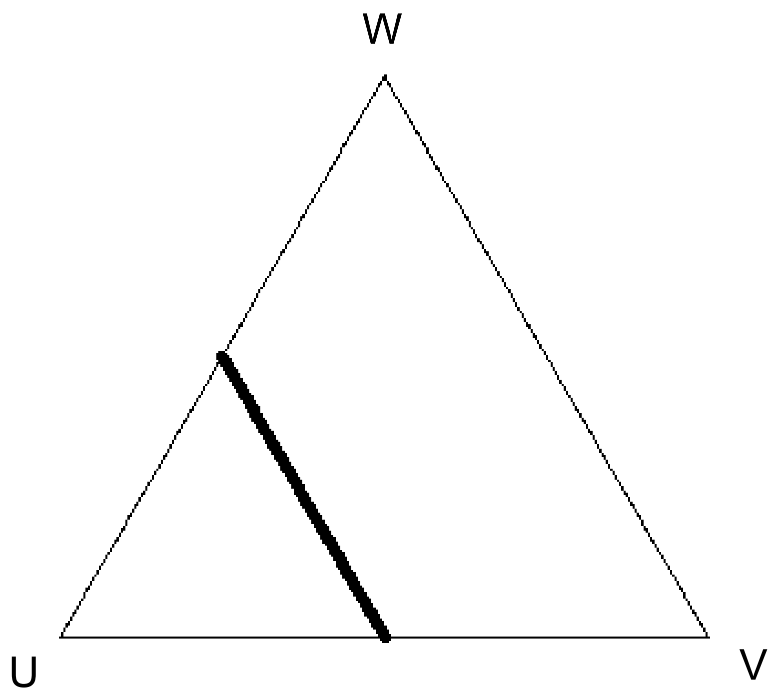
u = 0.4



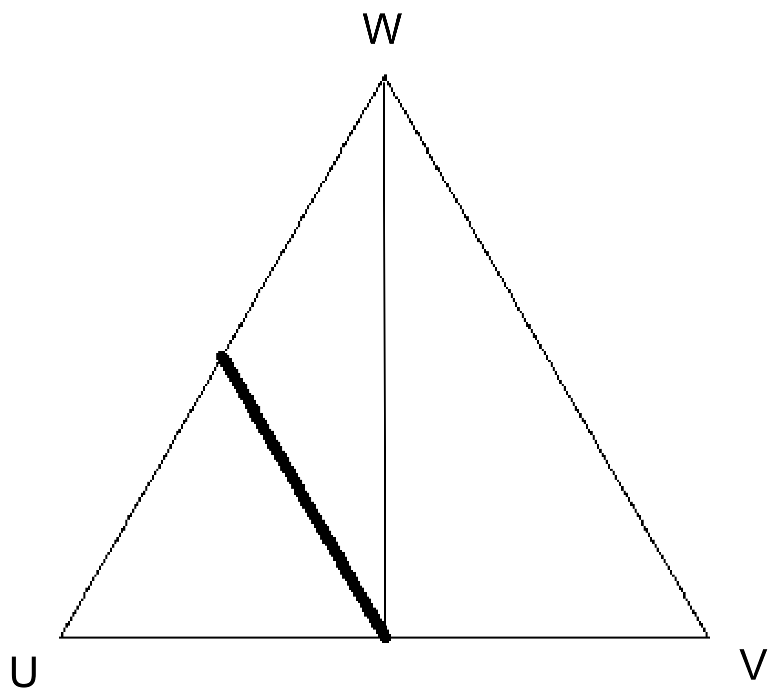
u = 0.4



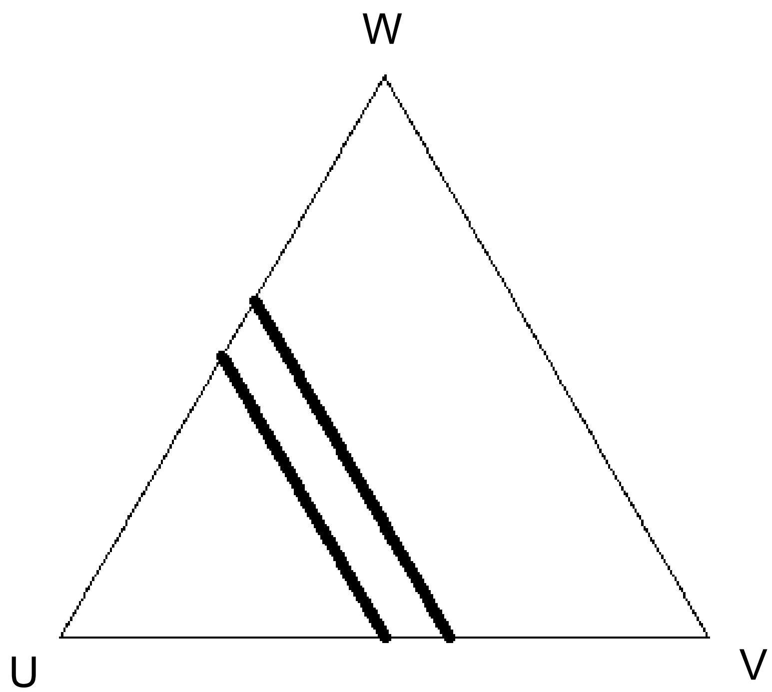
u = 0.5?



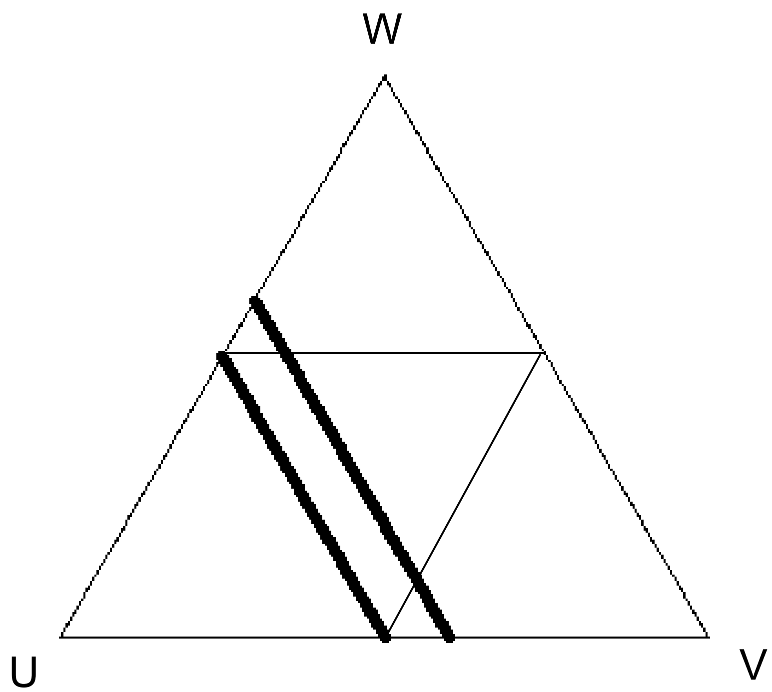
u = 0.5



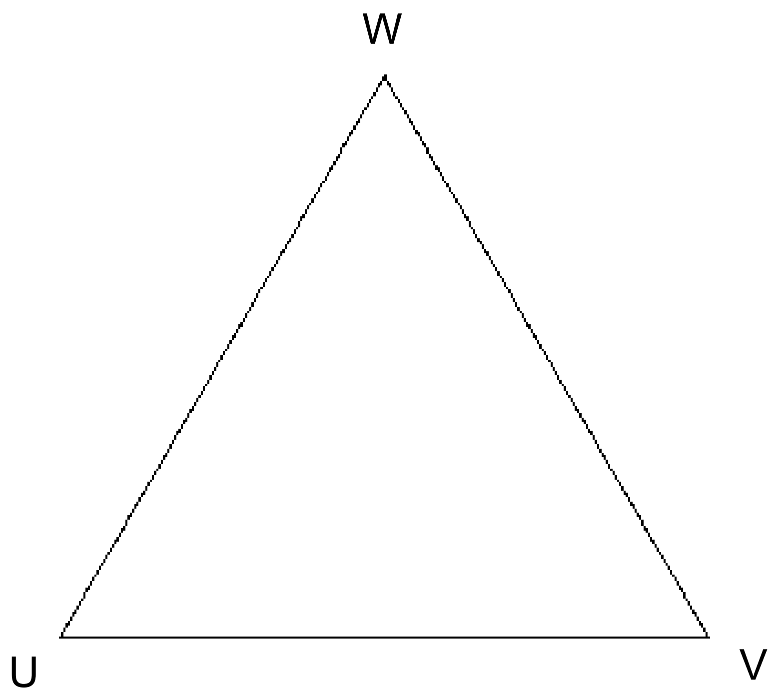
u = 0.5



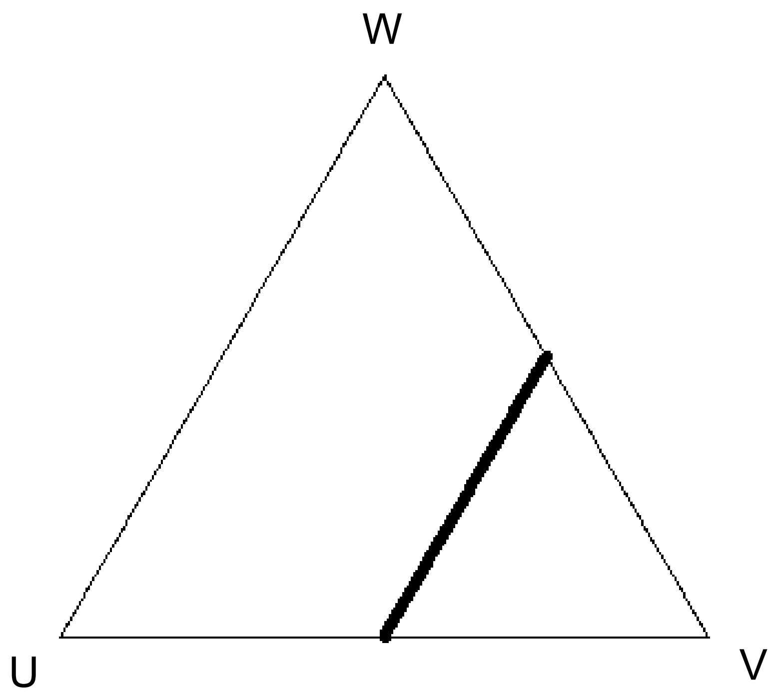
$u = 0.5 \vee 0.4$



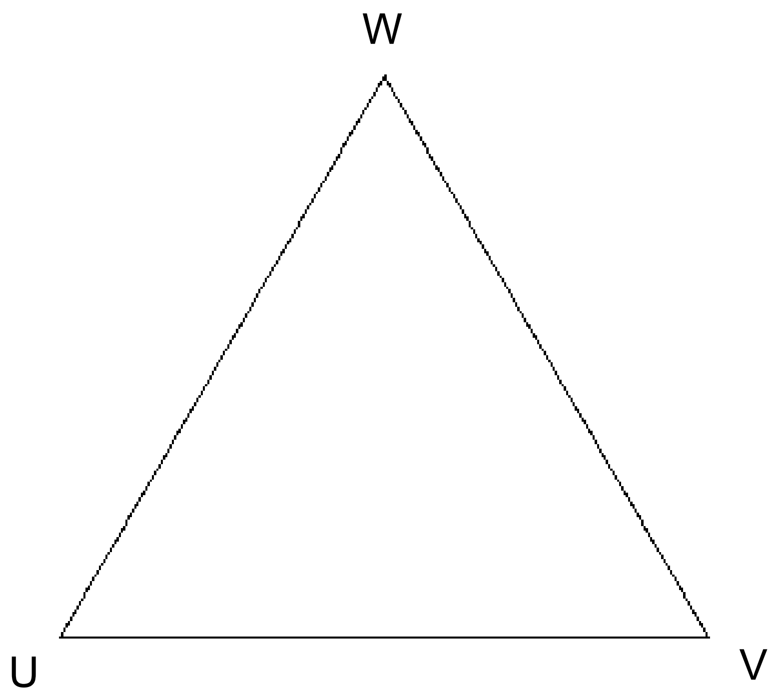
$u = 0.5 \vee 0.4$



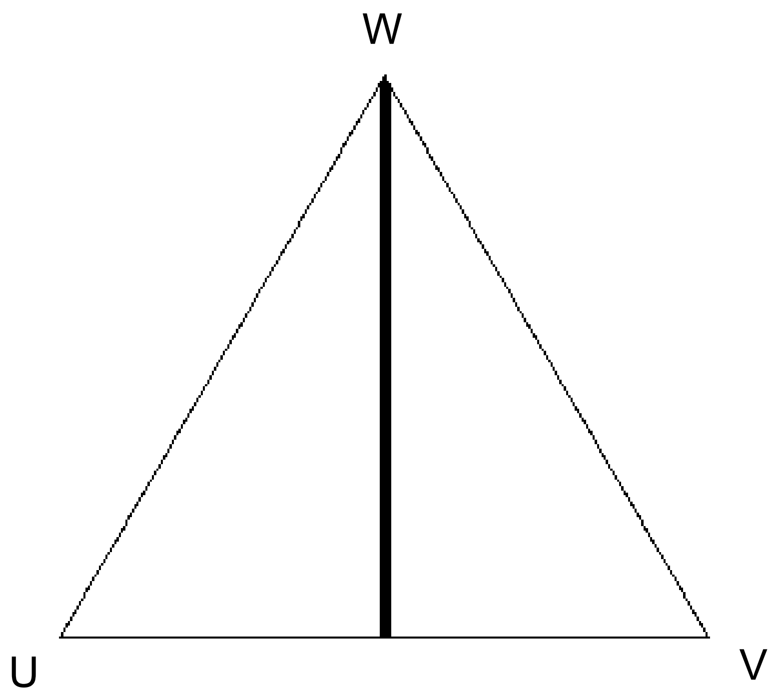
v = 0.5?



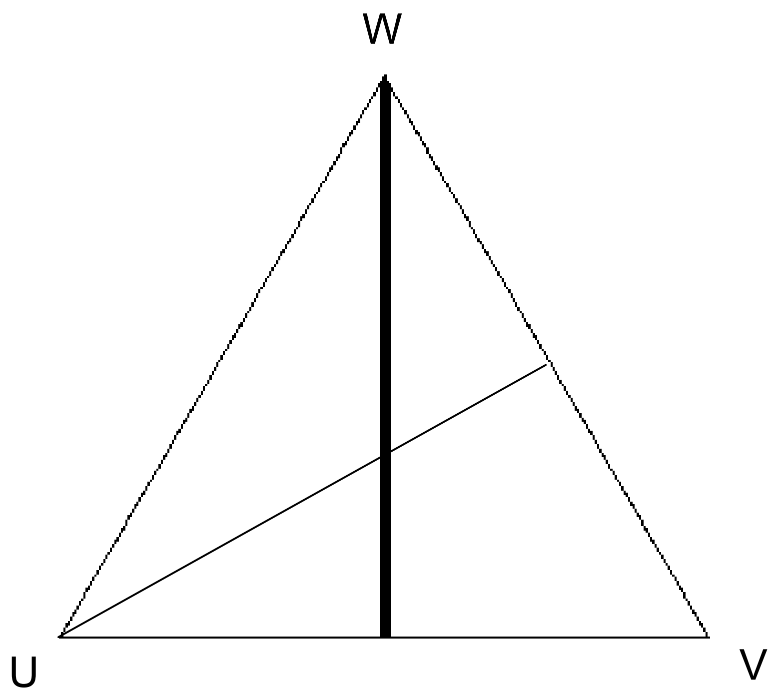
v = 0.5



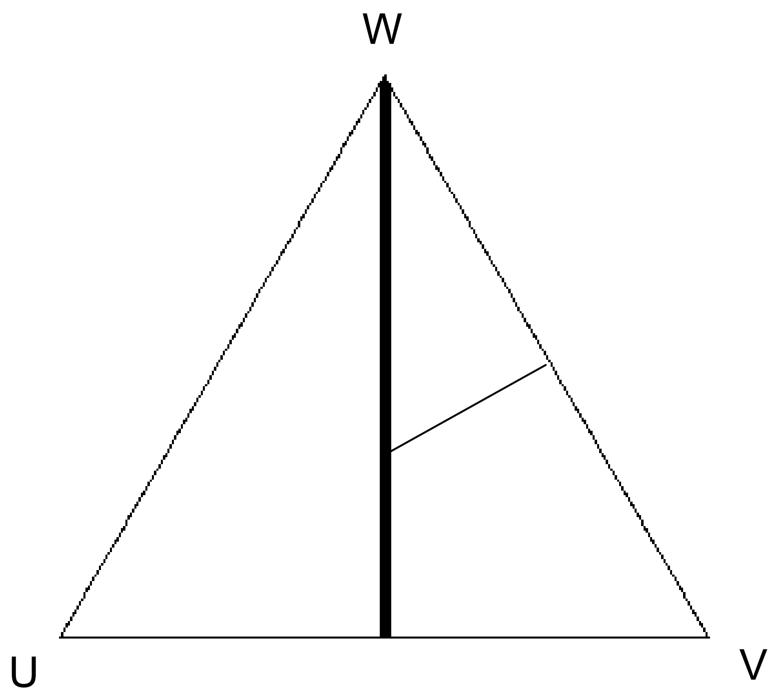
u = v?



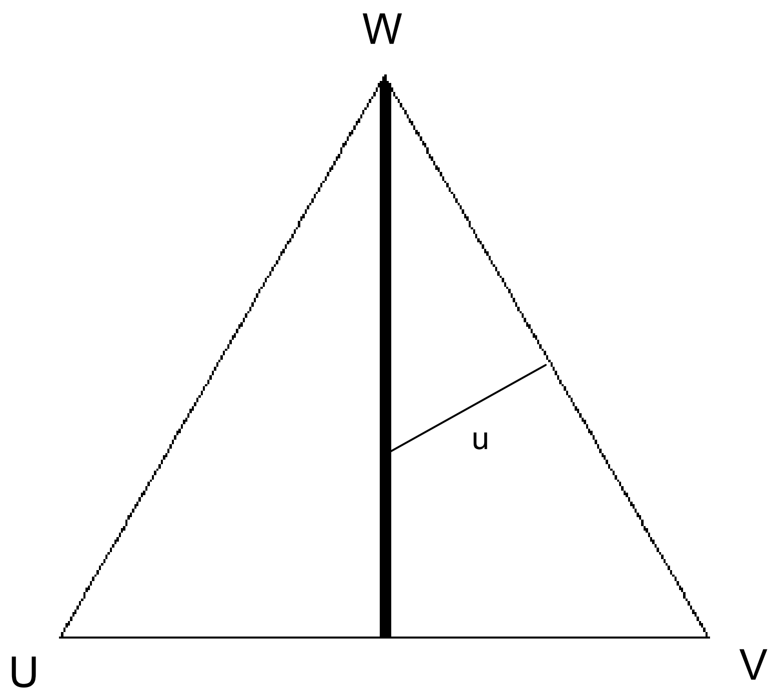
$u = v$



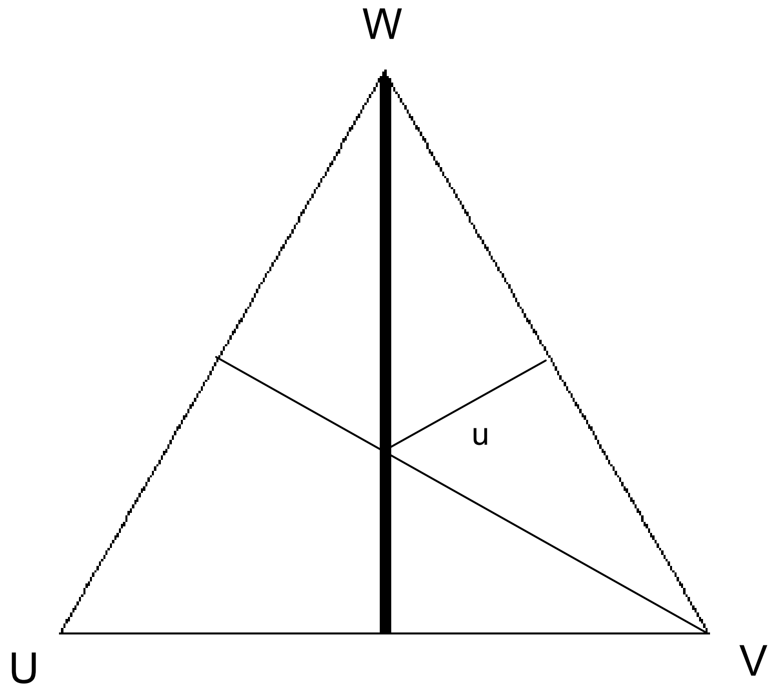
u = v



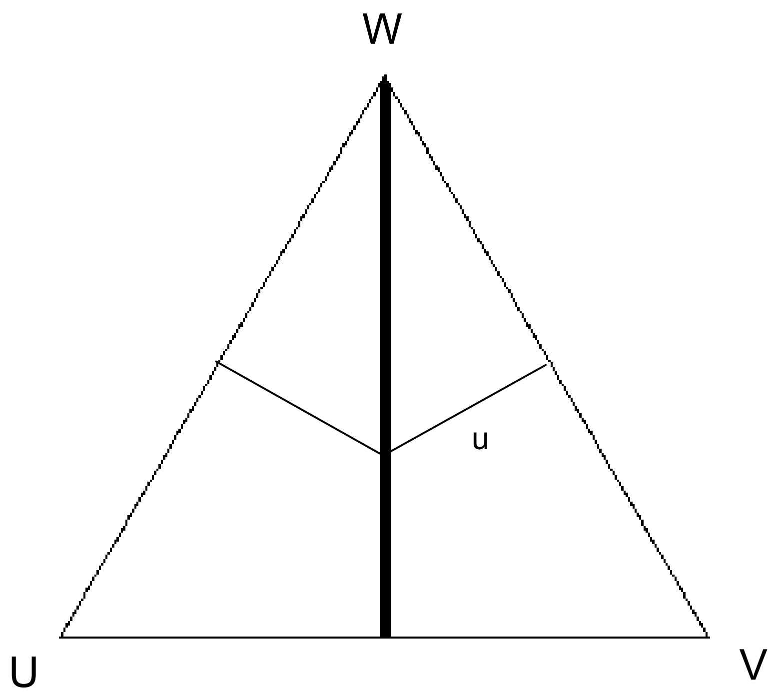
u = v



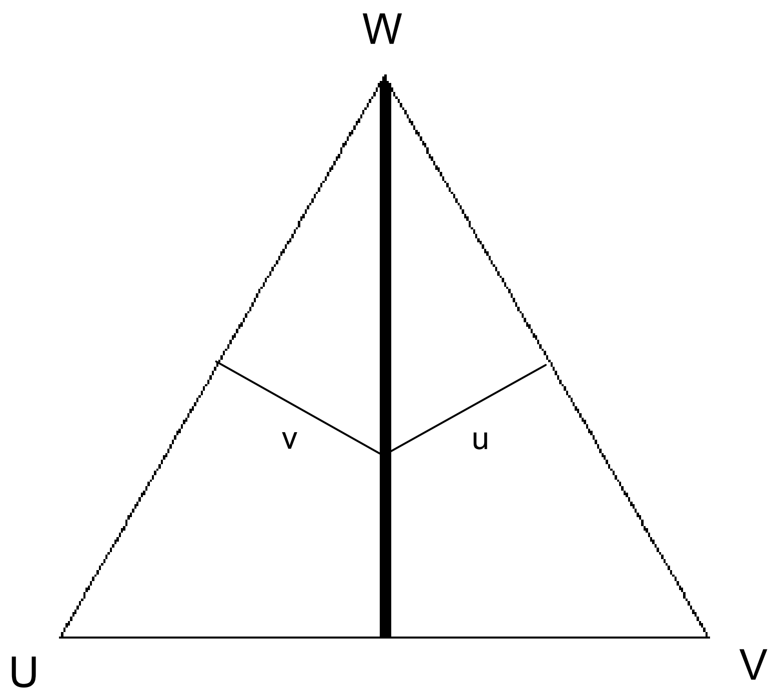
u = v



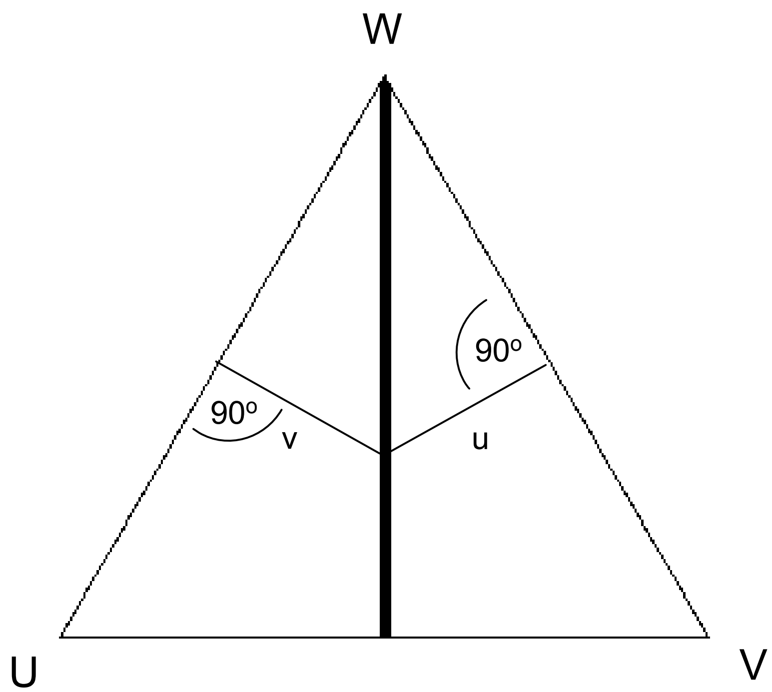
$u = v$



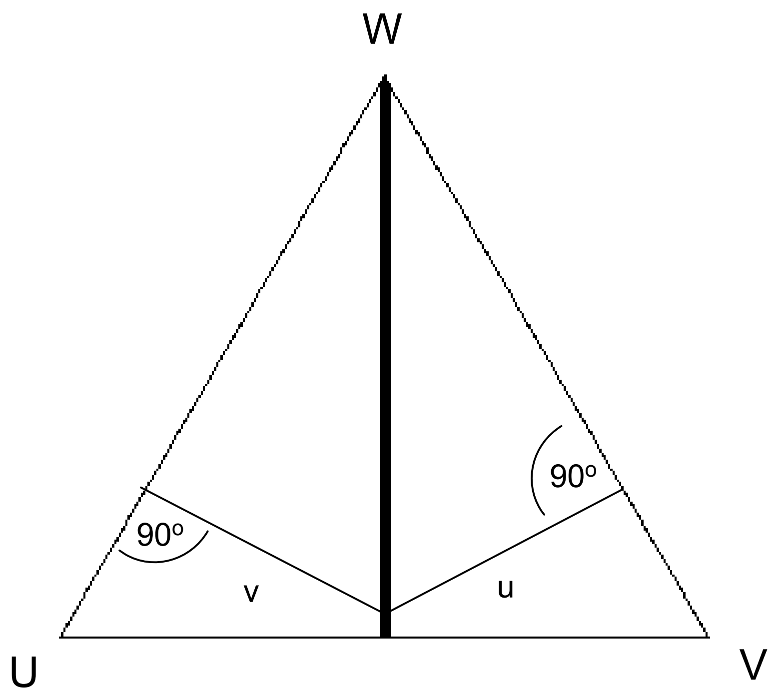
$u = v$



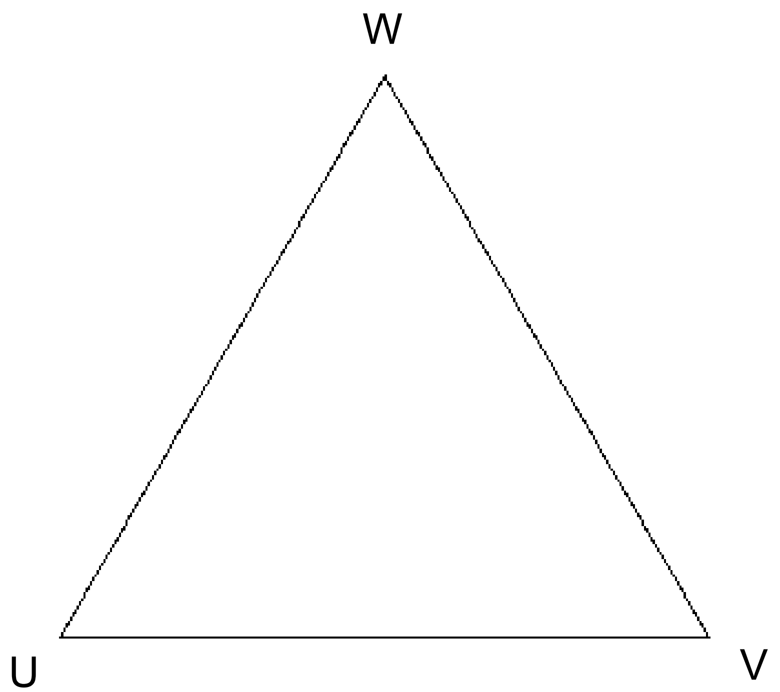
u = v



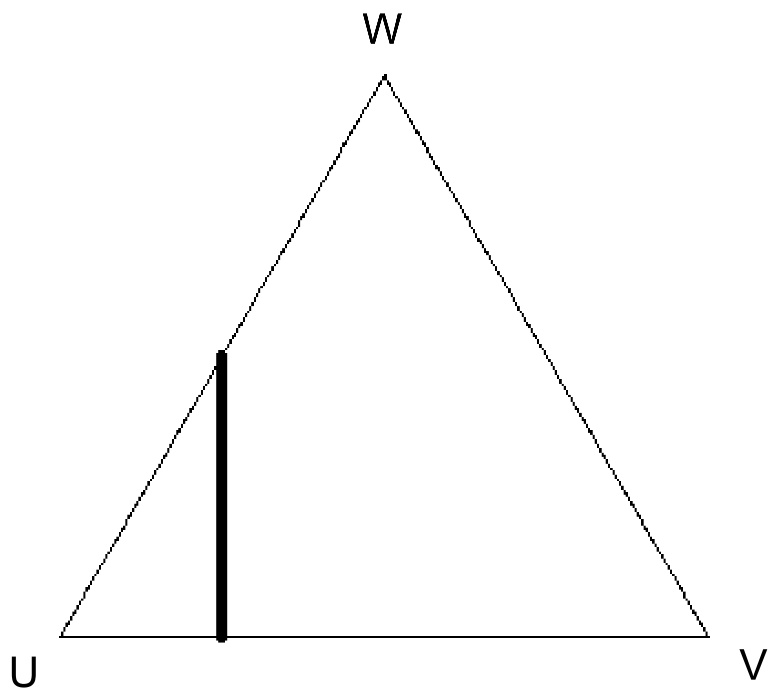
u = v



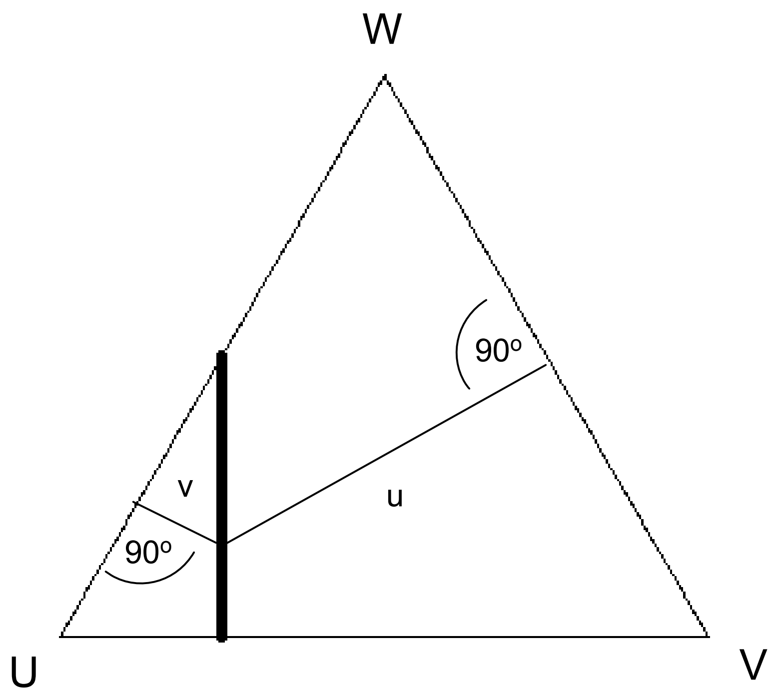
u = v



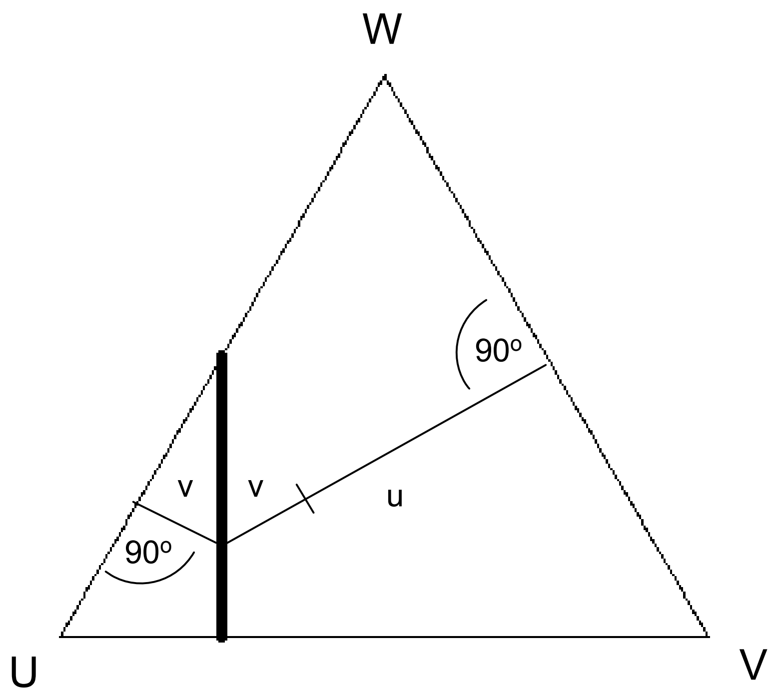
$u = v + 0.5$?



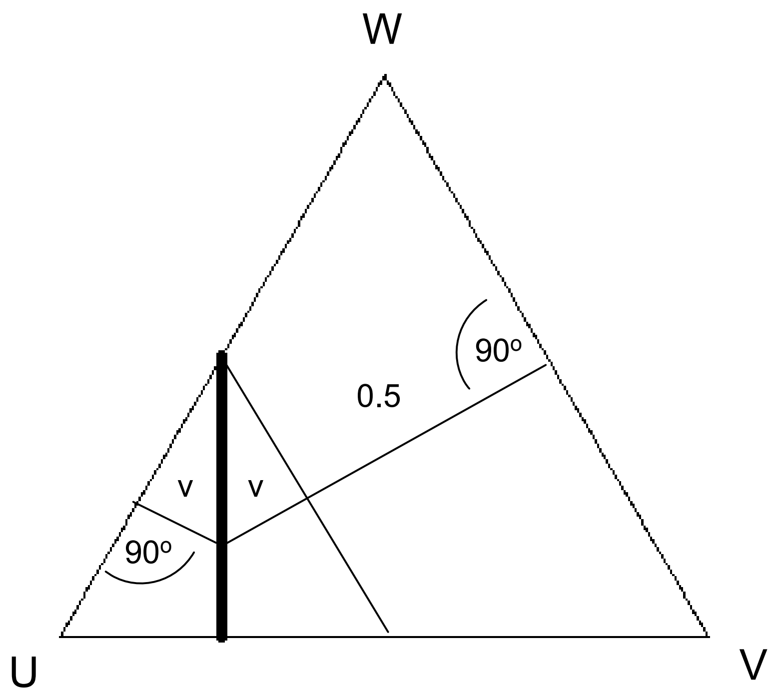
$u = v + 0.5$



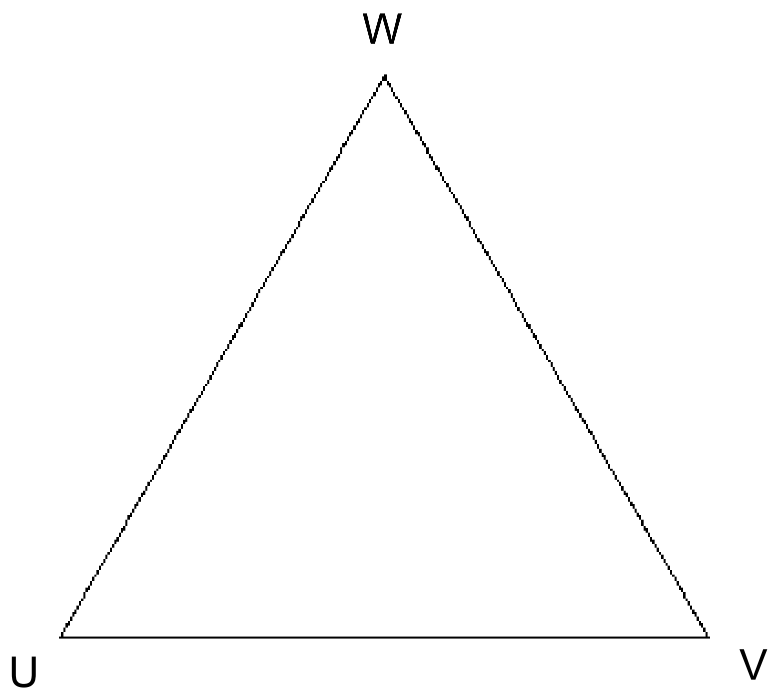
$$u = v + 0.5$$



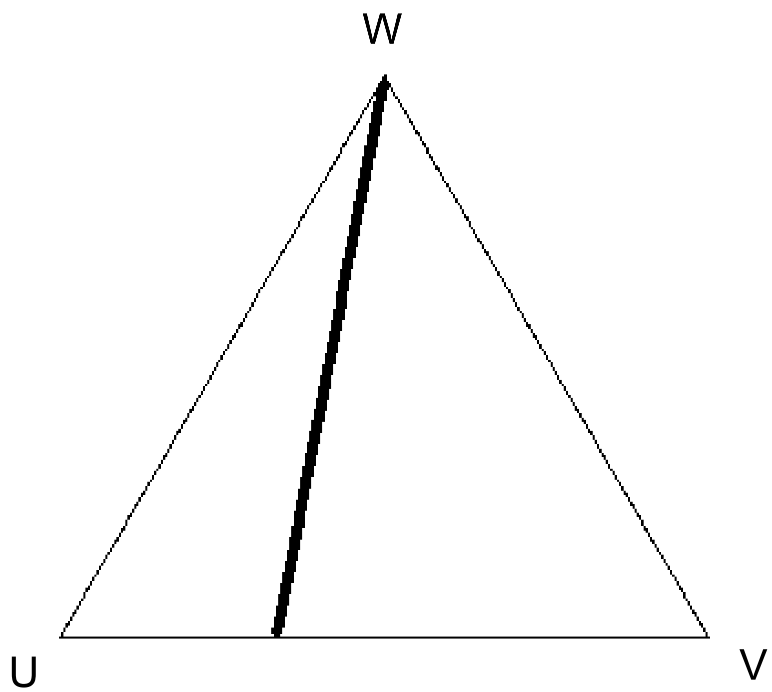
$$u = v + 0.5$$



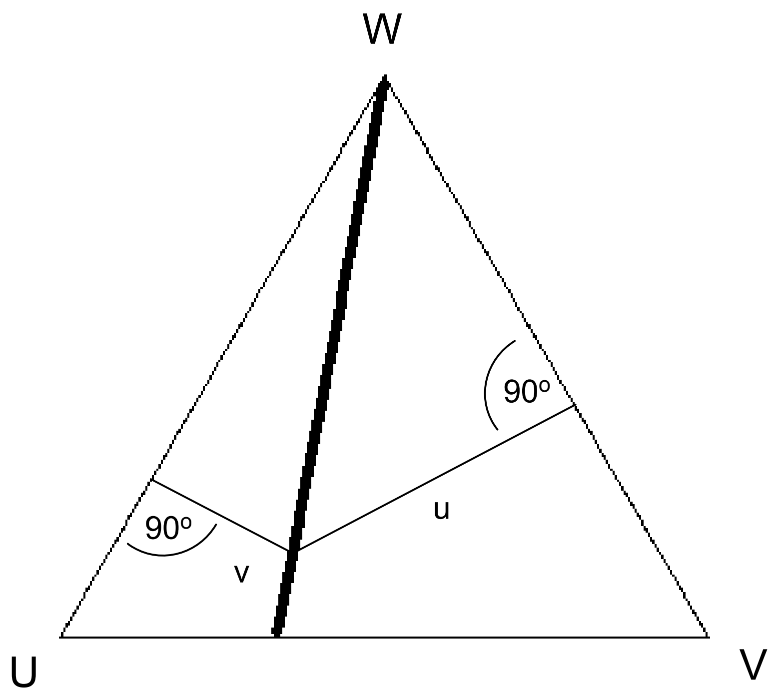
$$u = v + 0.5$$



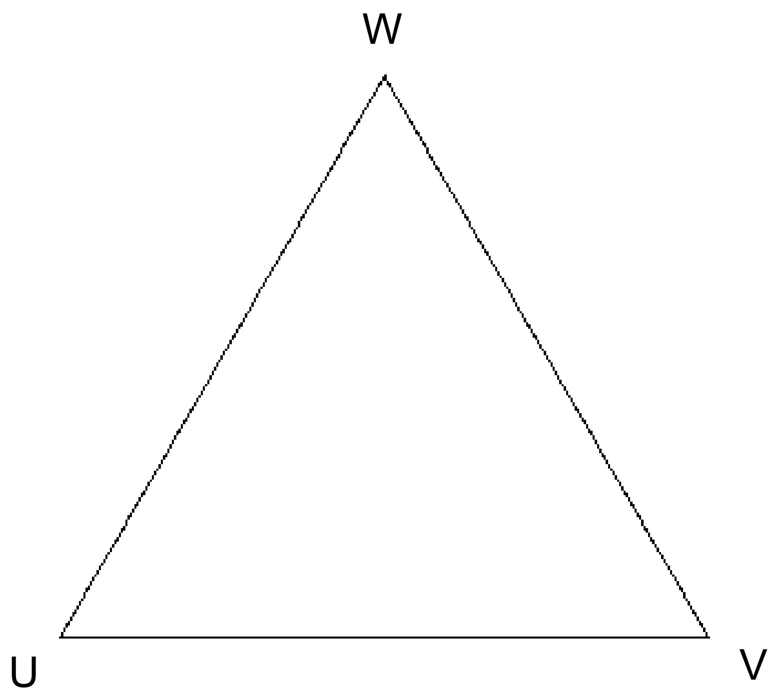
u = 2v?



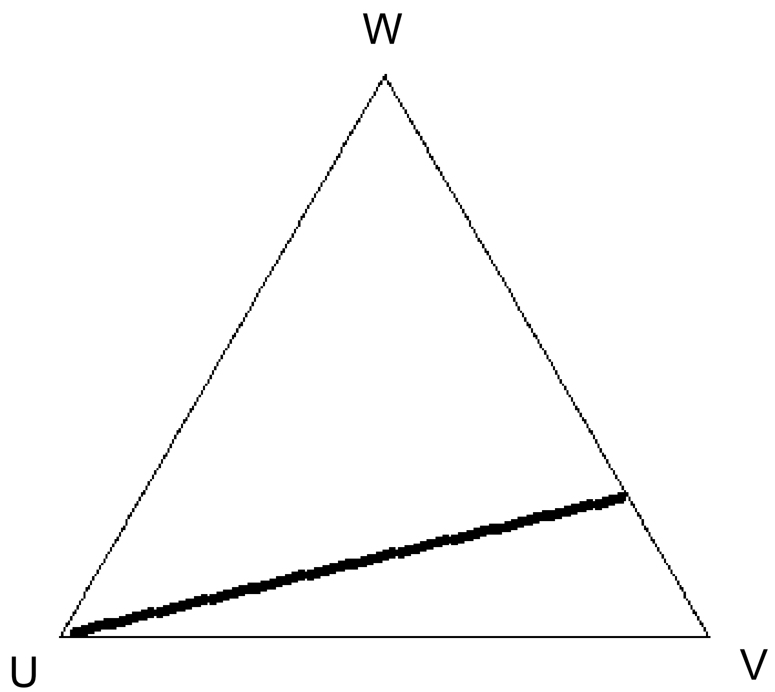
u = 2v



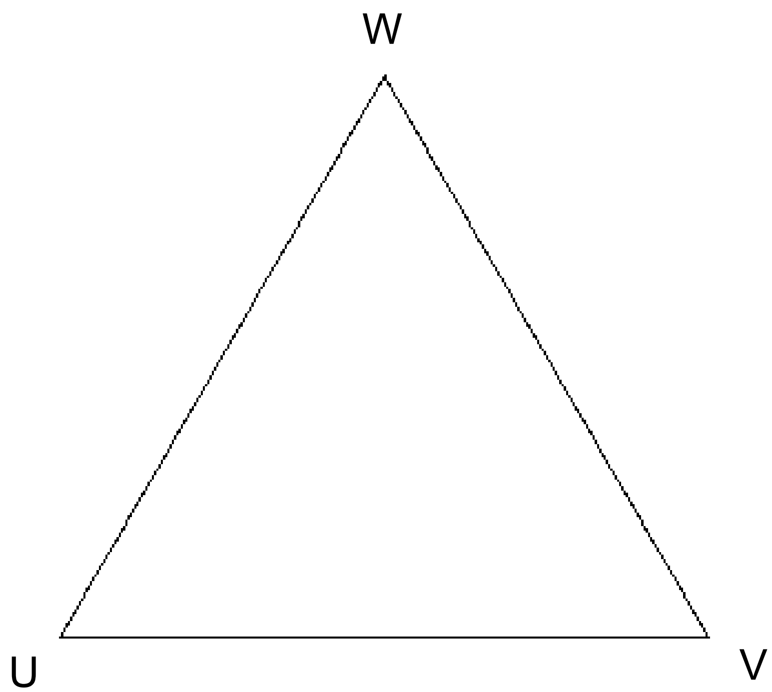
$u = 2v$



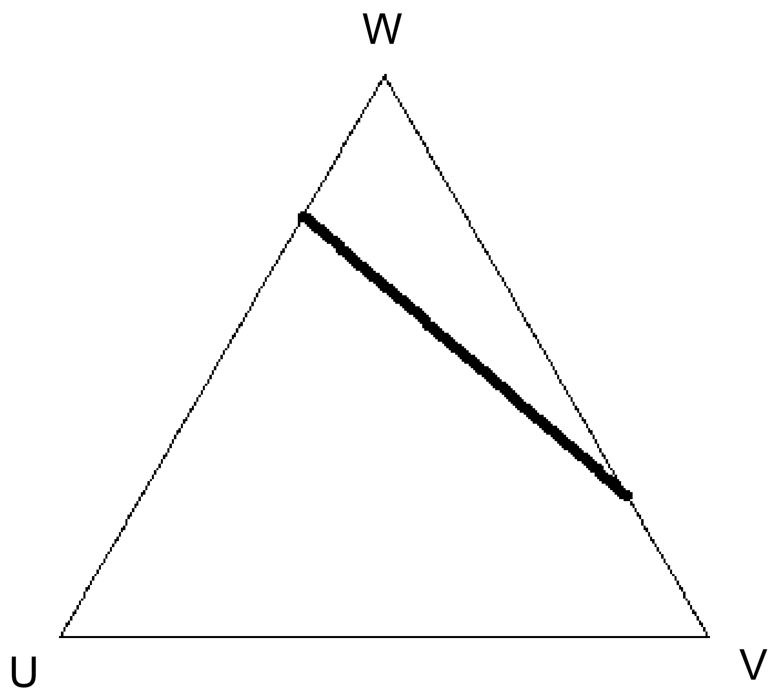
$v = 3w$?



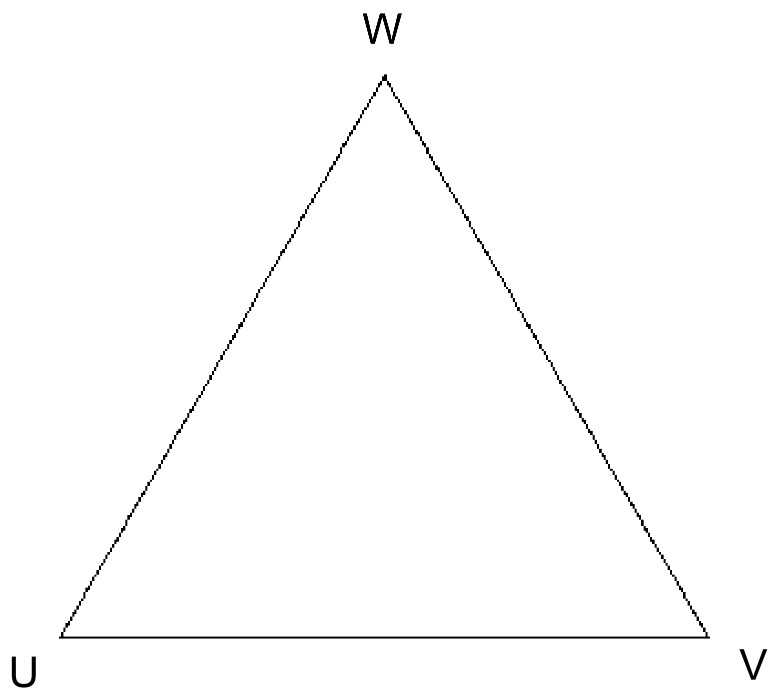
v = 3w



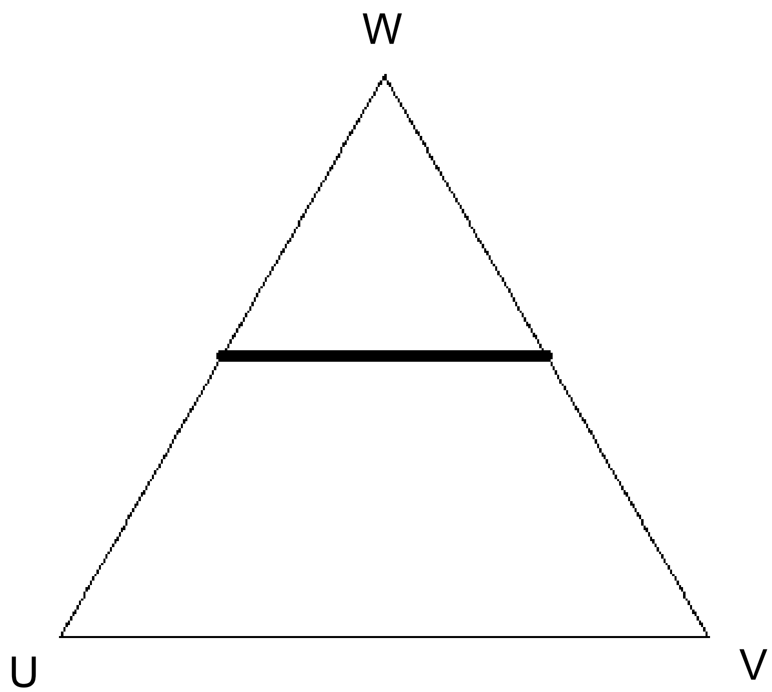
w = 2u + 0.25?



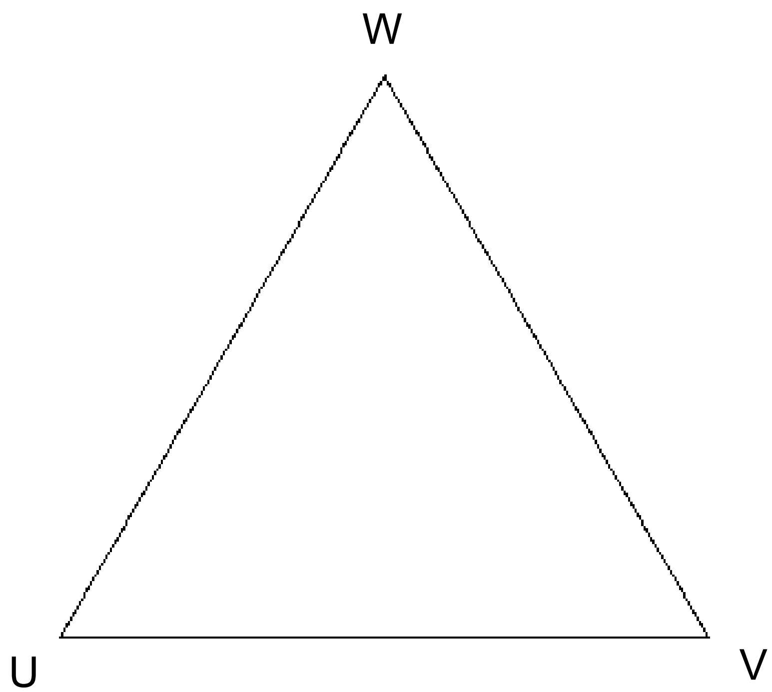
w = 2u + 0.25?



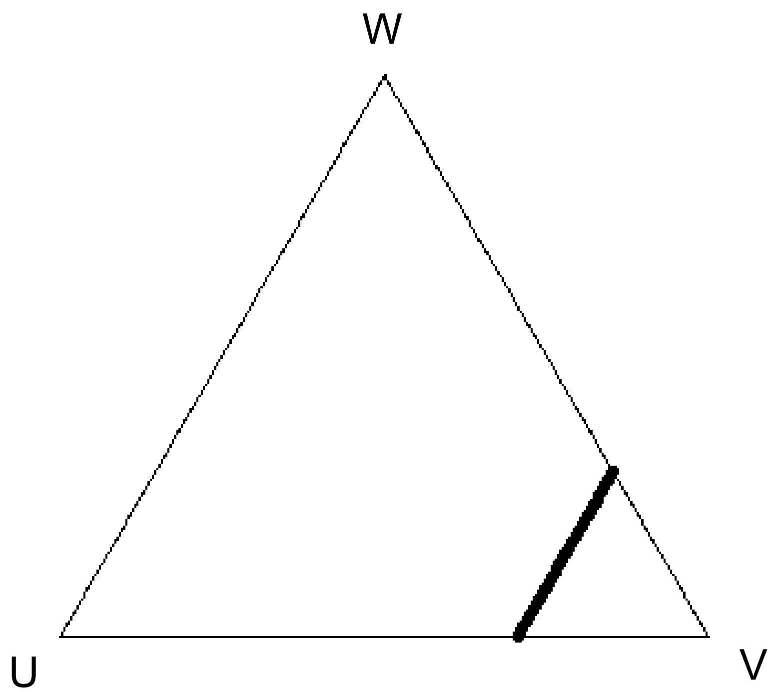
$w^2 = 0.25?$



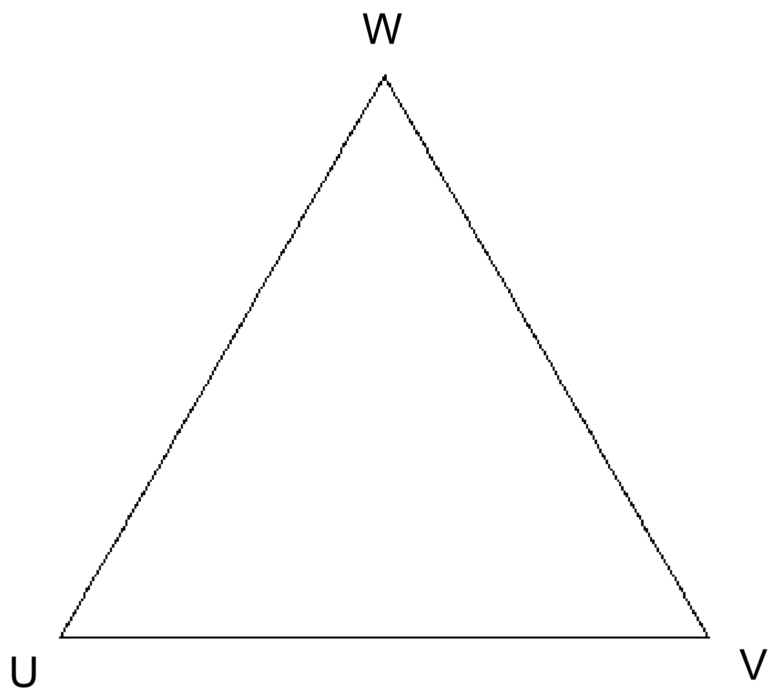
$w^2 = 0.25$



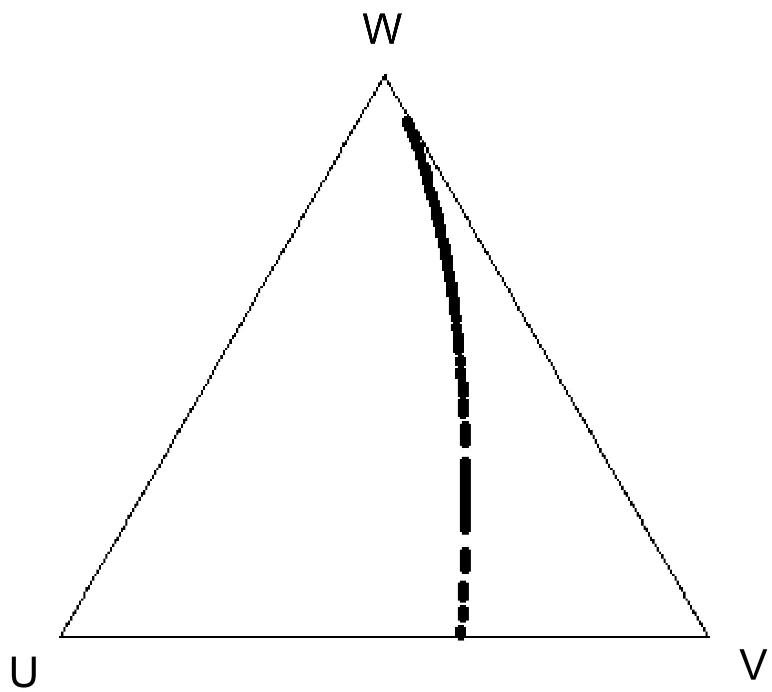
$v^2 = 0.5?$



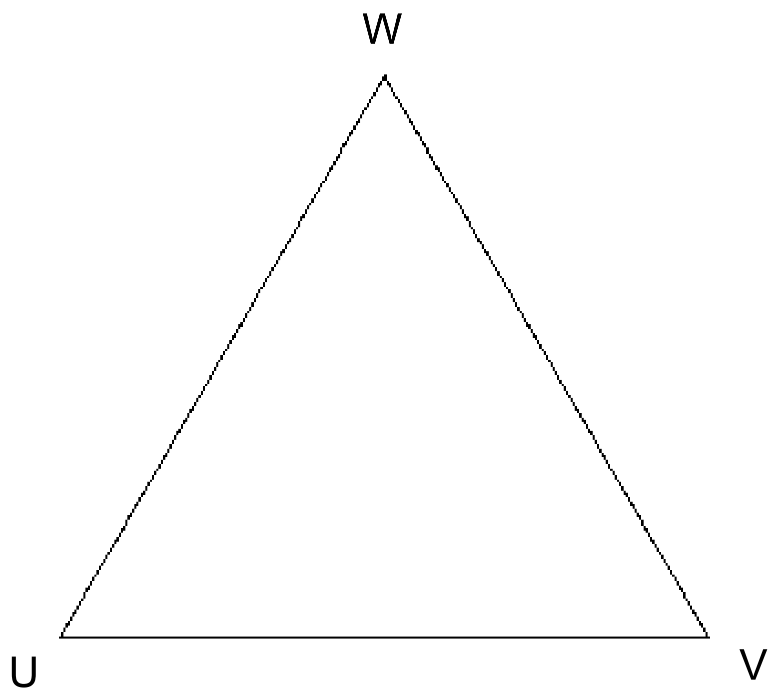
$v^2 = 0.5$



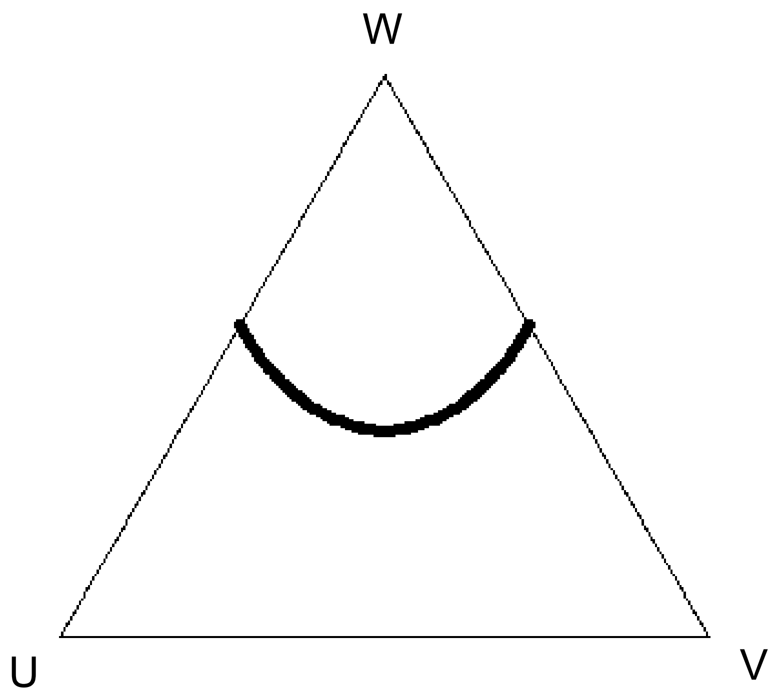
$v^2 = u$?



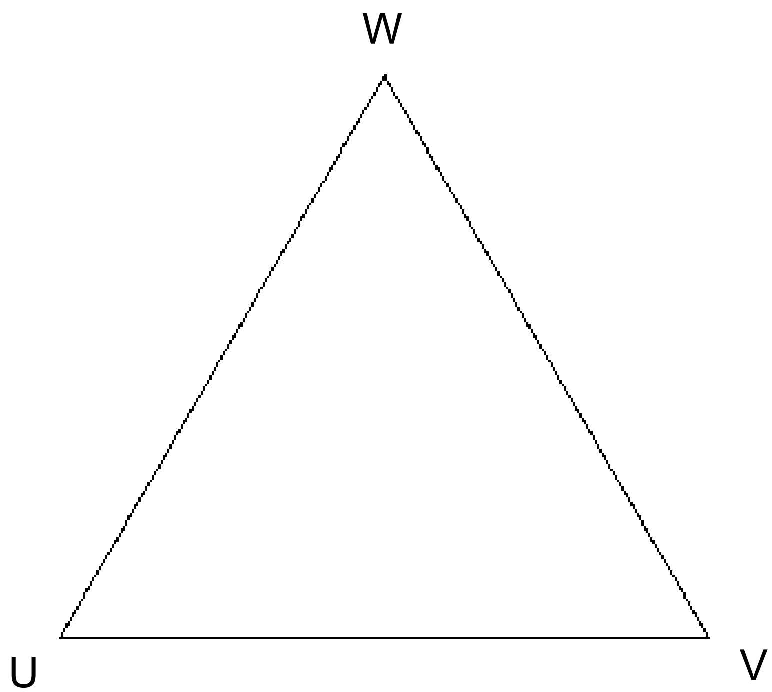
$v^2 = u$



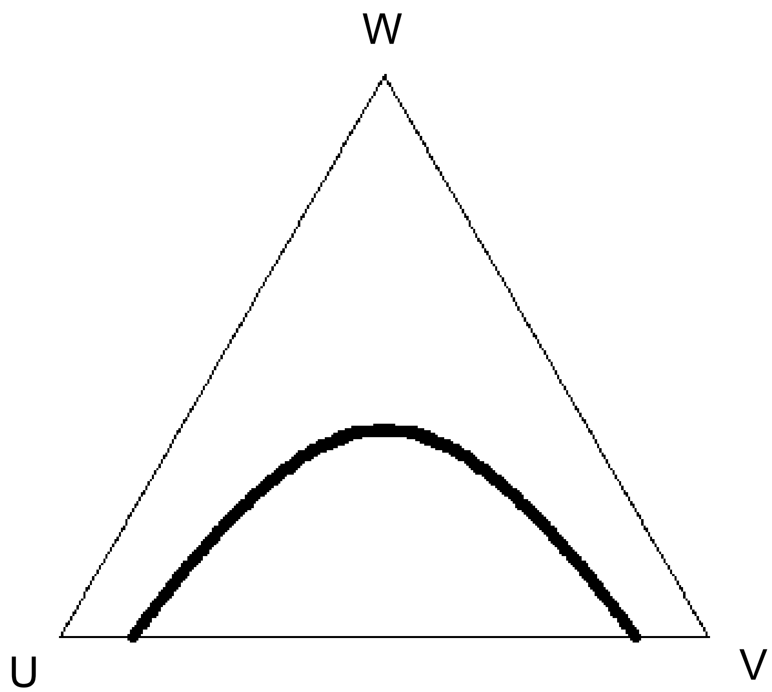
$$v^2 + u^2 = 0.2?$$



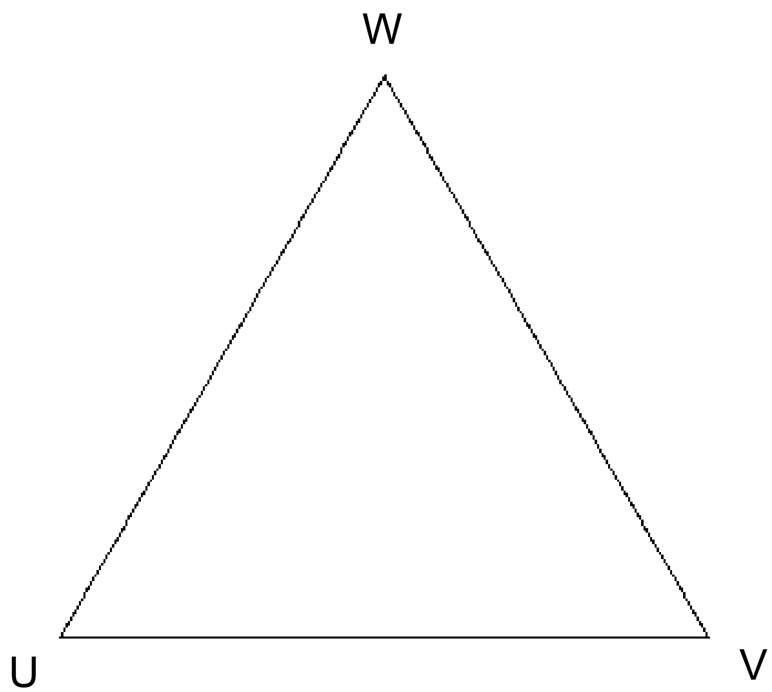
$v^2 + u^2 = 0.2$



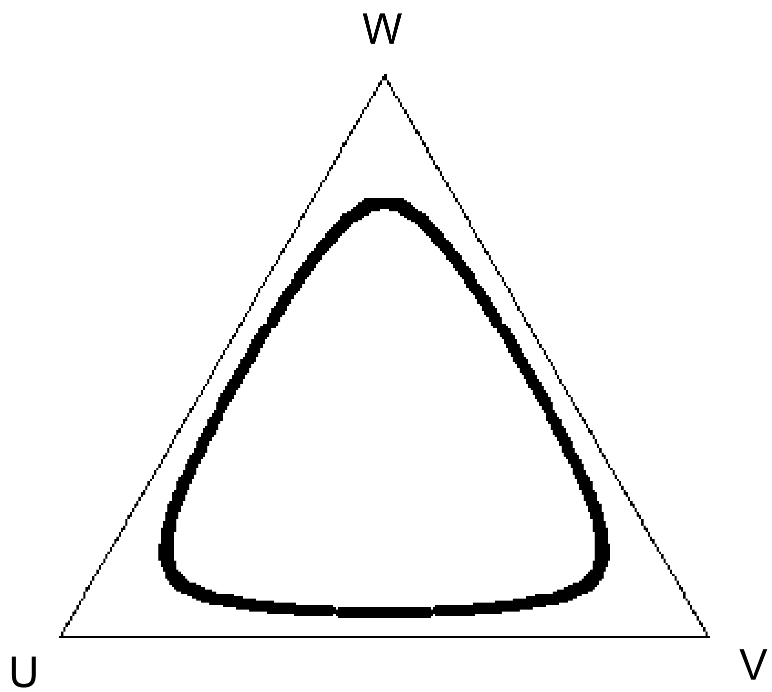
uv = 0.2?



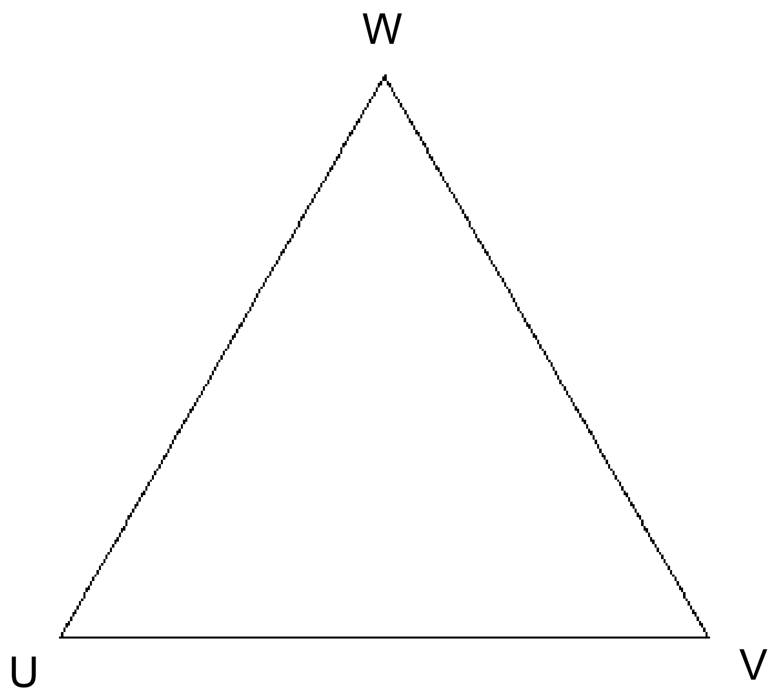
uv = 0.1



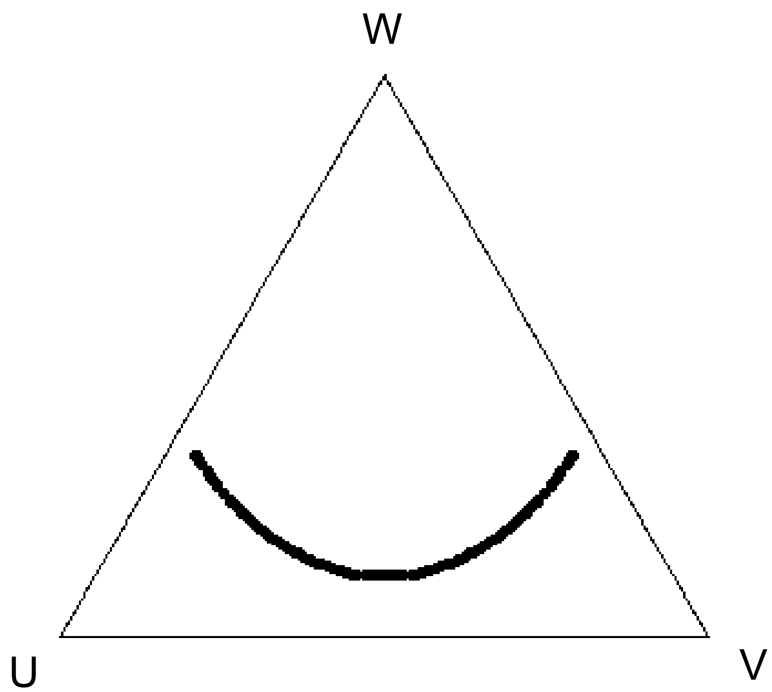
uvw = 0.1?



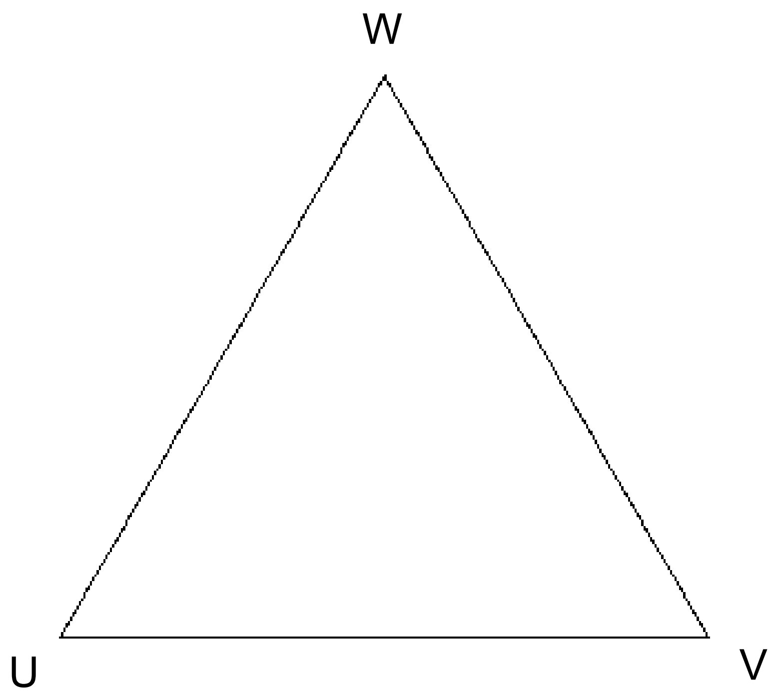
uvw = 0.1



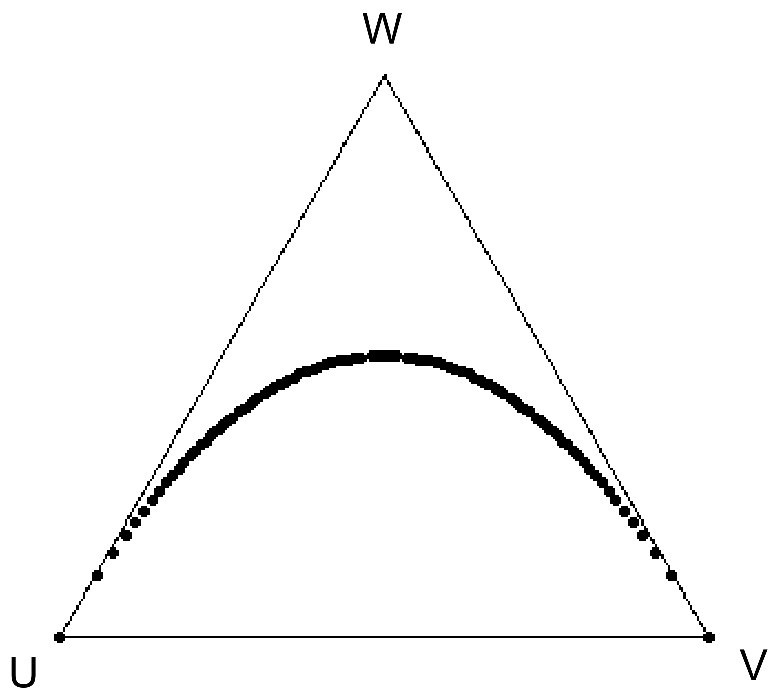
$v^2 + u^2 = 0.4$?



$v^2 + u^2 = 0.4$

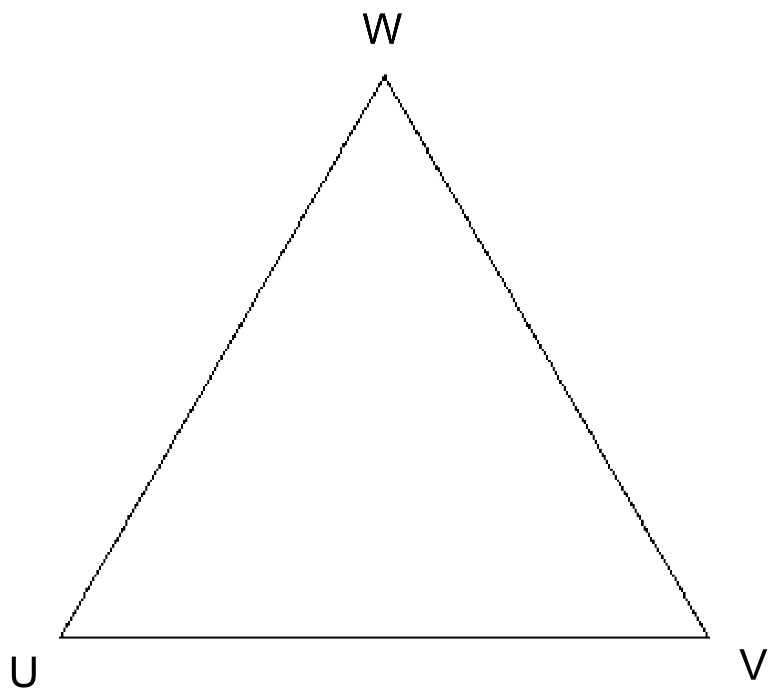


$$v^{1/2} + u^{1/2} = 1?$$

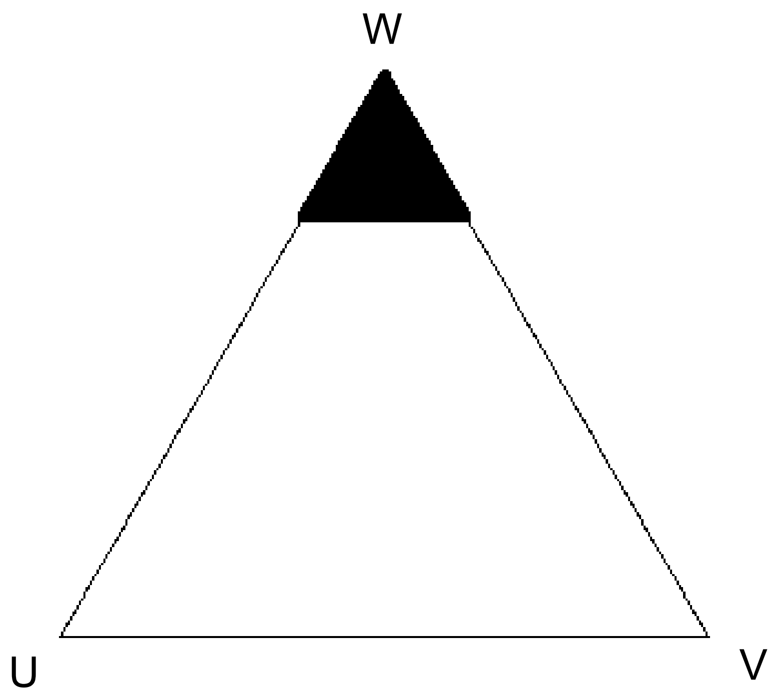


$$v^{1/2} + u^{1/2} = 1$$

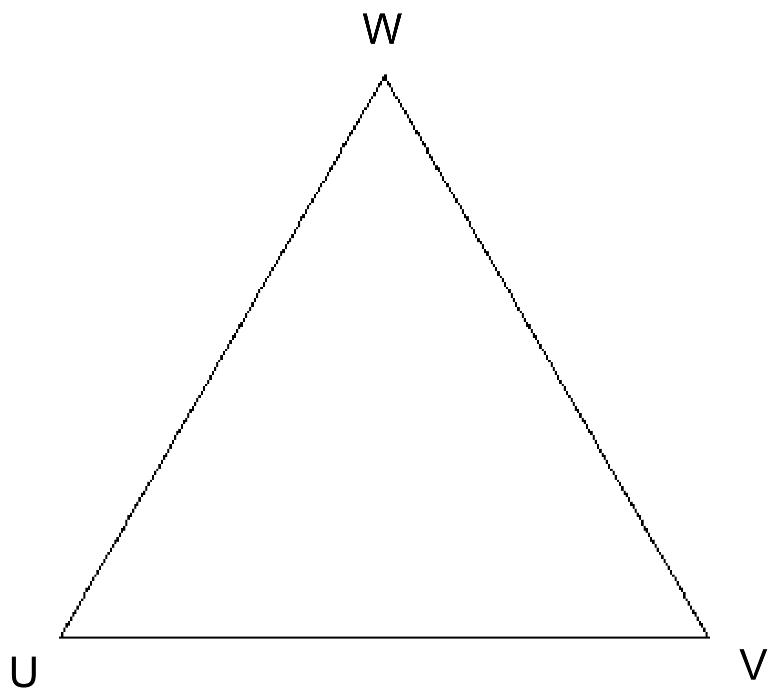
...



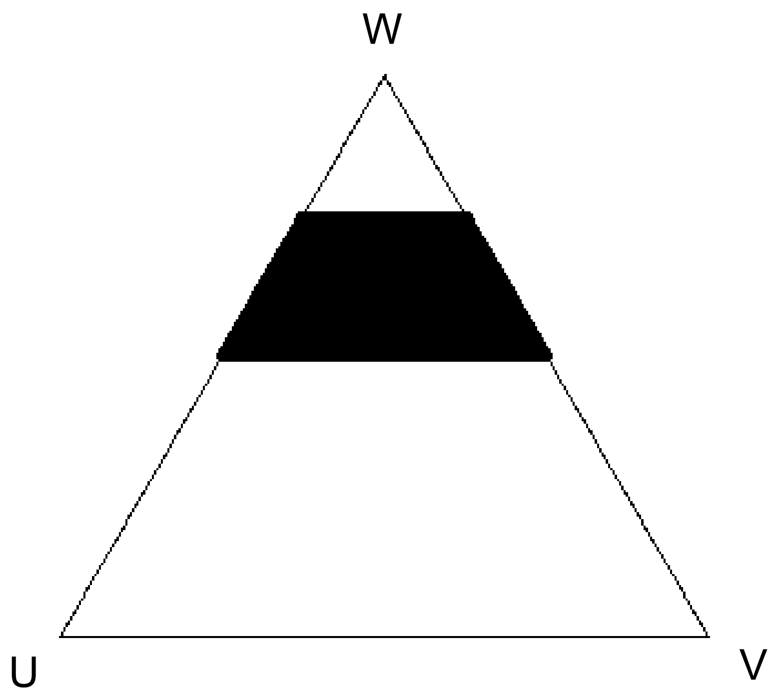
$w \geq 0.75$?



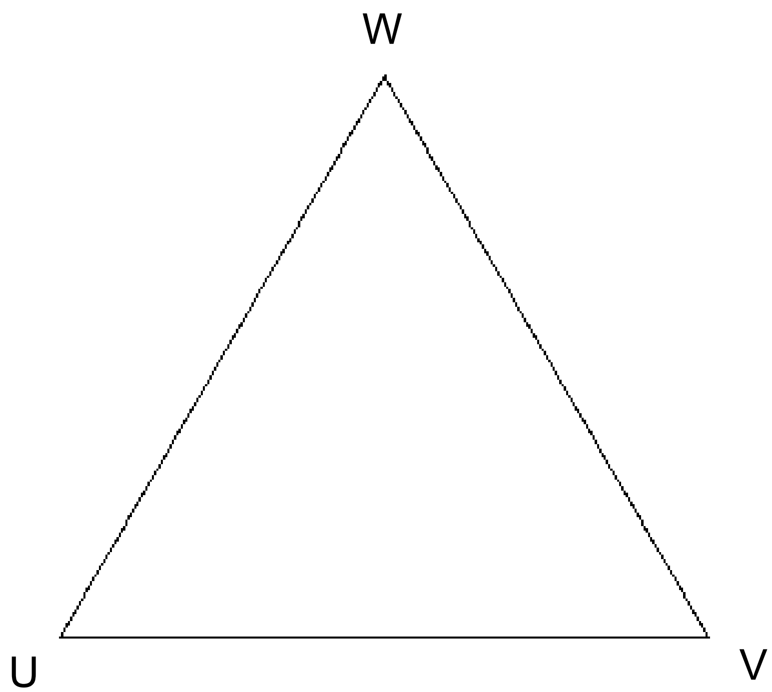
$w \geq 0.75$



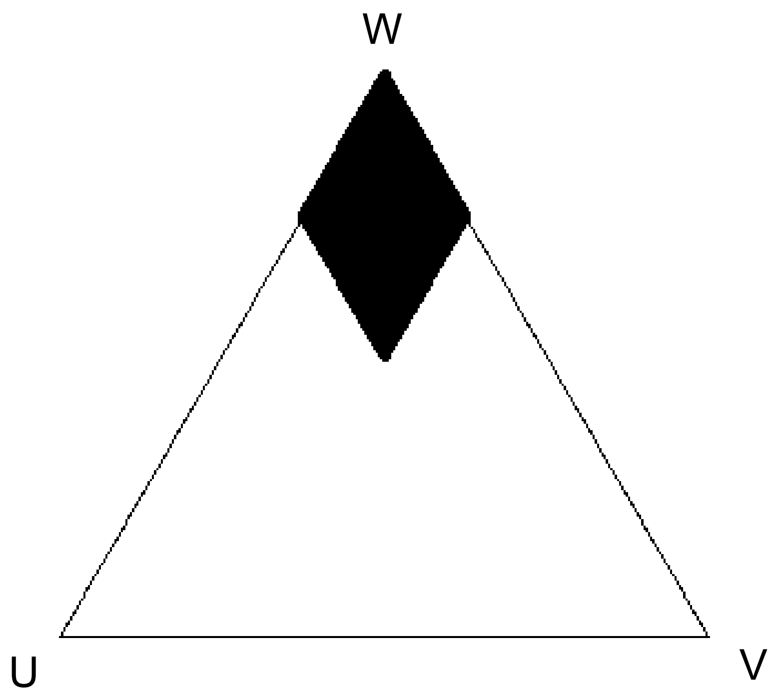
$0.75 \geq w \geq 0.50$?



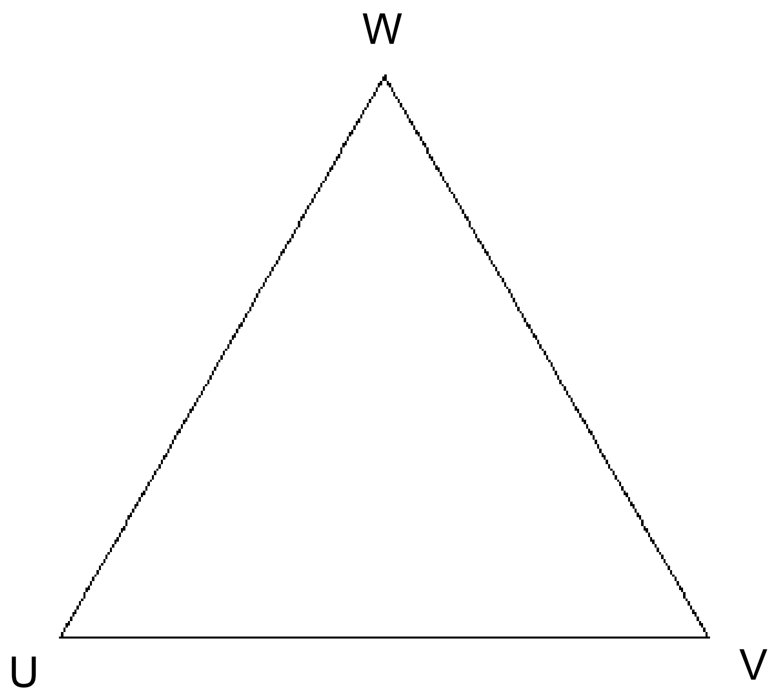
$0.75 \geq w \geq 0.50$



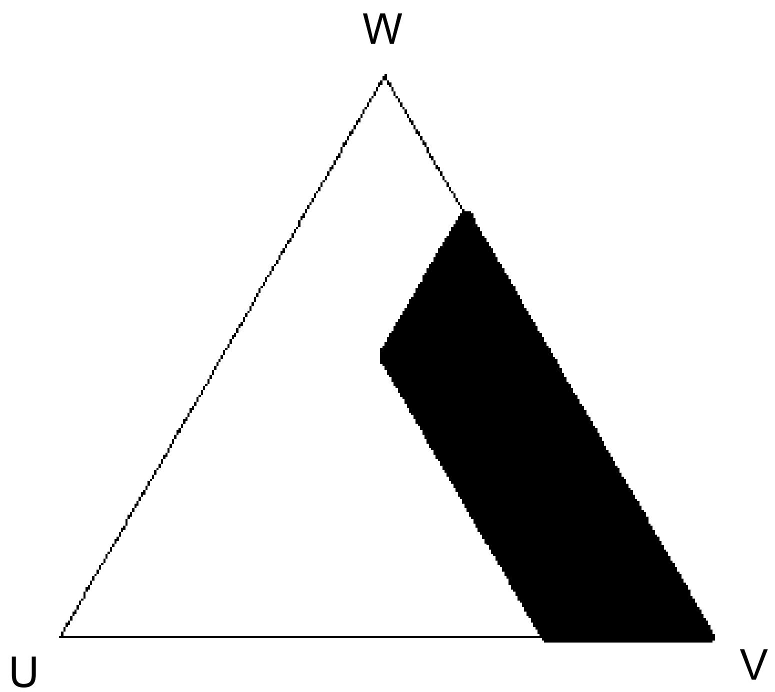
$u \le 0.25 \wedge v \le 0.25?$



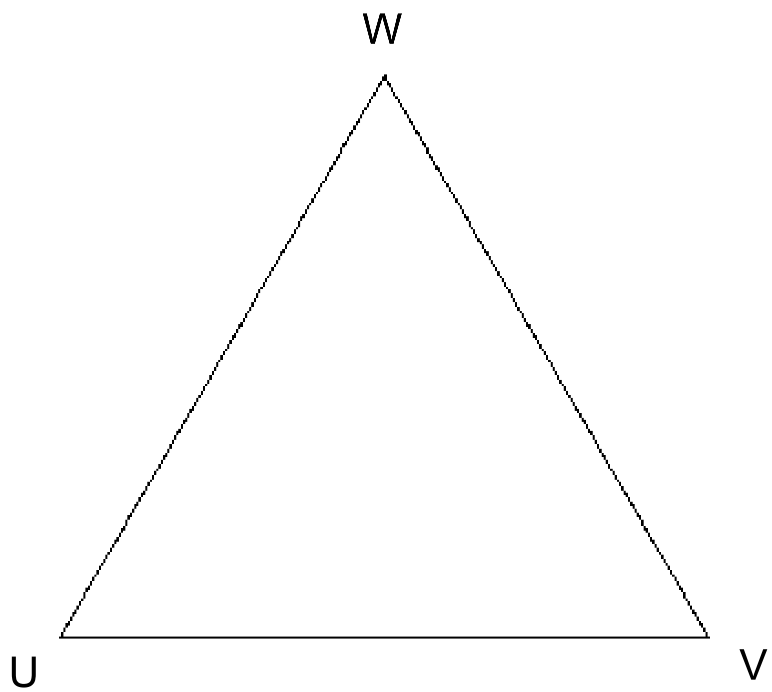
$u \leq 0.25 \wedge v \leq 0.25$



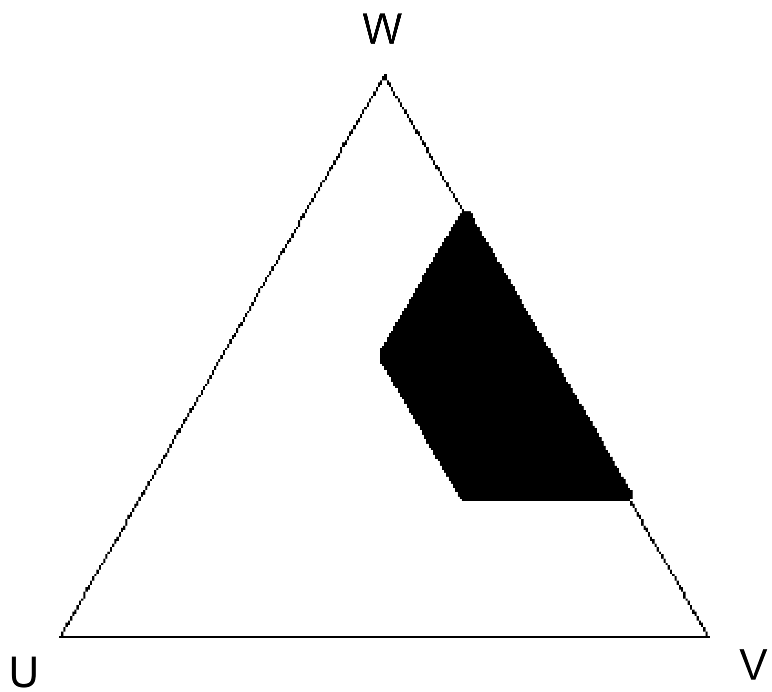
$u \leq 0.25 \wedge v \geq 0.25?$



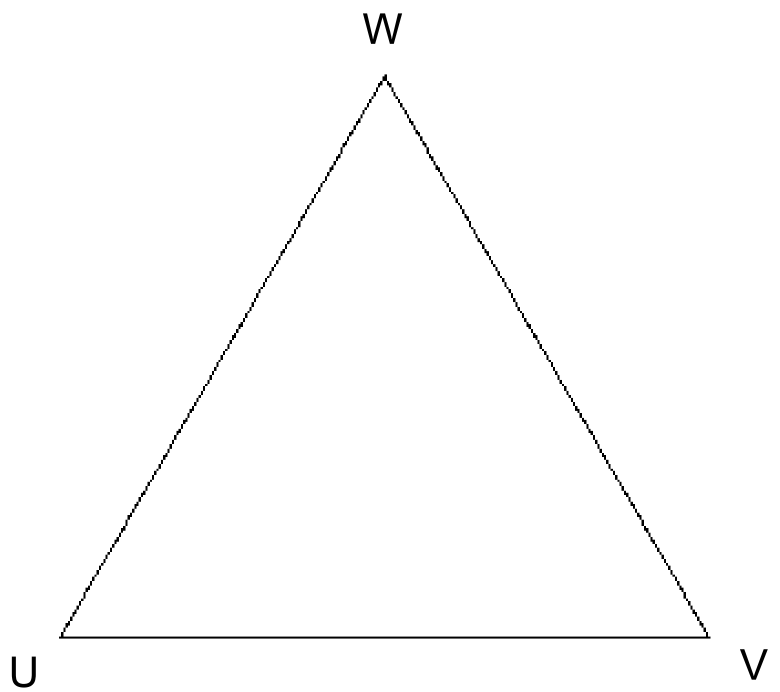
$u \leq 0.25 \wedge v \geq 0.25$



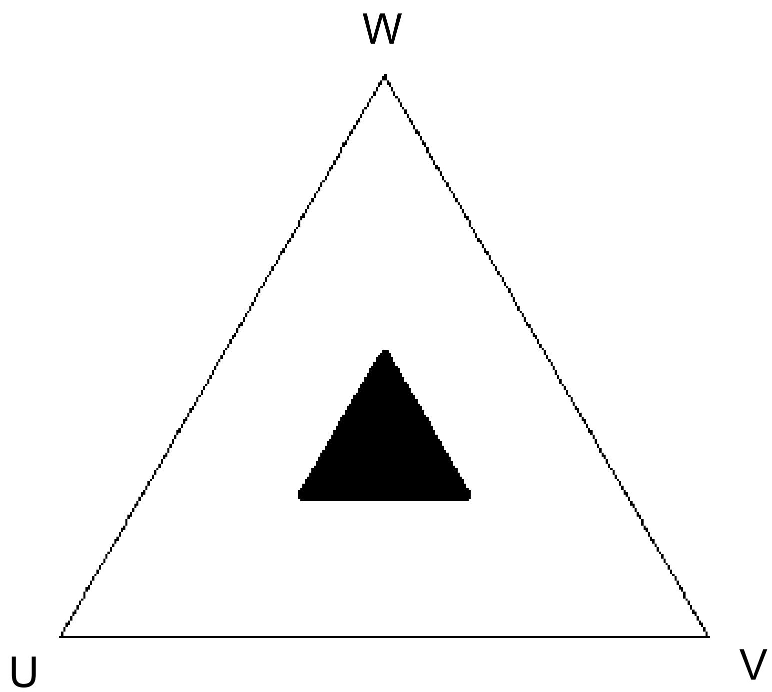
$$u \leq 0.25 \wedge v \geq 0.25 \wedge w \geq 0.25?$$



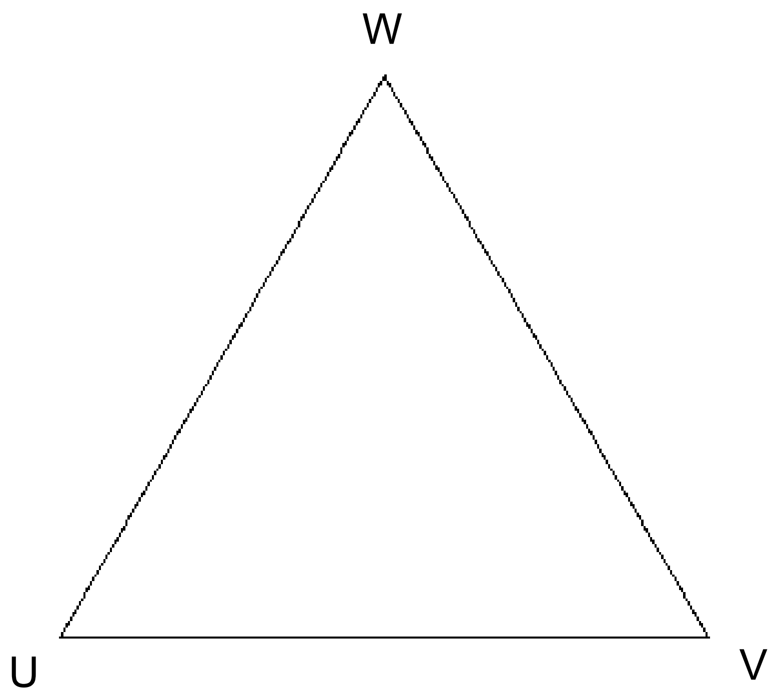
$u \leq 0.25 \wedge v \geq 0.25 \wedge w \geq 0.25$



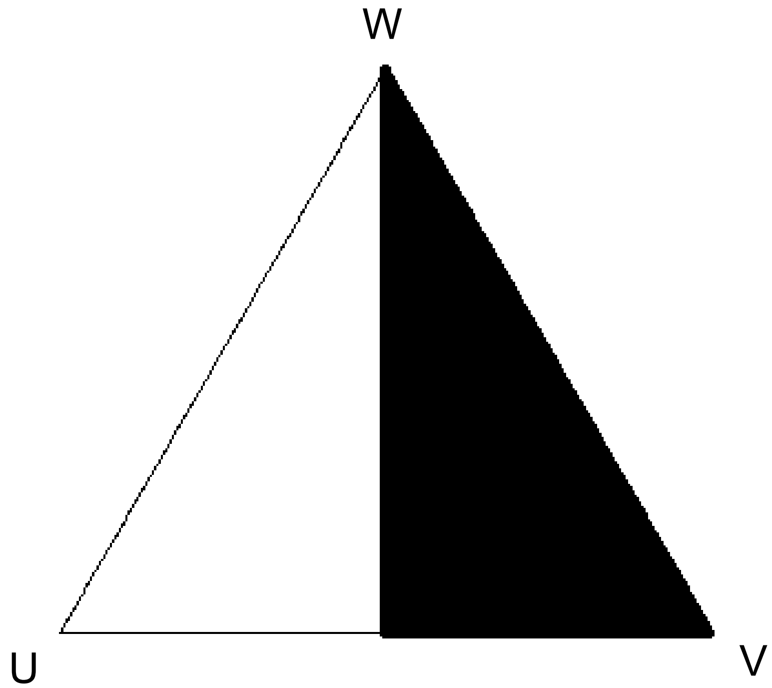
$u \geq 0.25 \wedge v \geq 0.25 \wedge w \geq 0.25?$



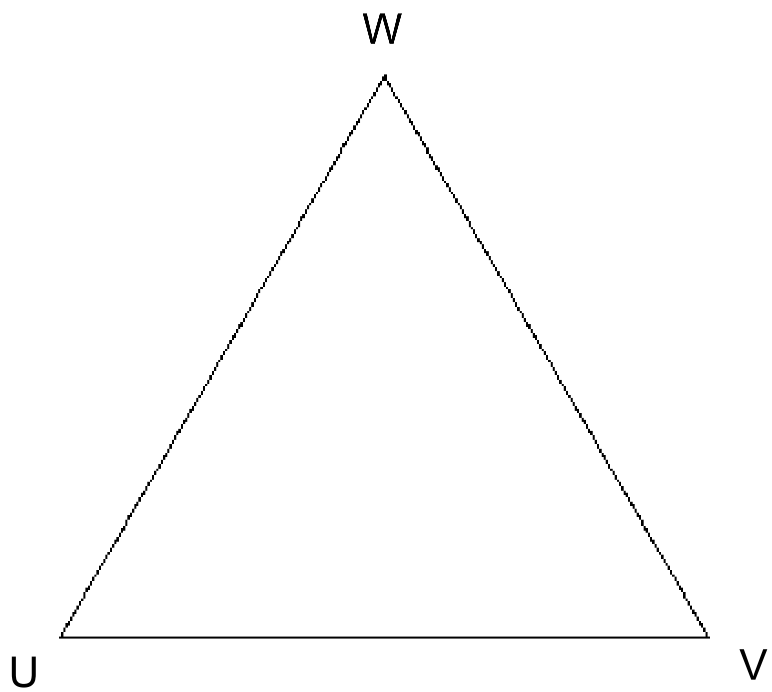
$u \geq 0.25 \wedge v \geq 0.25 \wedge w \geq 0.25$



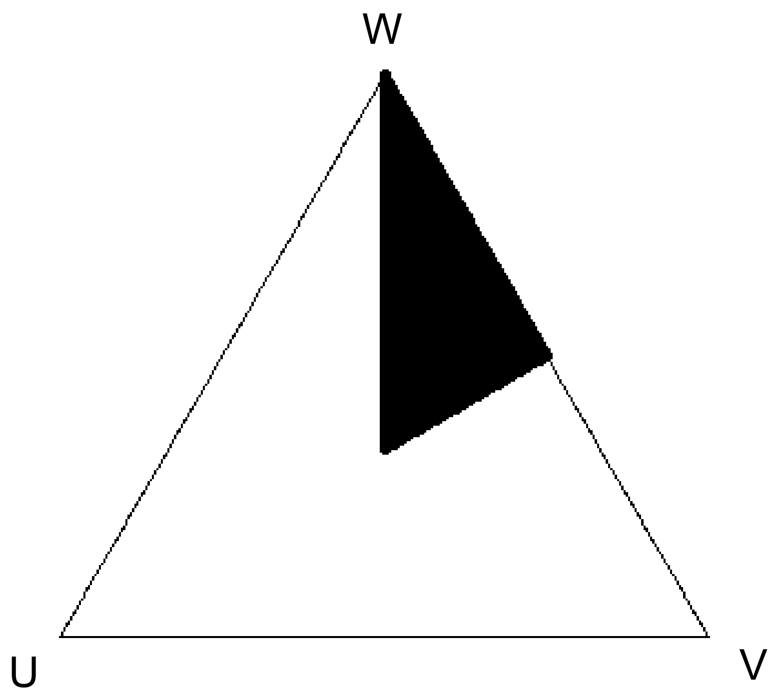
$u \leq v$?



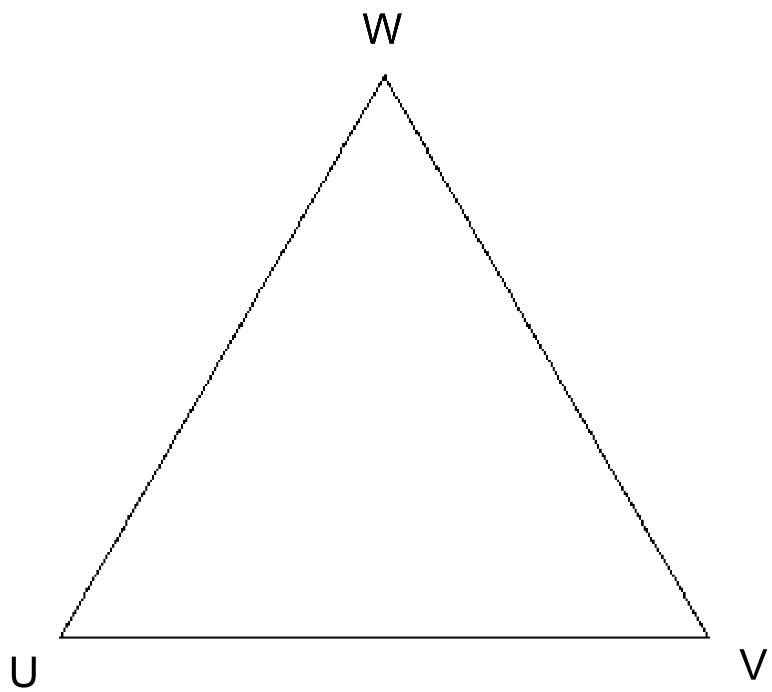
$u \leq v$



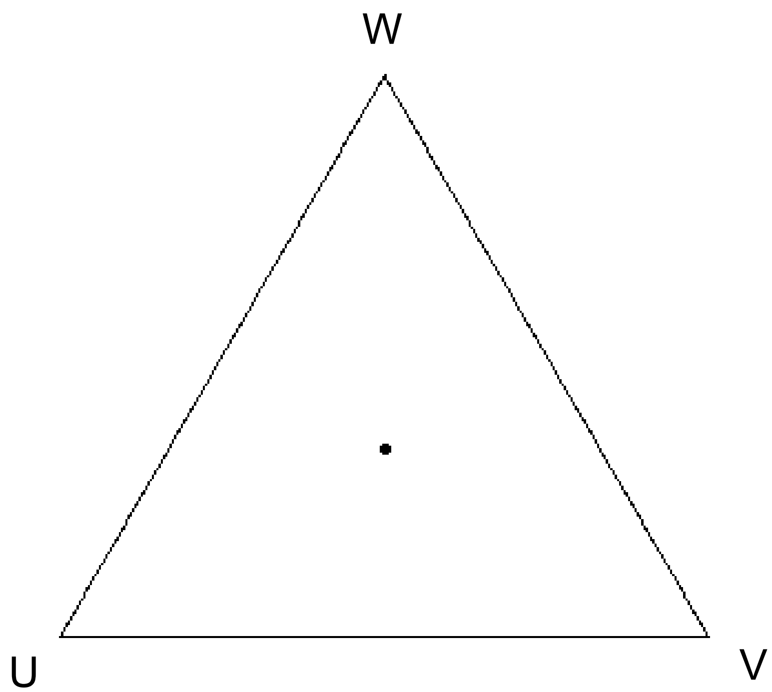
$u \leq v \wedge v \leq w?$



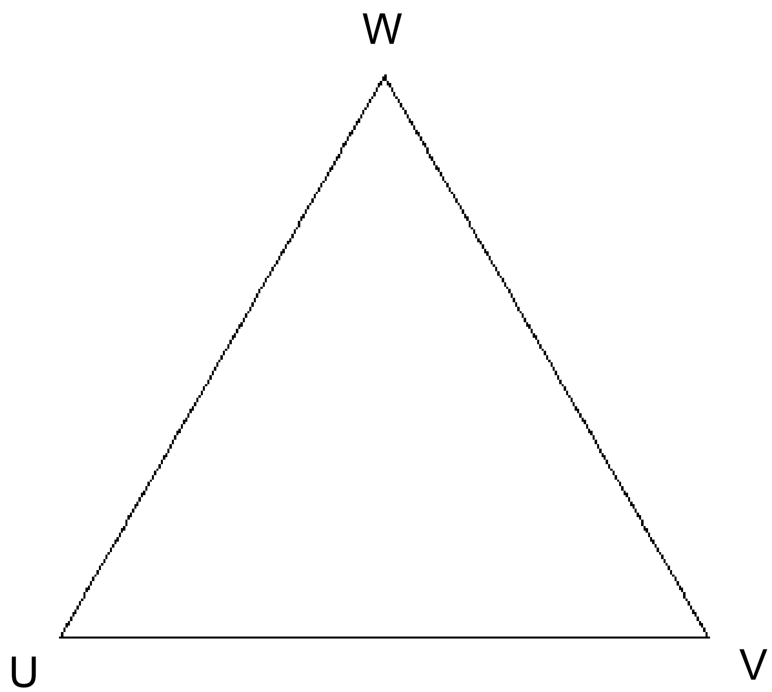
$u \leq v \wedge v \leq w$



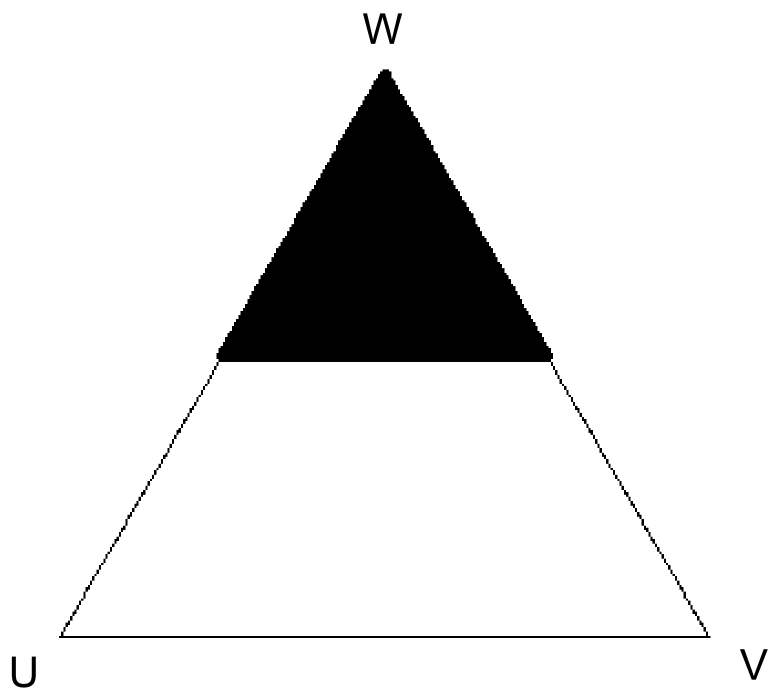
$$u \leq v \wedge v \leq w \wedge w \leq u?$$



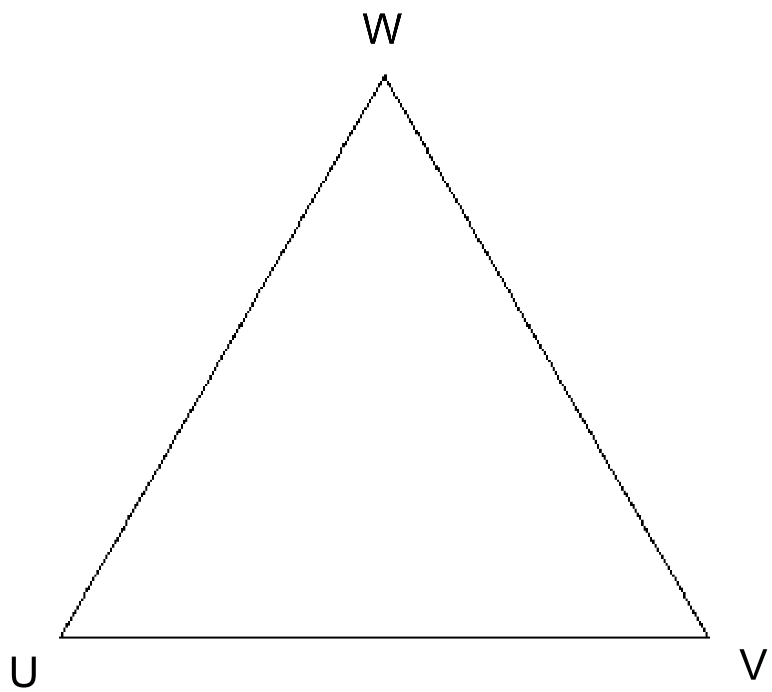
$$u \leq v \wedge v \leq w \wedge w \leq u$$



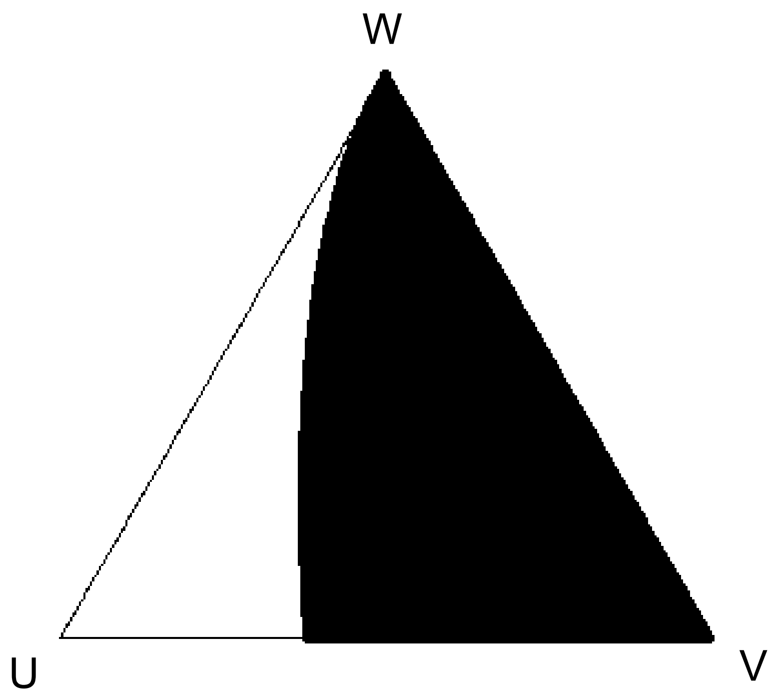
$w^2 \geq 0.25$?



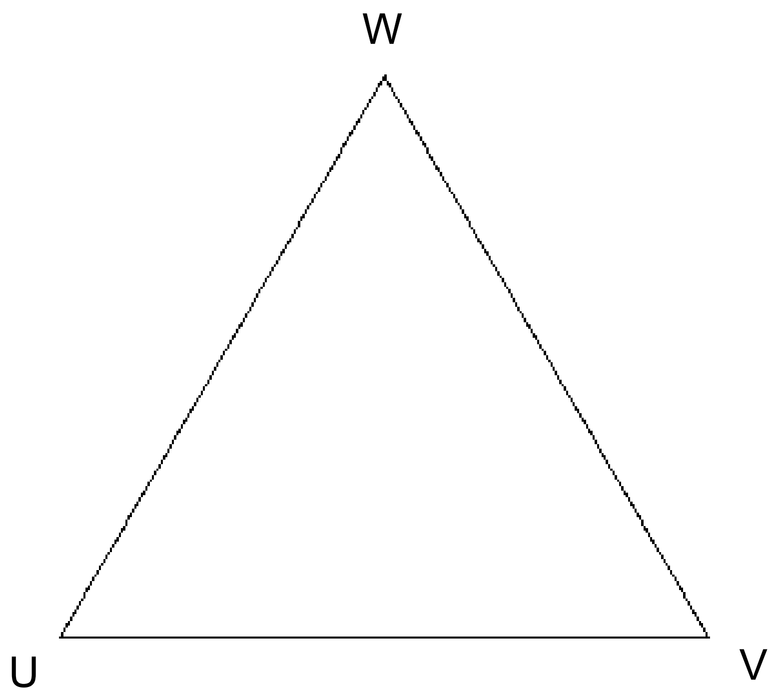
$w^2 \geq 0.25$



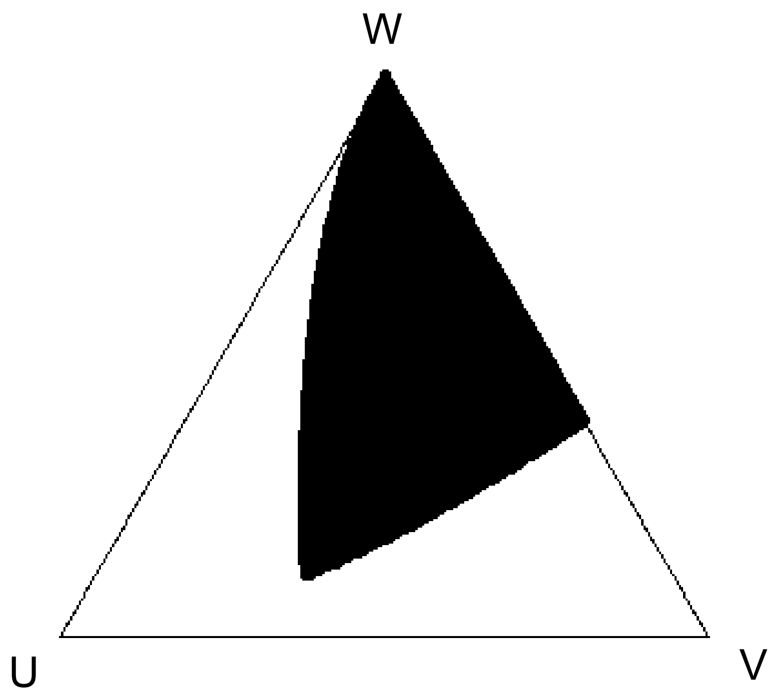
$$u^2 \leq v?$$



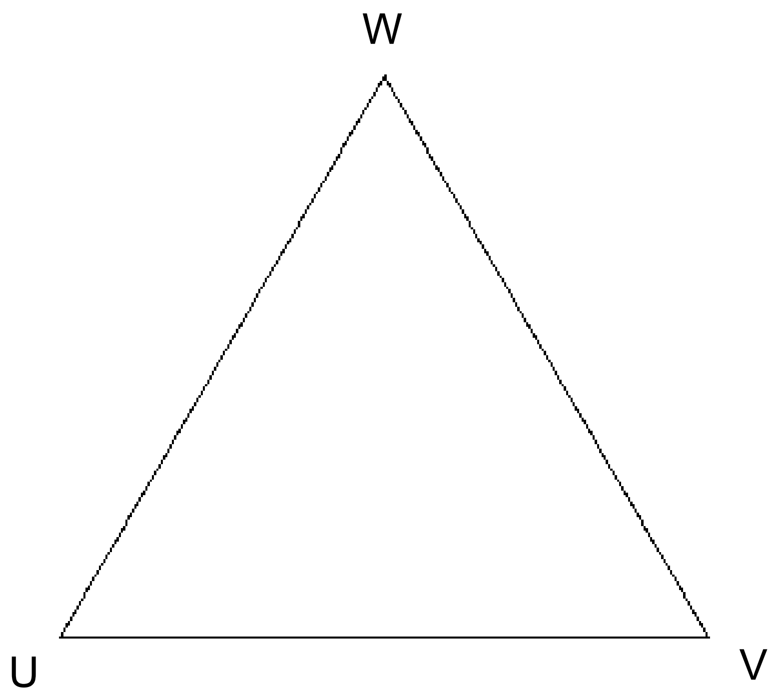
$u^2 \leq v$



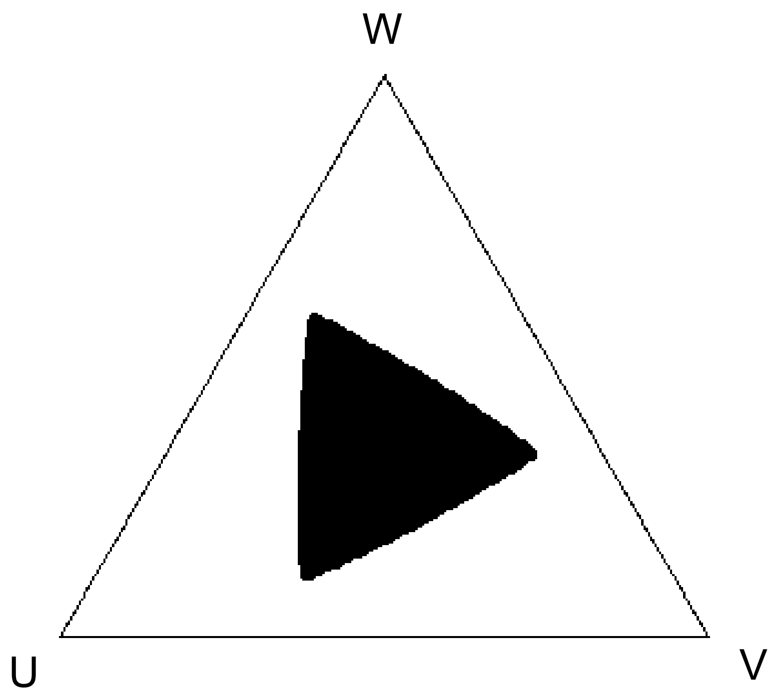
$u^2 \le v \wedge v^2 \le w$?



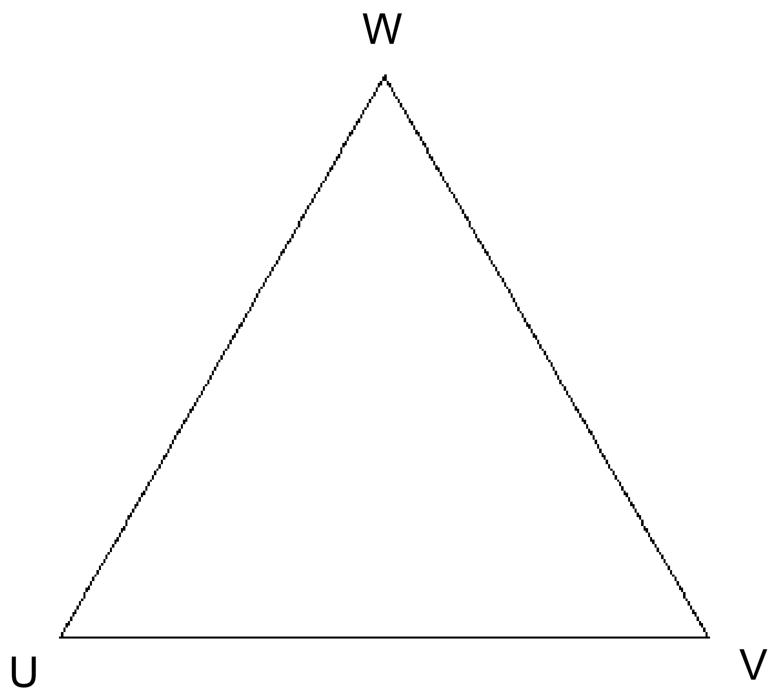
$u^2 \leq v \wedge v^2 \leq w$



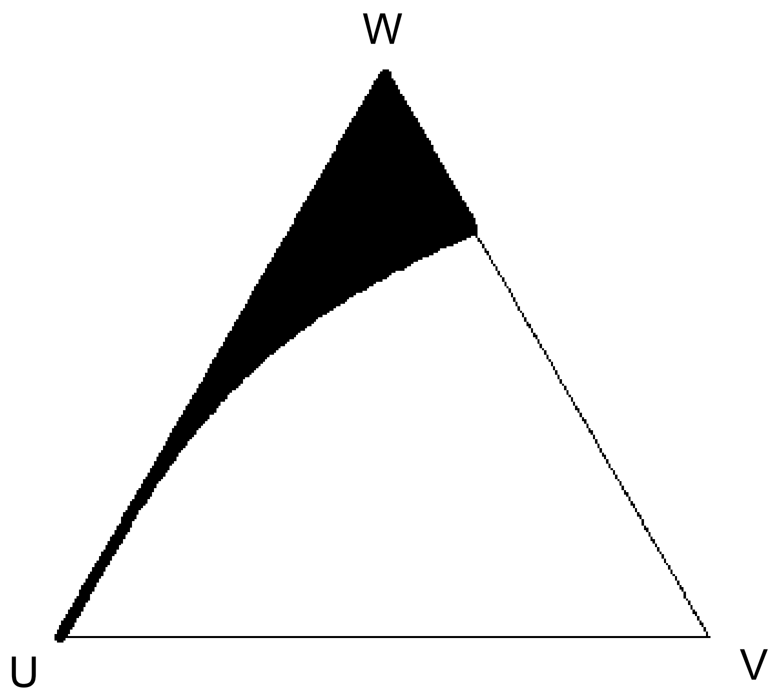
$$u^2 \leq v \wedge v^2 \leq w?$$



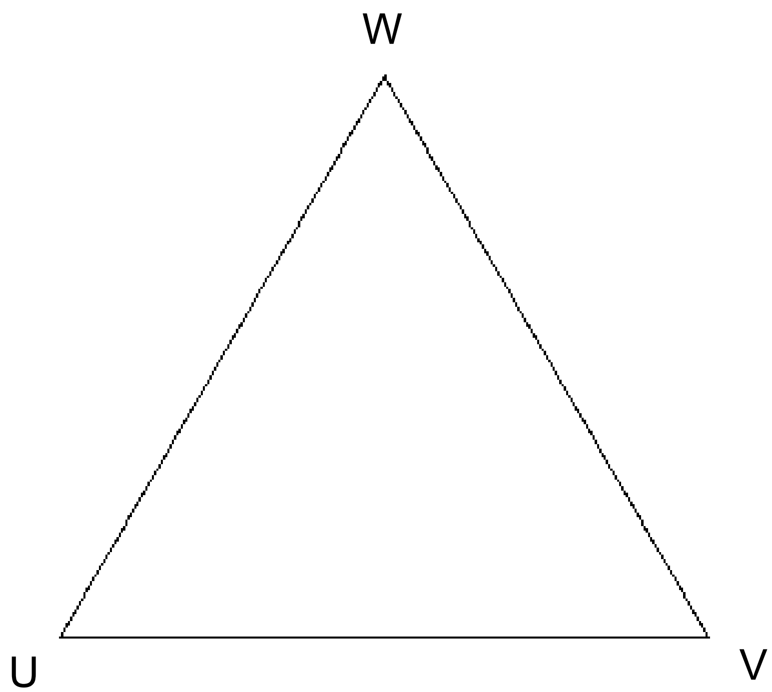
$$u^2 \leq v \wedge v^2 \leq w$$



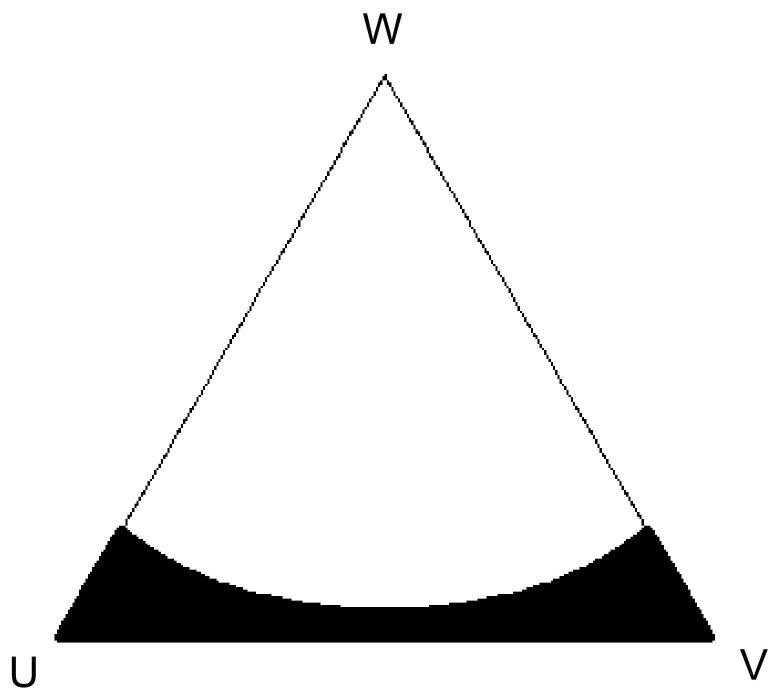
$$w^{1/2} \leq w^2?$$



$w^{1/2} \leq w^2$



$$u^2 + v^2 \geq w^{1/2}?$$



$u^2 + v^2 \geq w^{1/2}$

...

Barycentryczny układ współrzędnych

- Aspekty algebraiczne: układy równań prowadzące do rozwiązań reprezentowanych w trójkątnych układach współrzędnych

Barycentryczny układ współrzędnych

- Dany jest układ równań (nieliniowych)
  - (I) $u/v = 2$
  - (II) $v/w = 3$
  - (III) $u+v+w = 1$

  którego rozwiązaniem jest
  - $u = 6/10$
  - $v = 3/10$
  - $w = 1/10$
- Znając to rozwiązanie wyliczamy
  - $u/w = 6$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Ale $u/w = 6$ to kolejne równanie, a więc powstaje pytanie, czy gdyby zmienić równanie (III) z „$u+v+w = 1$” na „$u/w = 6$”, czyli tworząc układ
  - (I) $u/v = 2$
  - (II) $v/w = 3$
  - (III) $u/w = 6$

  otrzymalibyśmy rozwiązanie spełniające $u+v+w = 1$?

Barycentryczny układ współrzędnych

- Odpowiedź: nie, a to dlatego, że układ równań
  - (I) u/v = 2
  - (II) v/w = 3
  - (III) u/w = 6

  jest układem zależnym (ponieważ (I)·(II) $\Rightarrow$ (III))
  - czyli: równanie (III) nie wnosi niczego nowego do układu
    - widać to po wykonaniu wskazanego mnożenia stronami:
      (I)·(II): u/v · v/w = 2 · 3 $\Rightarrow$ u/w = 6 (III)
    - układ zawiera więc w praktyce jedynie dwa równania
  - sytacji nie ratuje zmiana równania „u/w = 6”, np. na „ u/w = 1”
    - układ staje się wtedy sprzeczny

Barycentryczny układ współrzędnych

- Rozwiązanie tego układu nie jest możliwe bez jakiegoś trzeciego (niezależnego od istniejących) równania
  - np. $u+v+w = n$, gdzie $n > 0$ jest stałą

Barycentryczny układ współrzędnych

- Z pewnych względów równania w postaci ilorazów są niekorzystne
  - teoretycznie: są to równania nieliniowe
  - praktycznie: wymagają niezerowych wartości dla zmiennych w mianownikach, pomimo faktu, iż zerowe wartości tych zmiennych powinny być dopuszczalne
- Rozwiązaniem jest przekształcenie ilorazów na iloczyny

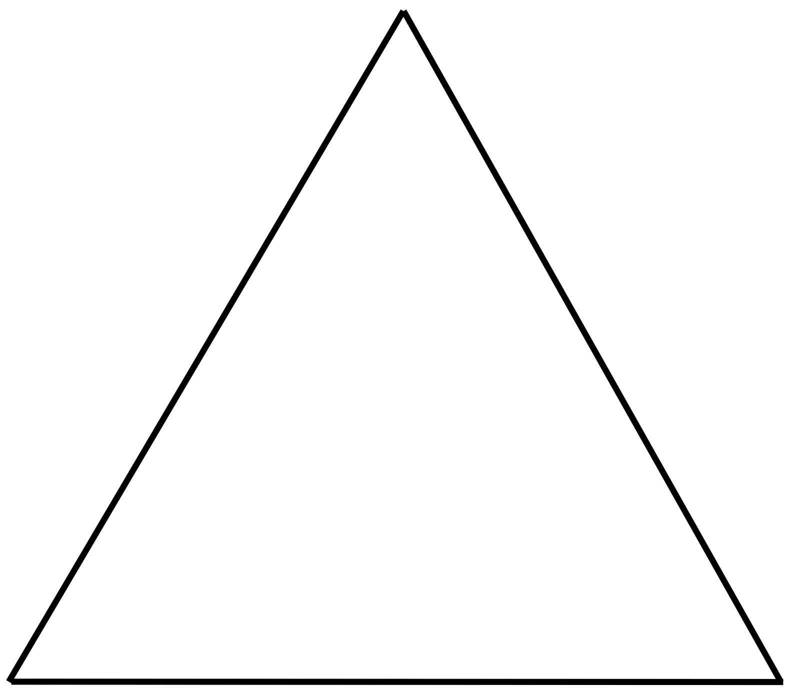
Barycentryczny układ współrzędnych

- Przekształcając układ
  - (I) $u/v = 2$
  - (II) $v/w = 3$
  - (III) $u+v+w = 1$

  do postaci
  - (I) $u = 2v$
  - (II) $v = 3w$
  - (III) $u+v+w = 1$

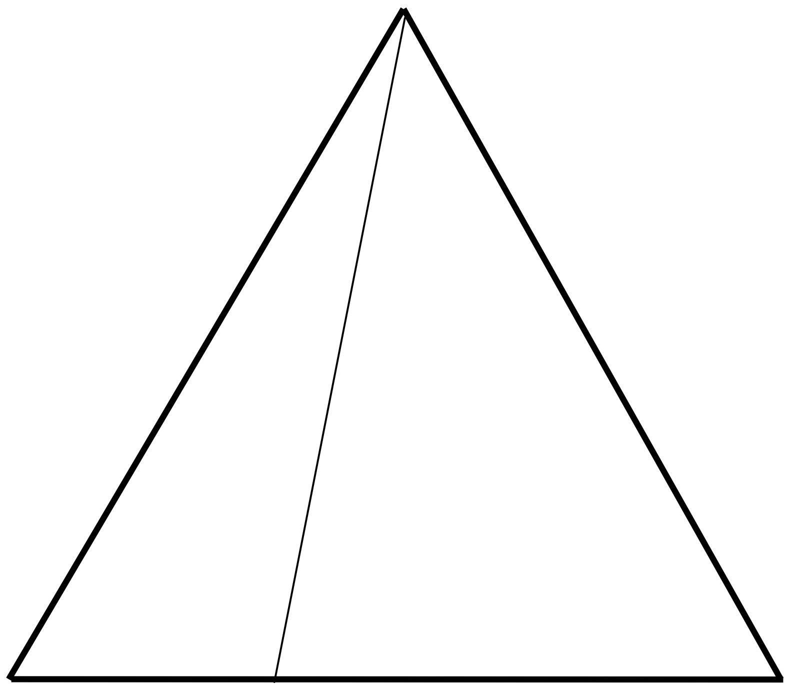
  pozbywamy się niekorzystnych ilorazów, a jednocześnie możemy łatwo przedstawić jego interpretację graficzną

Barycentryczny układ współrzędnych



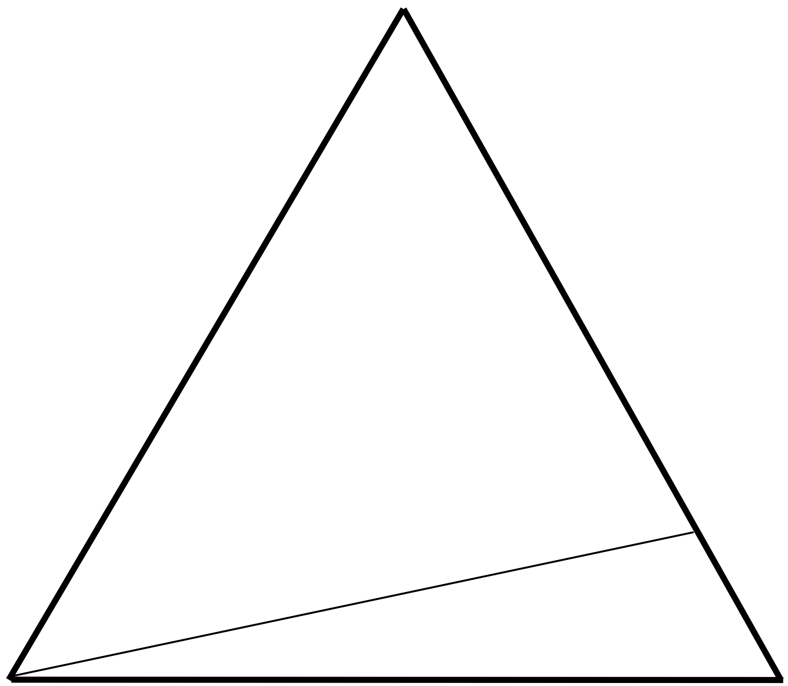
- Równanie (III) u+v+w = 1: reprezentacja – trójkąt (a właściwie: układ współrzędnych trójkątnych)
  - równanie to zapewnia istnienie reprezentacji w układzie współrzędnych trójkątnych

Barycentryczny układ współrzędnych



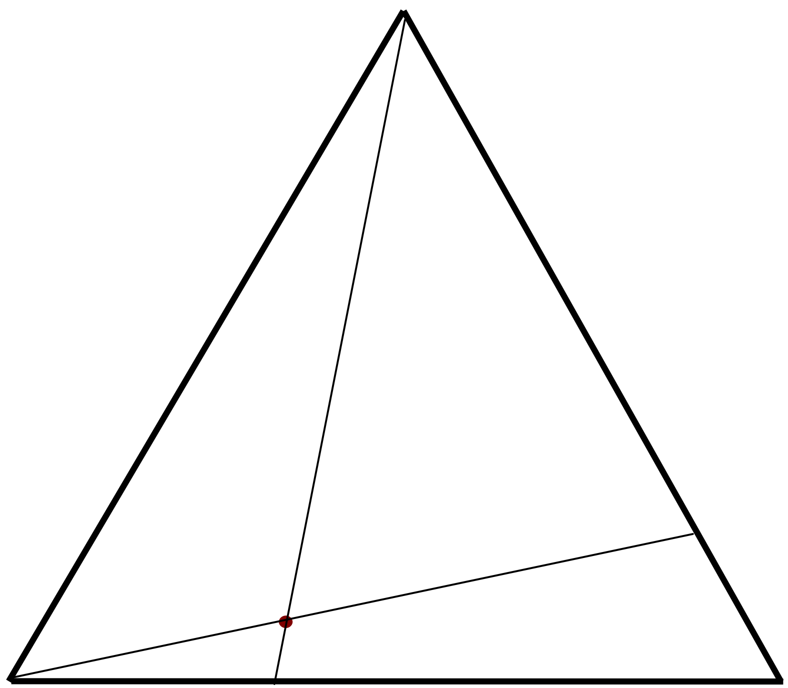
- Równanie (I) u = 2v: reprezentacja – prosta

Barycentryczny układ współrzędnych



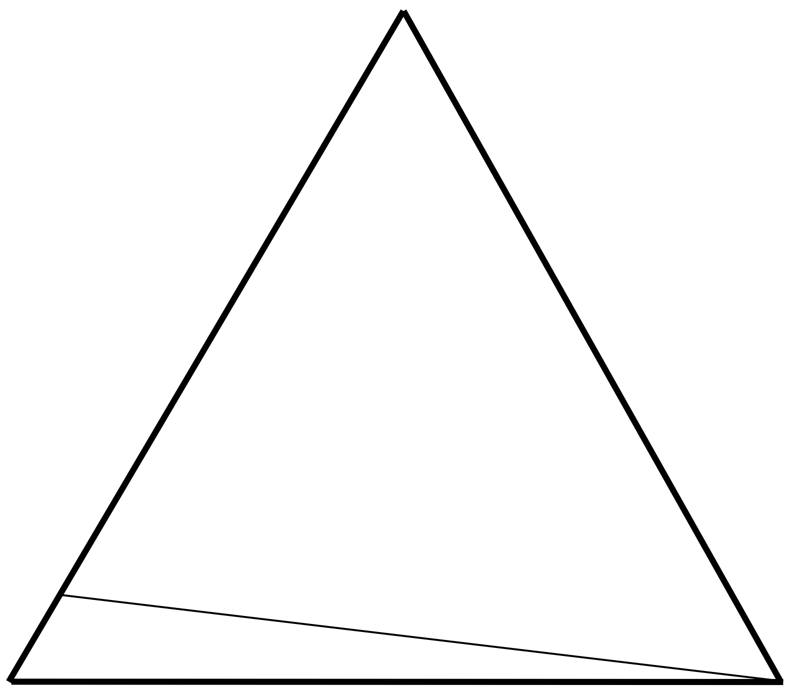
- Równanie (II) v = 3w: reprezentacja – prosta

Barycentryczny układ współrzędnych



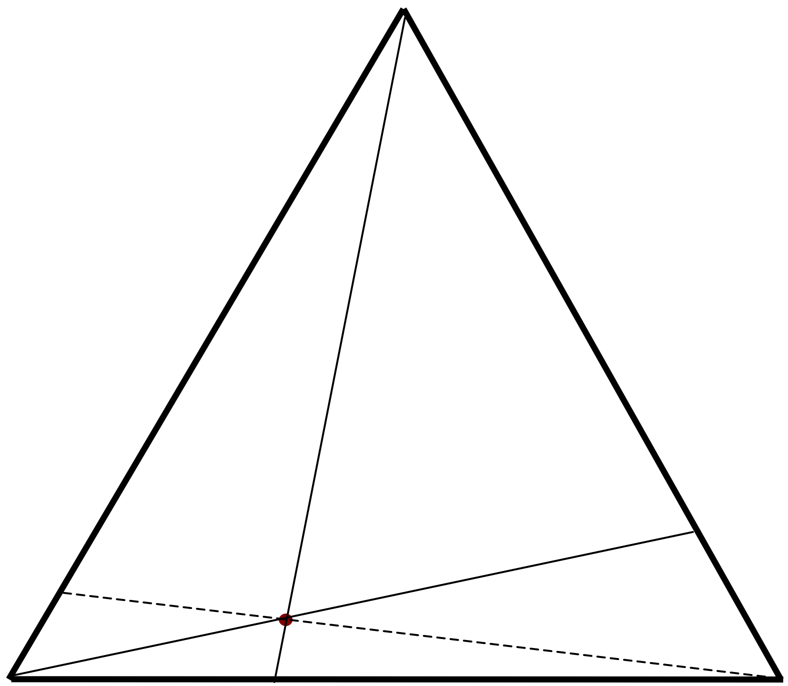
- Rozwiązanie

Barycentryczny układ współrzędnych



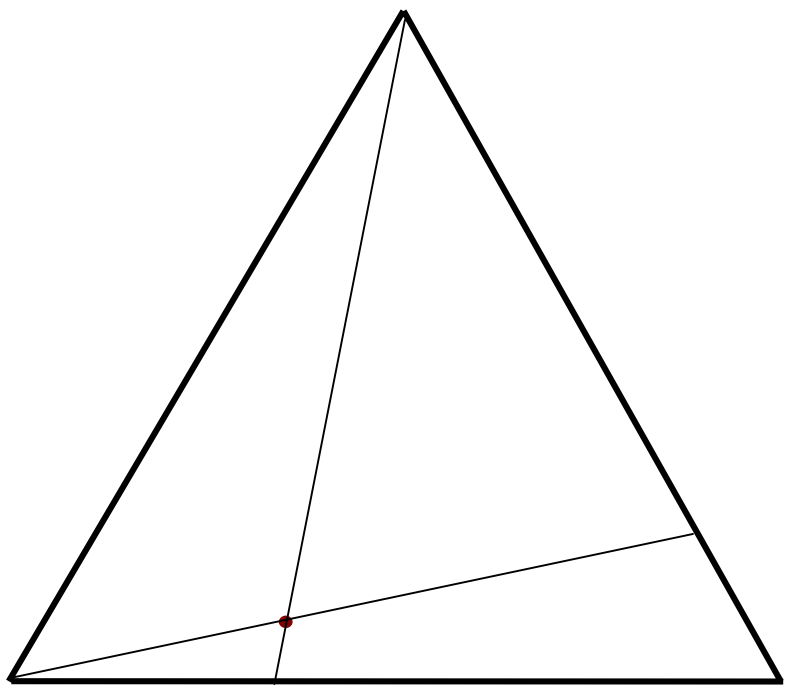
- I jeszcze równanie u = 6w: reprezentacja – prosta
  - „u = 6w” jest implikowane przez „u = 2v” i „v = 3w”

Barycentryczny układ współrzędnych



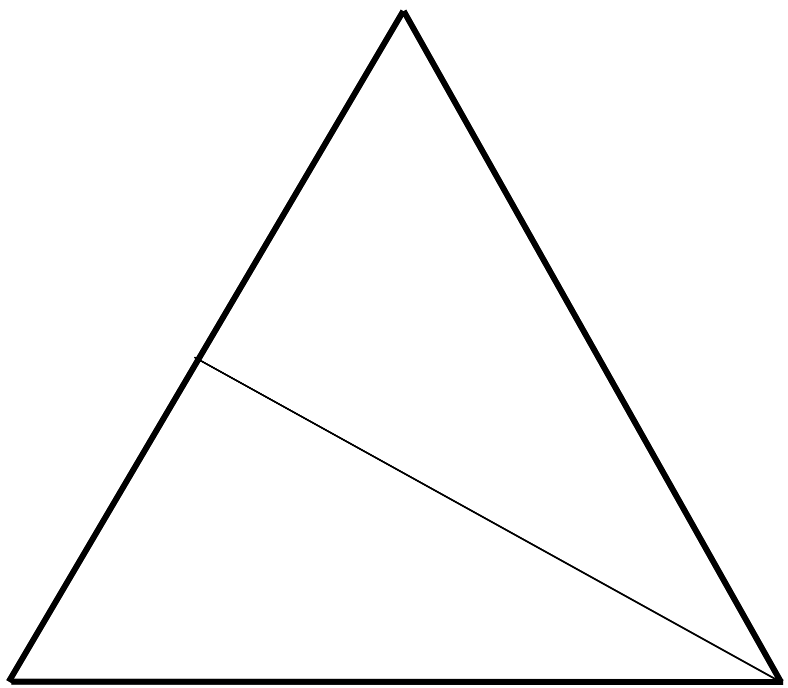
- Rozwiązanie ze wszystkimi prostymi
  (linia przerywana reprezentuje równanie implikowane)

Barycentryczny układ współrzędnych



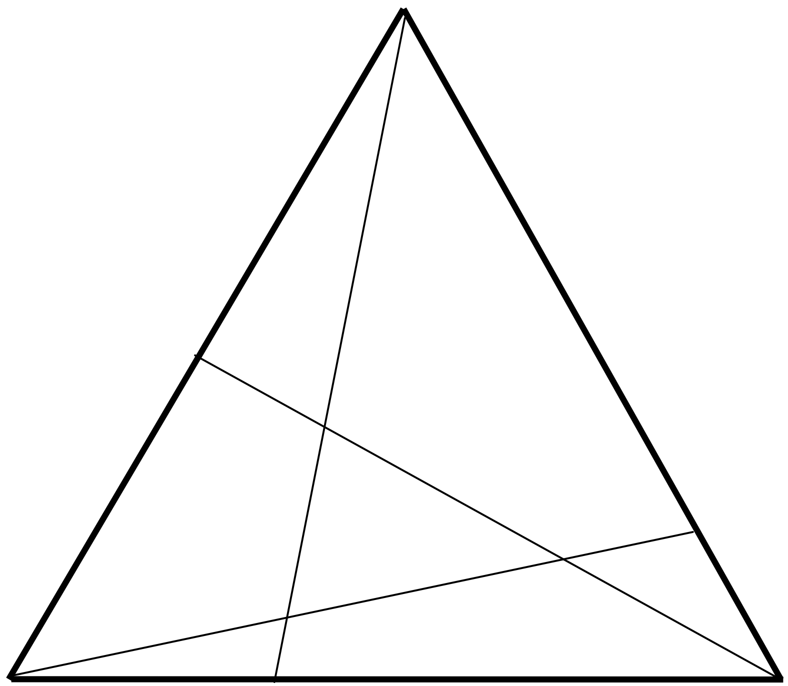
- I jeszcze pytanie: dlaczego „u/w = 1” (implikujące u = 1w) wprowadza sprzeczność do układu?

Barycentryczny układ współrzędnych



- Równanie u = 1w: reprezentacja – prosta

Barycentryczny układ współrzędnych



- Odpowiedź: brak punktu wspólnego

...

Barycentryczny układ współrzędnych

- Wizualizacja obiektów opisanych w kategoriach trzech zmiennych
  - przykłady (już przedstawiane)
    - charakterystyka gospodarki w kategoriach usług+informacji, przemysłu i rolnictwa (w poszczególnych latach)
    - charakterystyka (poszczególnych) produktów żywnościowych w kategoriach udziału cukru, białka i tłuszczu
- Wizualizacja funkcji trzech zmiennych
  - przykłady (już przedstawiane)
    - temperatura topnienia stopu żelaza, niklu i chromu
    - kolor stopu srebra, miedzi i złota

Barycentryczny układ współrzędnych

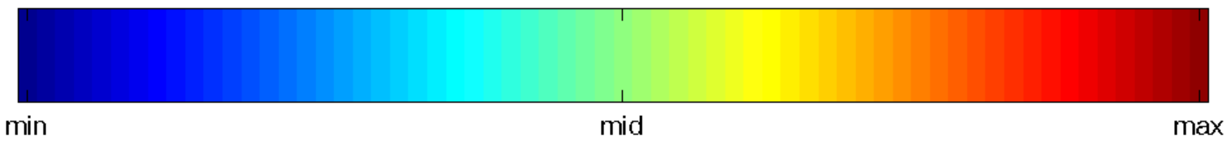
- Jeżeli zmienne a, b i c spełniają $a + b + c = n$, gdzie $n > 0$ jest stałą, to do skutecznej wizualizacji ich funkcji wystarczy wykres 2-wymiarowy + kolor

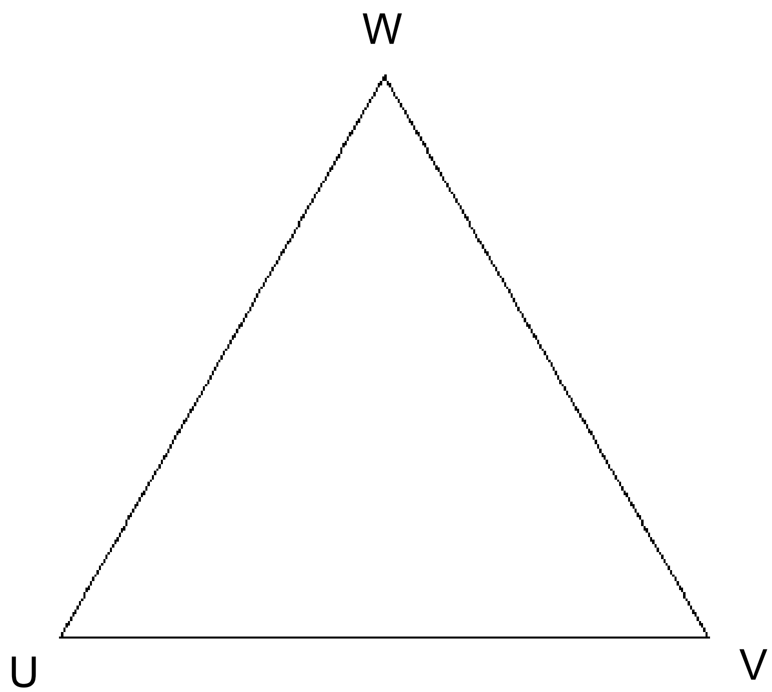
Barycentryczny układ współrzędnych

- Niech f(x,y,z) będzie dowolną funkcją rzeczywistą określoną dla zmiennych a, b i c spełniających $a + b + c = n$, gdzie $n > 0$ jest stałą
- Jeżeli zmienne a, b i c spełniają $a + b + c = n$, gdzie $n > 0$ jest stałą, to do skutecznej wizualizacji wartości a, b, c oraz f(a,b,c) wystarczy wykres 2-wymiarowy + kolor
- Uwaga: zamiast a, b i c będziemy stosować:
  - $u = a/(a+b+c)$
  - $v = b/(a+b+c)$
  - $w = c/(a+b+c)$

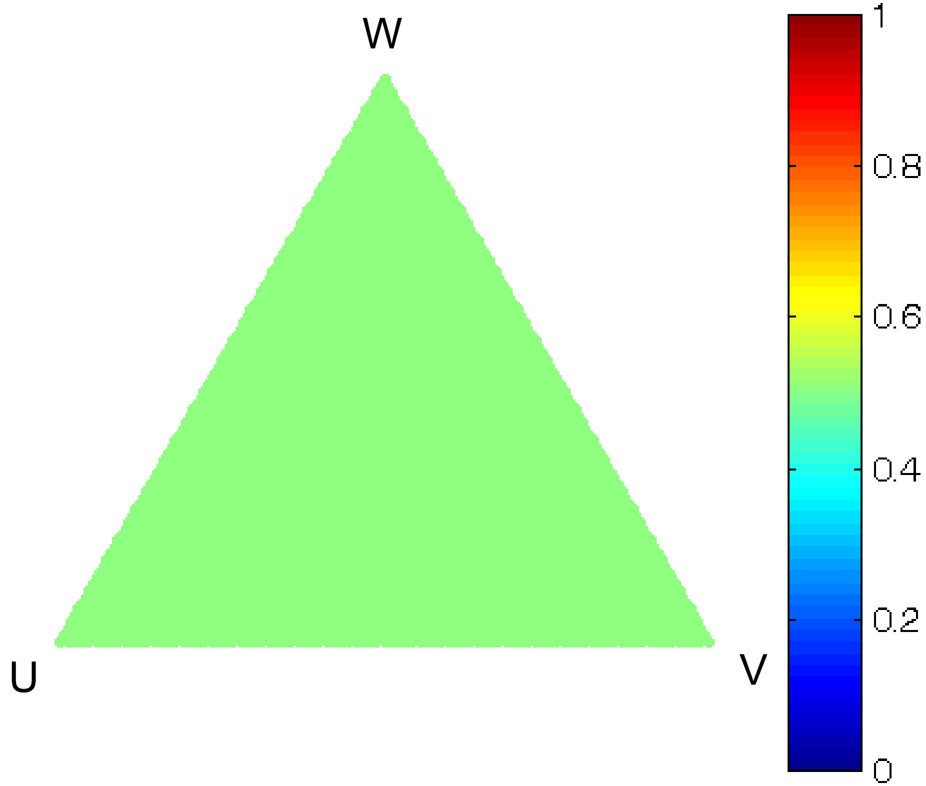
Barycentryczny układ współrzędnych

•

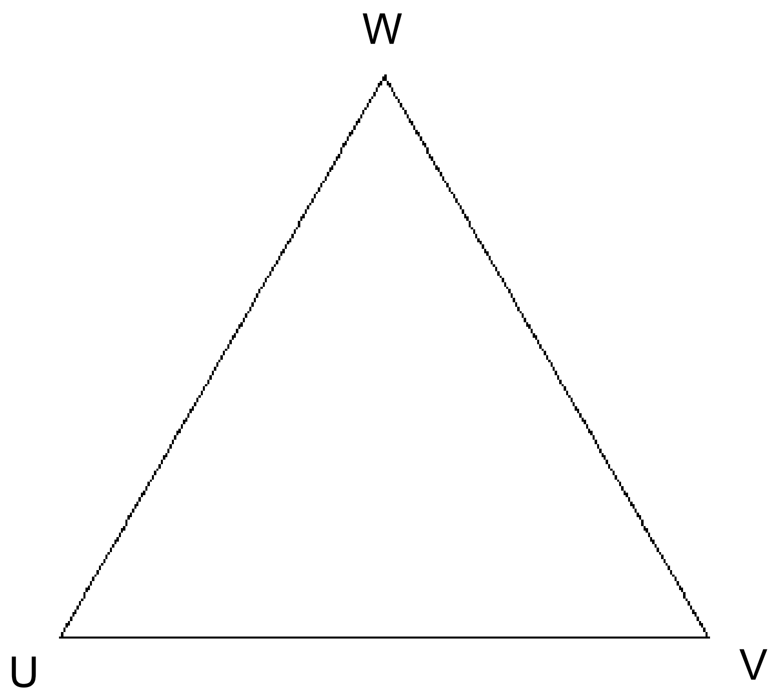




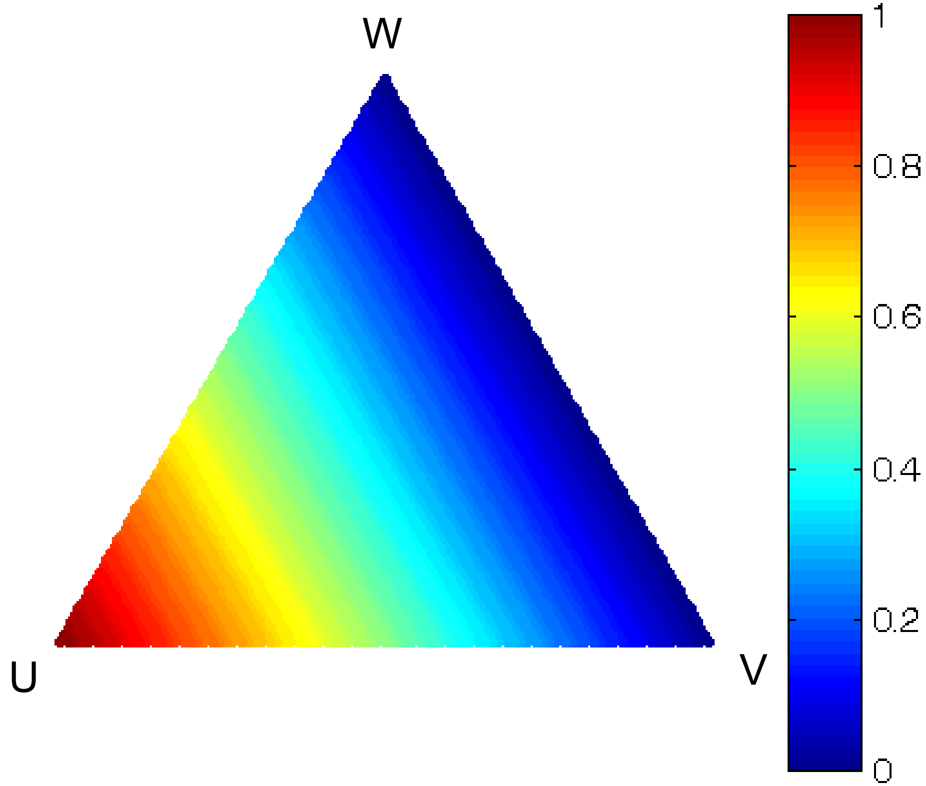
$f(u,v,w) = 0.5?$



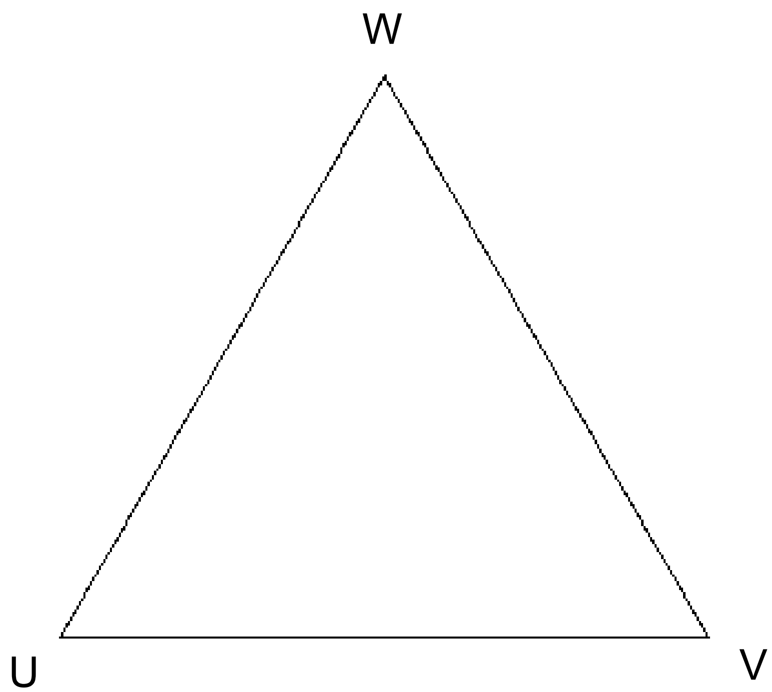
f(u,v,w) = 0.5



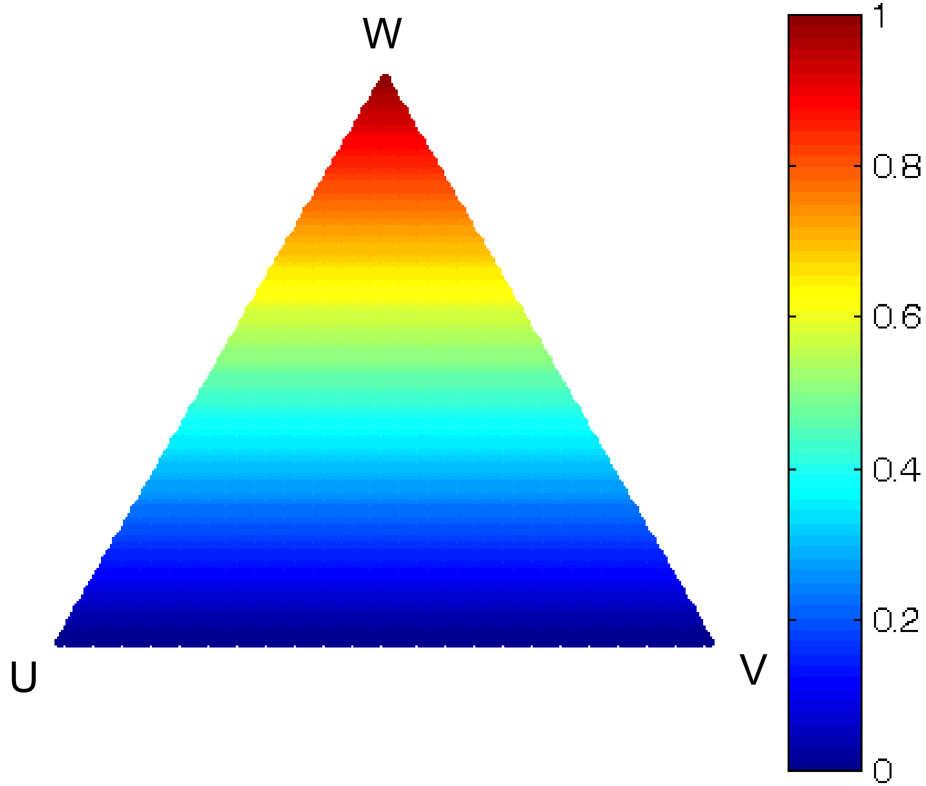
$f(u,v,w) = u?$



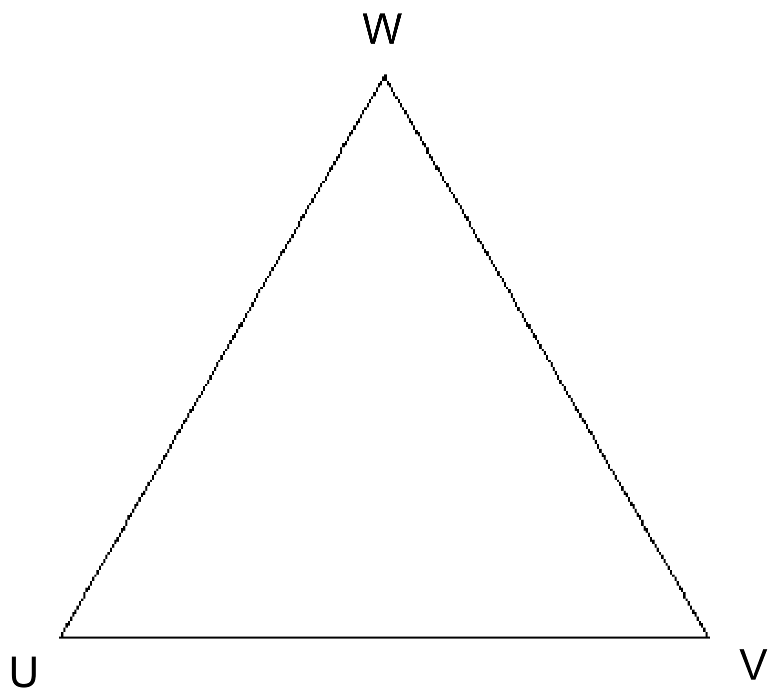
$f(u,v,w) = u$



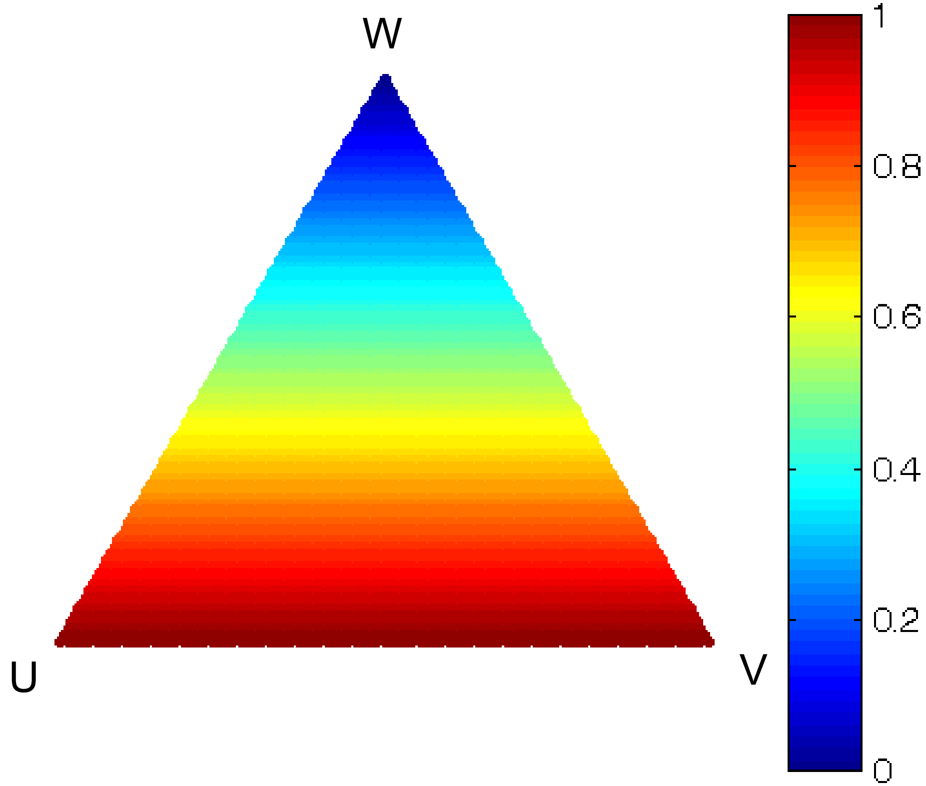
f(u,v,w) = w?



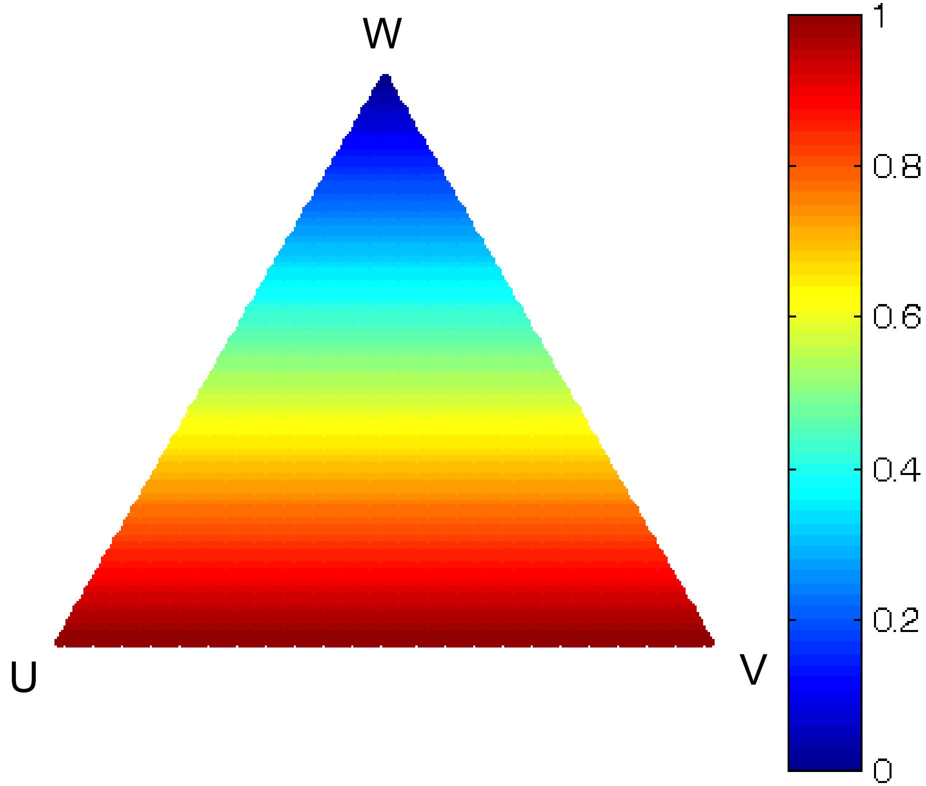
$f(u,v,w) = w$



$$f(u,v,w) = u + v?$$

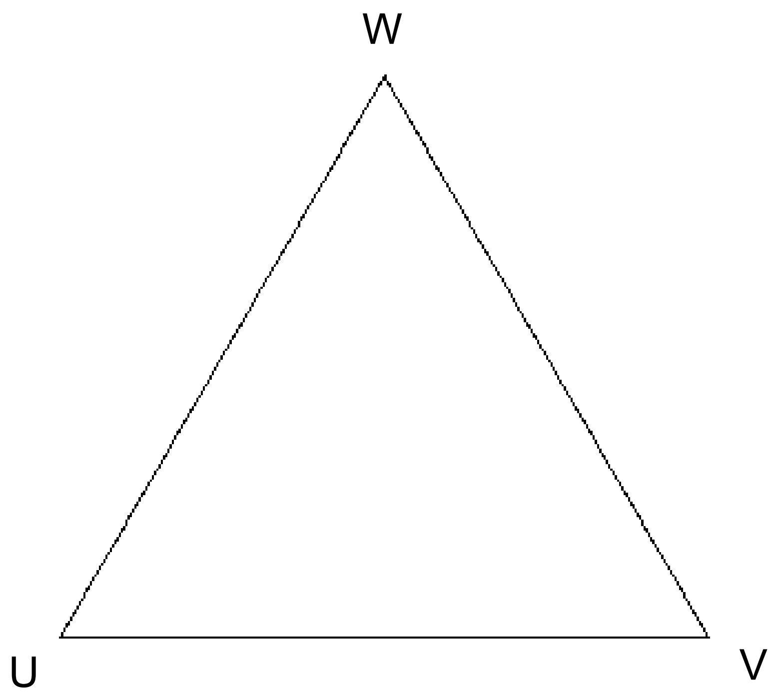


$f(u,v,w) = u + v$

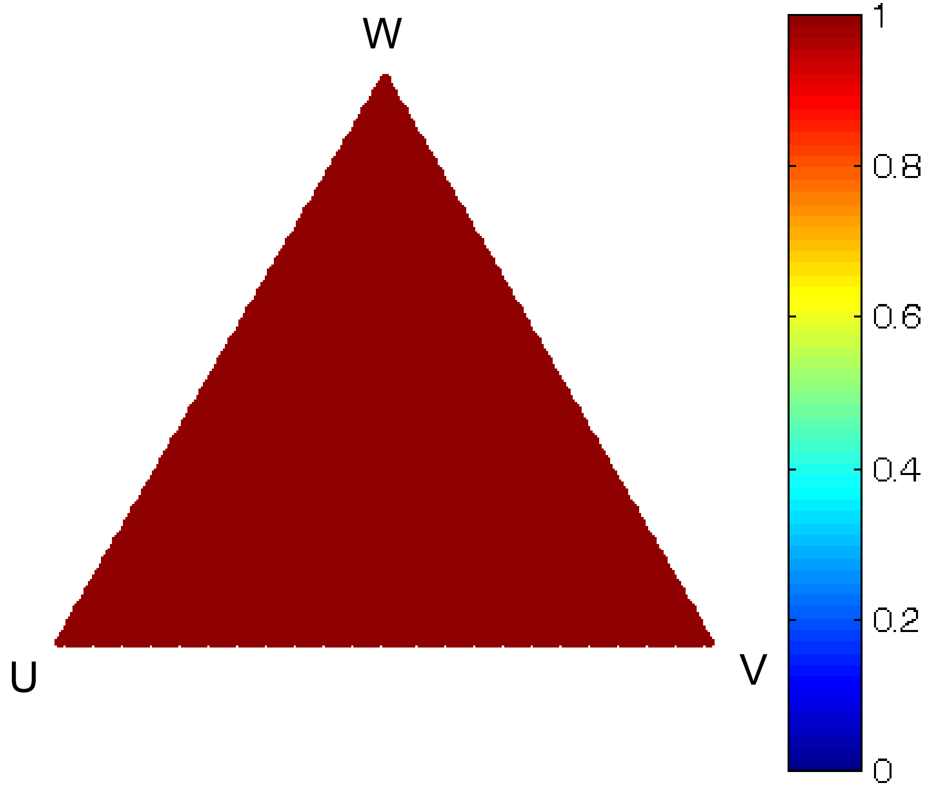


$f(u,v,w) = u + v$

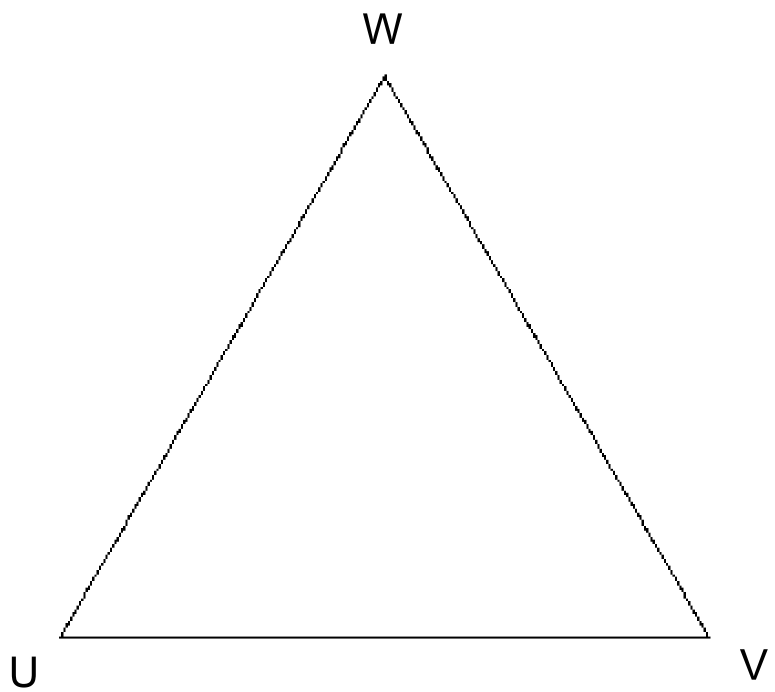
(ponieważ: $u + v = 1 - w$)



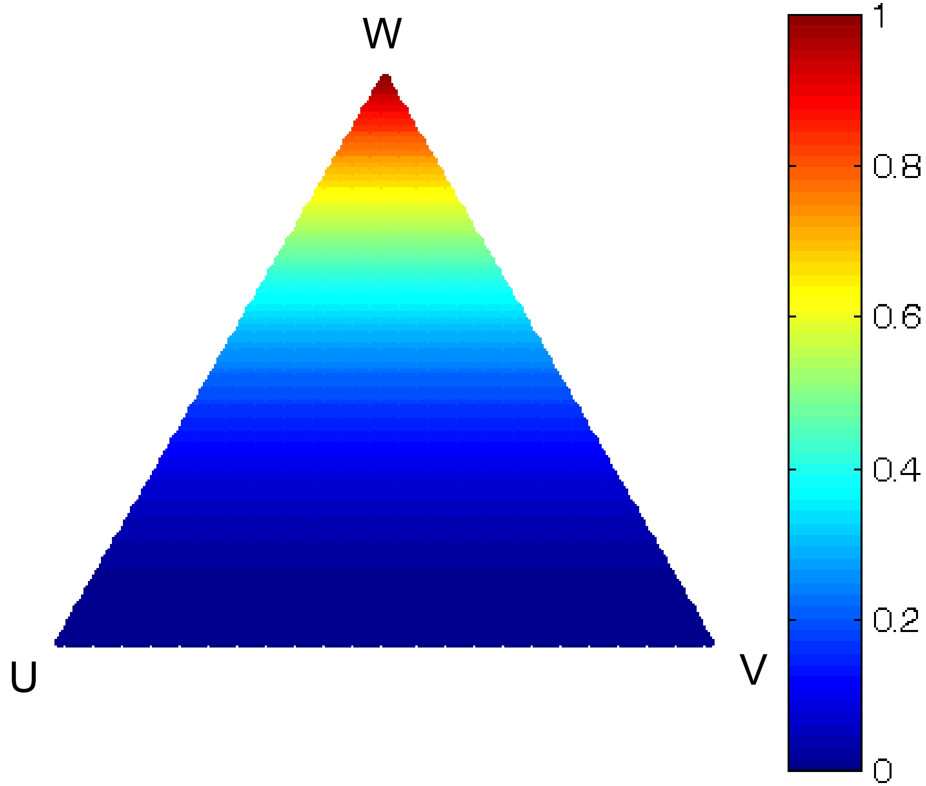
$$f(u,v,w) = u + v + w?$$



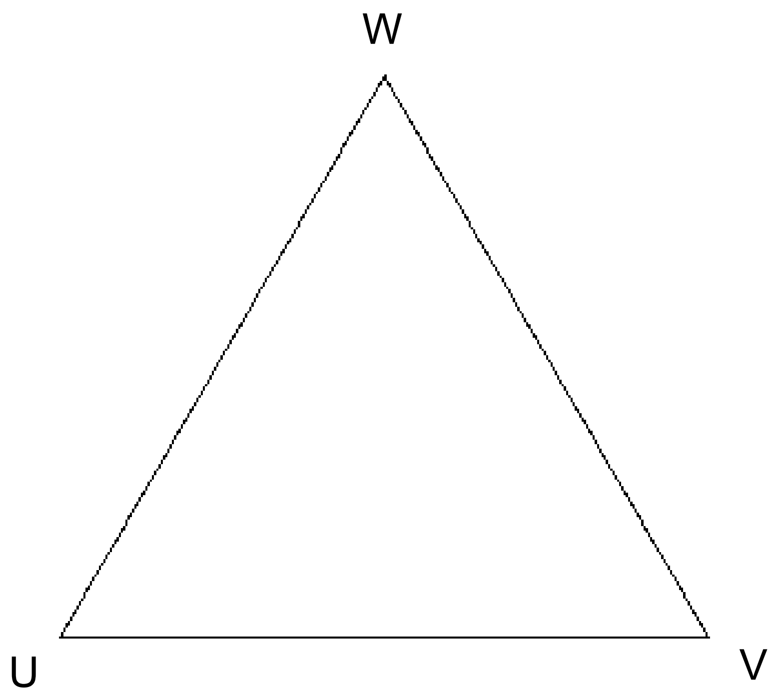
$f(u,v,w) = u + v + w$



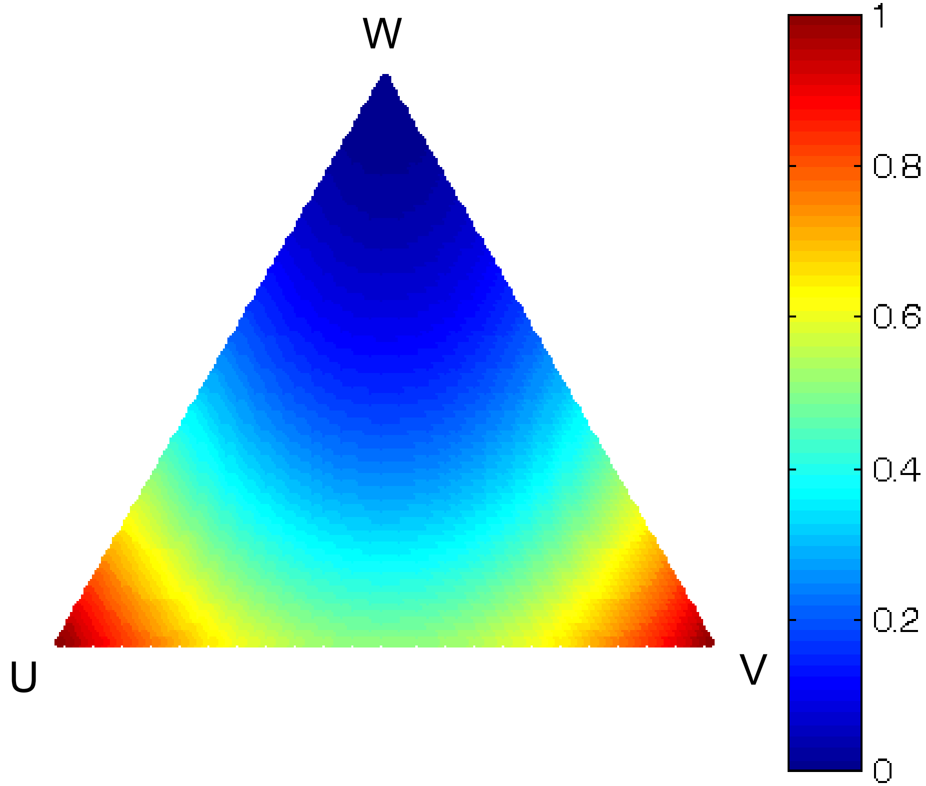
$f(u,v,w) = w^2$?



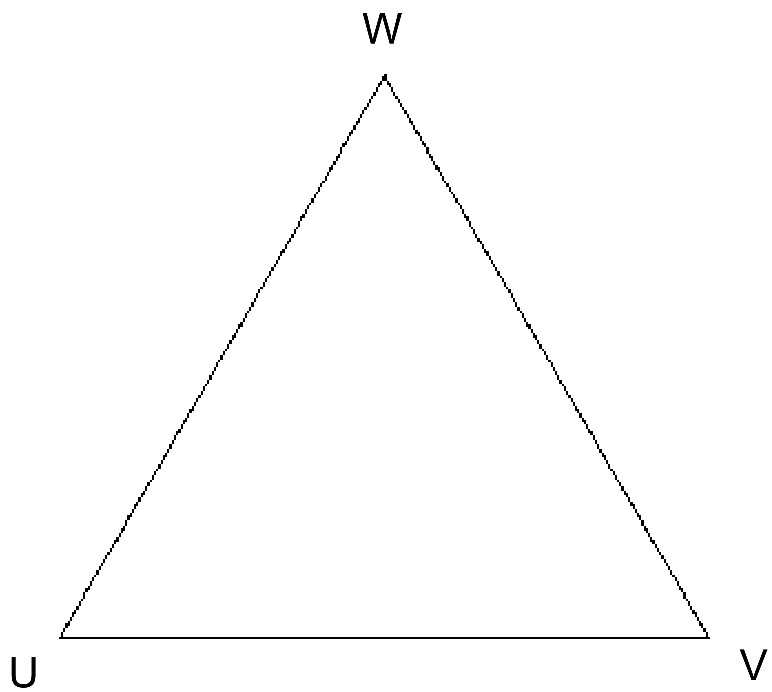
$f(u,v,w) = w^2$



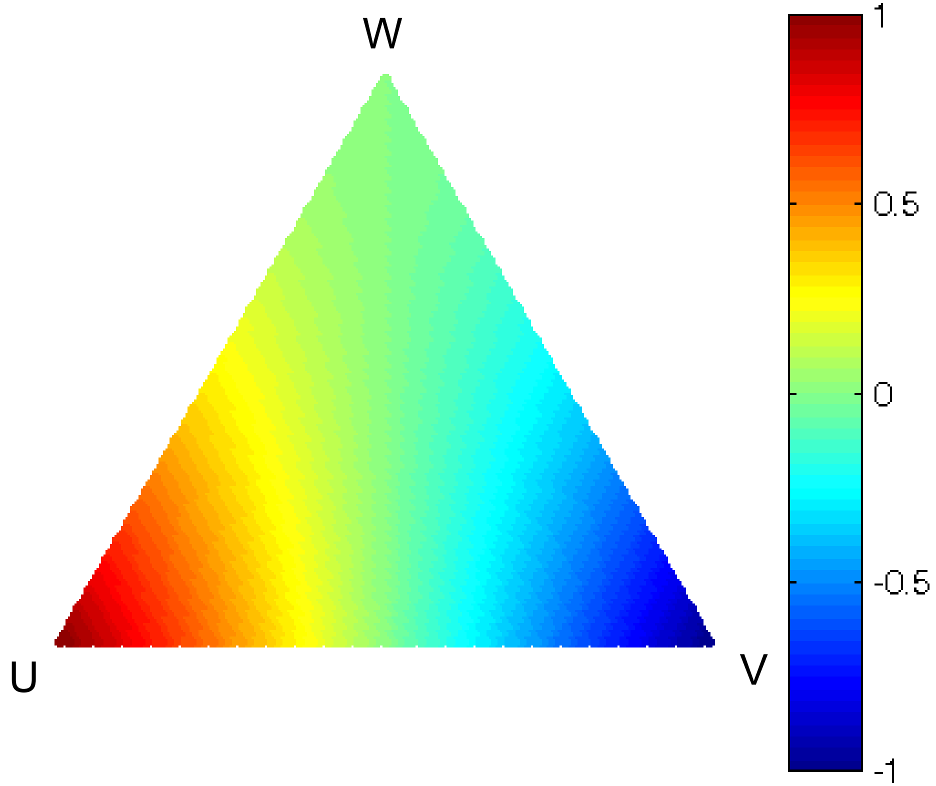
$f(u,v,w) = u^2 + v^2$?



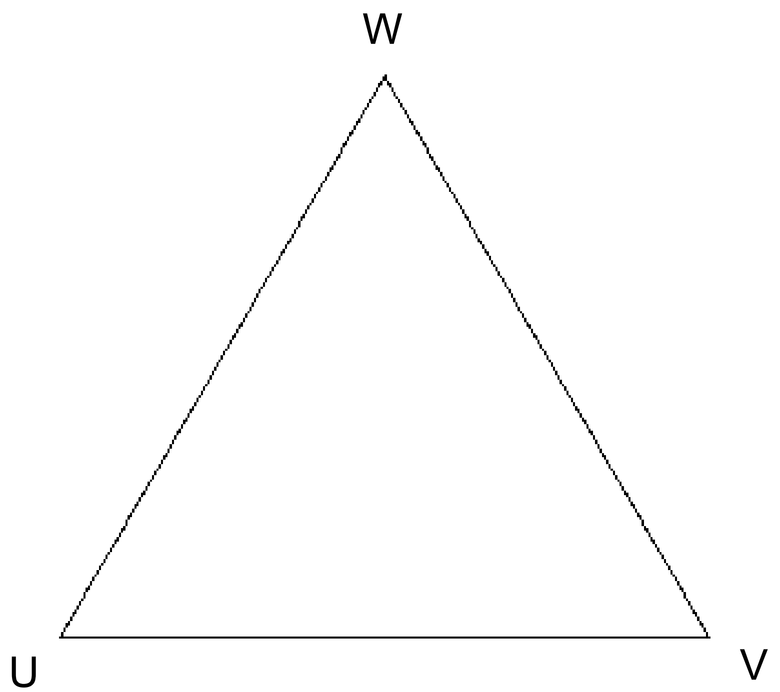
$$f(u,v,w) = u^2 + v^2$$



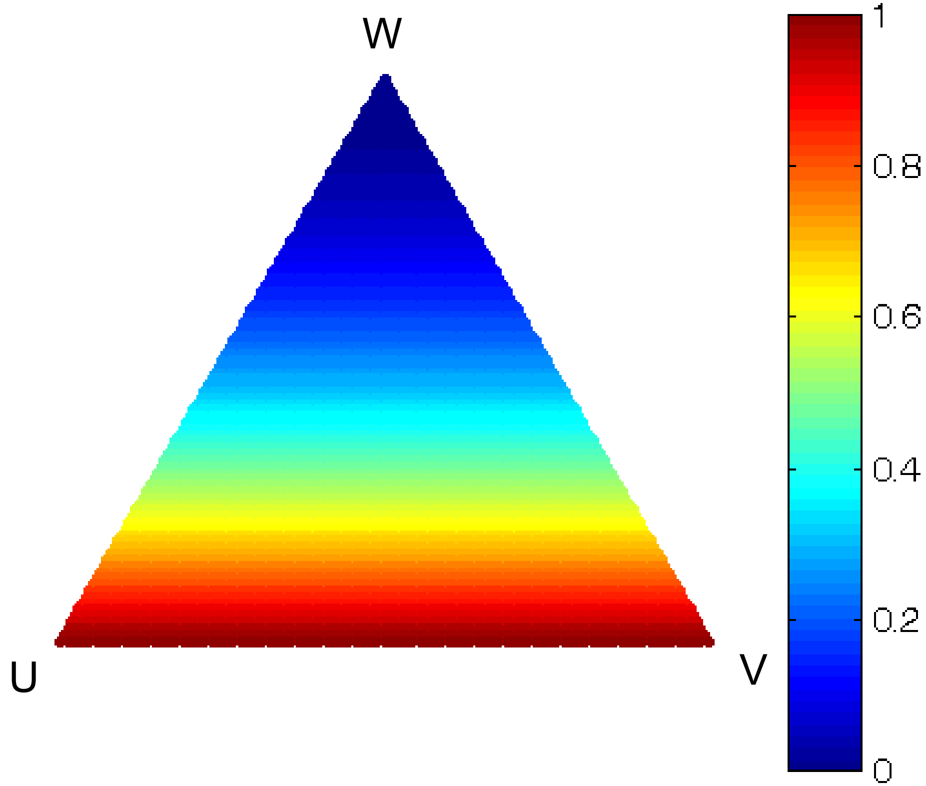
$$f(u,v,w) = u^2 - v^2?$$



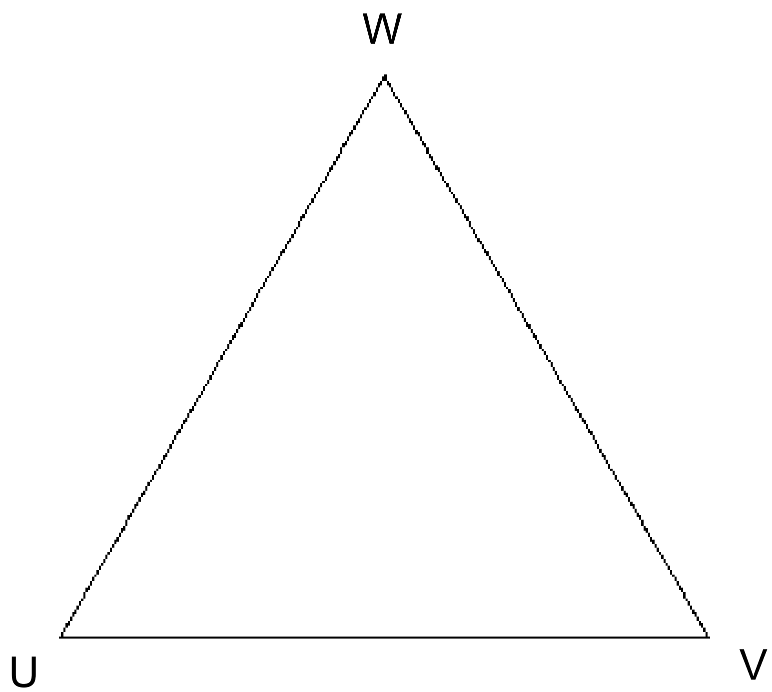
$$f(u,v,w) = u^2 - v^2$$



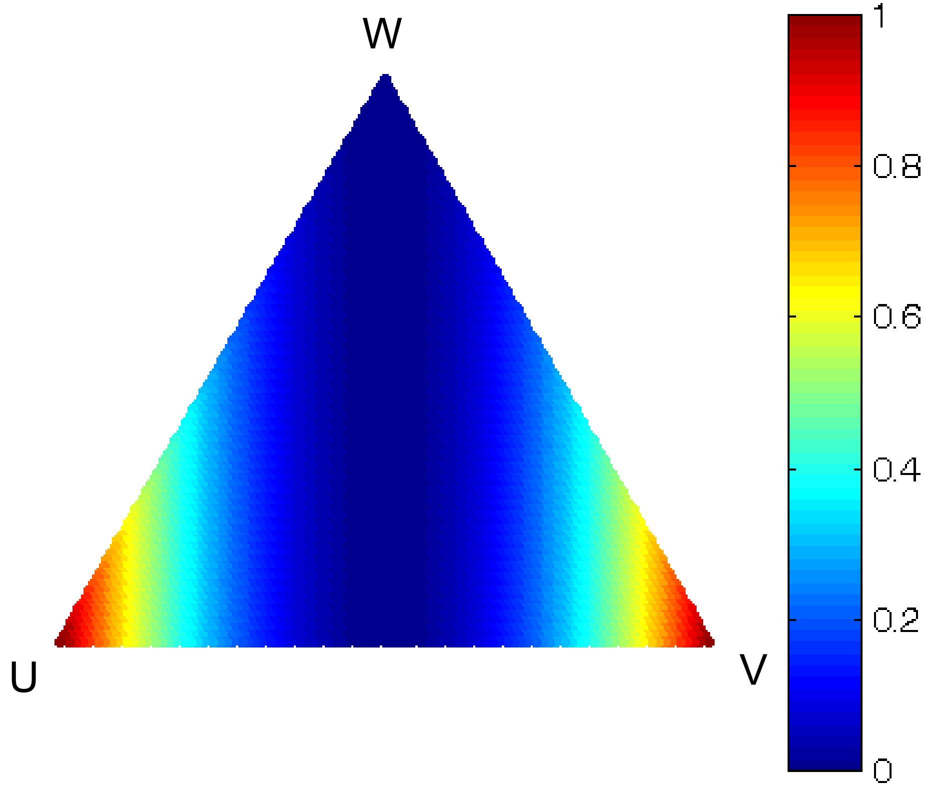
$$f(u,v,w) = (u + v)^2?$$



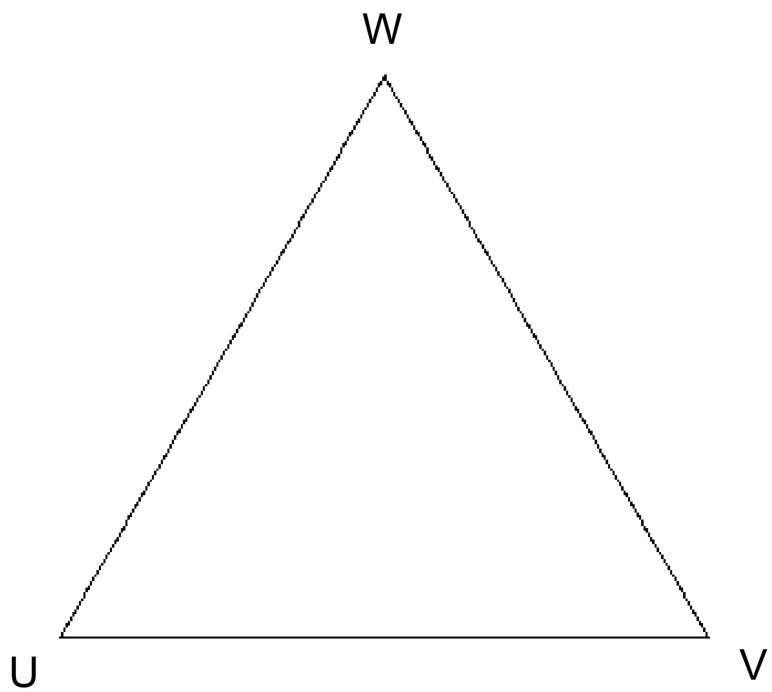
$$f(u,v,w) = (u + v)^2$$



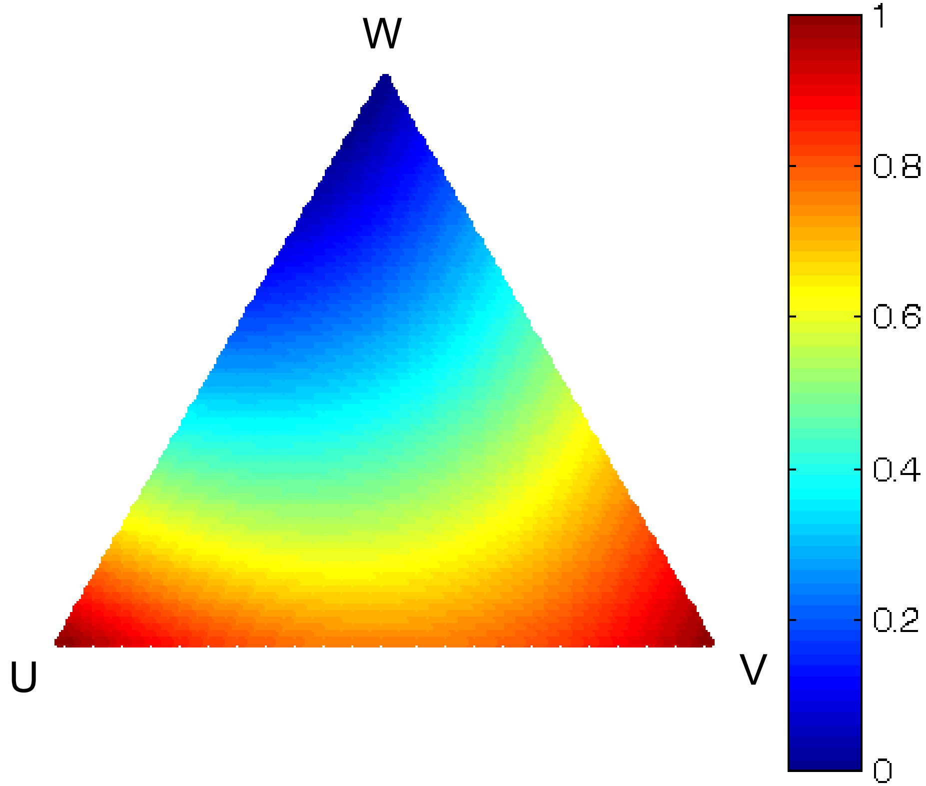
$$f(u,v,w) = (u - v)^2?$$



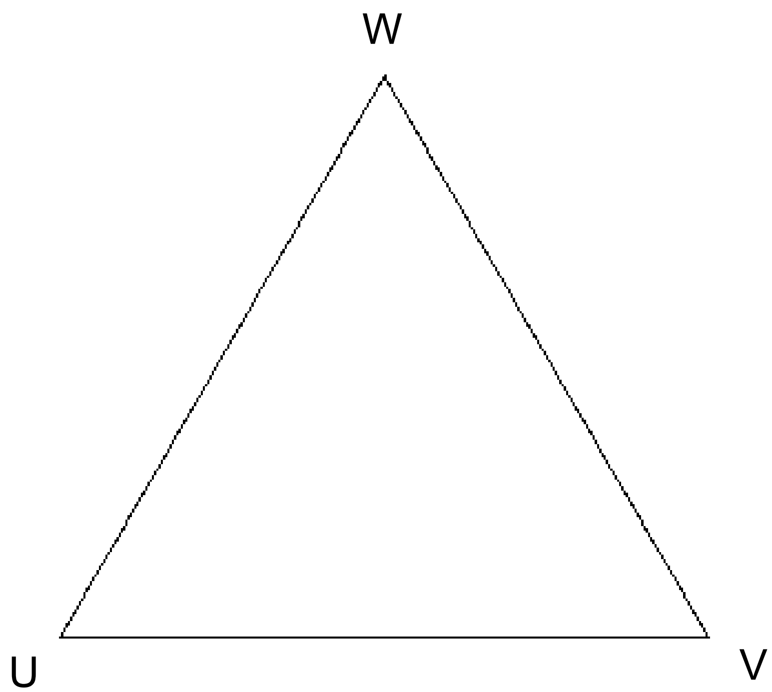
$$f(u,v,w) = (u-v)^2$$



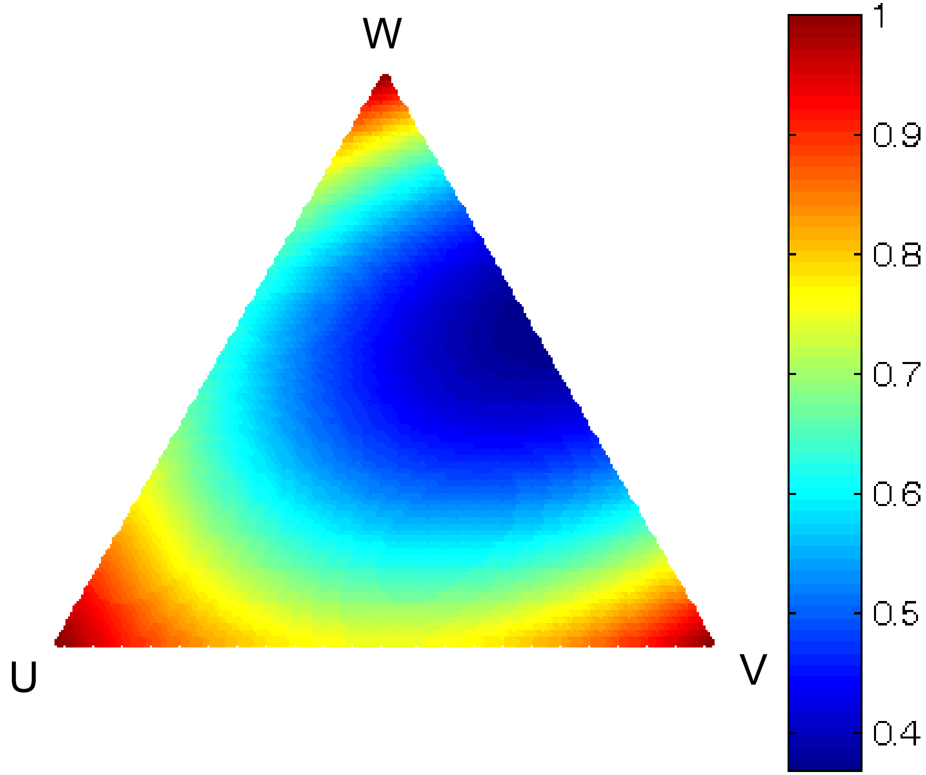
$$f(u,v,w) = u^2 + v?$$



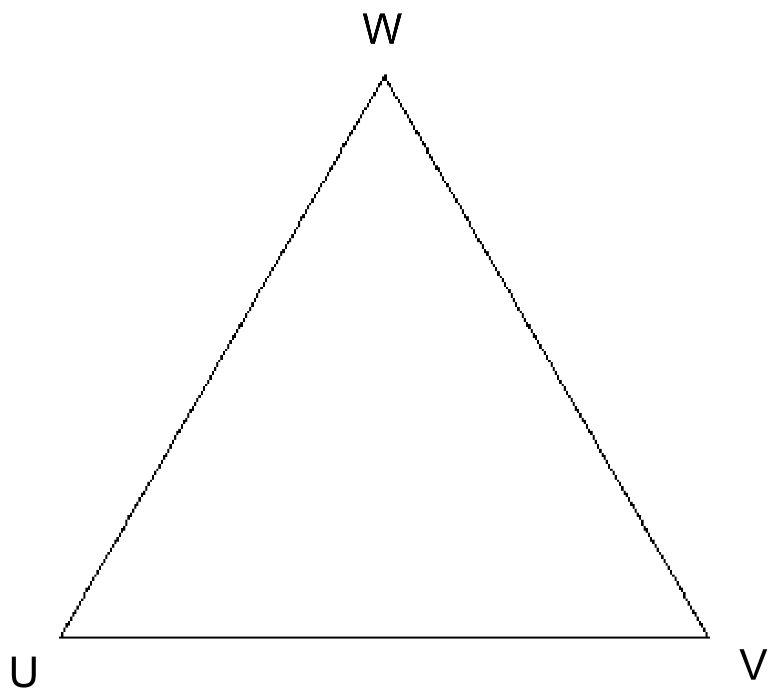
$f(u,v,w) = u^2 + v$



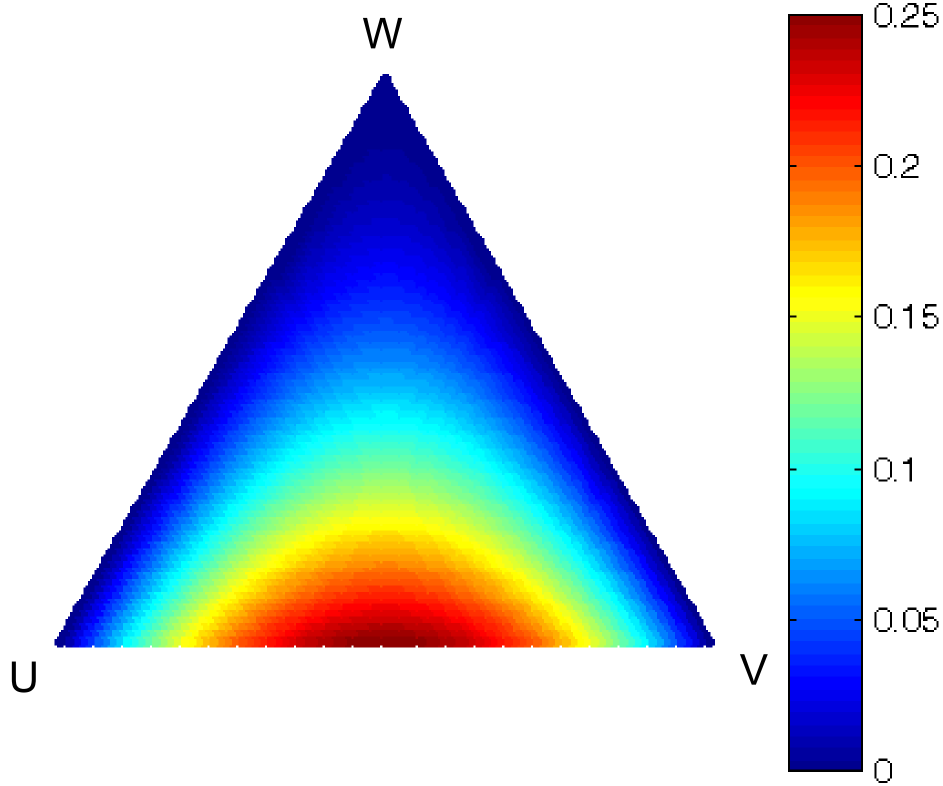
$f(u,v,w) = u + v^2 + w^3$?



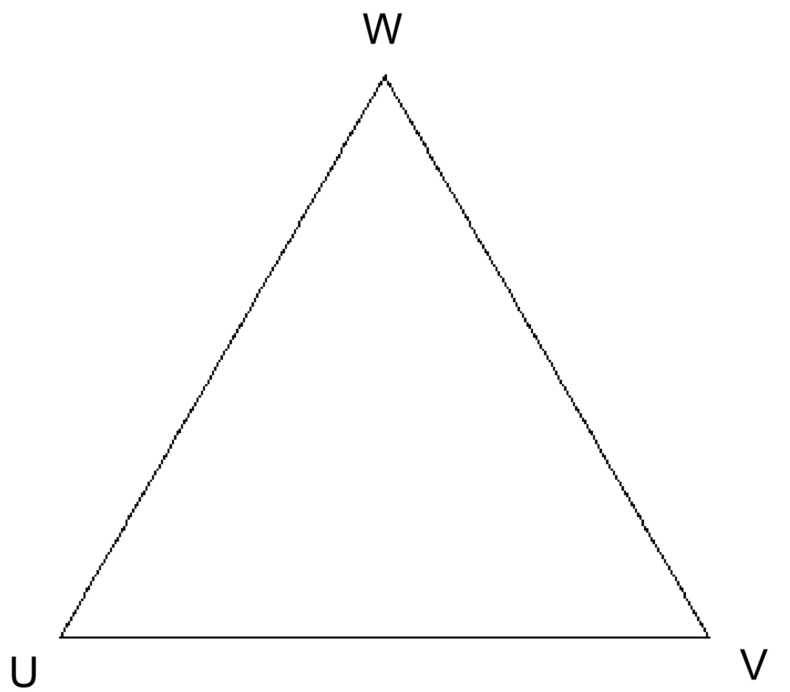
$f(u,v,w) = u + v^2 + w^3$



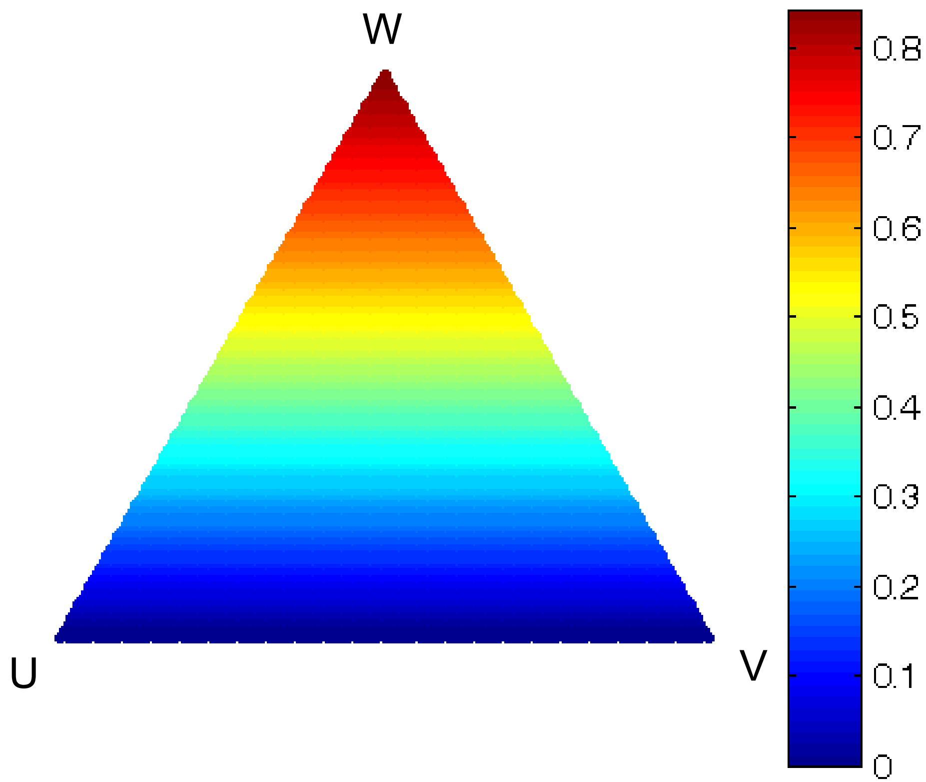
f(u,v,w) = uv?



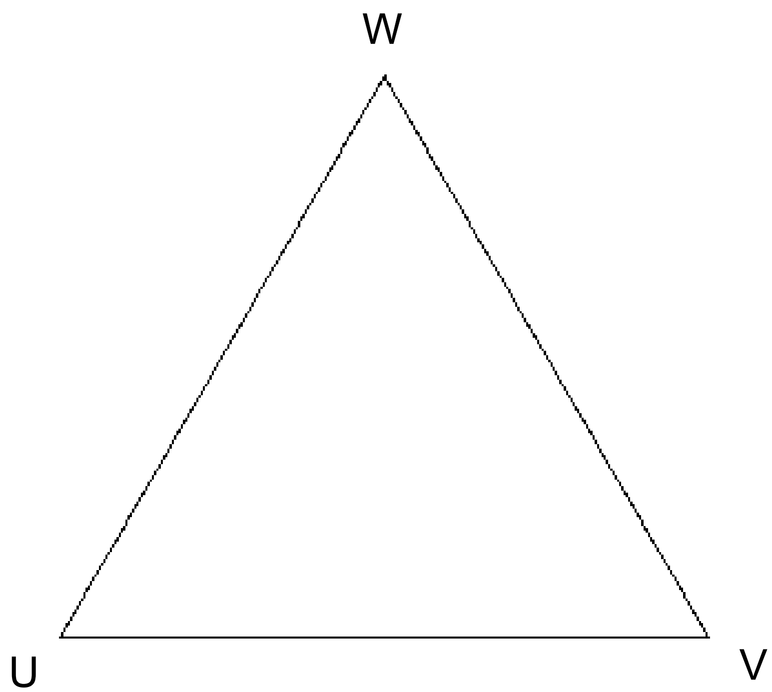
$f(u,v,w) = uv$



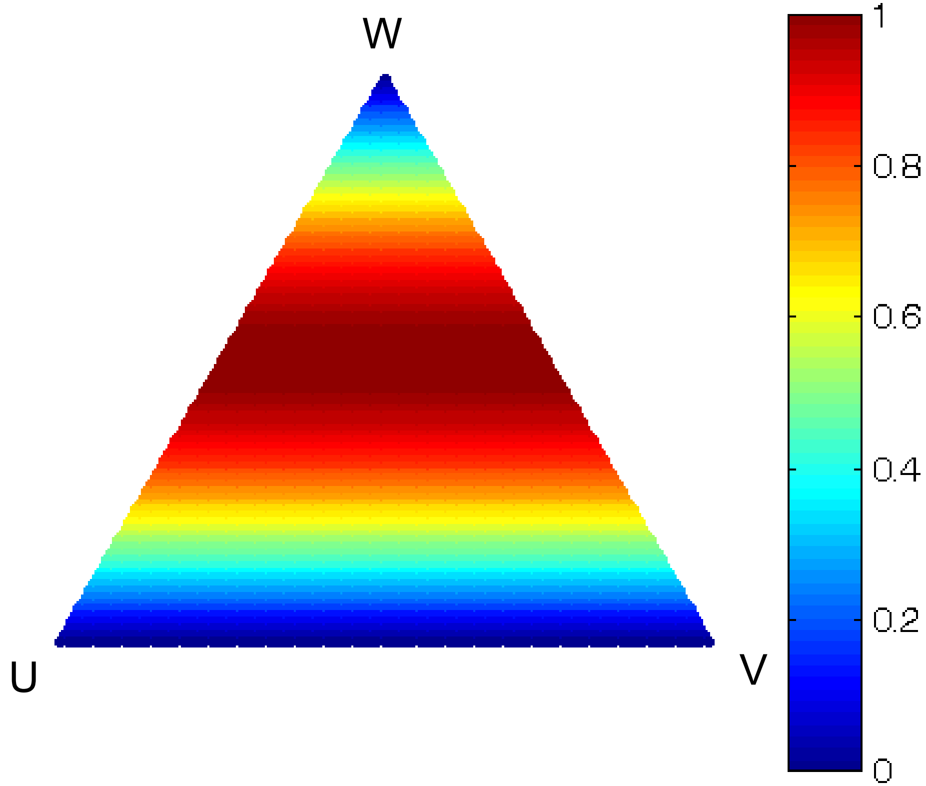
$f(u,v,w) = \sin(w)$?



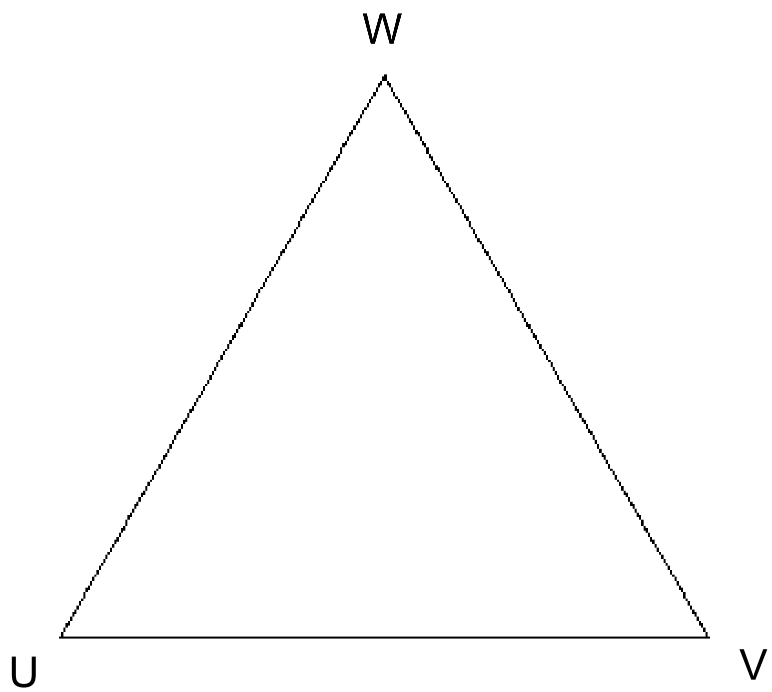
f(u,v,w) = sin(w)



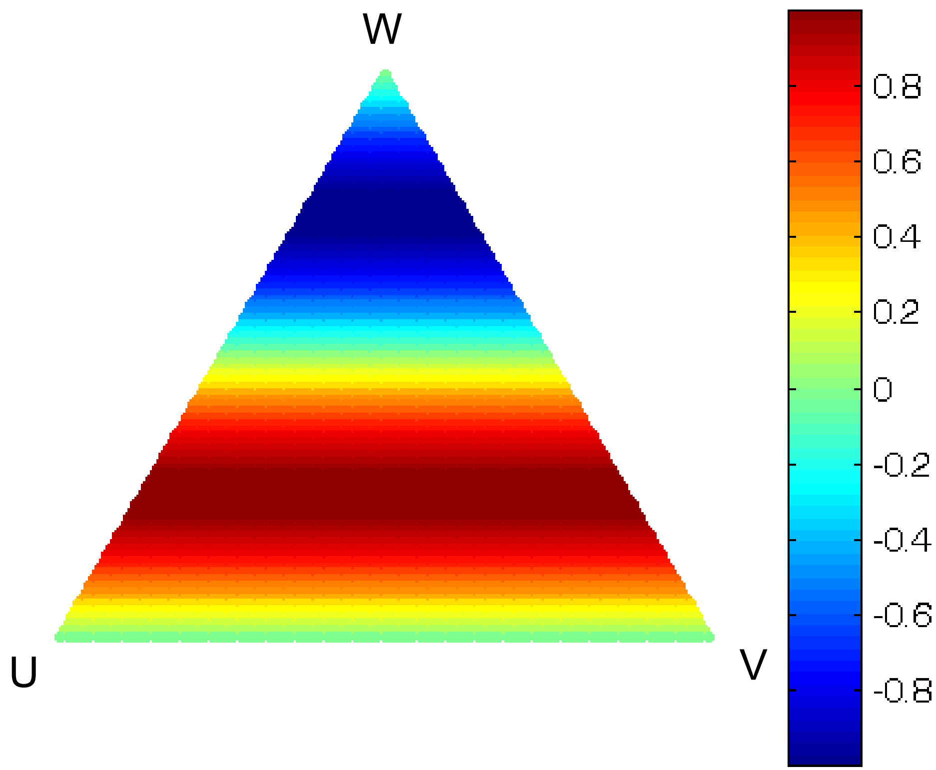
$f(u,v,w) = \sin(\pi \cdot w)$?



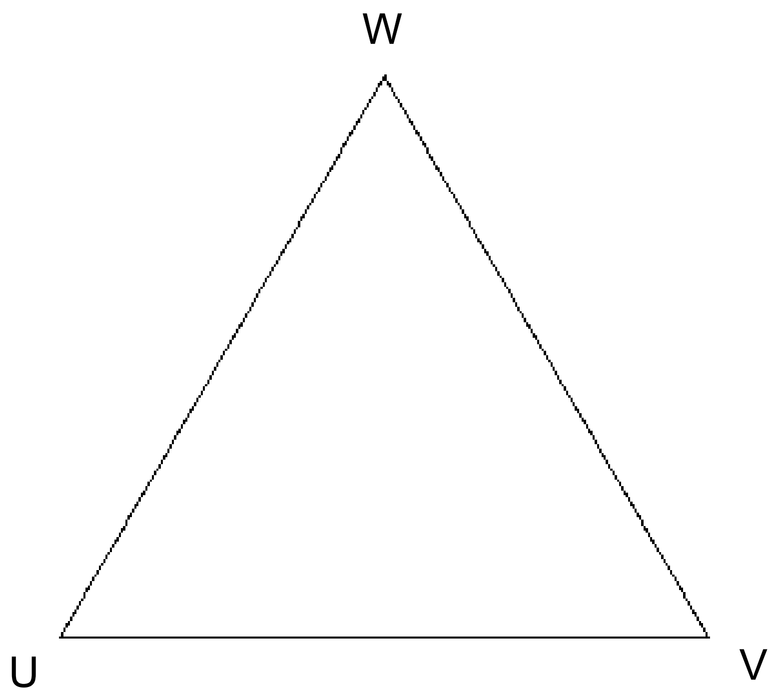
$$f(u,v,w) = \sin(\pi \cdot w)$$



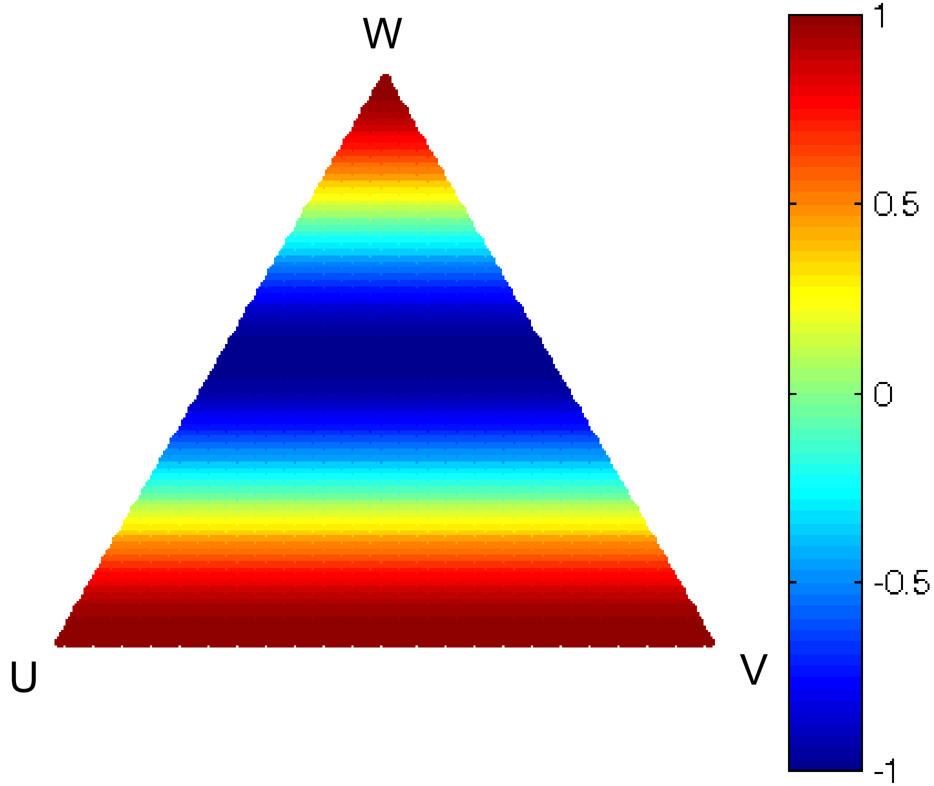
$f(u,v,w) = \sin(2\pi \cdot w)$?



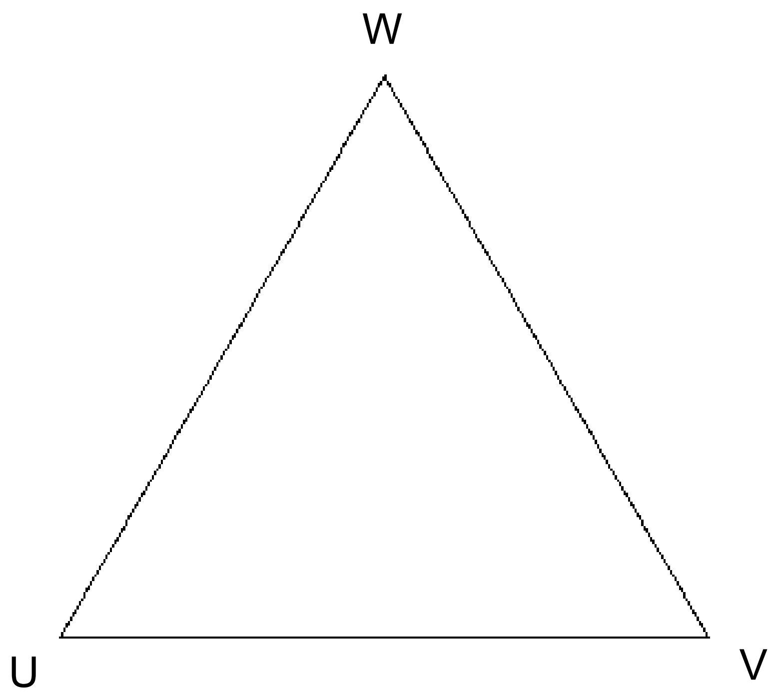
$f(u,v,w) = \sin(2\pi \cdot w)$



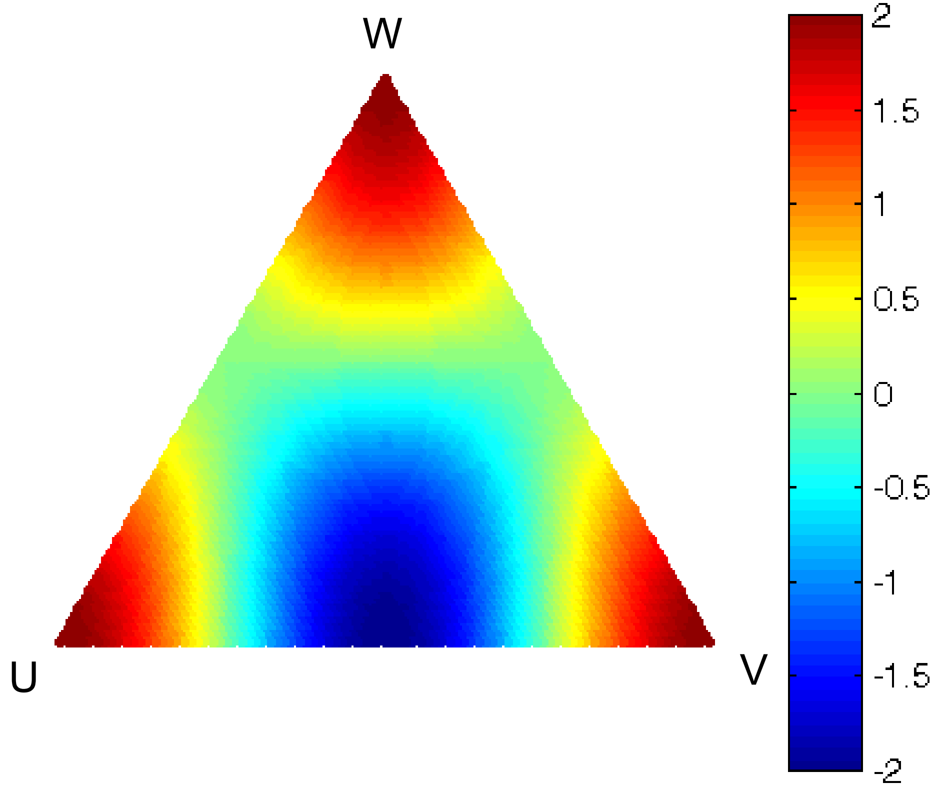
$$f(u,v,w) = \cos(2\pi \cdot w)?$$



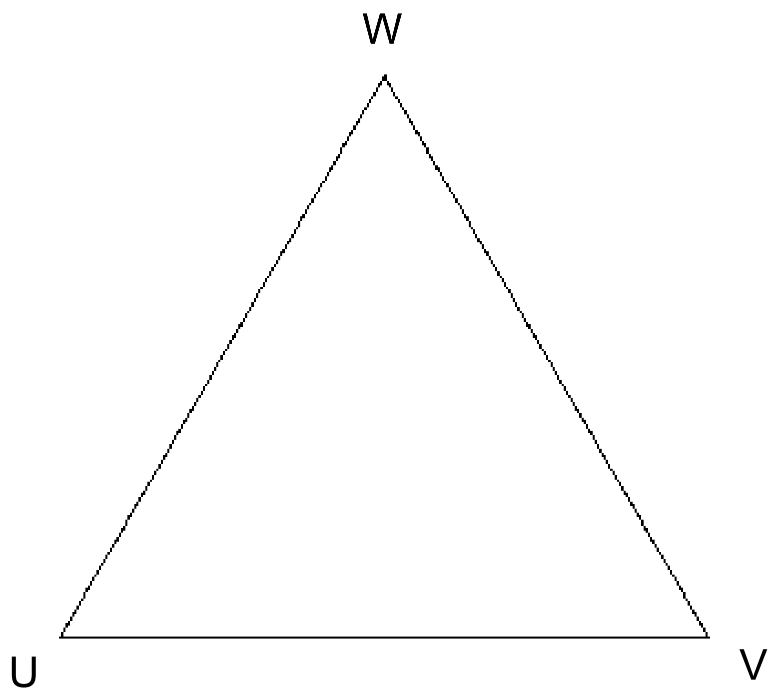
$$f(u,v,w) = \sin(2\pi \cdot w)$$



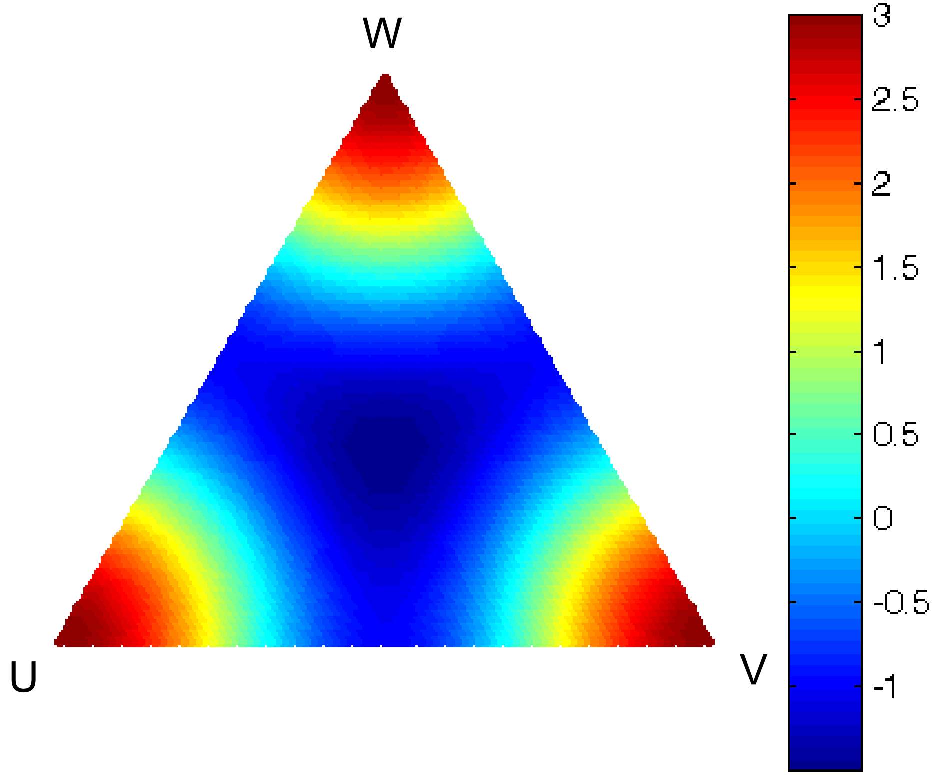
$$f(u,v,w) = \cos(2\pi\cdot u) + \cos(2\pi\cdot v)?$$



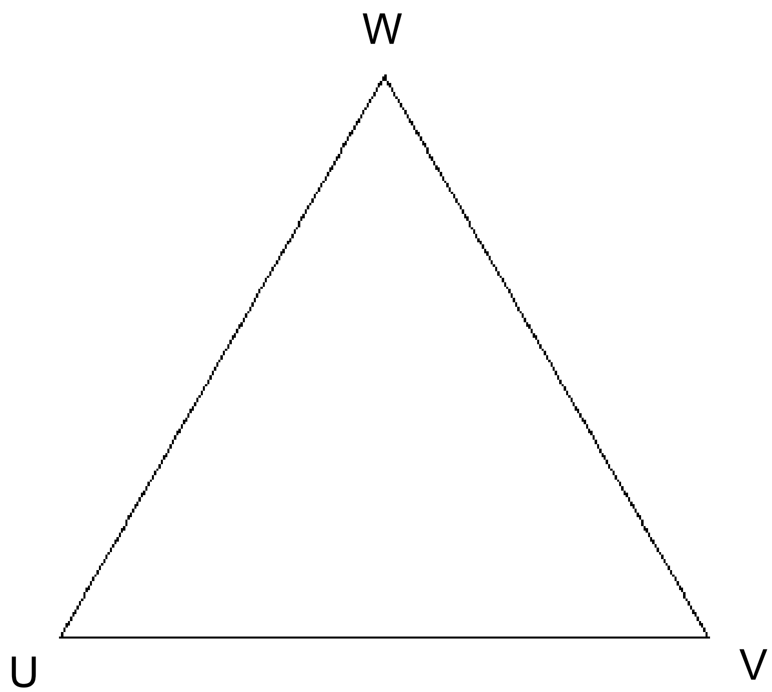
$$f(u,v,w) = \cos(2\pi \cdot u) + \cos(2\pi \cdot v)$$



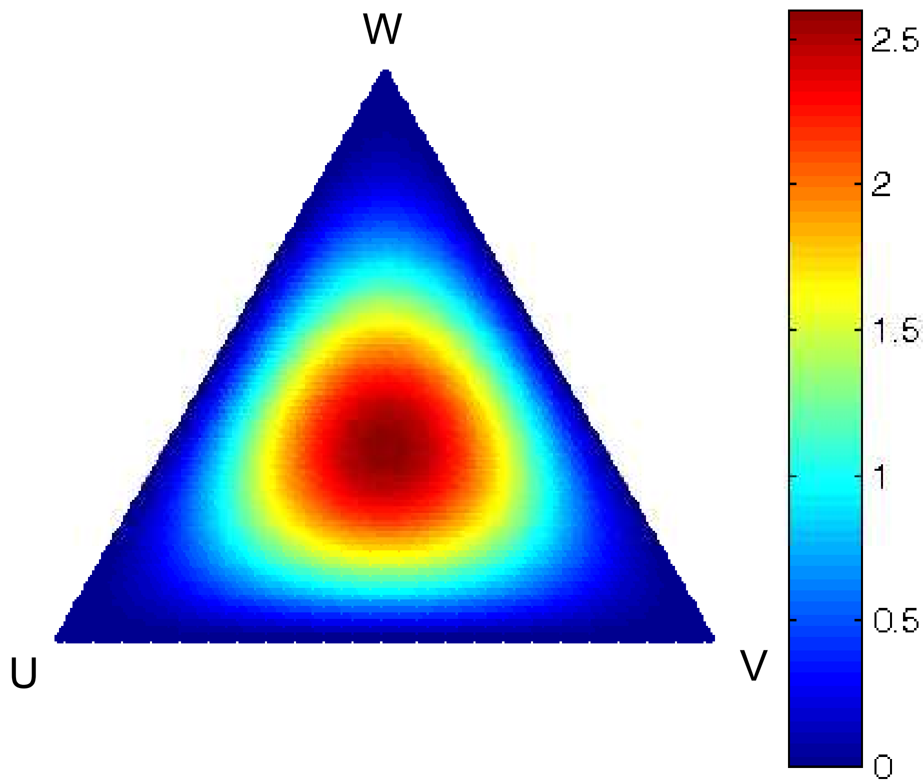
$$f(u,v,w) = \cos(2\pi\cdot u) + \cos(2\pi\cdot v) + \cos(2\pi\cdot w)?$$



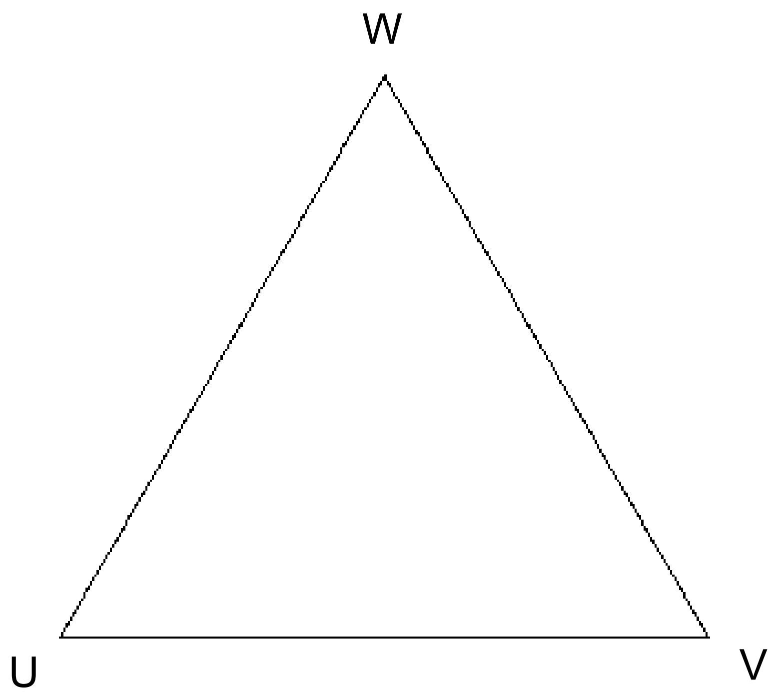
$$f(u,v,w) = \cos(2\pi \cdot u) + \cos(2\pi \cdot v) + \cos(2\pi \cdot w)$$



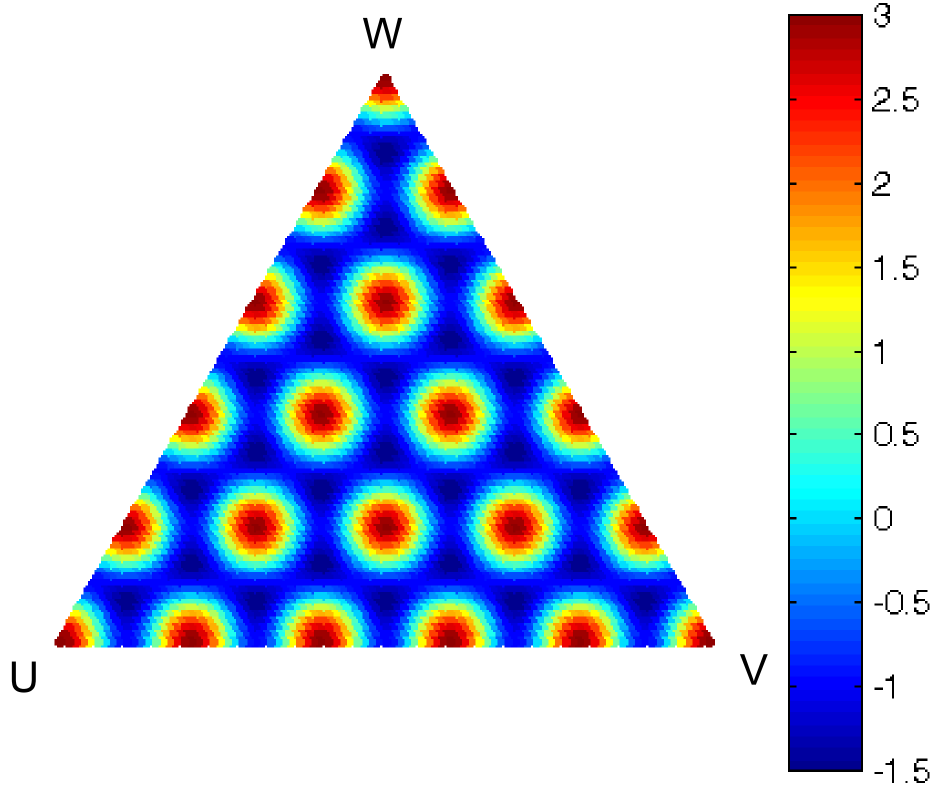
$$f(u,v,w) = \sin(2\pi\cdot u) + \sin(2\pi\cdot v) + \sin(2\pi\cdot w)?$$



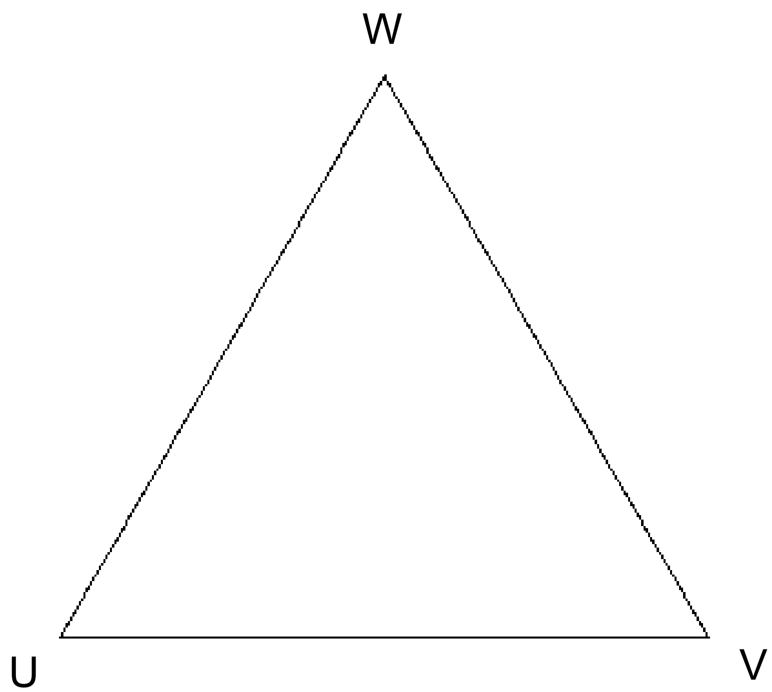
$$f(u,v,w) = \sin(2\pi \cdot u) + \sin(2\pi \cdot v) + \sin(2\pi \cdot w)$$



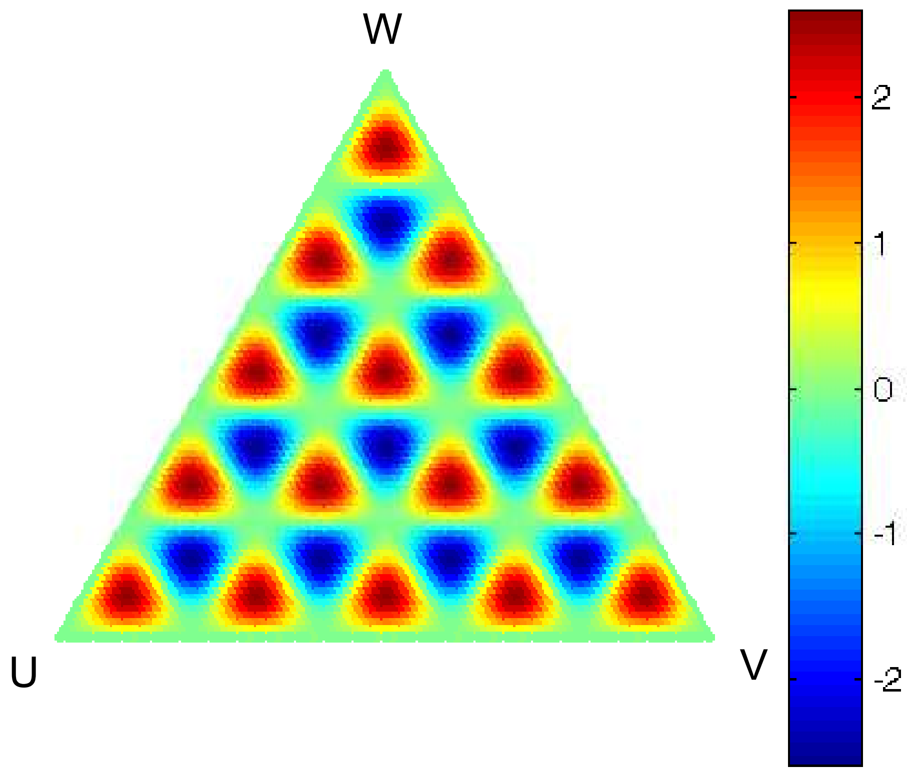
$f(u,v,w) = \cos(10\pi \cdot u) + \cos(10\pi \cdot v) + \cos(10\pi \cdot w)$?



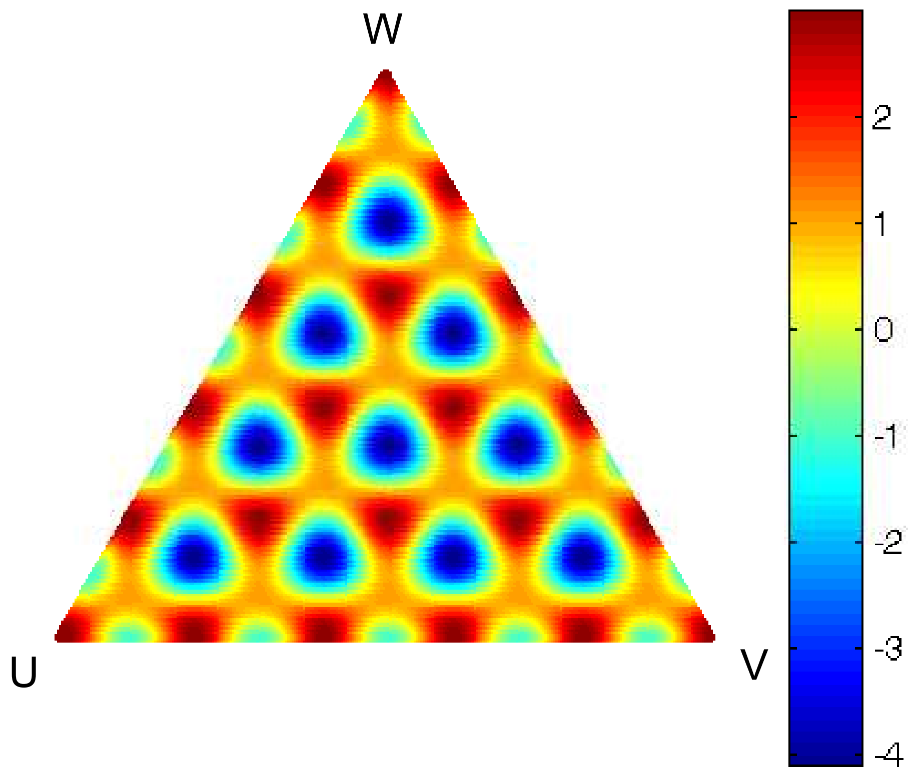
$$f(u,v,w) = \cos(10\pi \cdot u) + \cos(10\pi \cdot v) + \cos(10\pi \cdot w)$$



$$f(u,v,w) = \sin(10\pi \cdot u) + \sin(10\pi \cdot v) + \sin(10\pi \cdot w)?$$



$$f(u,v,w) = \sin(10\pi \cdot u) + \sin(10\pi \cdot v) + \sin(10\pi \cdot w)$$



$$f(u,v,w) = \cos(10\pi\cdot u) + \cos(10\pi\cdot v) + \cos(10\pi\cdot w) + \sin(10\pi\cdot u) + \sin(10\pi\cdot v) + \sin(10\pi\cdot w)$$

...

Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia twierdzenia Viviani'ego
  - trójkąt równoboczny

Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia
  - zależność

    a/n + **b**/n + **c**/n = **1**

    można uogólnić na różne sposoby
  - poniżej: pewne popularne uogólnienie pozwalające uwzględniać różne formy zmienności (np. różne przedziały zmienności) wartości wektorów **a**, **b** i **c**

Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia
  - jeżeli przedziały zmienności wartości wektorów **a**, **b** i **c** są różne, to można zróżnicować mianowniki w równaniu

    $\mathbf{a}/n + \mathbf{b}/n + \mathbf{c}/n = \mathbf{1}$

    wprowadzając n_1, n_2 i n_3 (niekoniecznie wszystkie równe)
  - otrzymujemy wtedy

    $\mathbf{a}/n_1 + \mathbf{b}/n_2 + \mathbf{c}/n_3 = \mathbf{1}$
  - przyjmując dalej $s_1 = 1/n_1$, $s_2 = 1/n_2$, $s_3 = 1/n_3$, mamy

    $s_1\mathbf{a} + s_2\mathbf{b} + s_3\mathbf{c} = \mathbf{1}$
  - postać ta jest ogólniejsza, ponieważ dopuszcza $s_i = 0$
    - (postać ilorazowa wymagałaby (nieliczbowej) wartości $n_i = \infty$)
  - współczynniki s_1, s_2 i s_3 muszą jednak spełniać:
    - $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$
  - oczywiście dla $s_1 = 1/n$, $s_2 = 1/n$ i $s_3 = 1/n$ otrzymujemy porzednią postać tej zależności

Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia
  - odpowiada to wprowadzeniu innych trójkatów jako „ram” wykresu
    - np. trójkątów równoramiennych
      dla $s_1 = s_2 \neq s_3$, $s_2 = s_3 \neq s_1$ lub $s_3 = s_1 \neq s_2$

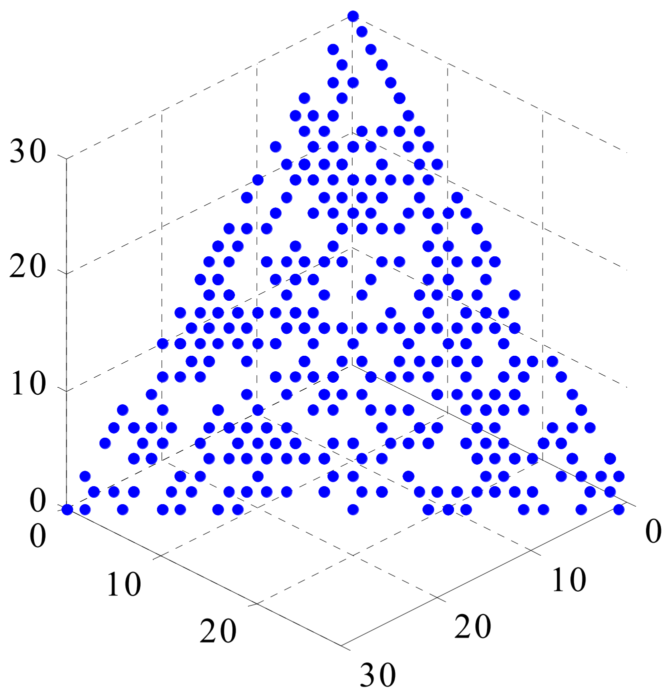
    i pozwala na uwidocznienie zróżnicowanych form zmienności (np. przedziałów zmienności) wartości wektorów

Barycentryczny układ współrzędnych

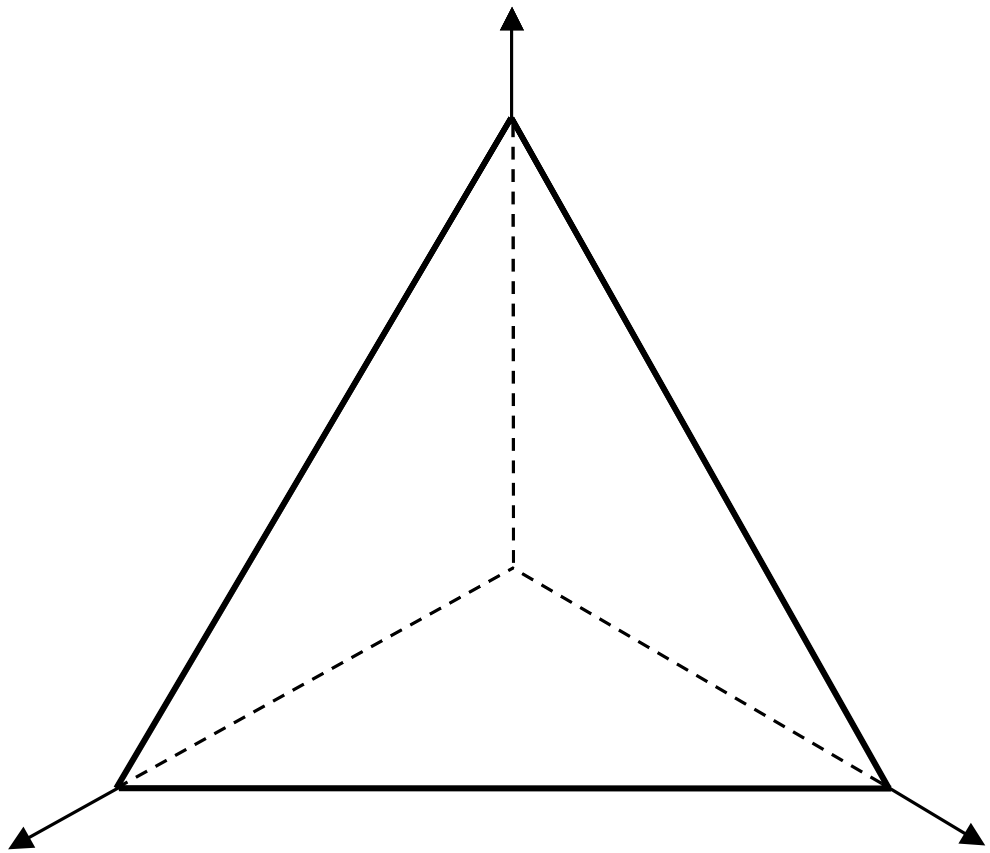
- Poprzednie dane (spełniające **a+b+c** = n·**1**)

a	**b**	**c**	**a+b+c**
1.00	10.00	19.00	30
3.00	12.00	15.00	30
21.00	4.00	5.00	30
7.00	8.00	15.00	30
16.00	7.00	7.00	30
5.00	14.00	11.00	30
0.00	9.00	21.00	30
	...		
a	b	c	a+b+c = 30
	...		
5.00	11.00	14.00	30

Barycentryczny układ współrzędnych



... i poprzedni wykres



(schematycznie)

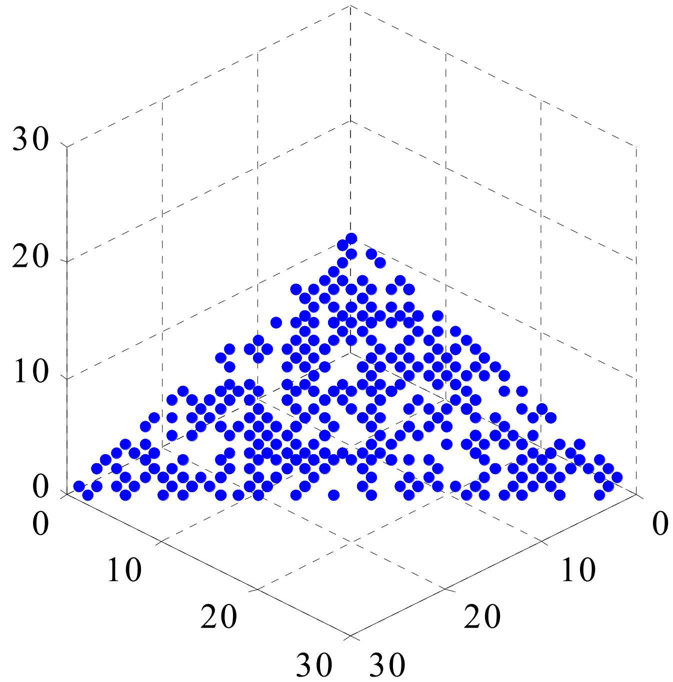
Barycentryczny układ współrzędnych

- Poprzednie dane (spełniające $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = n \cdot \mathbf{1}$)
  - oczywiście z faktu, że $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = n \cdot \mathbf{1}$ wynika, że $\mathbf{a} \leq n \cdot \mathbf{1}$, $\mathbf{b} \leq n \cdot \mathbf{1}$, $\mathbf{c} \leq n \cdot \mathbf{1}$
  - dla n = 30 oznacza to, że $\mathbf{a} \leq 30 \cdot \mathbf{1}$, $\mathbf{b} \leq 30 \cdot \mathbf{1}$, $\mathbf{c} \leq 30 \cdot \mathbf{1}$
    - na pewno więc nie mogą wystąpić sytuacje, w których jakieś a, b lub c przekroczyłoby wartość 30

Barycentryczny układ współrzędnych

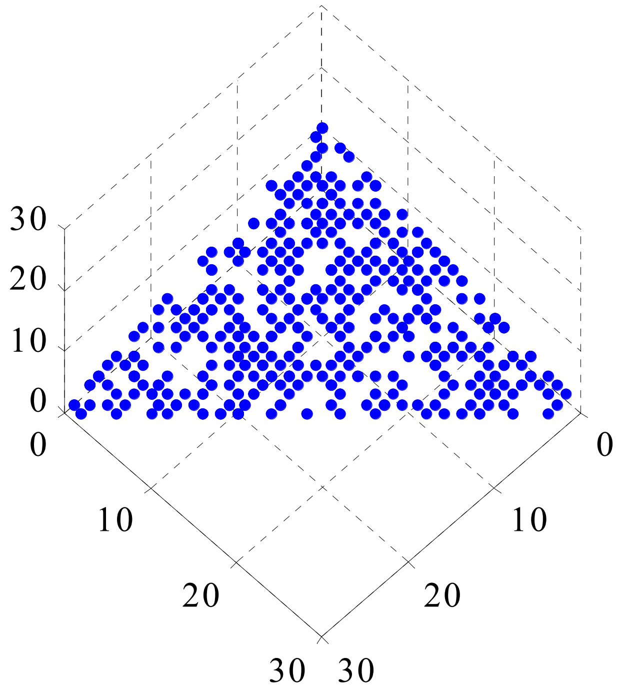
- Nowe dane
  - załóżmy jednak dalej, że zachodzi dodatkowo $\mathbf{c} \leq 10 \cdot \mathbf{1}$, wartości wektora **c** są więc systematycznie mniejsze od n (spełniając $\mathbf{c} \leq n/3 \cdot \mathbf{1}$)
  - w ogólności zachodzi więc $\mathbf{a}+\mathbf{b}+3\mathbf{c} = n \cdot \mathbf{1}$

Barycentryczny układ współrzędnych

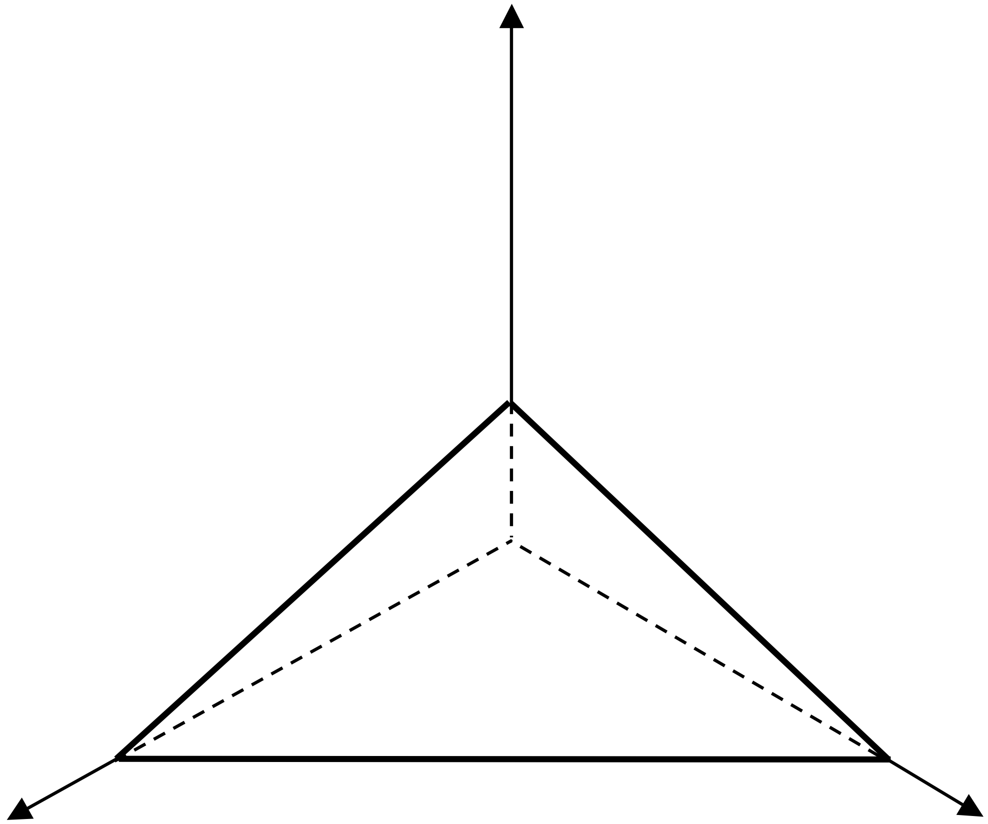


... i nowy wykres

Barycentryczny układ współrzędnych



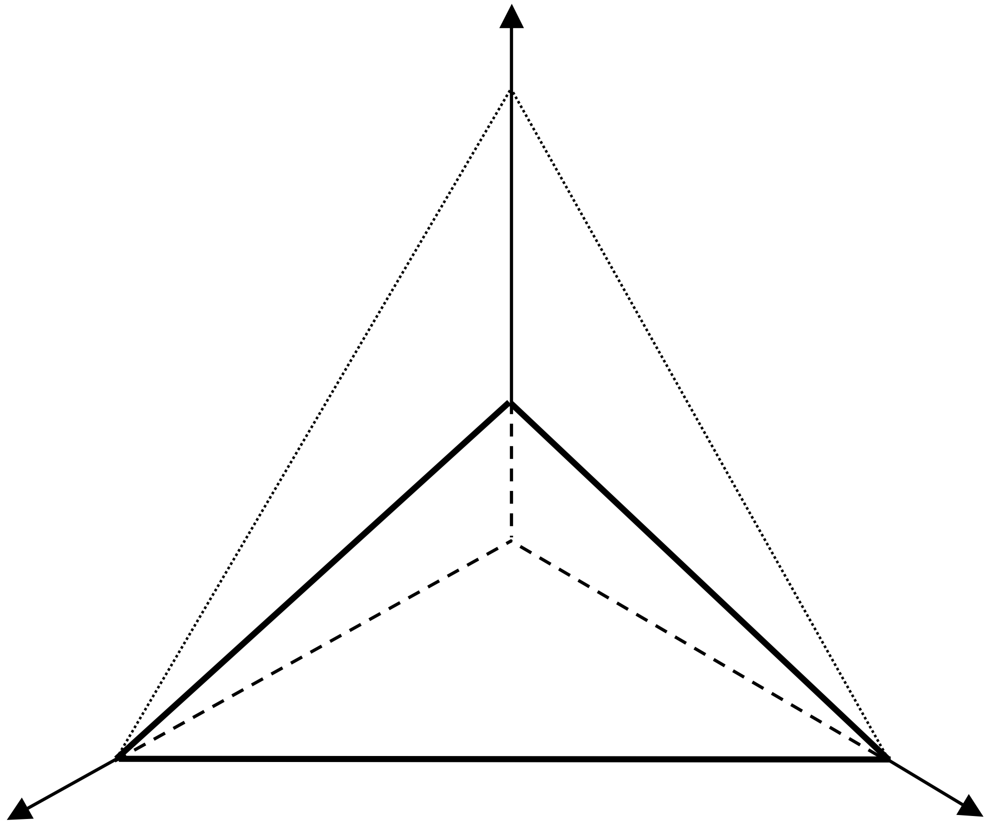
... widziany pod nowym kątem

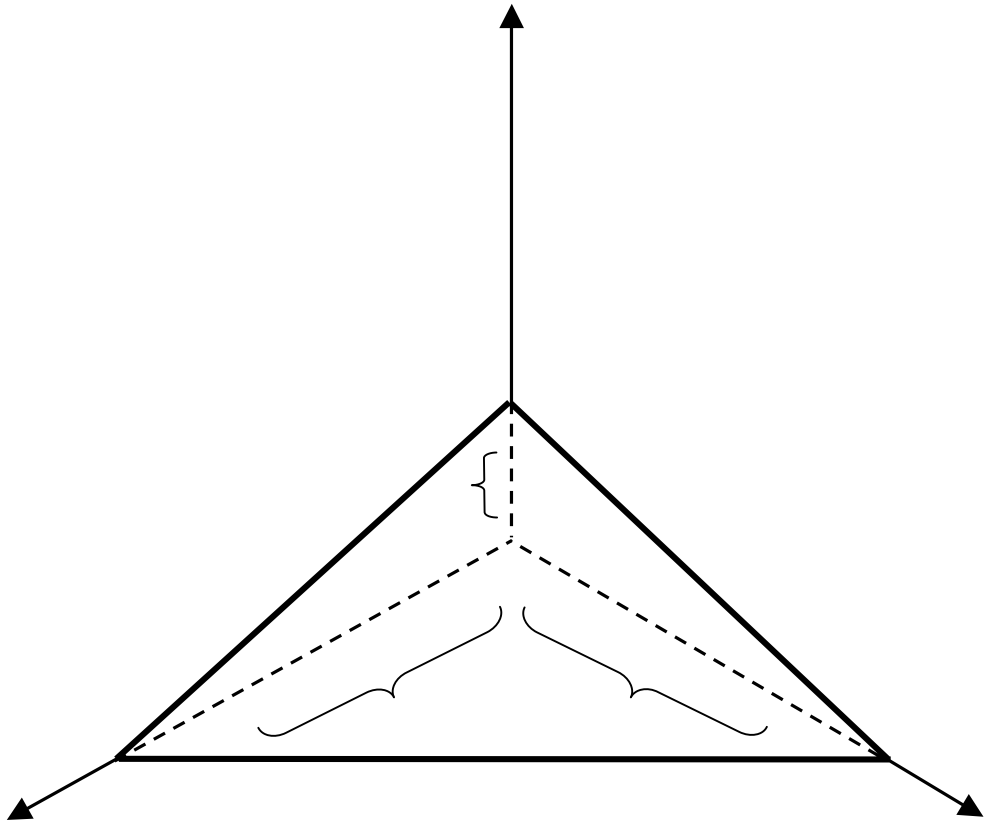


(schematycznie)

Barycentryczny układ współrzędnych

- W rezultacie otrzymujemy inny trójkąt (równoramienny zamiast równobocznego)
  - boki „lewy” i „prawy” mają długość $(30^2 + 10^2)^{1/2}$
  - bok „dolny” ma długość $(30^2 + 30^2)^{1/2}$
- Pozwala to na utworzenie nowego wykresu dwuwymiarowego
  - w tym przypadku: wykorzystującego trójkąt równoramienny



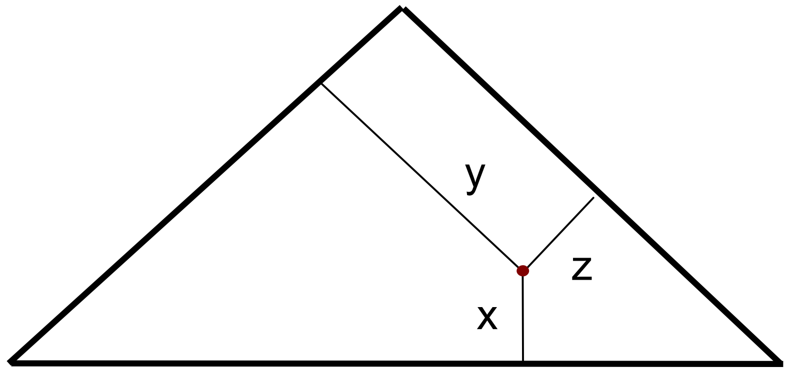


- Ewidentnie
  - zmienność zmiennej „pionowej” różni się od zmienności pozostałych dwóch zmiennych (mniejszy przedział zmienności)

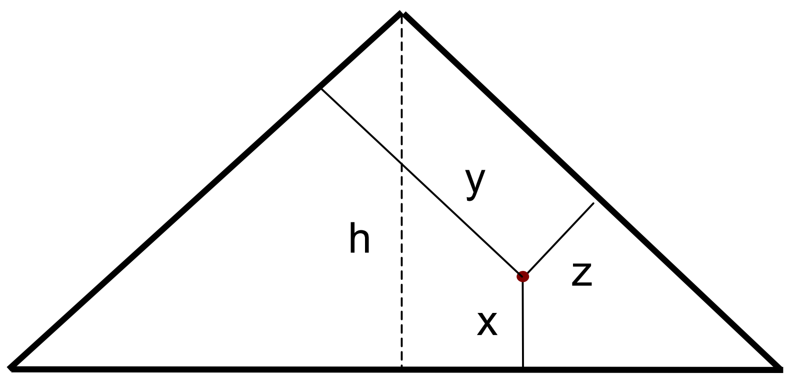
Barycentryczny układ współrzędnych

- Pytanie: czy zależność $x + y + z = h$ jest zachowana w nowym (równoramiennym, ale nie równobocznym) trójkącie?
  - inaczej: czy twierdzenie Viviani'ego uogólnia się na trójkąty równoramienne?

Barycentryczny układ współrzędnych

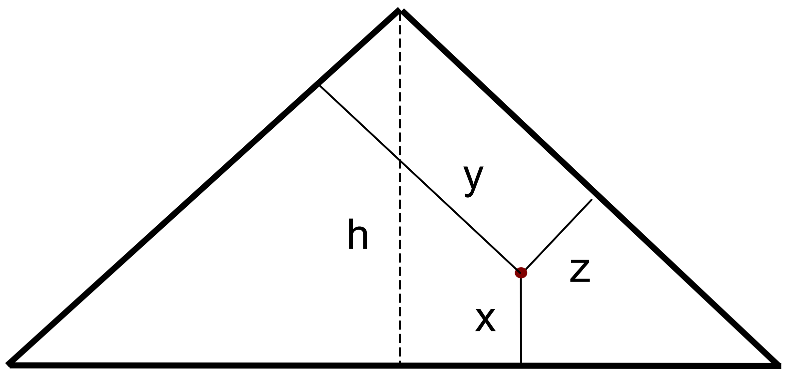


Barycentryczny układ współrzędnych



$$x + y + z = h?$$

Barycentryczny układ współrzędnych



$$x + y + z = \text{const?}$$

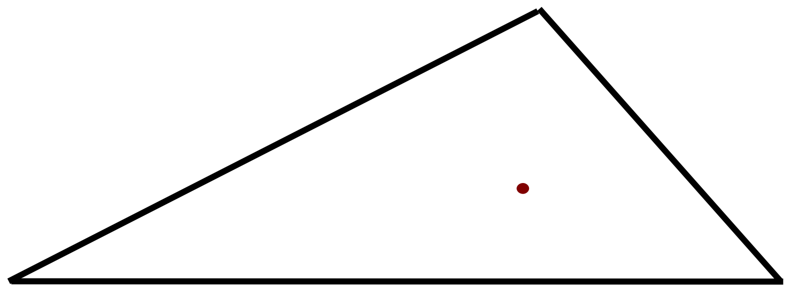
Barycentryczny układ współrzędnych

- Niestety, w przypadku trójkatów równoramiennych nie będących równobocznymi równość „$x + y + z = h$” nie zachodzi
  - trójkąt taki posiada bowiem dwie różne wysokości, $h_1 \neq h_2$, więc nawet gdy zachodzi $x + y + z = h_1$, to nie może zachodzić $x + y + z = h_2$

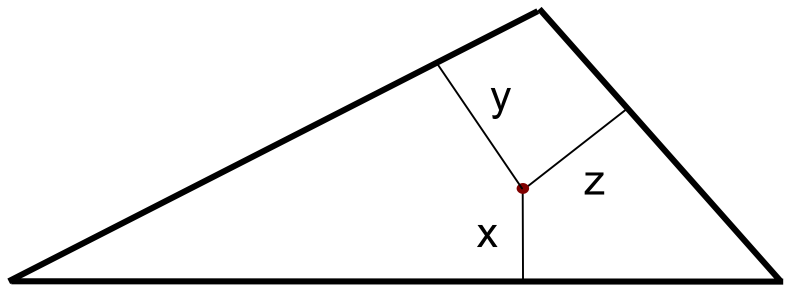
Barycentryczny układ współrzędnych

- Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej w przypadku dowolnych trójkątów, które mogą posiadać trzy (różne) wysokości: h_1, h_2 i h_3, przy czym $h_1 \neq h_2$, $h_2 \neq h_3$ i $h_3 \neq h_1$

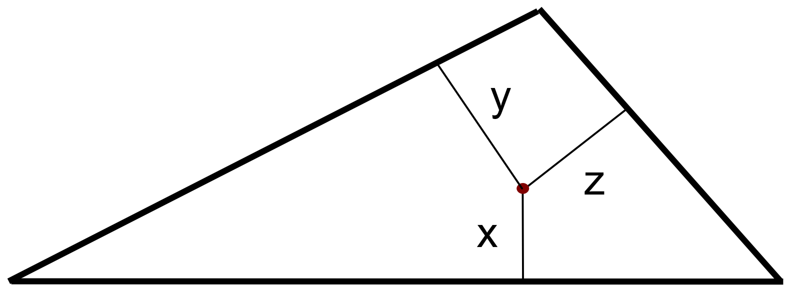
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

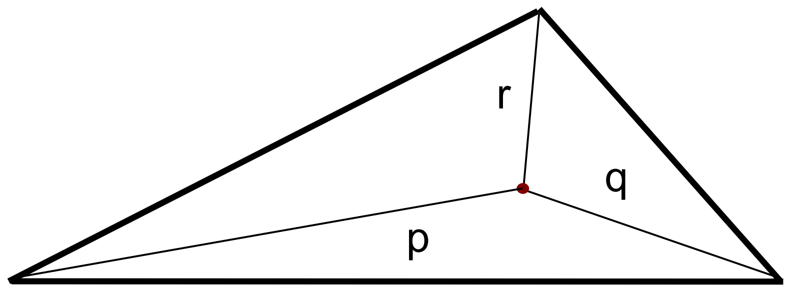


$$x + y + z = \text{const?}$$

$$xy + yz + zx = \text{const?}$$

$$xyz = \text{const?}$$

Barycentryczny układ współrzędnych



$$p + q + r = const?$$

$$pq + qr + rp = const?$$

$$pqr = const?$$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Pytanie: czy

  dla dowolnego trójkąta

  istnieje

  w miarę nieskomplikowana, i dzięki temu łatwo interpretowalna

  funkcja $f(x, y, z)$ taka, że $f(x, y, z) = const$?

Barycentryczny układ współrzędnych

- Pytanie: czy

  dla dowolnego trójkąta

  istnieje

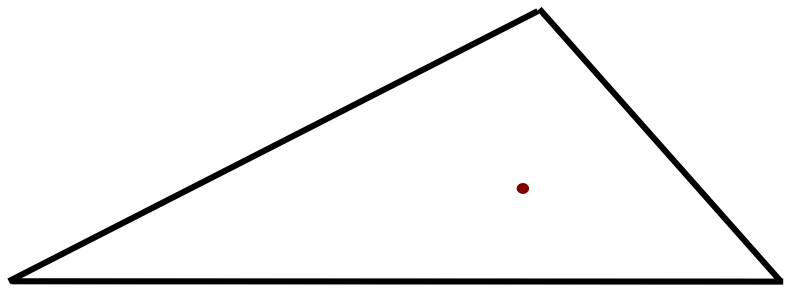
  w miarę nieskomplikowana, i dzięki temu łatwo interpretowalna

  funkcja f(x, y, z) taka, że f(x, y, z) = const?
- Odpowiedź: tak
  - i to bardzo podobna do poprzedniej!

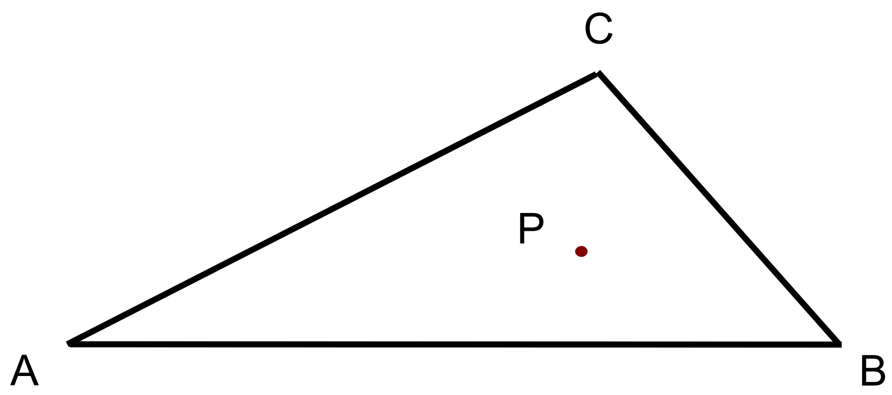
Barycentryczny układ współrzędnych

- Niech całkowite pole trójkąta wynosi T
  - procesie konstrukcji funkcji f(x, y, z) wykorzystany zostanie podział trójkąta na trzy trójkąty składowe takie, że suma ich pól jest równa polu całkowitemu T

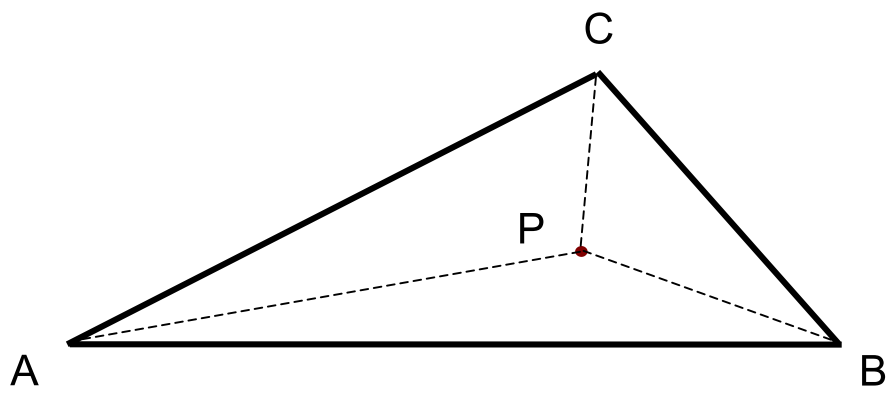
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

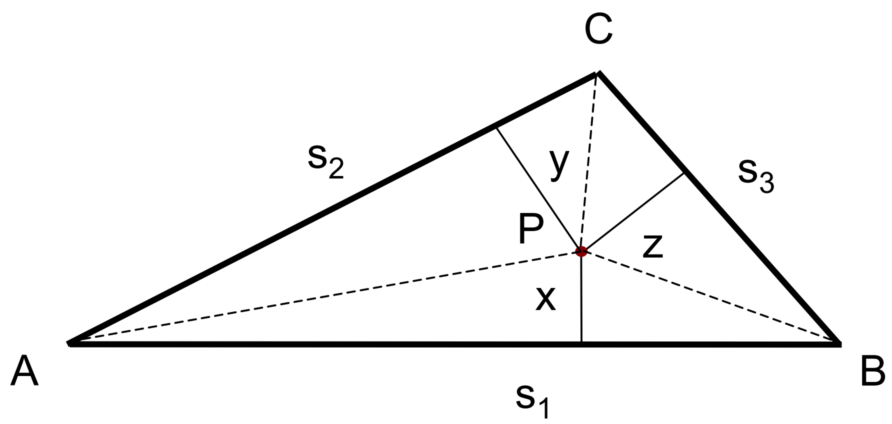


Barycentryczny układ współrzędnych



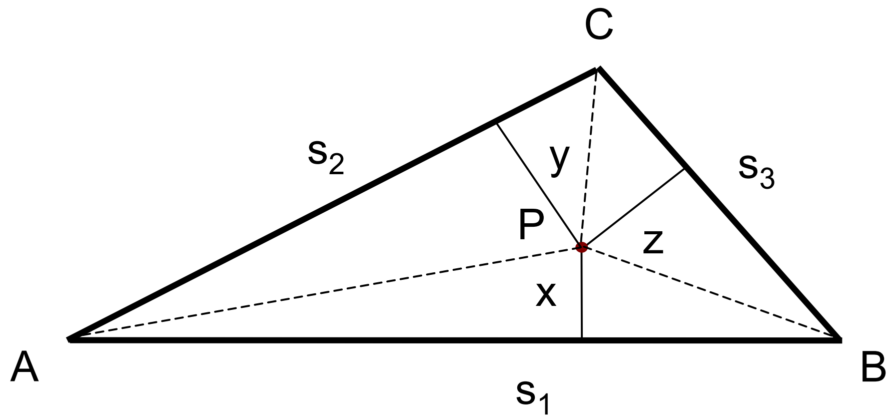
- Trójkąt ABC można podzielic na trzy trójkąty składowe
  - trójkąt ABP
  - trójkąt CAP
  - trójkąt BCP

Barycentryczny układ współrzędnych



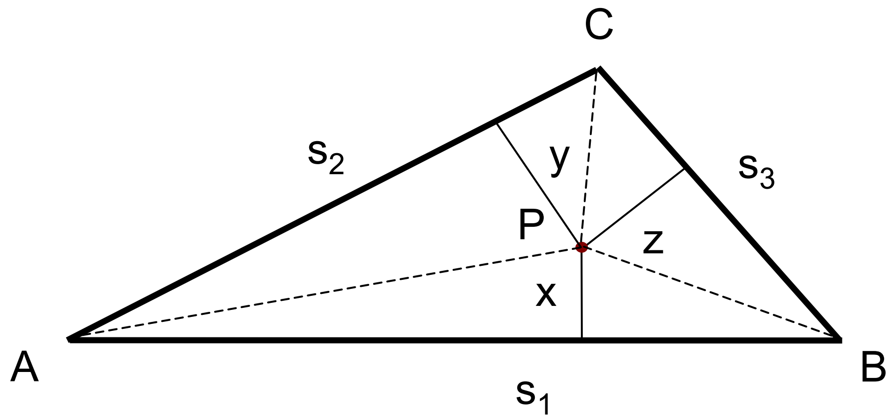
- Parametry trójkątów składowych
  - trójkąt ABP: długość podstawy s_1, długość wysokości x
  - trójkąt CAP: długość podstawy s_2, długość wysokości y
  - trójkąt BCP: długość podstawy s_3, długość wysokości z

Barycentryczny układ współrzędnych



- Pole
  - trójkąta ABP wynosi $s_1x/2$
  - trójkąta CAP wynosi $s_2y/2$
  - trójkąta BCP wynosi $s_3z/2$

Barycentryczny układ współrzędnych

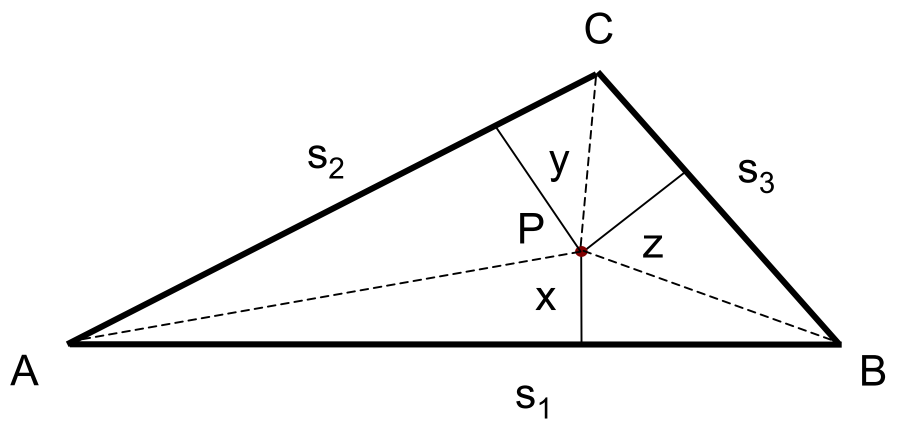


- Wtedy

  $s_1x/2 + s_2y/2 + s_3z/2 = T$

  $s_1x + s_2y + s_3z = 2T$

Barycentryczny układ współrzędnych



- Czyli

  $s_1x + s_2y + s_3z = \text{const}$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Poszukiwaną funkcją jest $f(x, y, z) = s_1x + s_2y + s_3z$
  - gdzie $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ i $s_3 > 0$ są stałymi
    - spełniają więc przyjęte wcześniej założenie $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$
- Interpretacja wartości x, y i z: pola powierzchni trójkątów
  - a w przypadku, gdy ABC jest równoboczny, pola oraz wysokości
- Interpretacja „polowa” uzasadnia angielską nazwę „areal coordinate system”

Barycentryczny układ współrzędnych

- Oczywiście dla trójkąta równobocznego o boku s zachodzi $s_1 = s$, $s_2 = s$ oraz $s_3 = s$, i wtedy

  $s_1x + s_2y + s_3z = 2T$

  $sx + sy + sz = 2T$

  $s(x + y + z) = 2T$

  $x + y + z = 2T/s$

- Ponieważ (dla każdego trójkąta równobocznego) $T = sh/2$ (s długość boku, h długość wysokości), w powyższym przypadku mamy

  $x + y + z = 2T/s$

  $x + y + z = 2(sh/2)/s$

  $x + y + z = h$

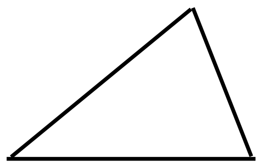
Barycentryczny układ współrzędnych

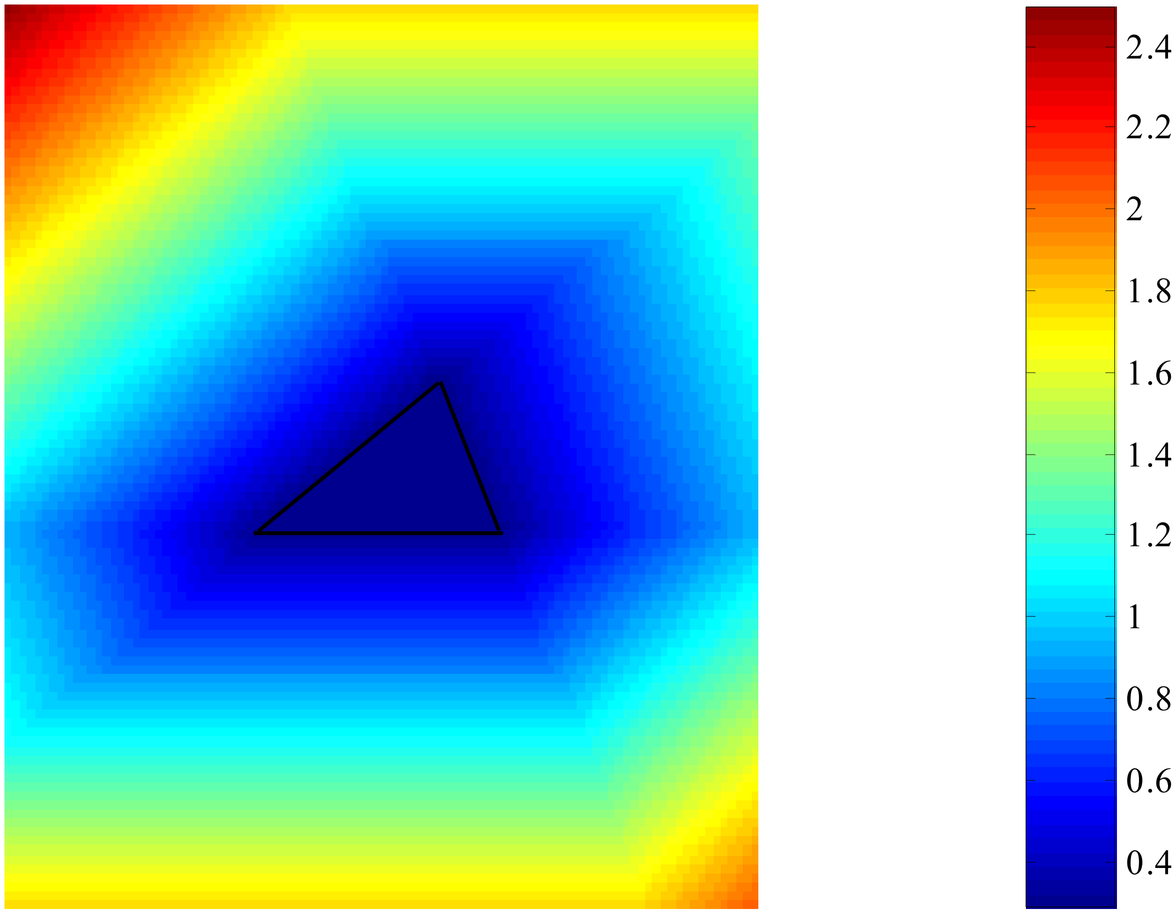
- Podsumowując: współczynniki s_1, s_2 oraz s_3 funkcji $f(x, y, z) = s_1x + s_2y + s_3z$

  pozwalaja na wyrażanie różnych form zmienności zmiennych

Barycentryczny układ współrzędnych

- Ilustracja „obliczeniowa”? (wizualizacja)





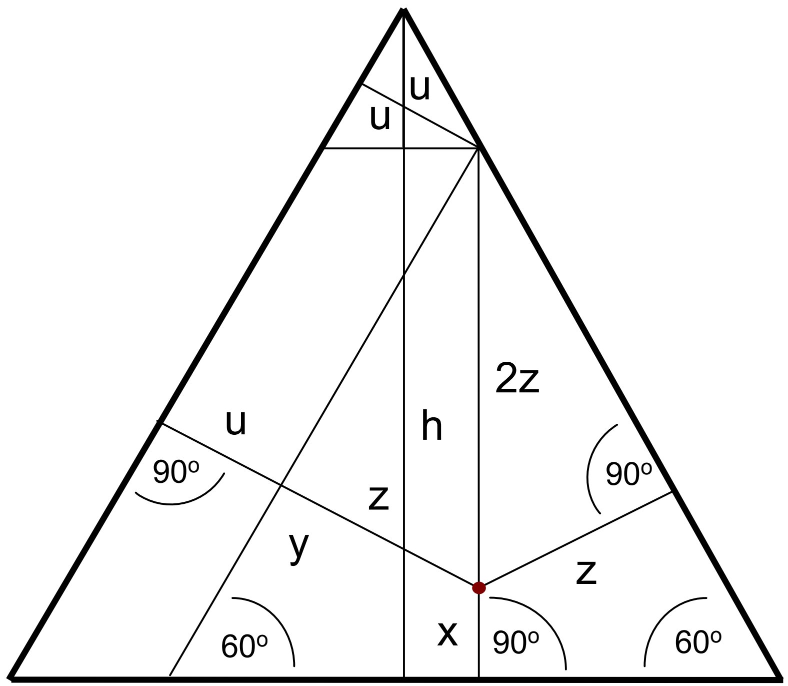
- Suma odległości każdego punktu od trzech boków trójkata wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz trójkata mają jednakowy kolor

...

Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia twierdzenia Viviani’ego
  - odległości

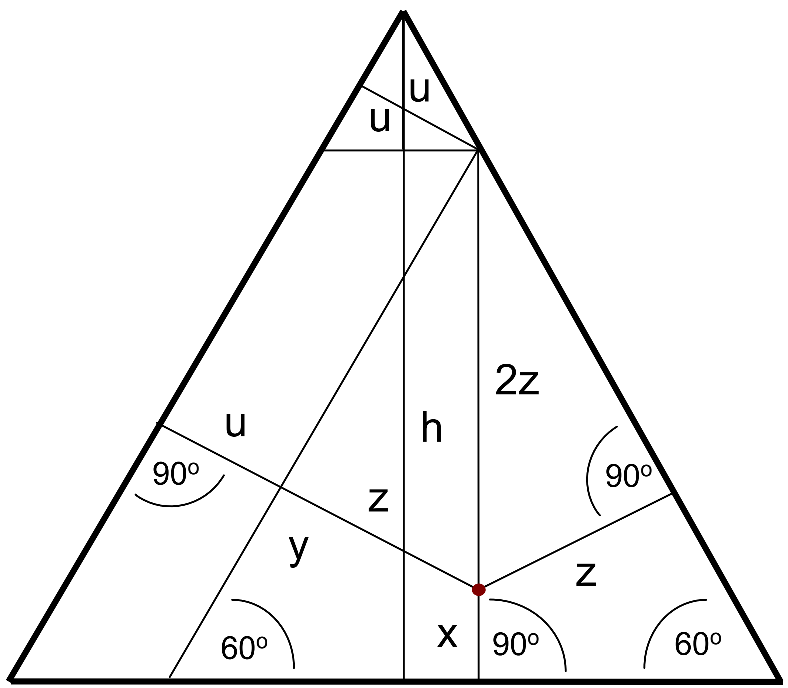
Barycentryczny układ współrzędnych



$$x + y + z = h$$

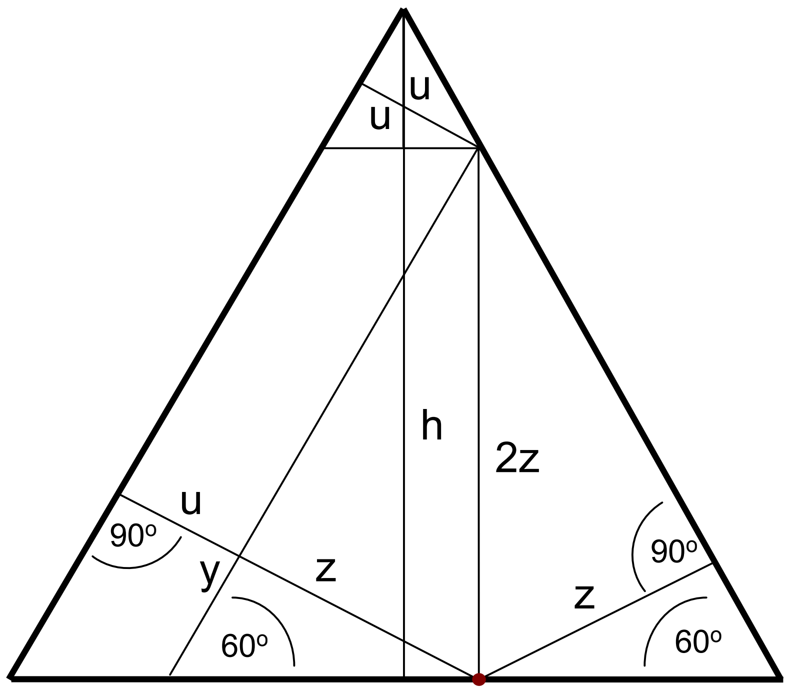
uwaga! (kolejność oznaczeń)

Barycentryczny układ współrzędnych



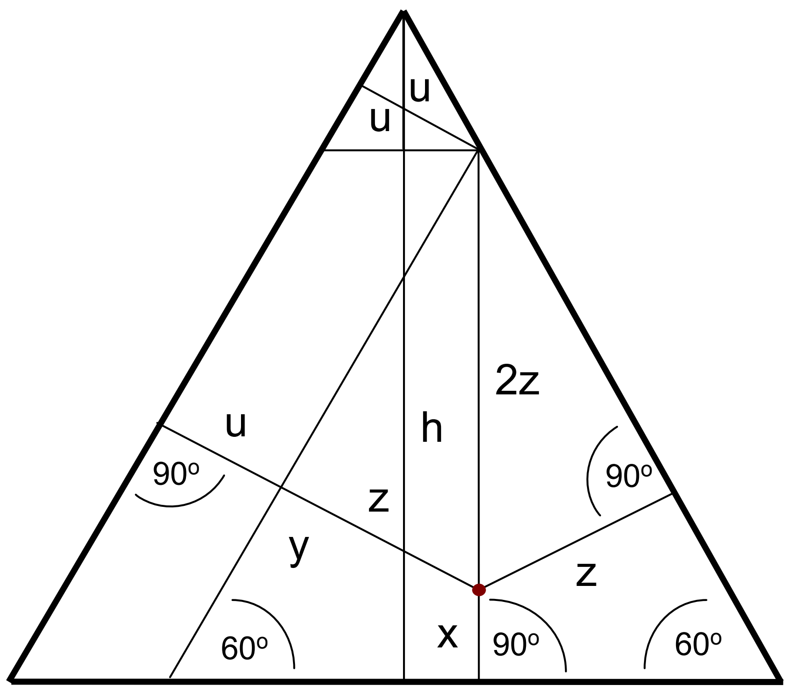
$$x + y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



$$x + y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



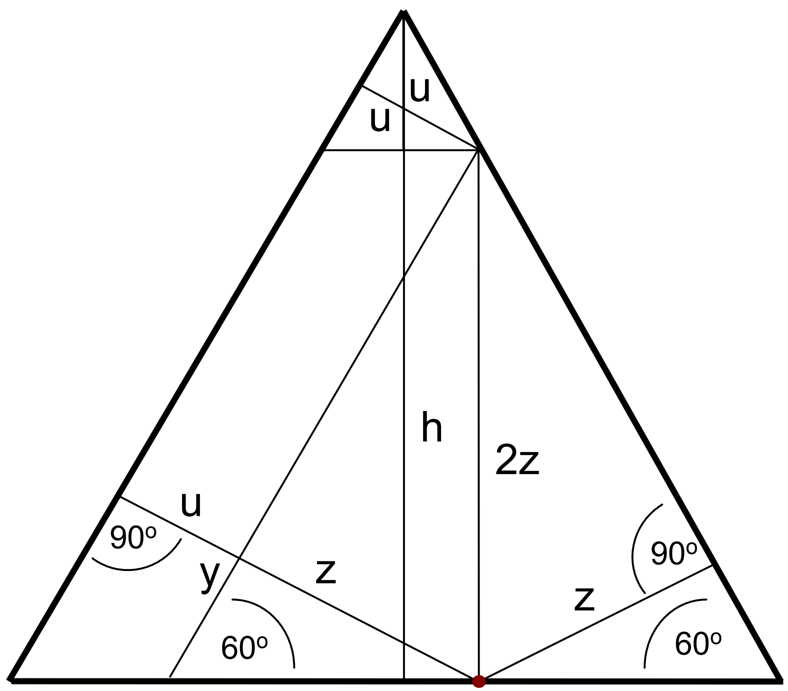
$$x + 2z + u = h$$

$$x + z + z + u = h$$

$$(y - u = z)$$

$$x + y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



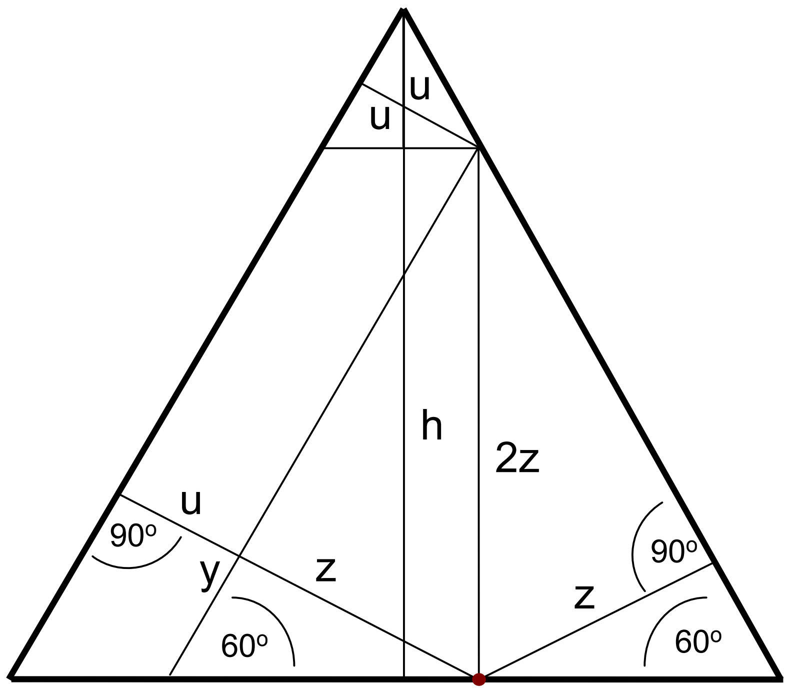
$$0 + 2z + u = h$$

$$0 + z + z + u = h$$

$$(y - u = z)$$

$$0 + y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



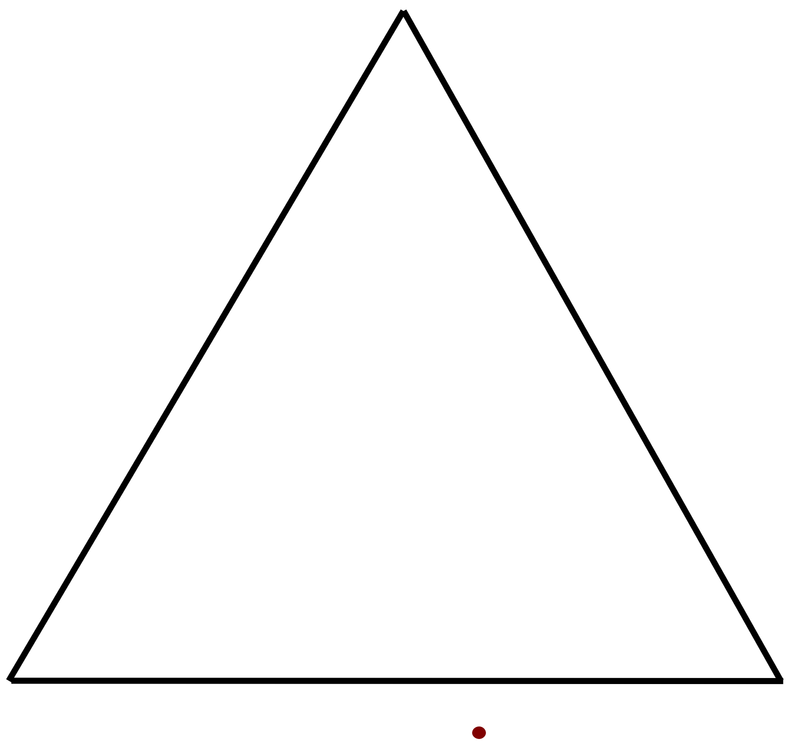
$$2z + u = h$$

$$z + z + u = h$$

$$(y - u = z)$$

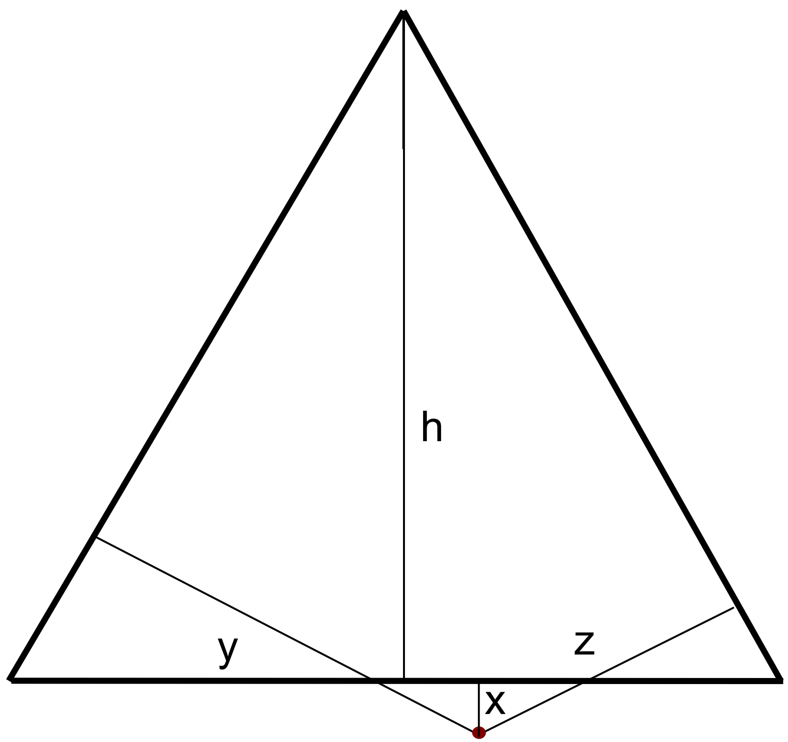
$$y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



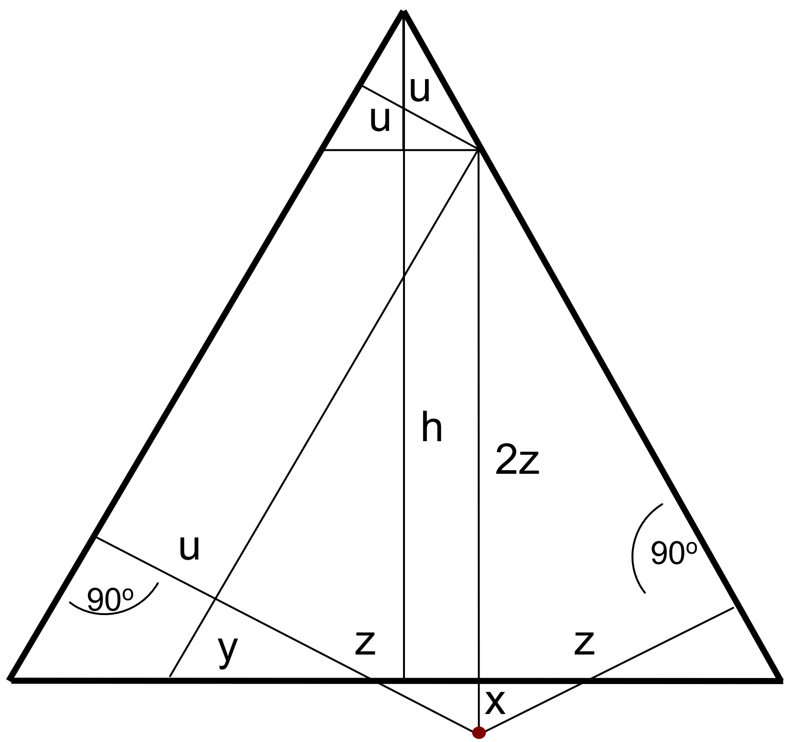
???

Barycentryczny układ współrzędnych

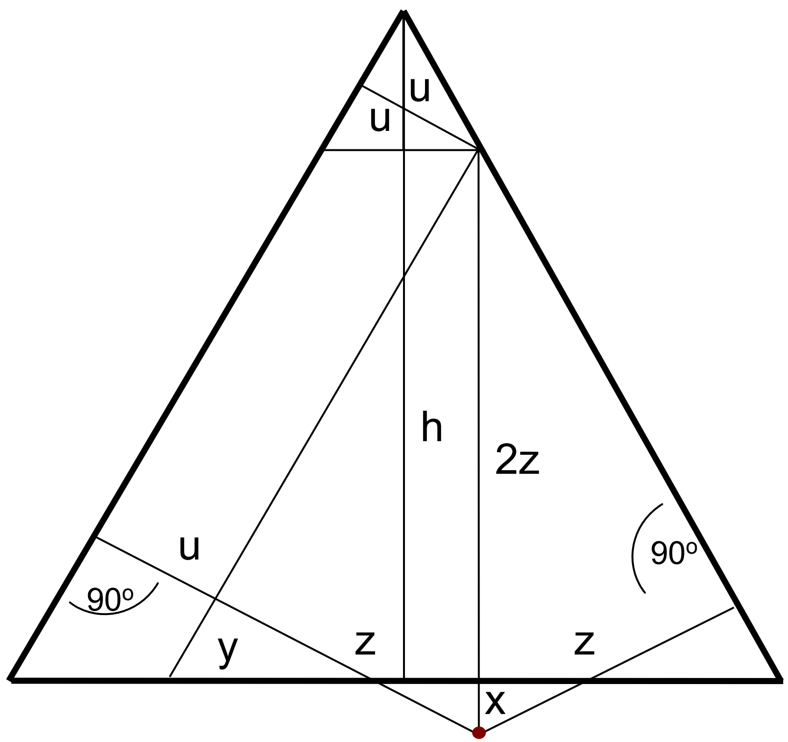


$$x + y + z = h?$$

Barycentryczny układ współrzędnych

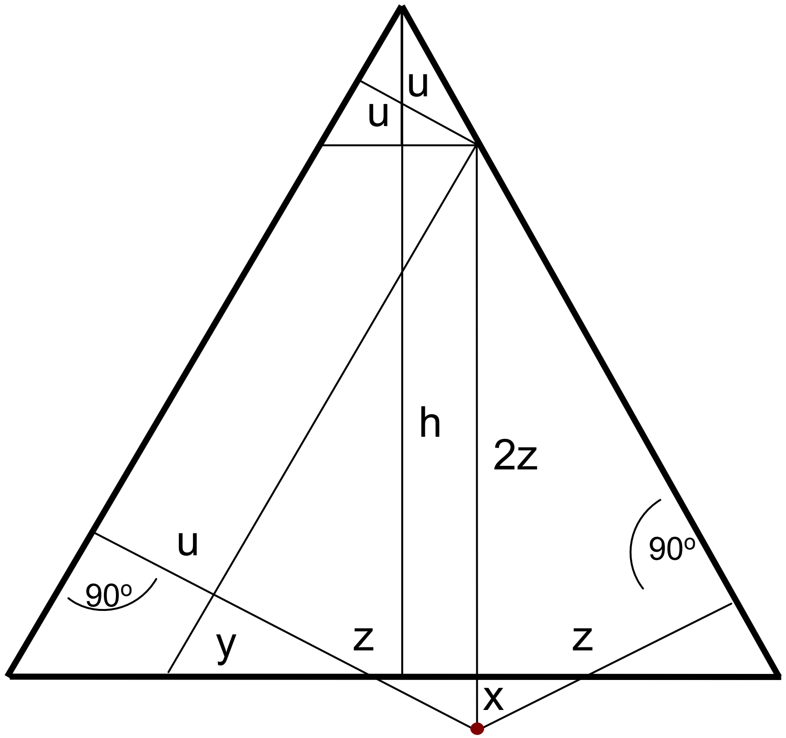


Barycentryczny układ współrzędnych



$$2z + u = h + x$$

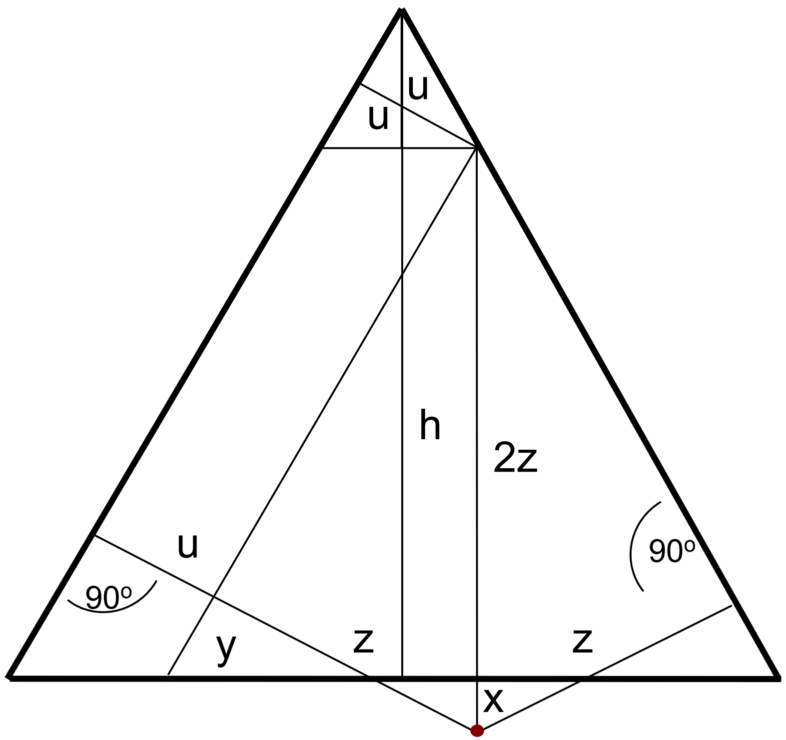
Barycentryczny układ współrzędnych



$$2z + u = h + x$$

$$z + z + u = h + x$$

Barycentryczny układ współrzędnych

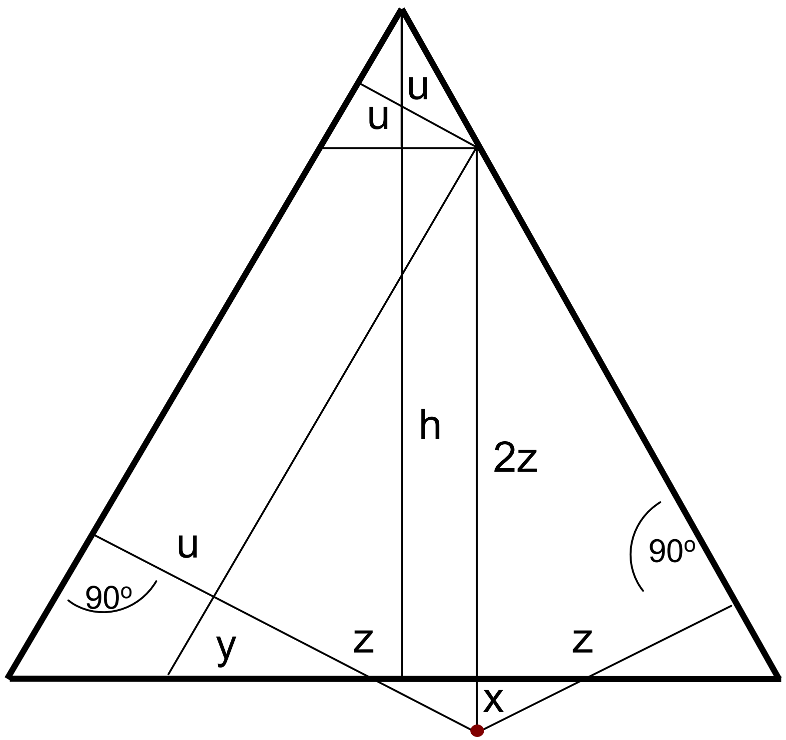


$$2z + u = h + x$$

$$z + z + u = h + x$$

$$(y - u = z)$$

Barycentryczny układ współrzędnych



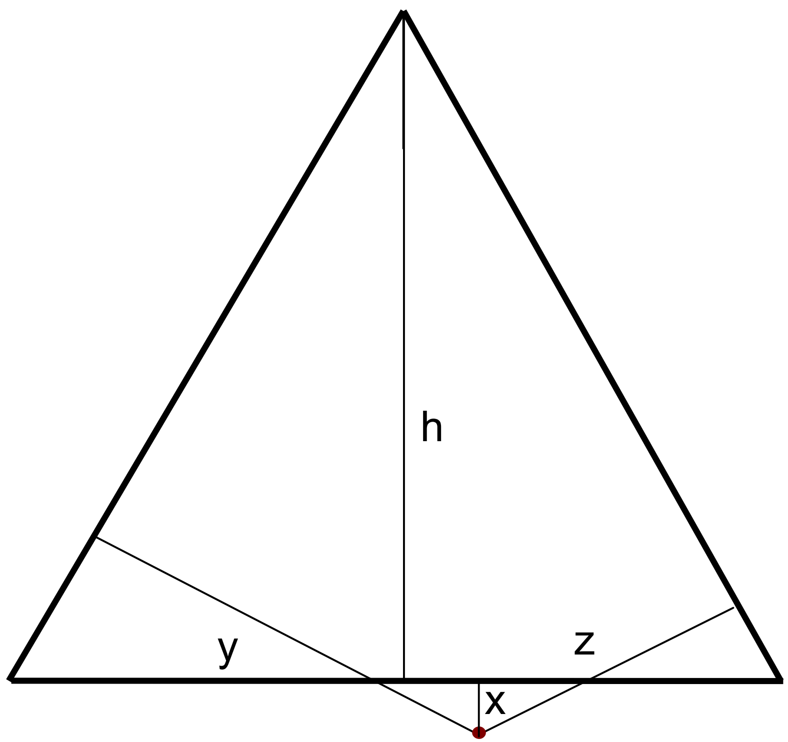
$$2z + u = h + x$$

$$z + z + u = h + x$$

$$(y - u = z)$$

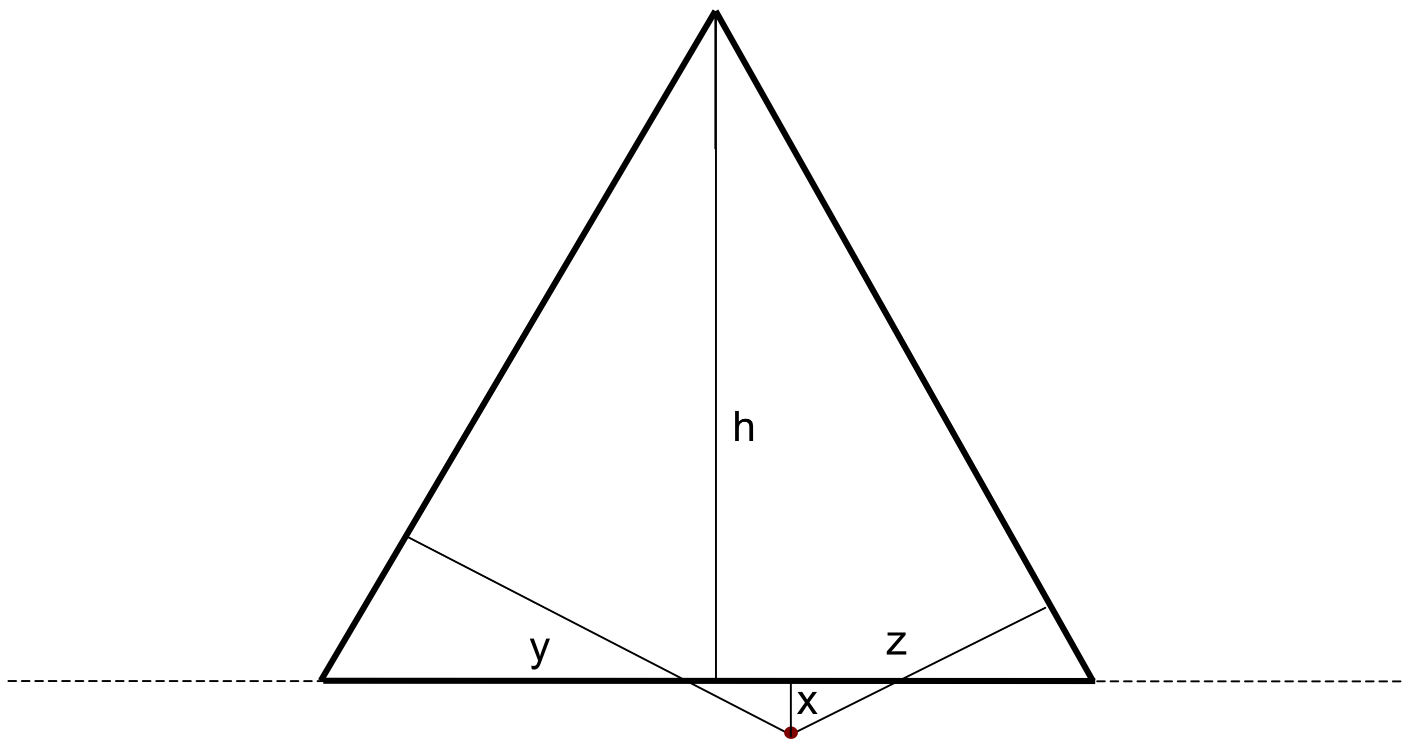
$$y + z = h + x$$

Barycentryczny układ współrzędnych



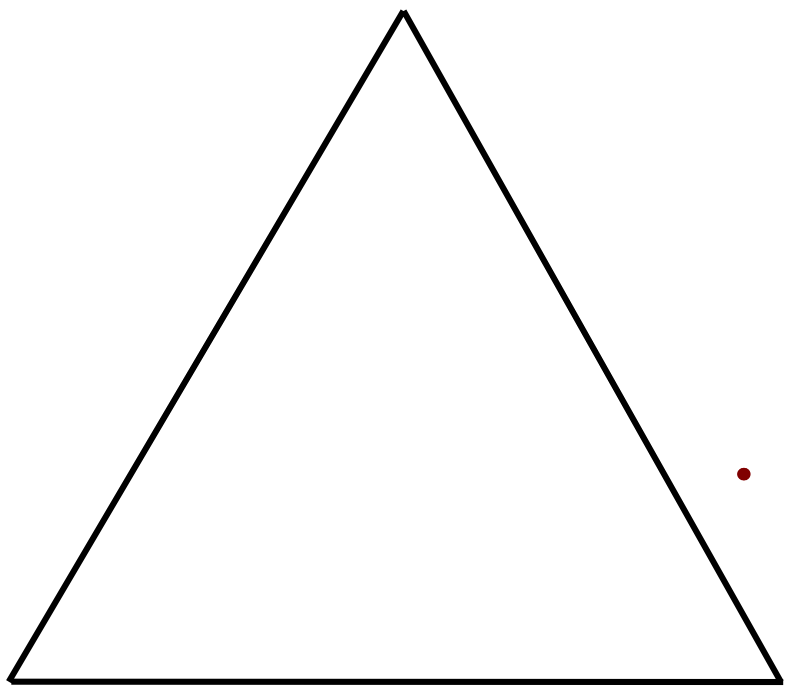
$$-x + y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



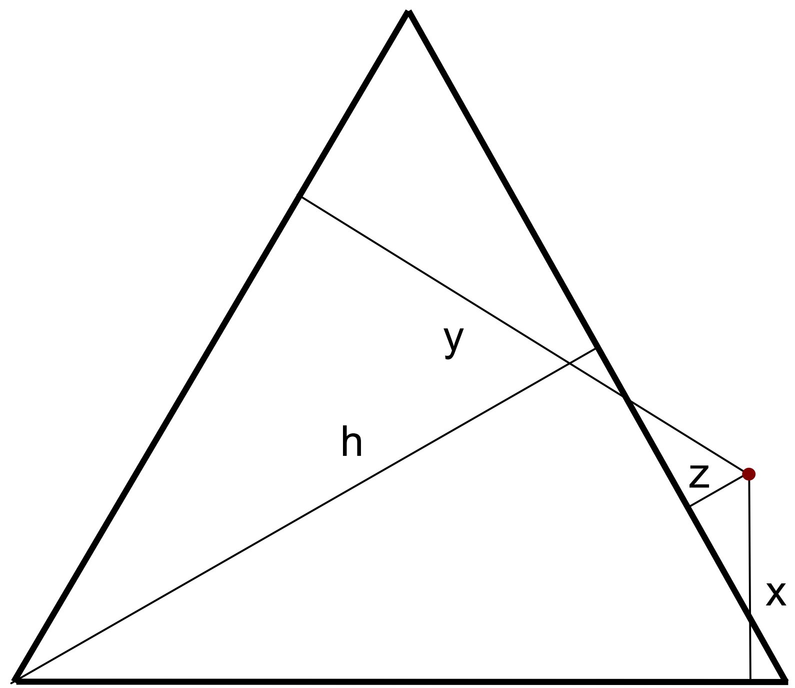
$$-x + y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



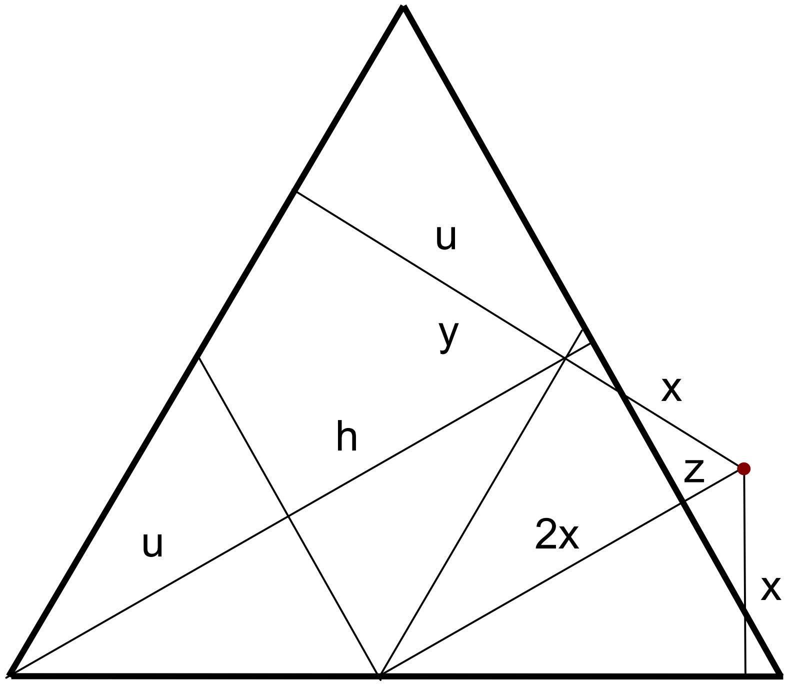
???

Barycentryczny układ współrzędnych

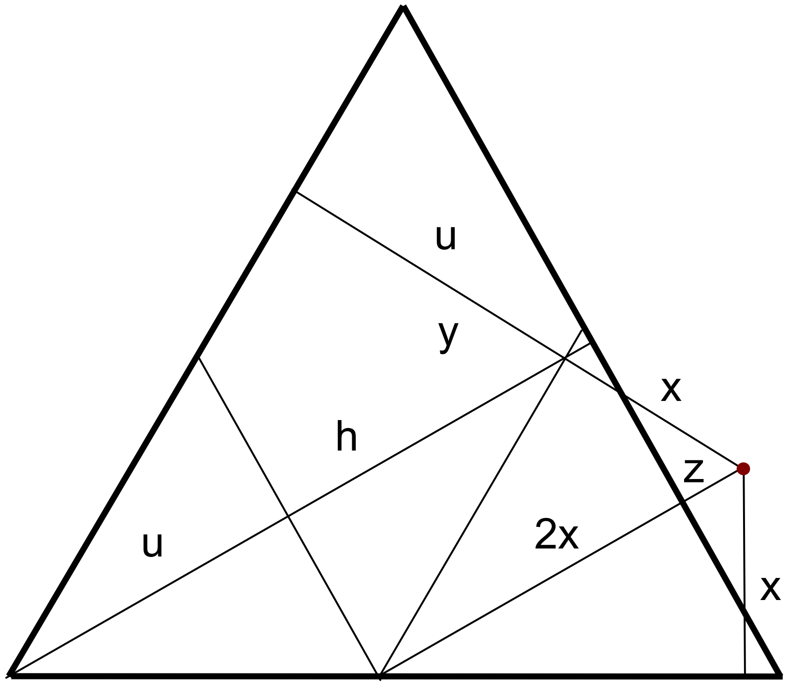


$x + y - z = h?$

Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



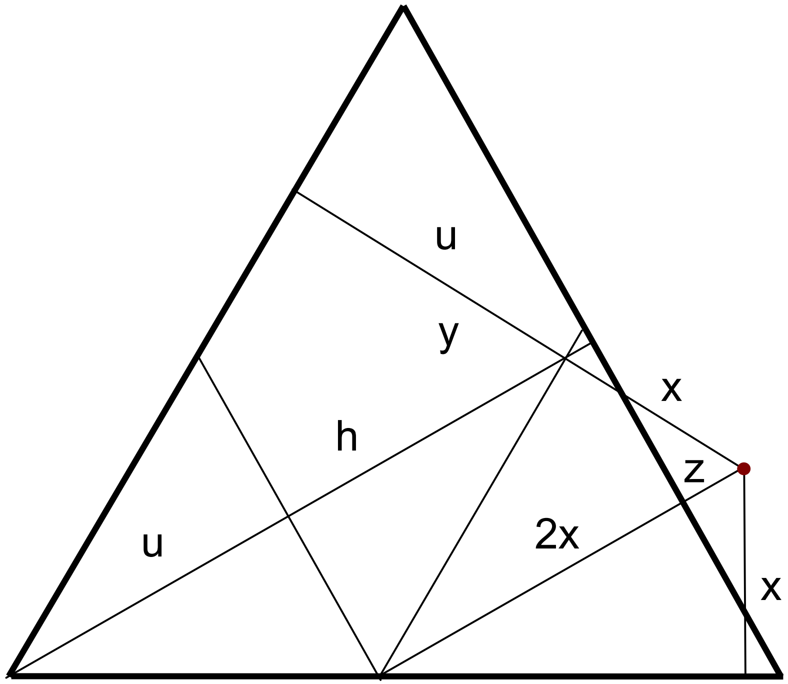
$$2x + u = h + z$$

$$x + x + u = h + z$$

$$(y - u = x)$$

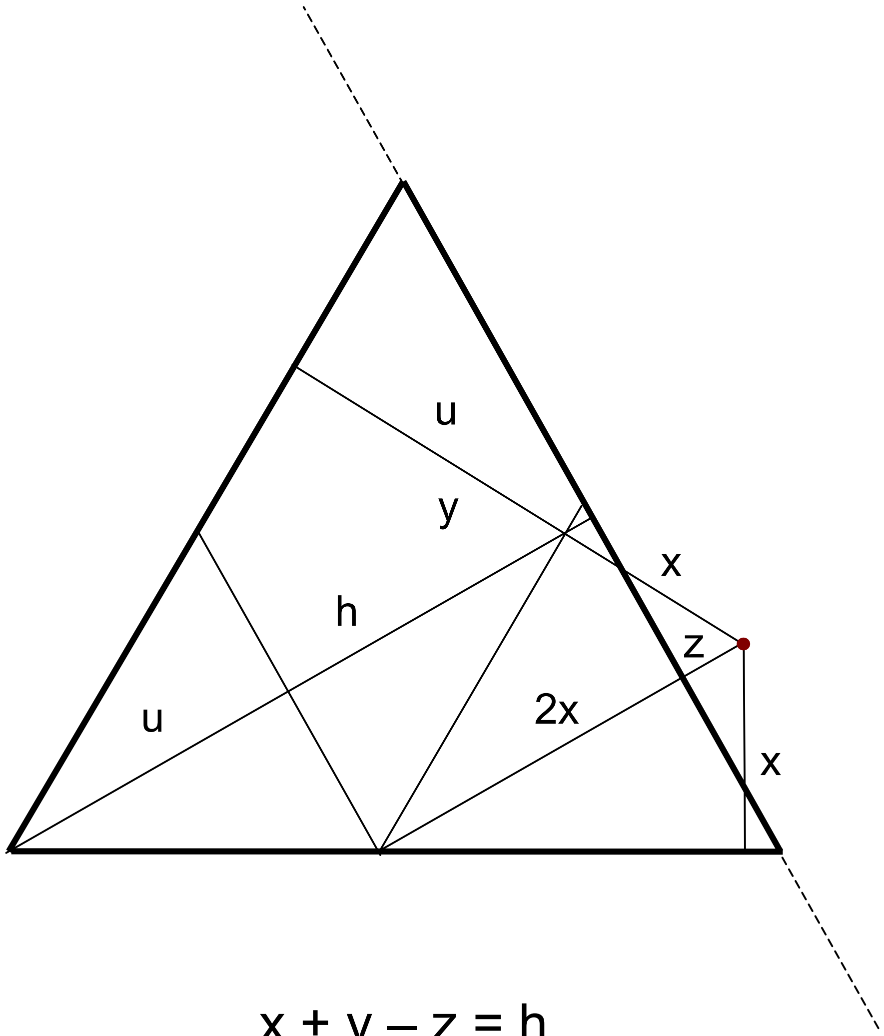
$$y + x = h + z$$

Barycentryczny układ współrzędnych



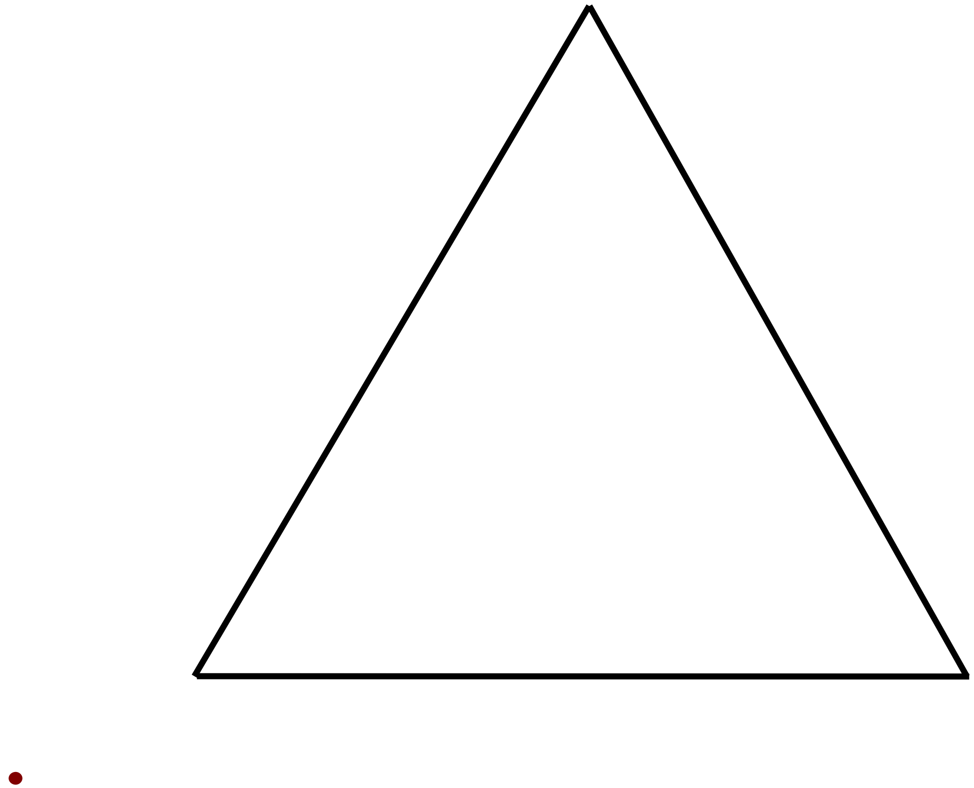
$$x + y - z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych



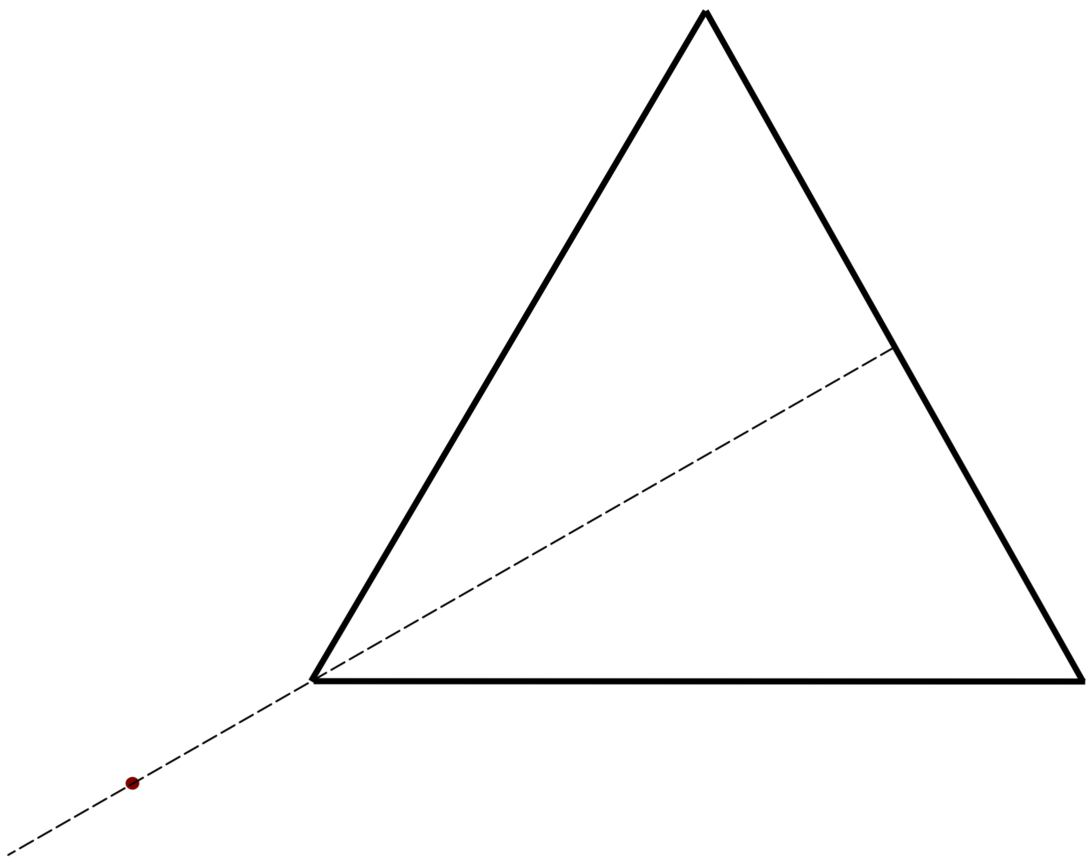
$$x + y - z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych

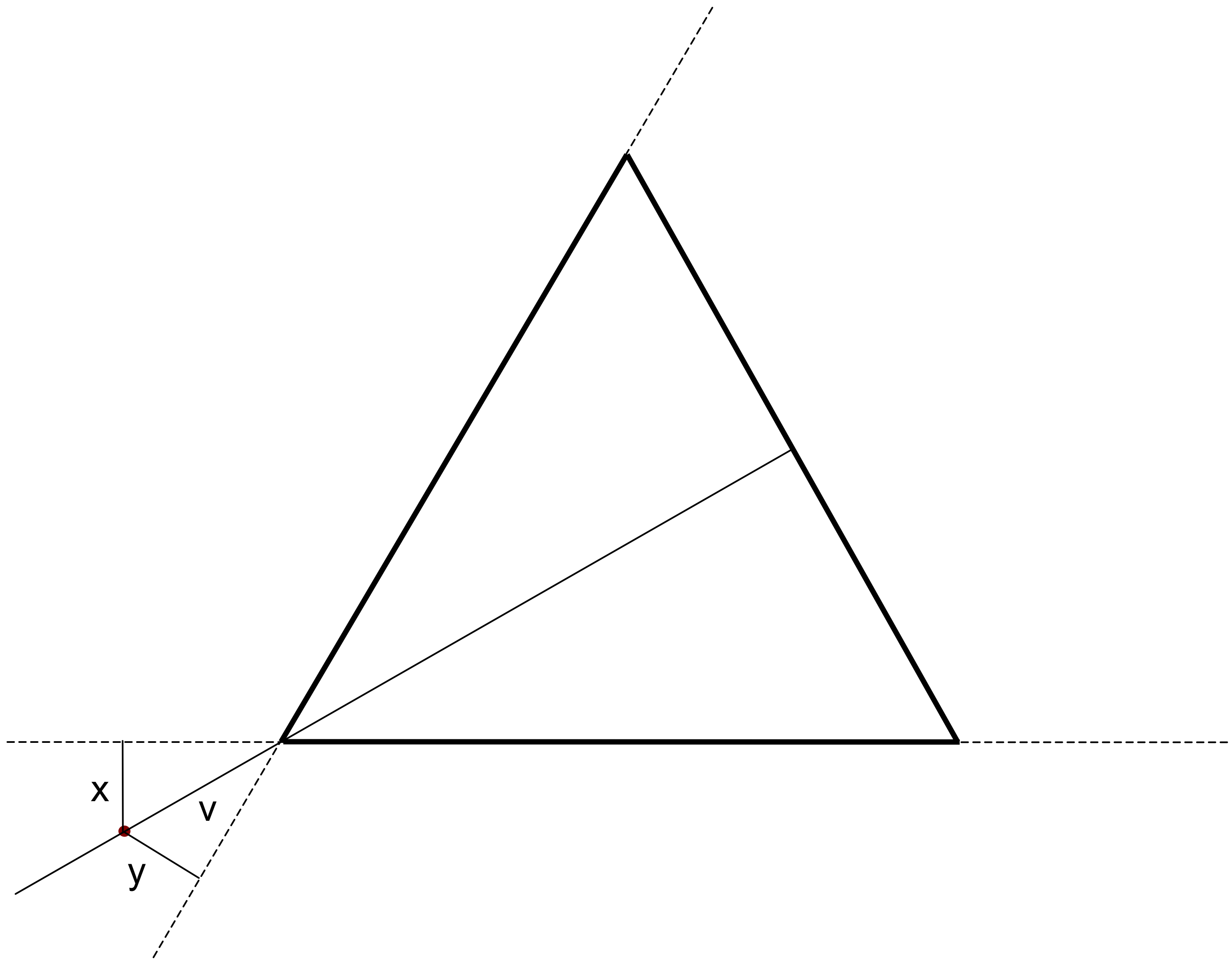


???

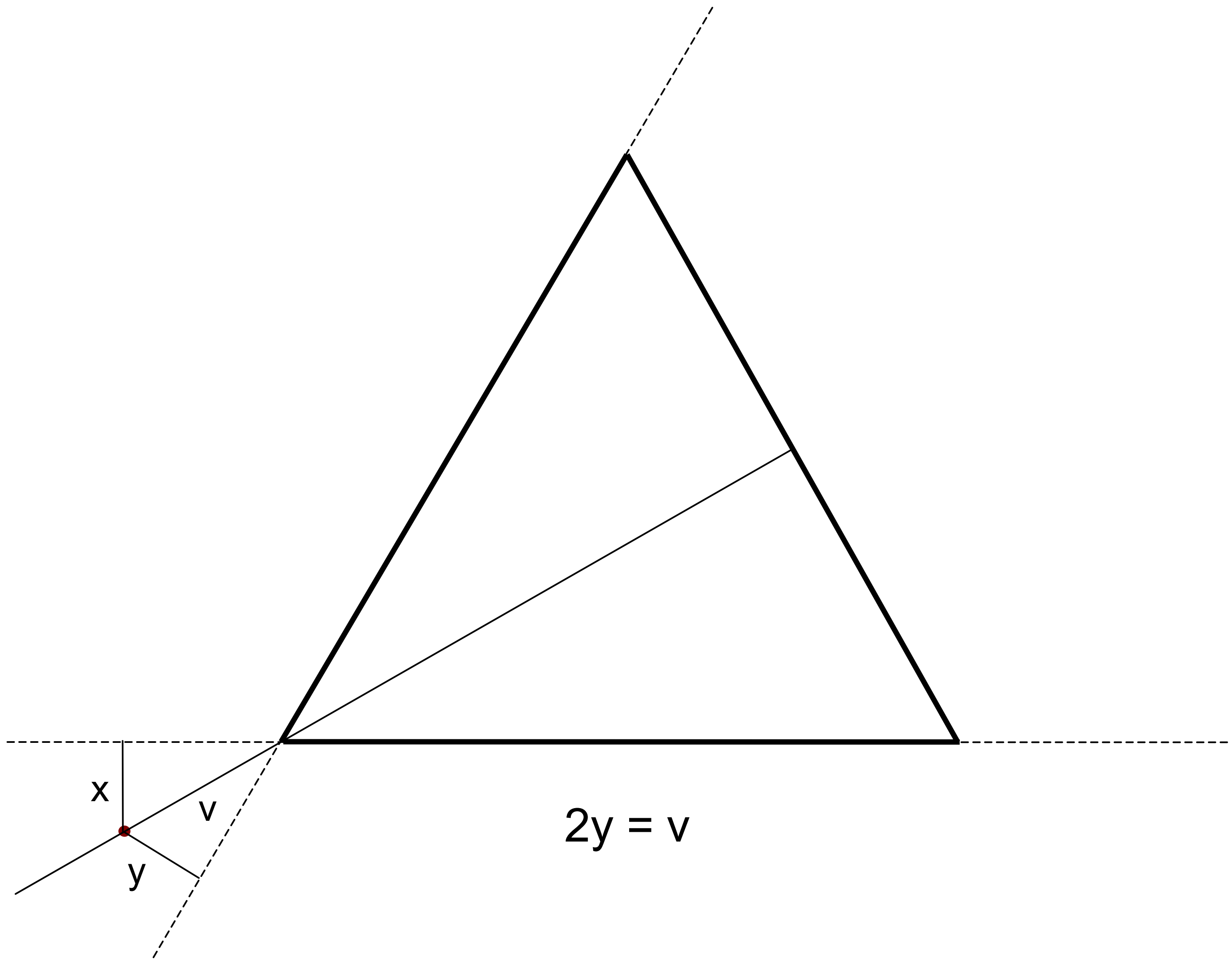
Barycentryczny układ współrzędnych



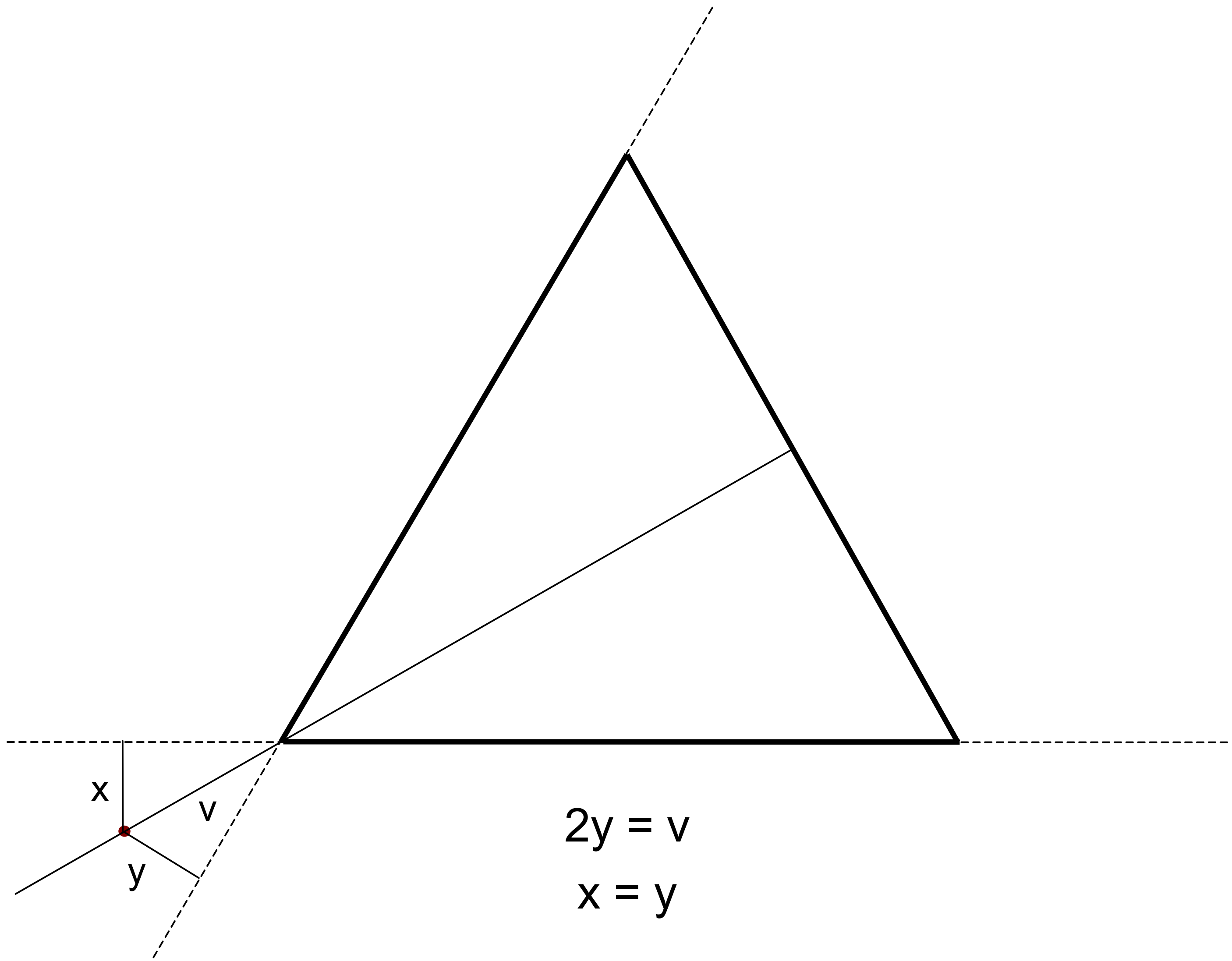
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



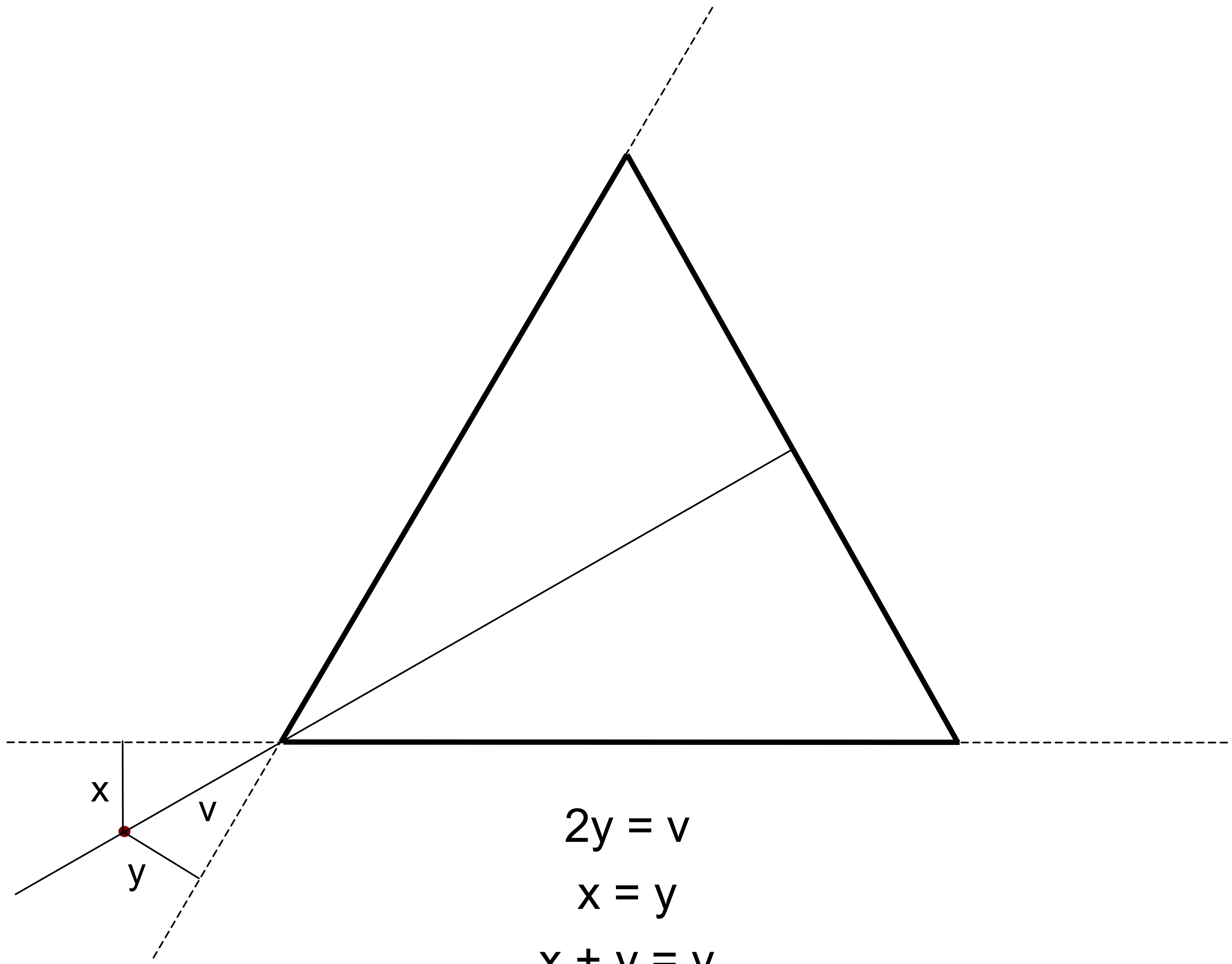
Barycentryczny układ współrzędnych



$2y = v$

$x = y$

Barycentryczny układ współrzędnych

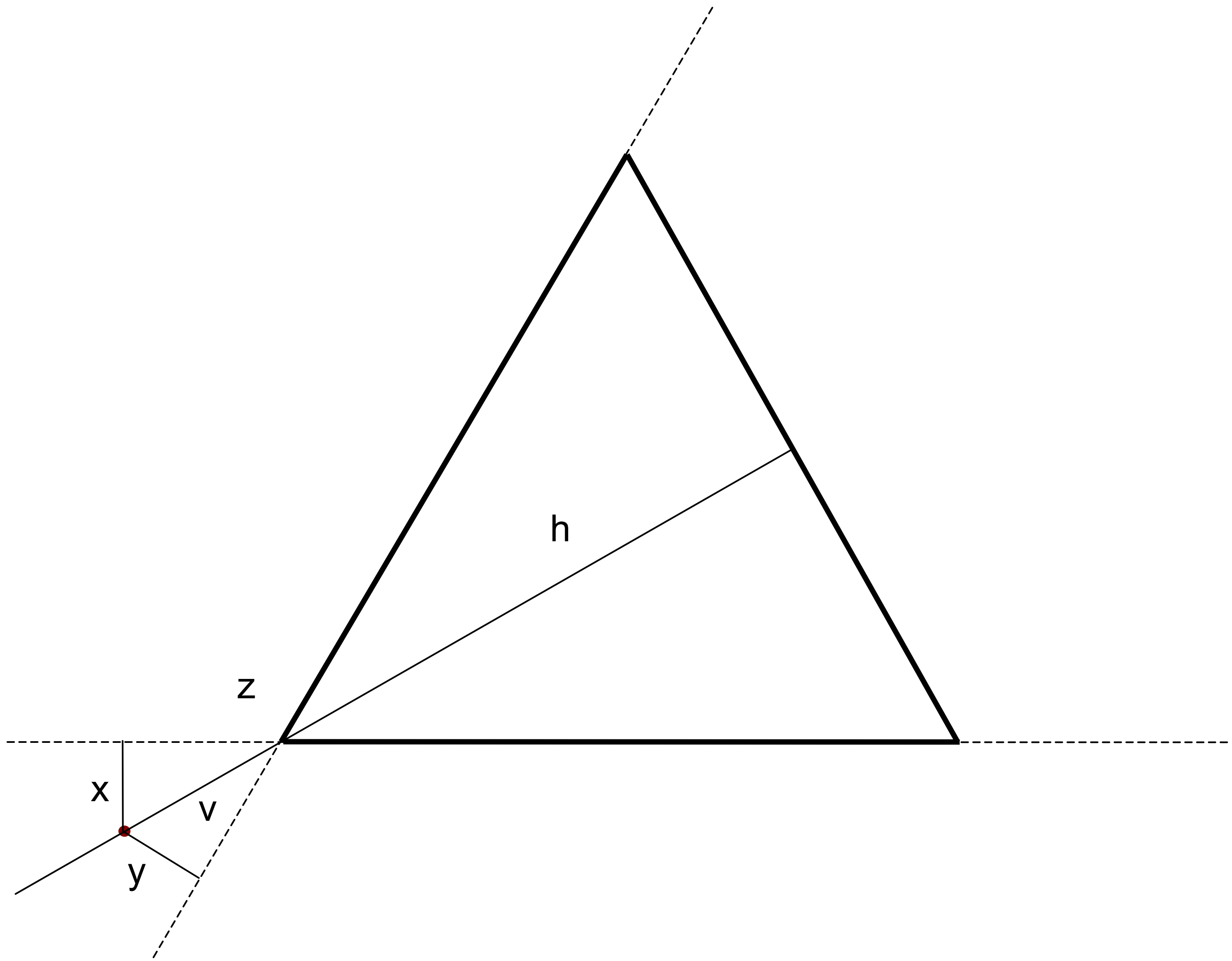


$$2y = v$$

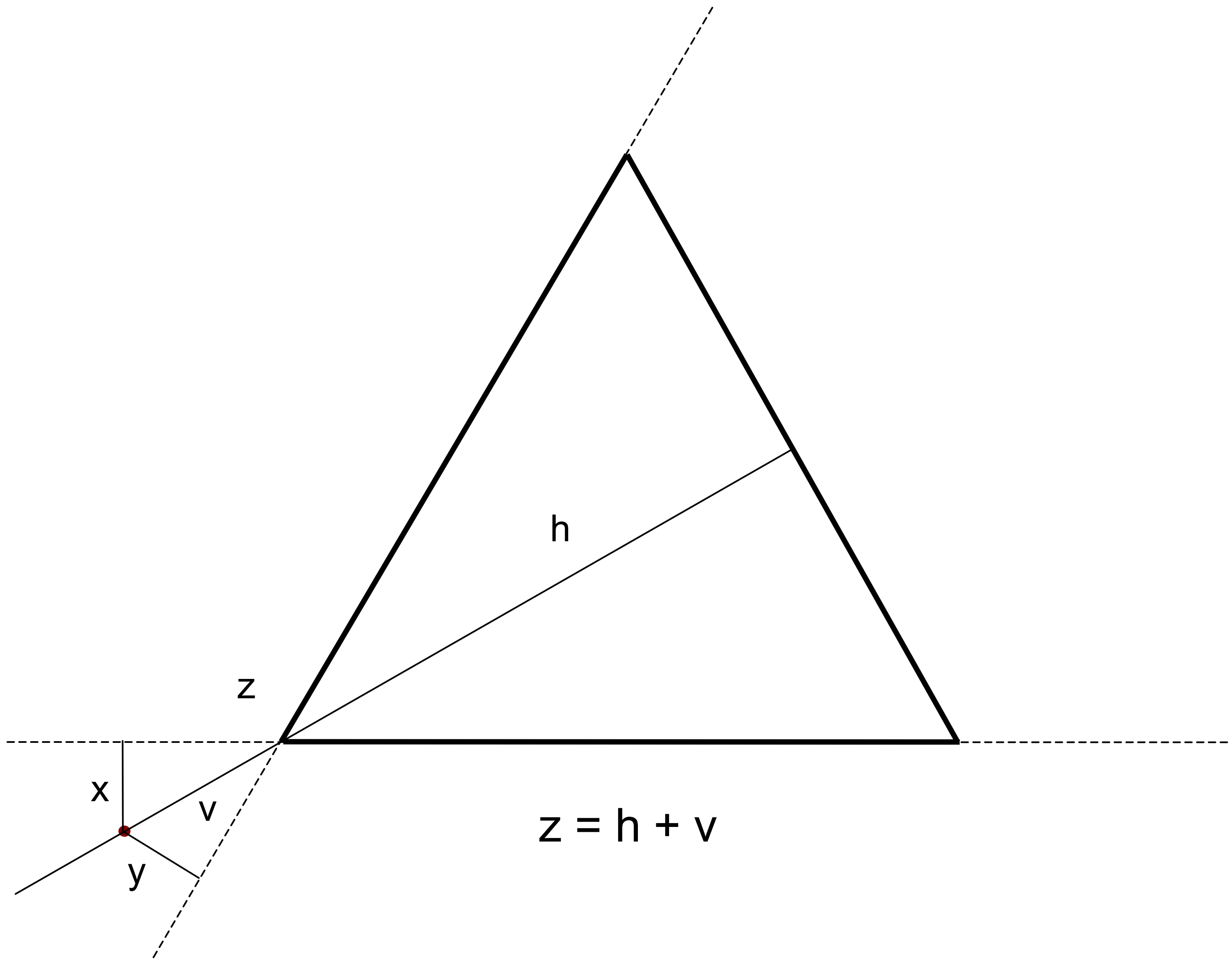
$$x = y$$

$$x + y = v$$

Barycentryczny układ współrzędnych

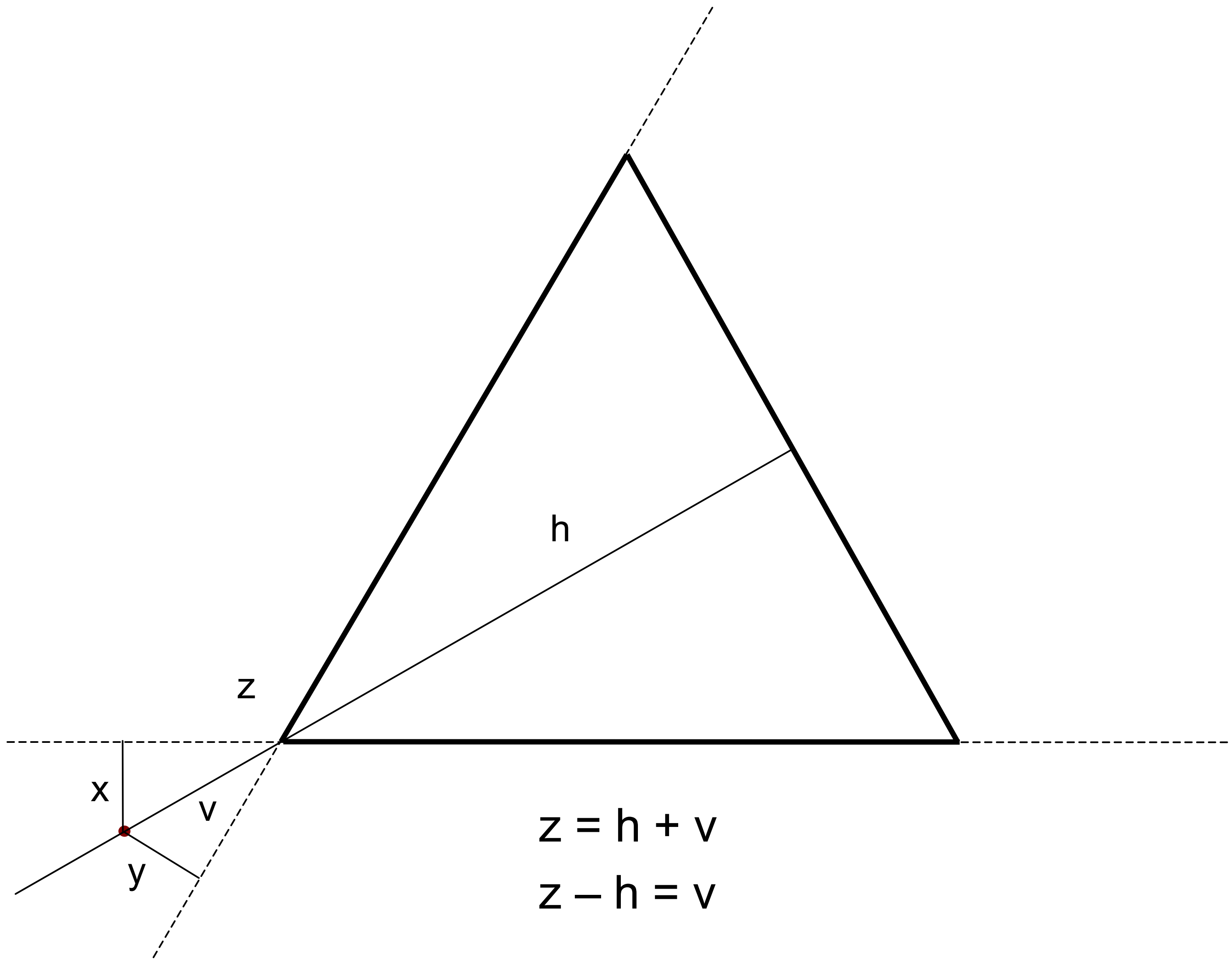


Barycentryczny układ współrzędnych



$$z = h + v$$

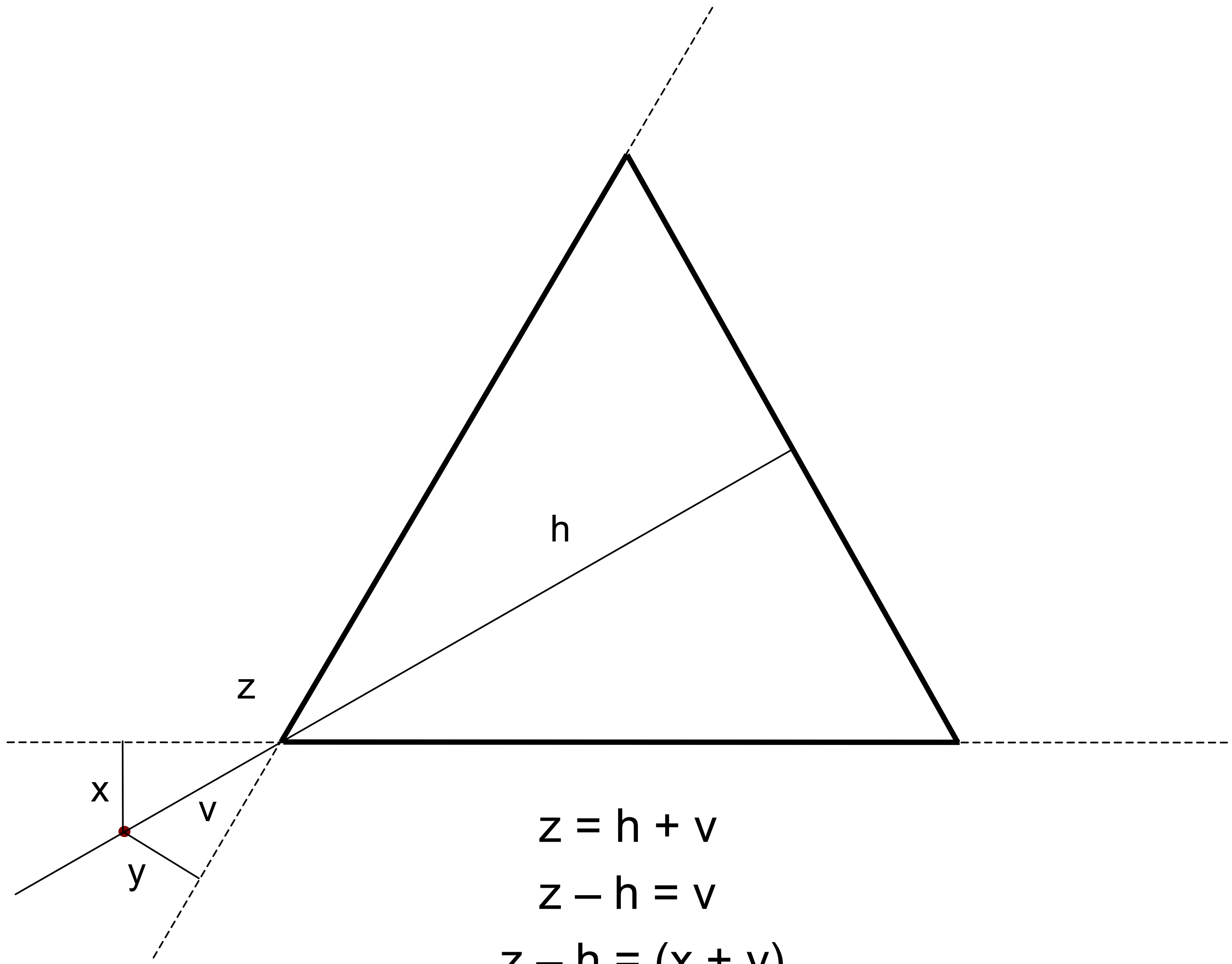
Barycentryczny układ współrzędnych



$z = h + v$

$z - h = v$

Barycentryczny układ współrzędnych

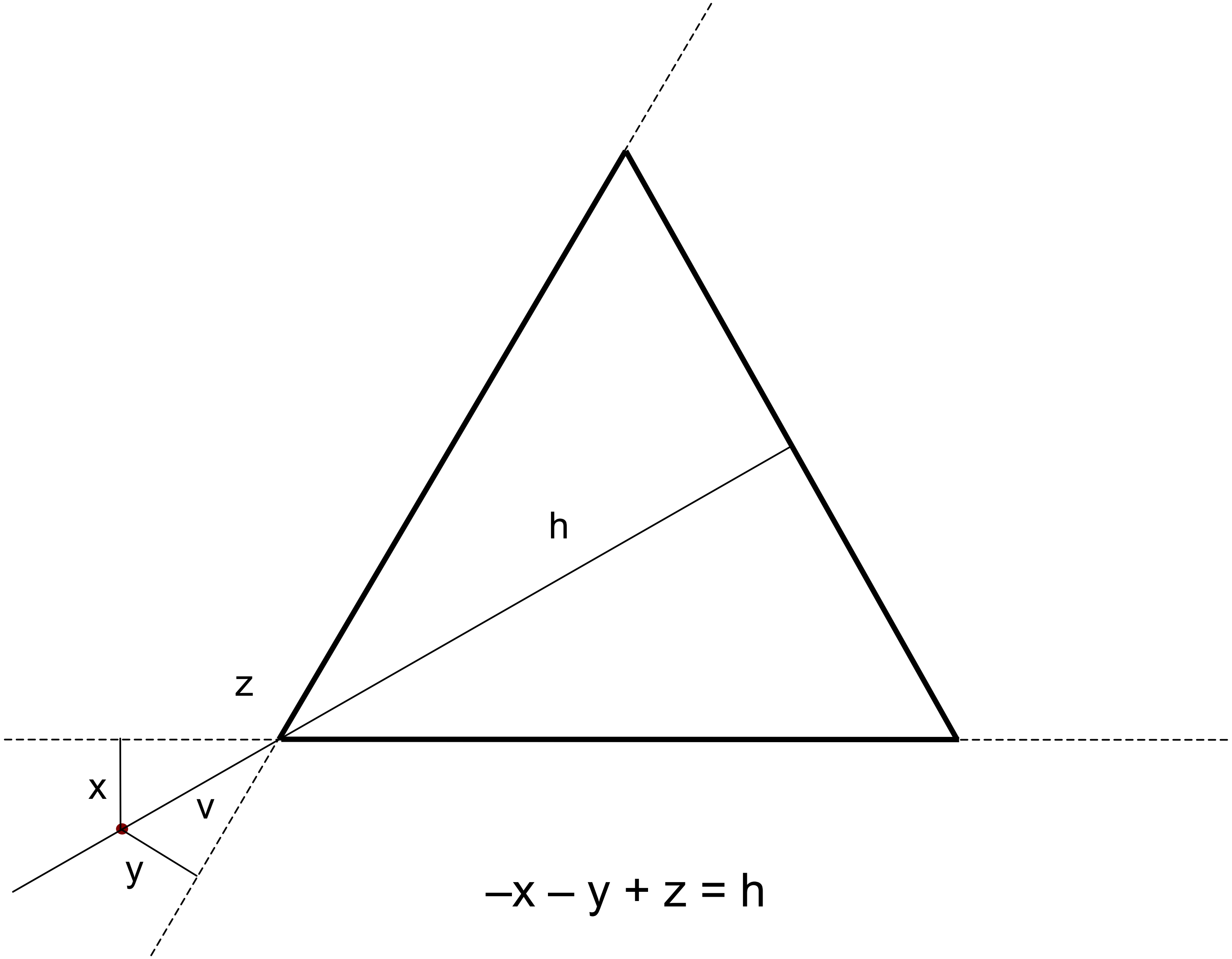


$$z = h + v$$

$$z - h = v$$

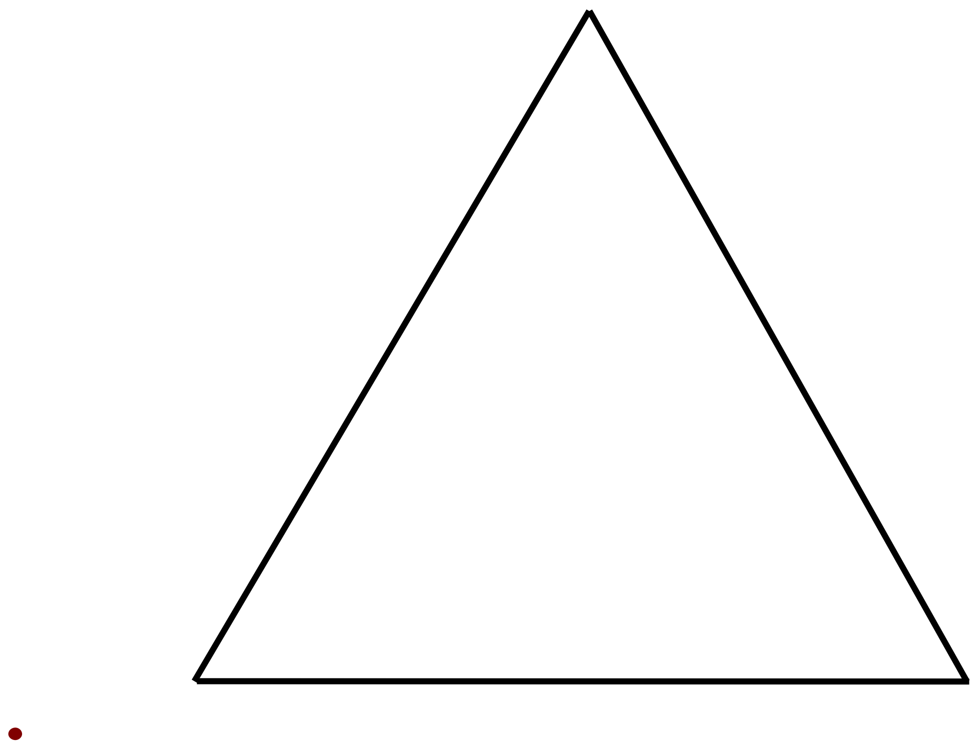
$$z - h = (x + y)$$

Barycentryczny układ współrzędnych



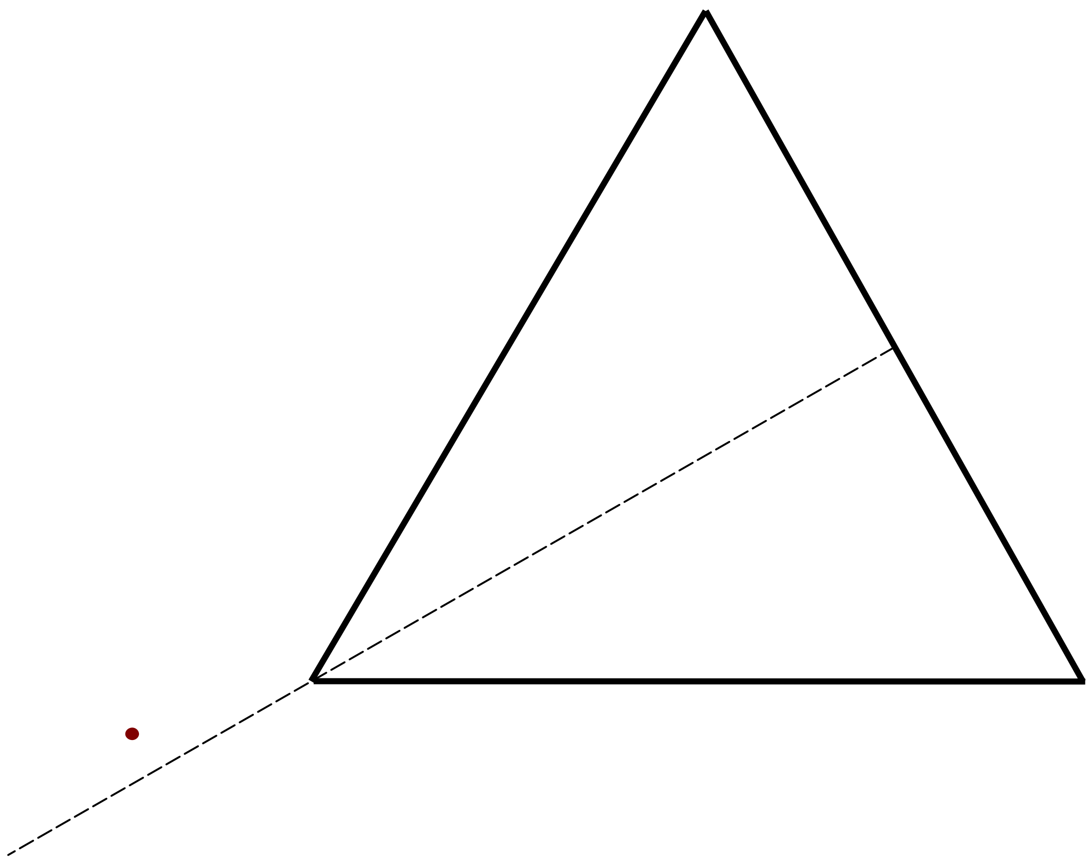
$$-x - y + z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych

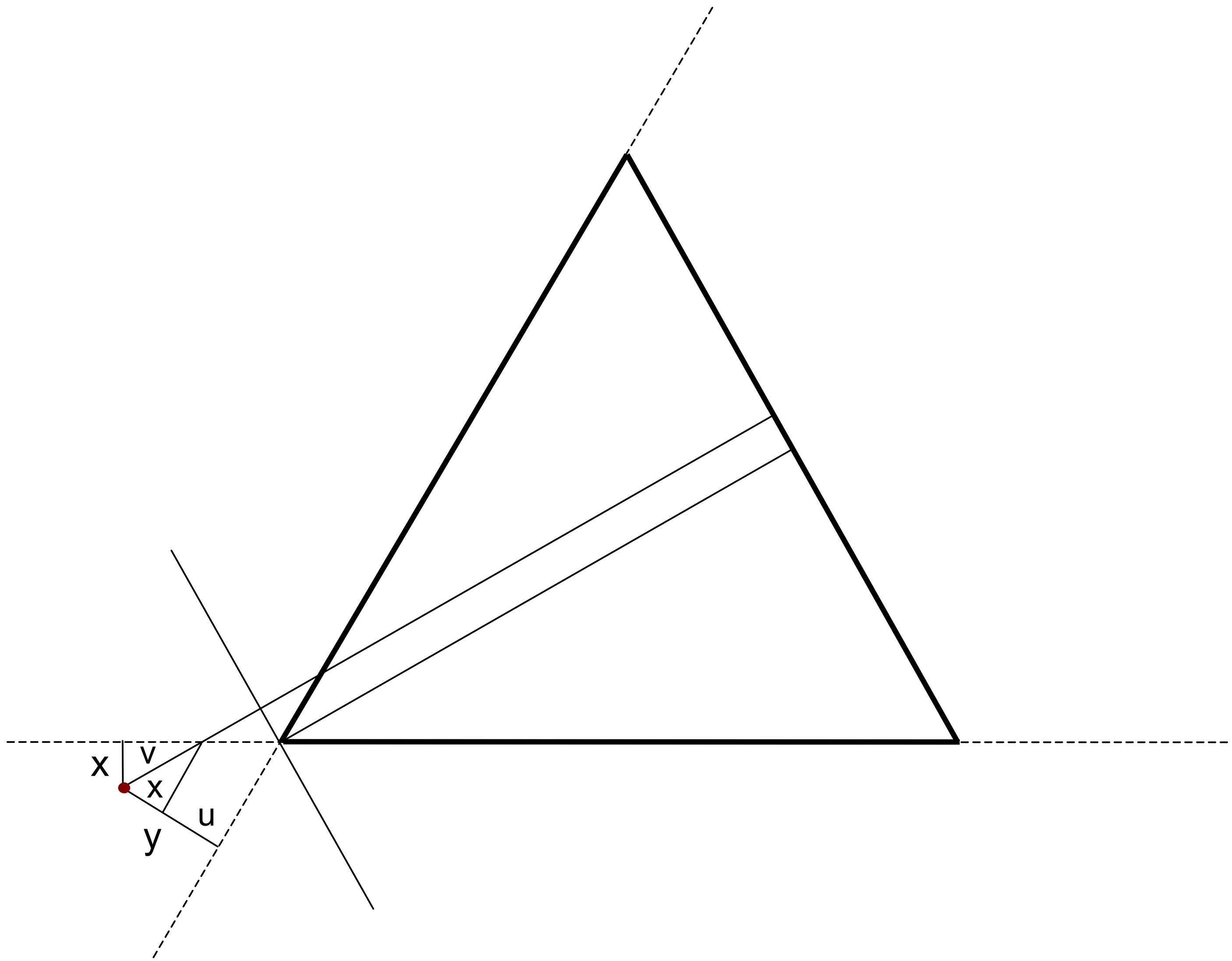


???

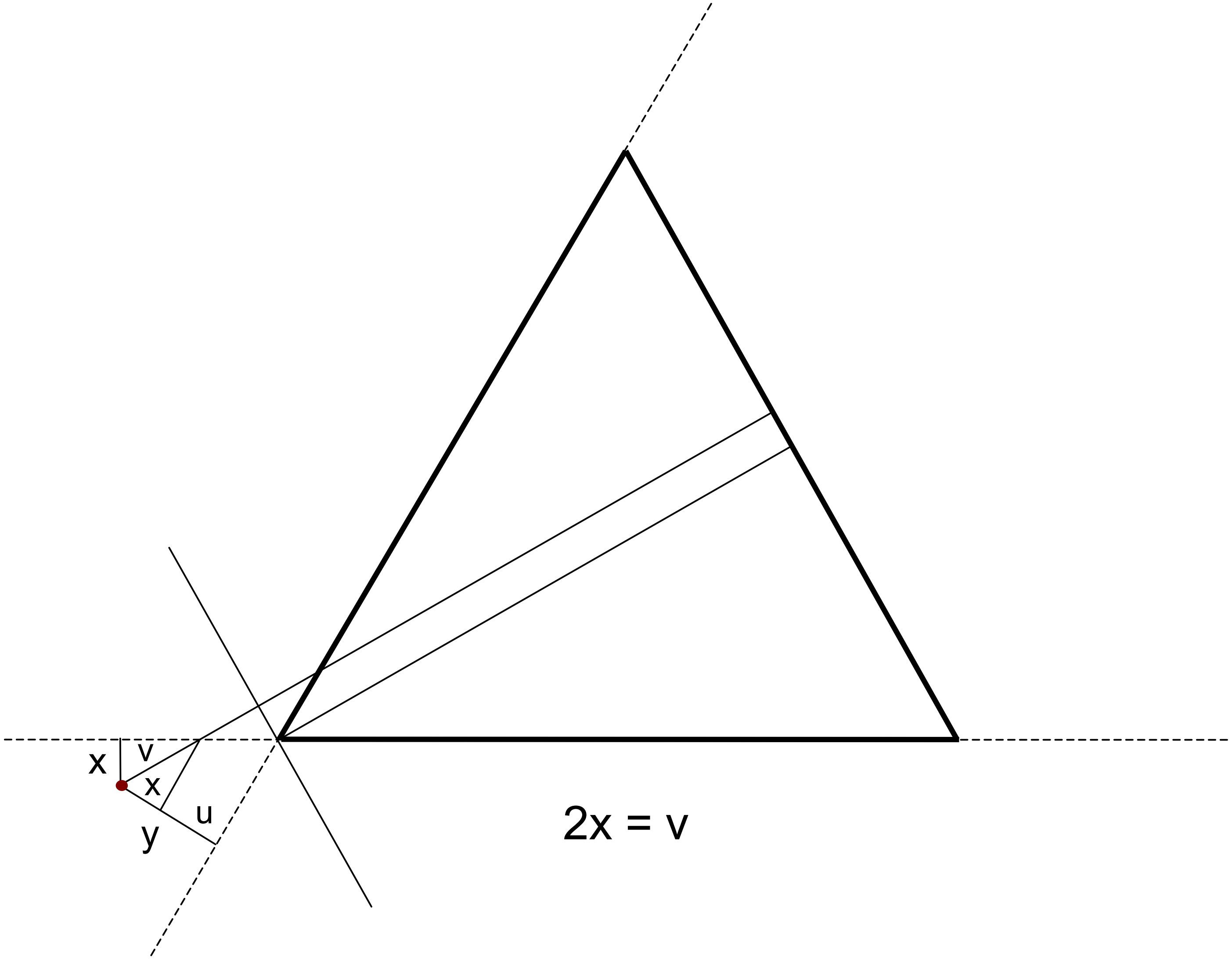
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych

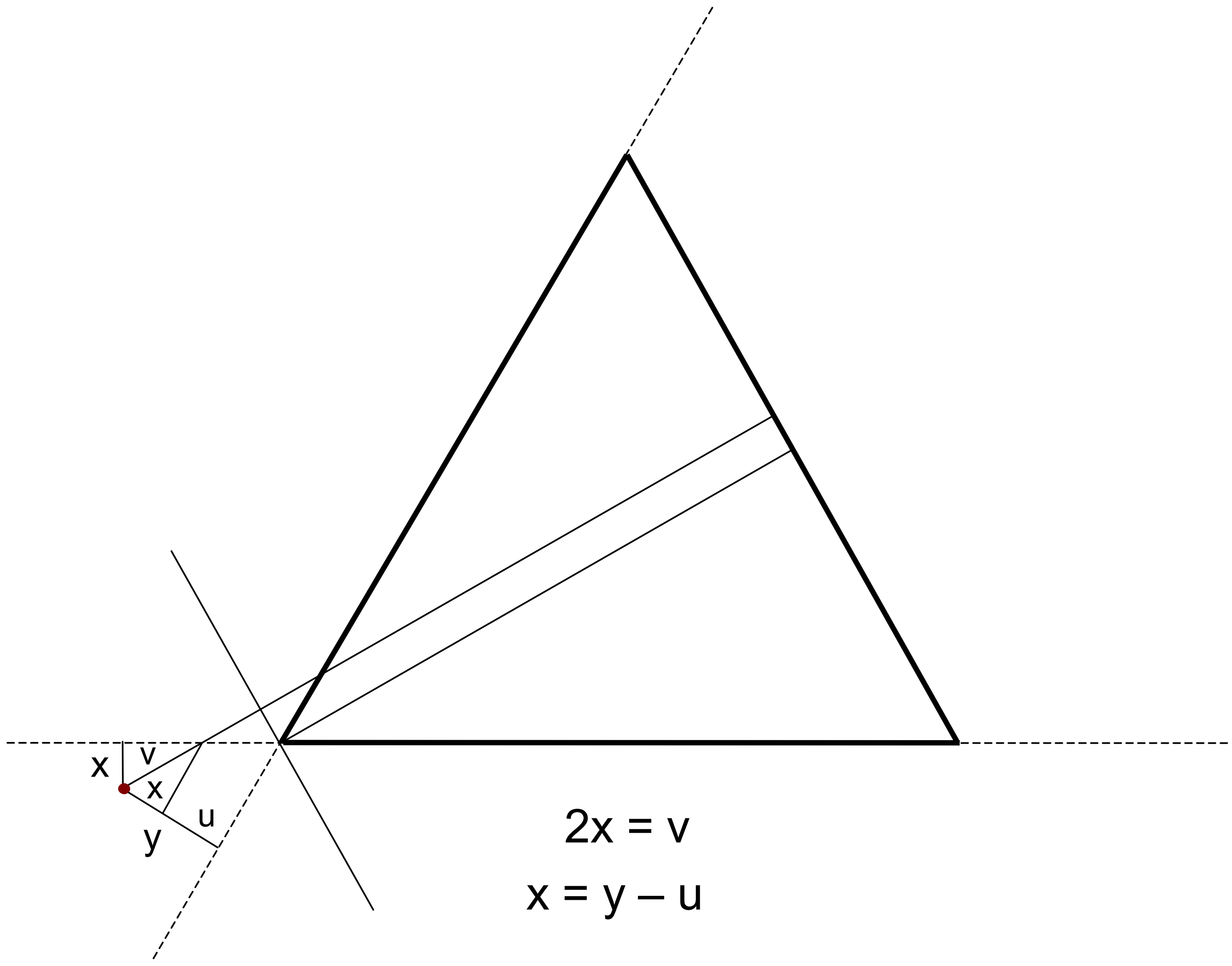


Barycentryczny układ współrzędnych



$2x = v$

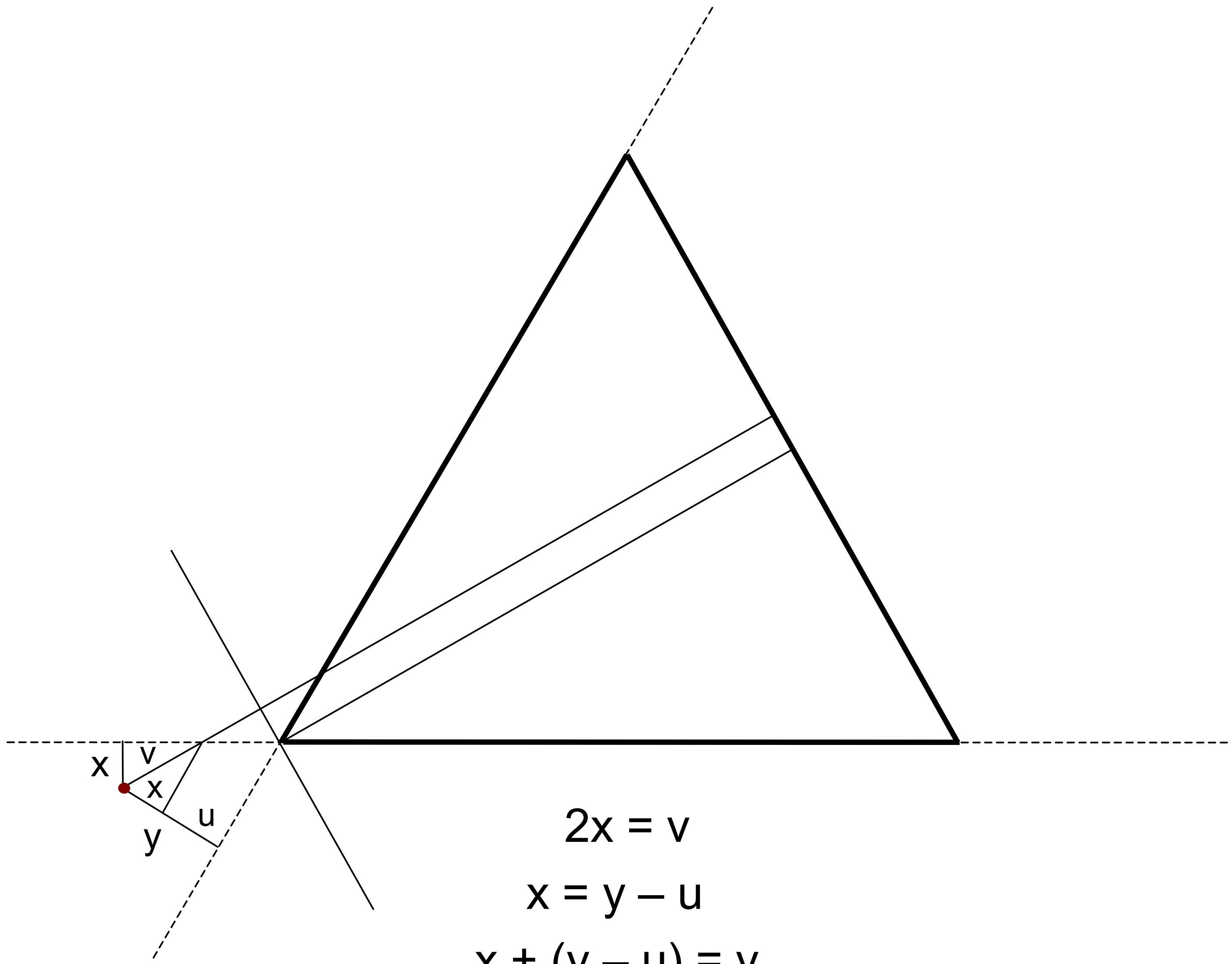
Barycentryczny układ współrzędnych



$$2x = v$$

$$x = y - u$$

Barycentryczny układ współrzędnych

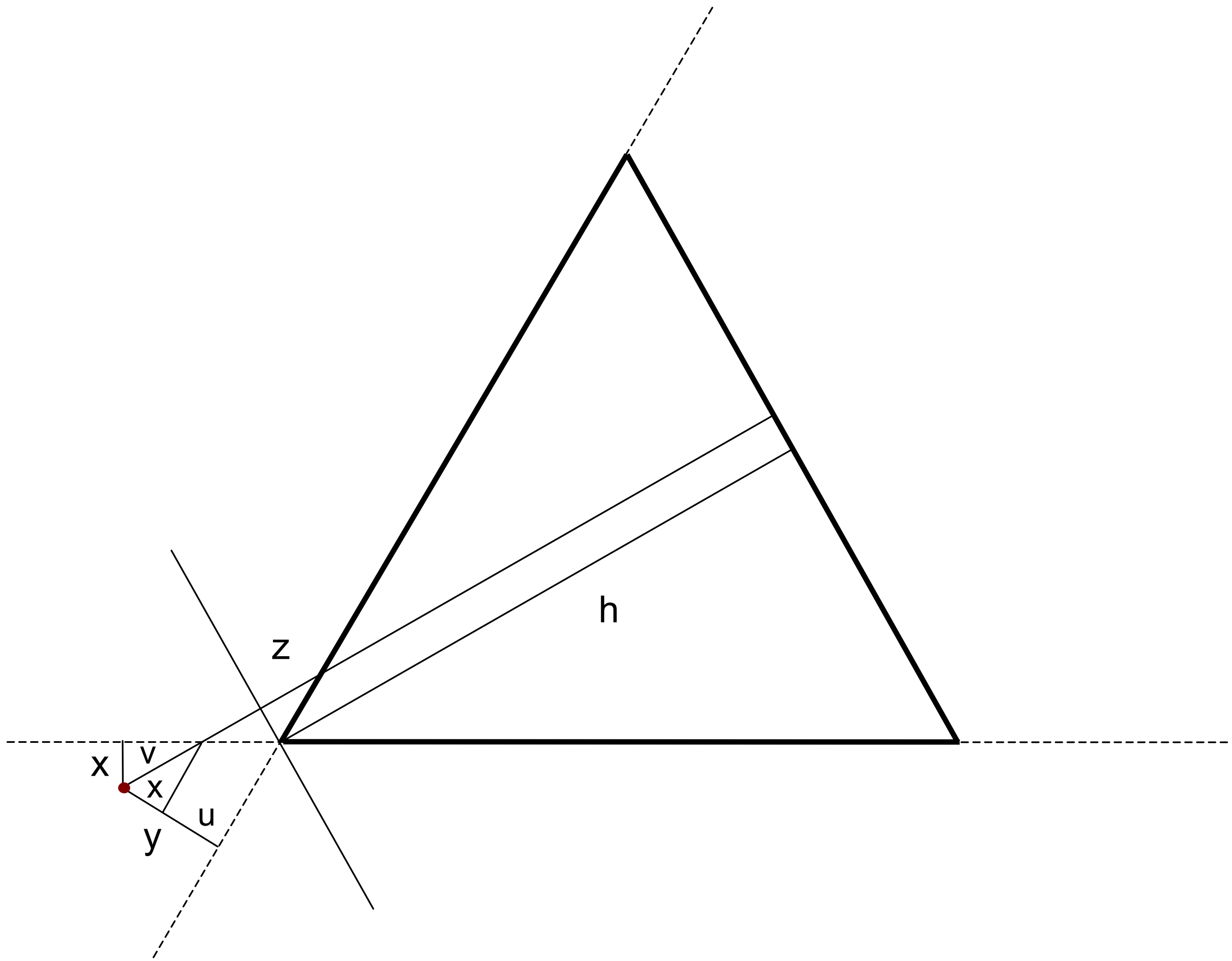


$$2x = v$$

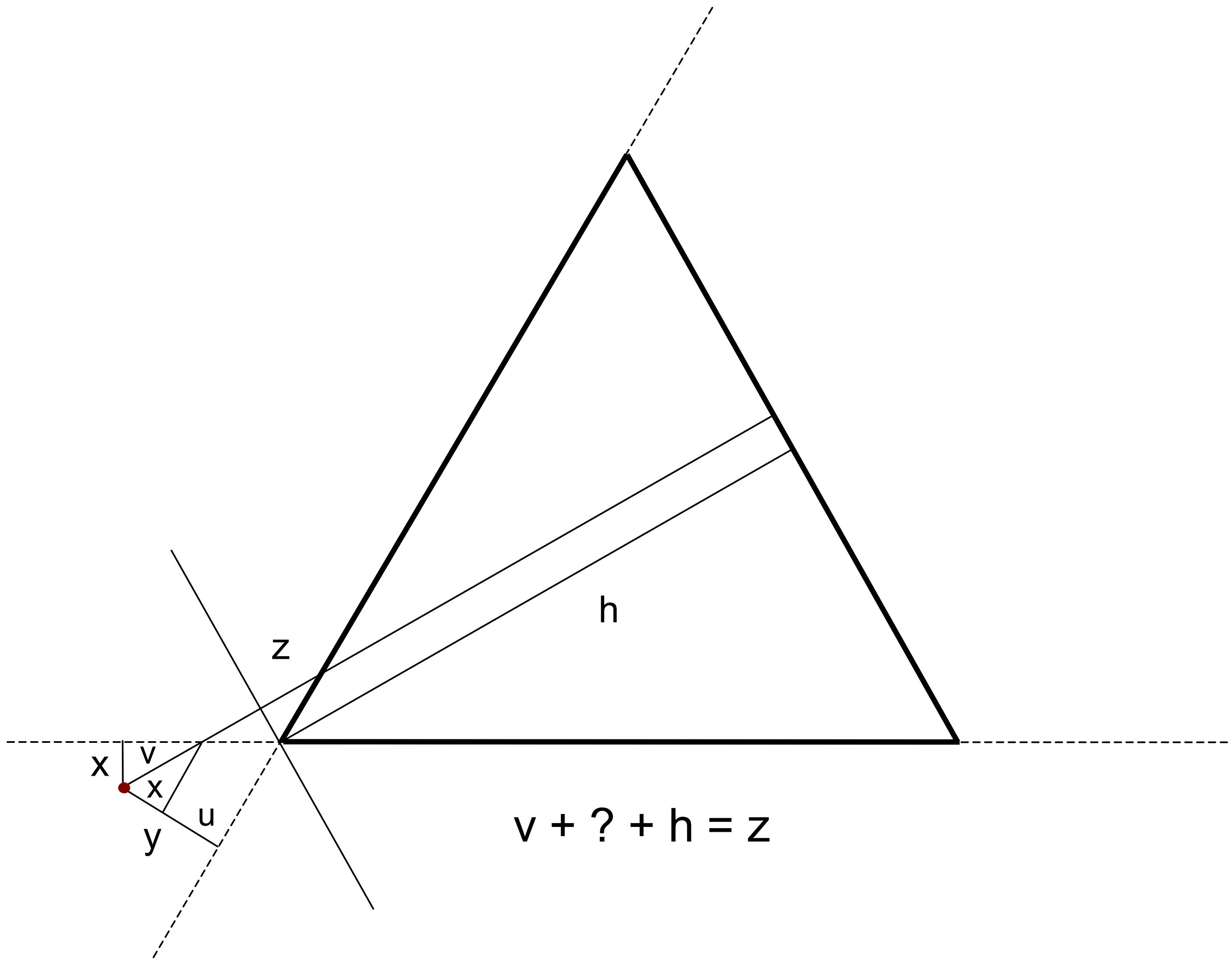
$$x = y - u$$

$$x + (y - u) = v$$

Barycentryczny układ współrzędnych

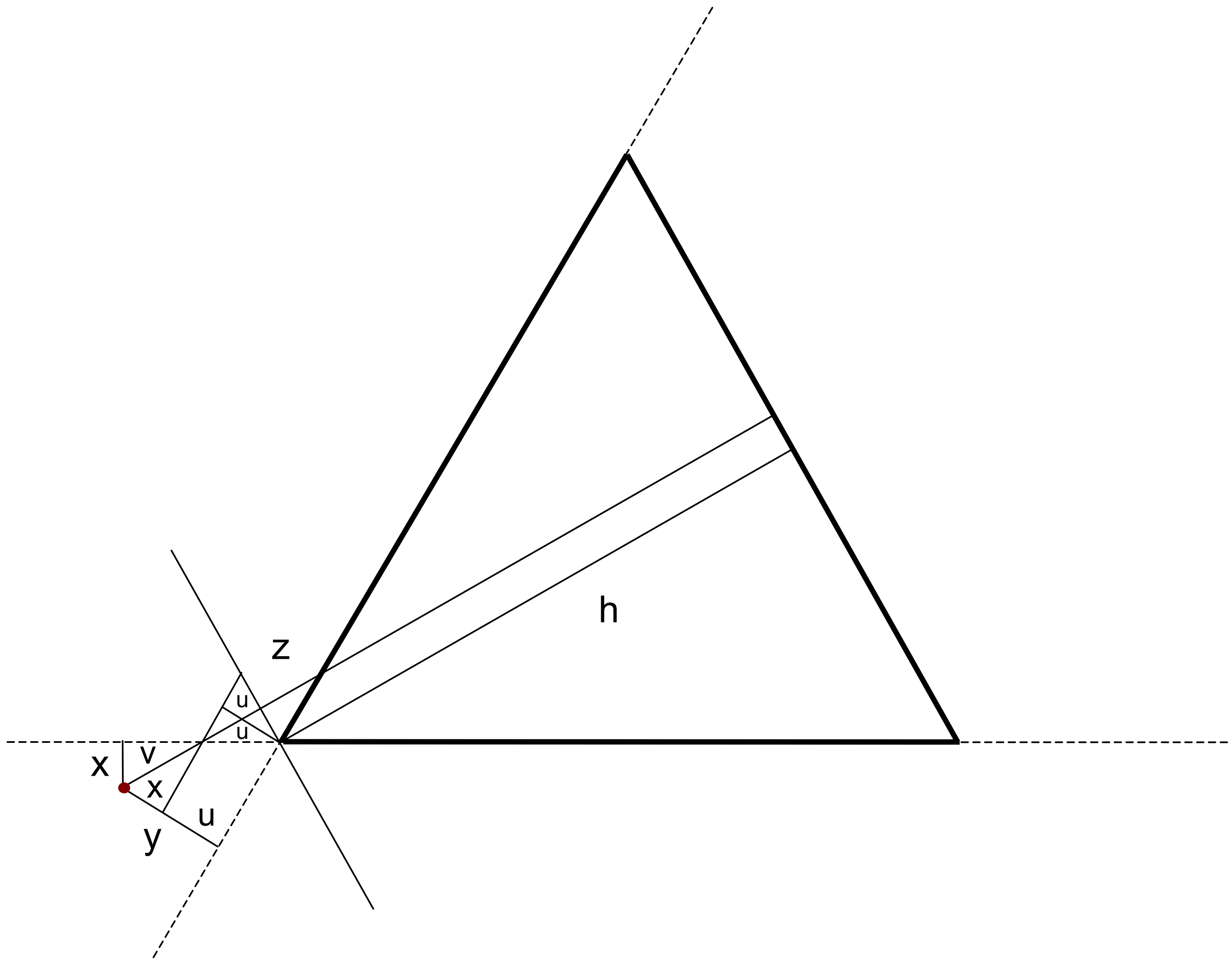


Barycentryczny układ współrzędnych

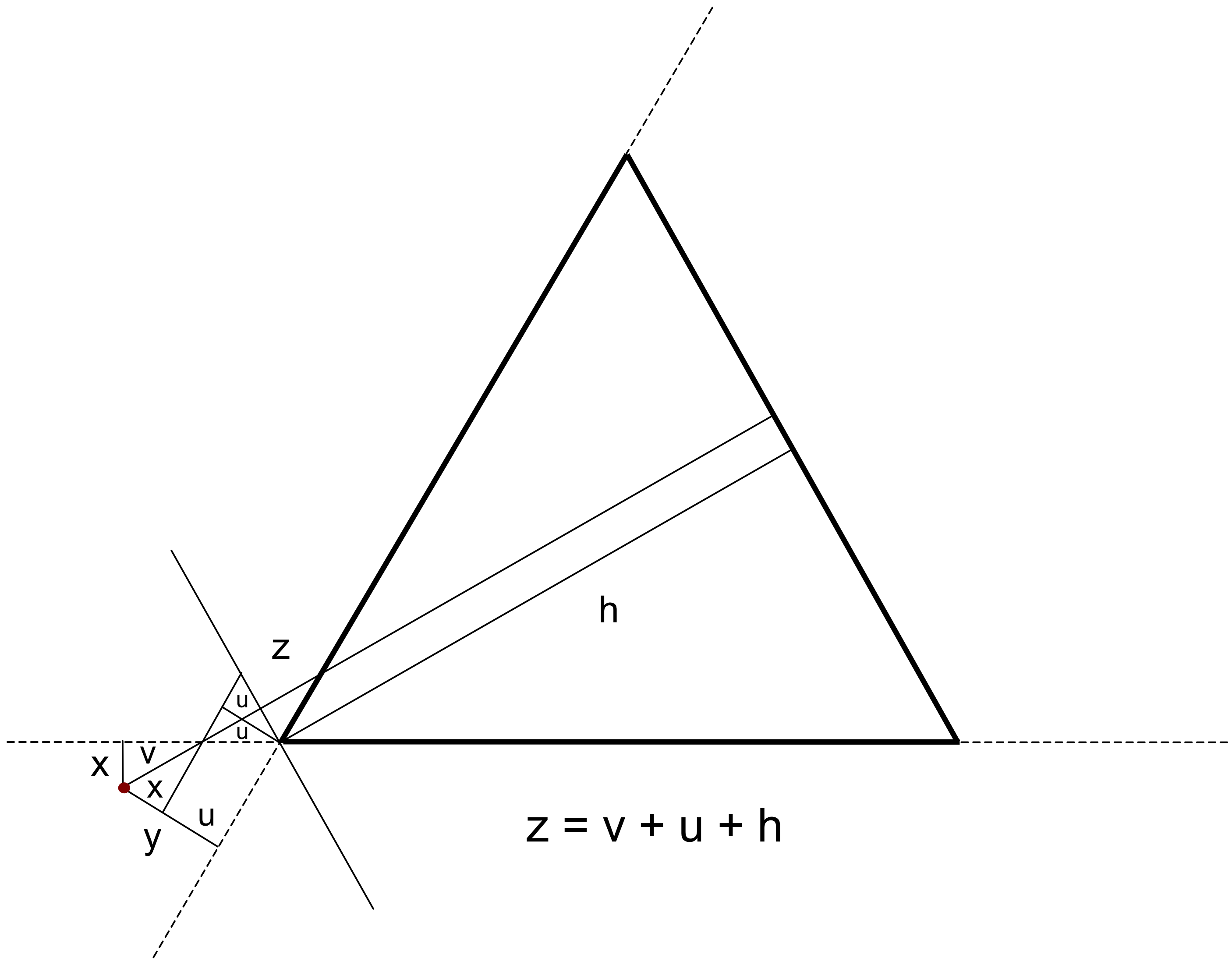


v + ? + h = z

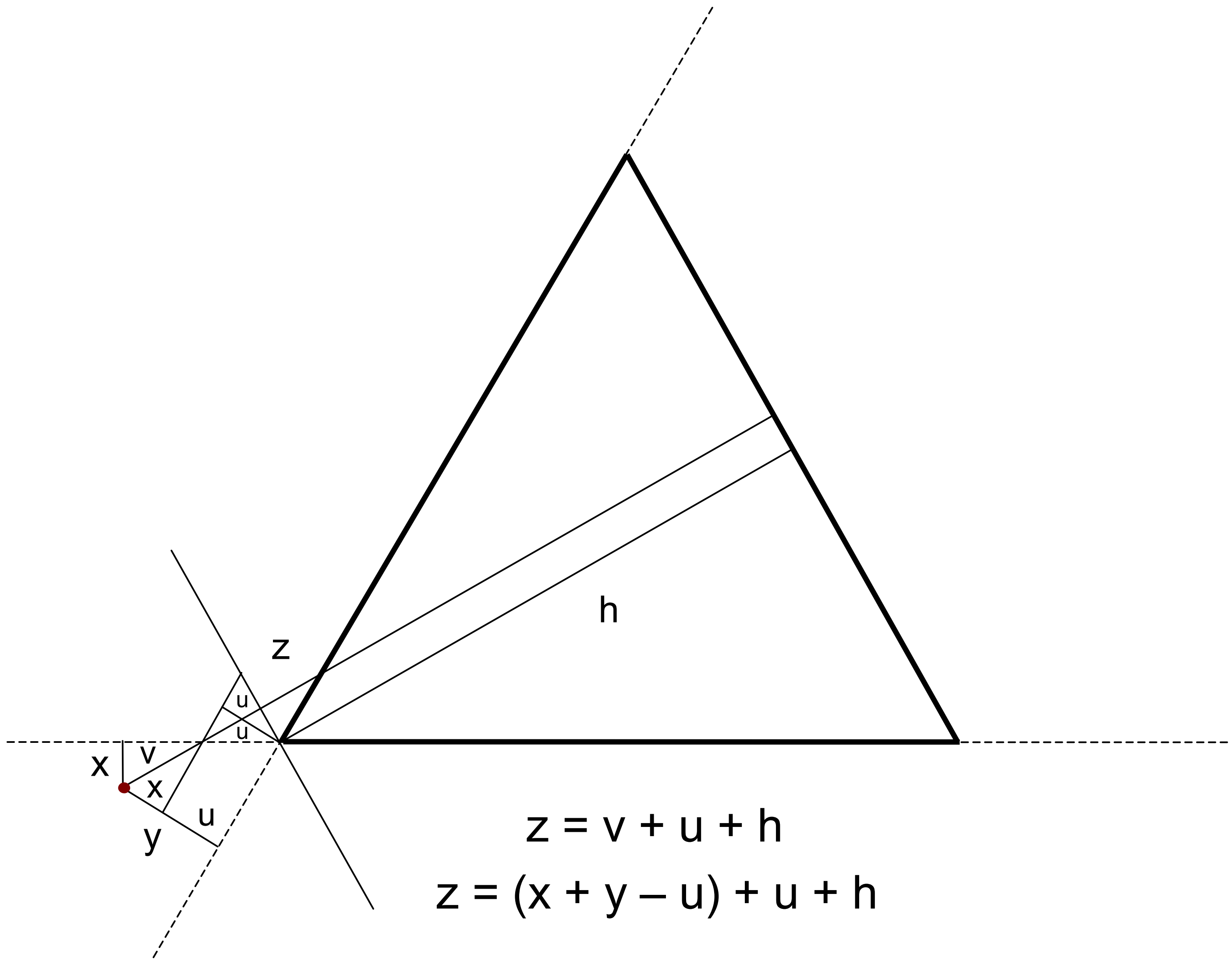
Barycentryczny układ współrzędnych



Barycentryczny układ współrzędnych



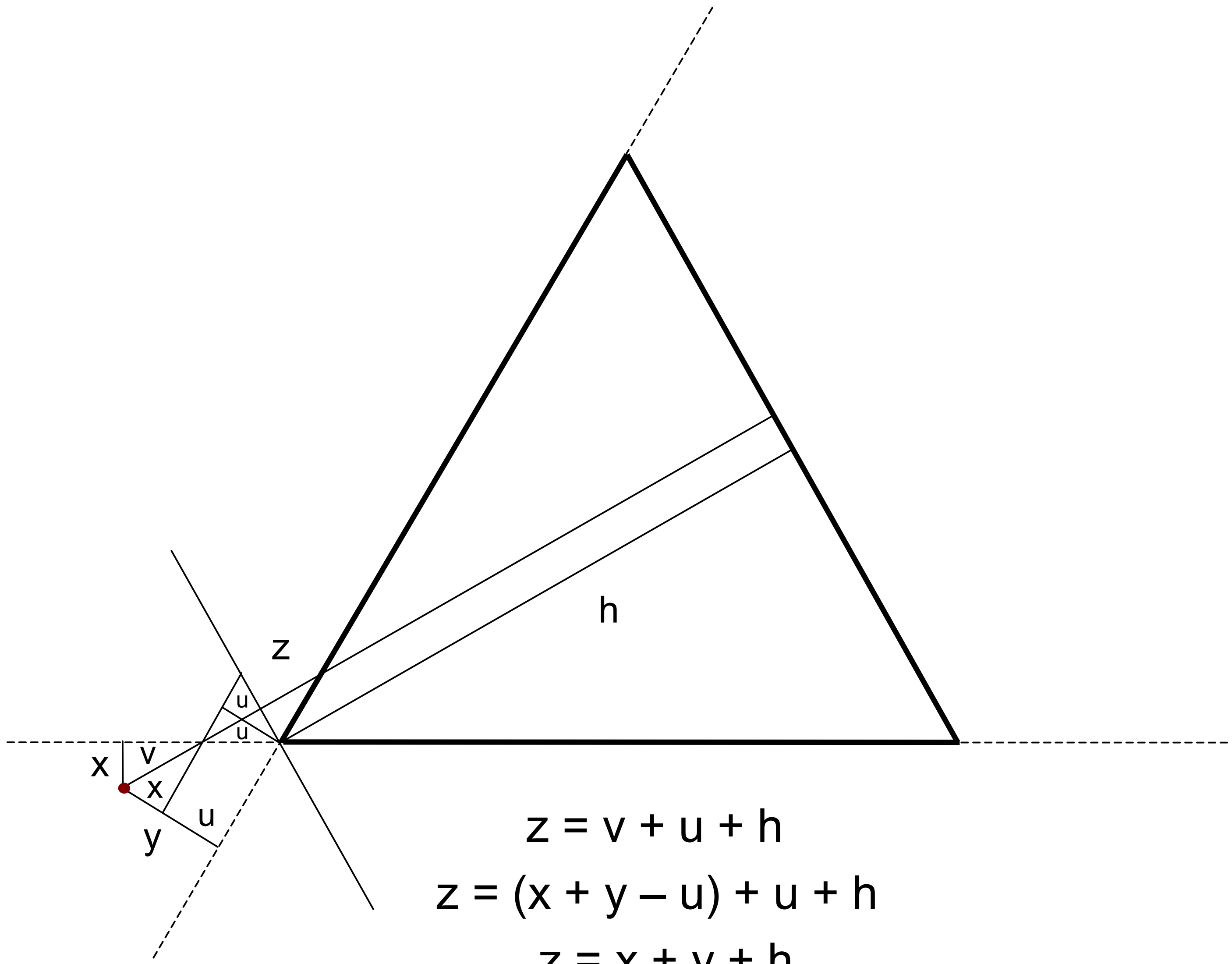
Barycentryczny układ współrzędnych



$$z = v + u + h$$

$$z = (x + y - u) + u + h$$

Barycentryczny układ współrzędnych

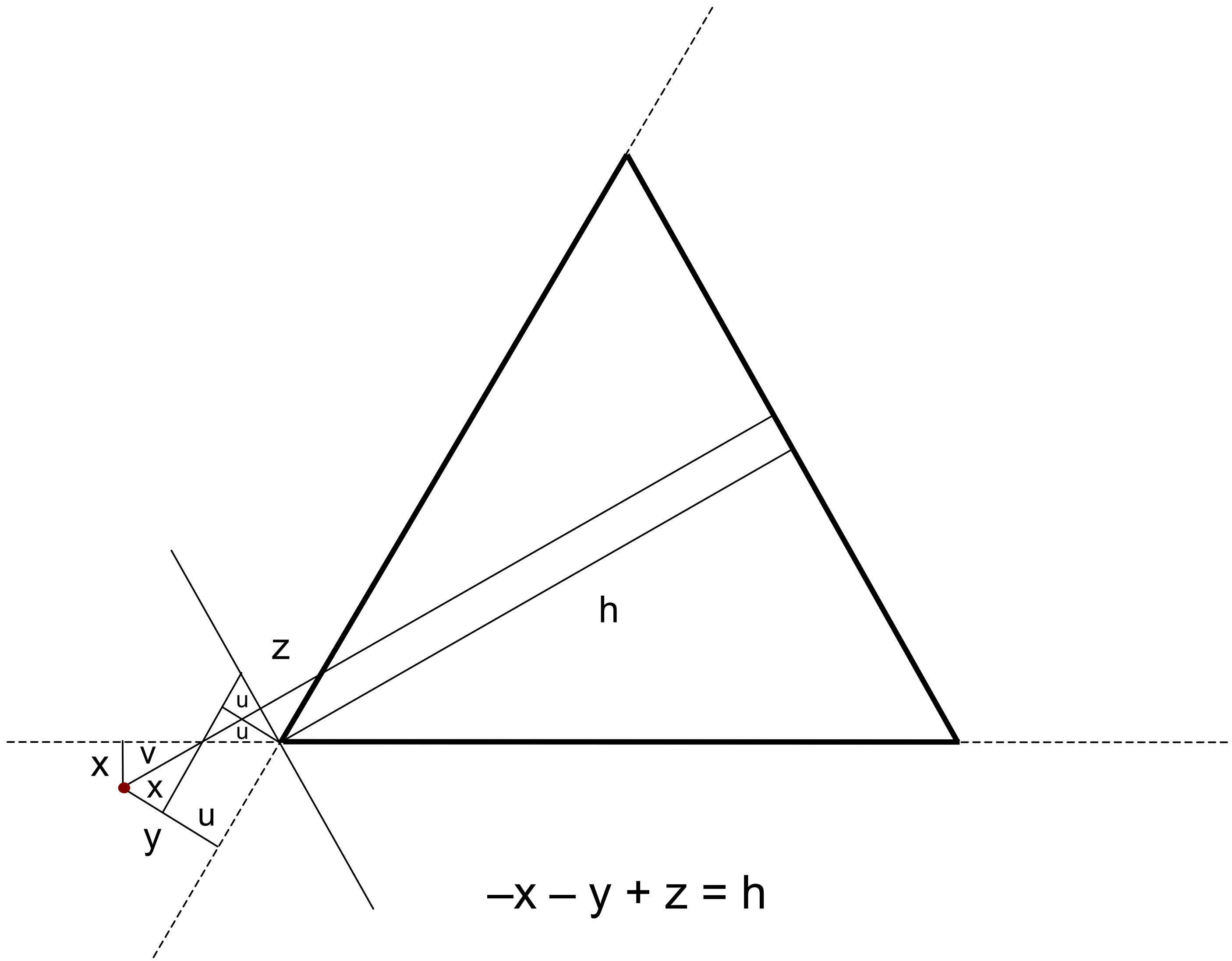


$$z = v + u + h$$

$$z = (x + y - u) + u + h$$

$$z = x + y + h$$

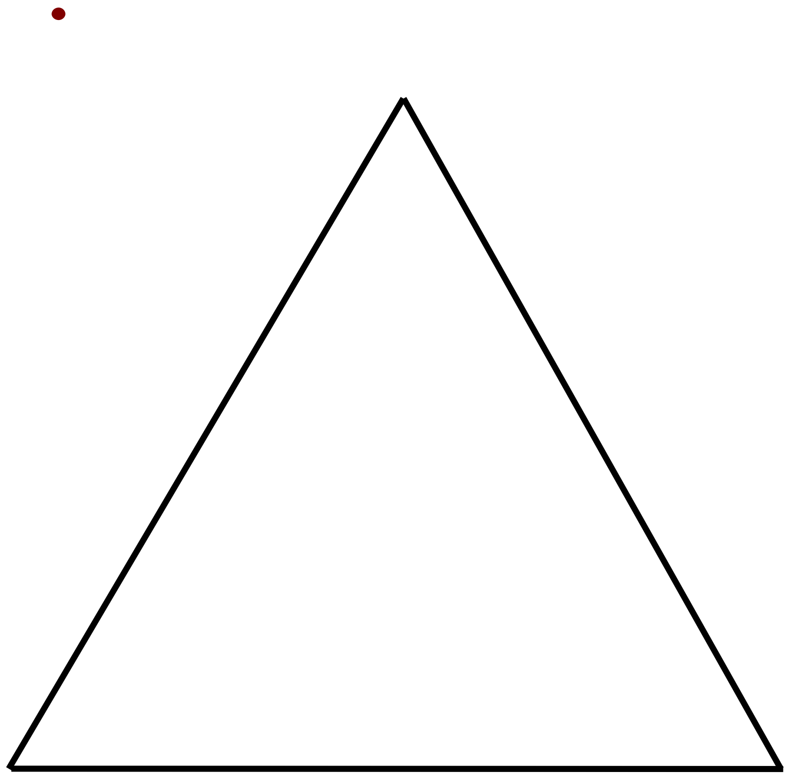
Barycentryczny układ współrzędnych

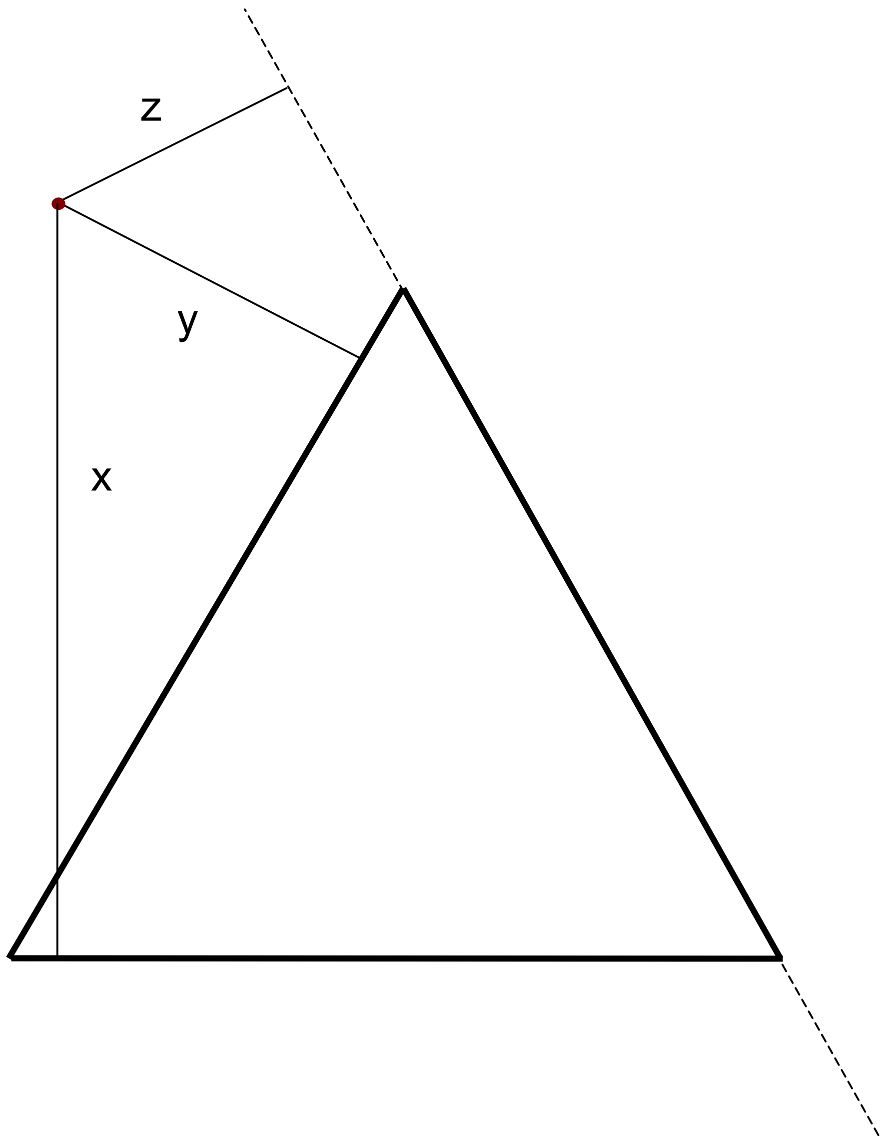


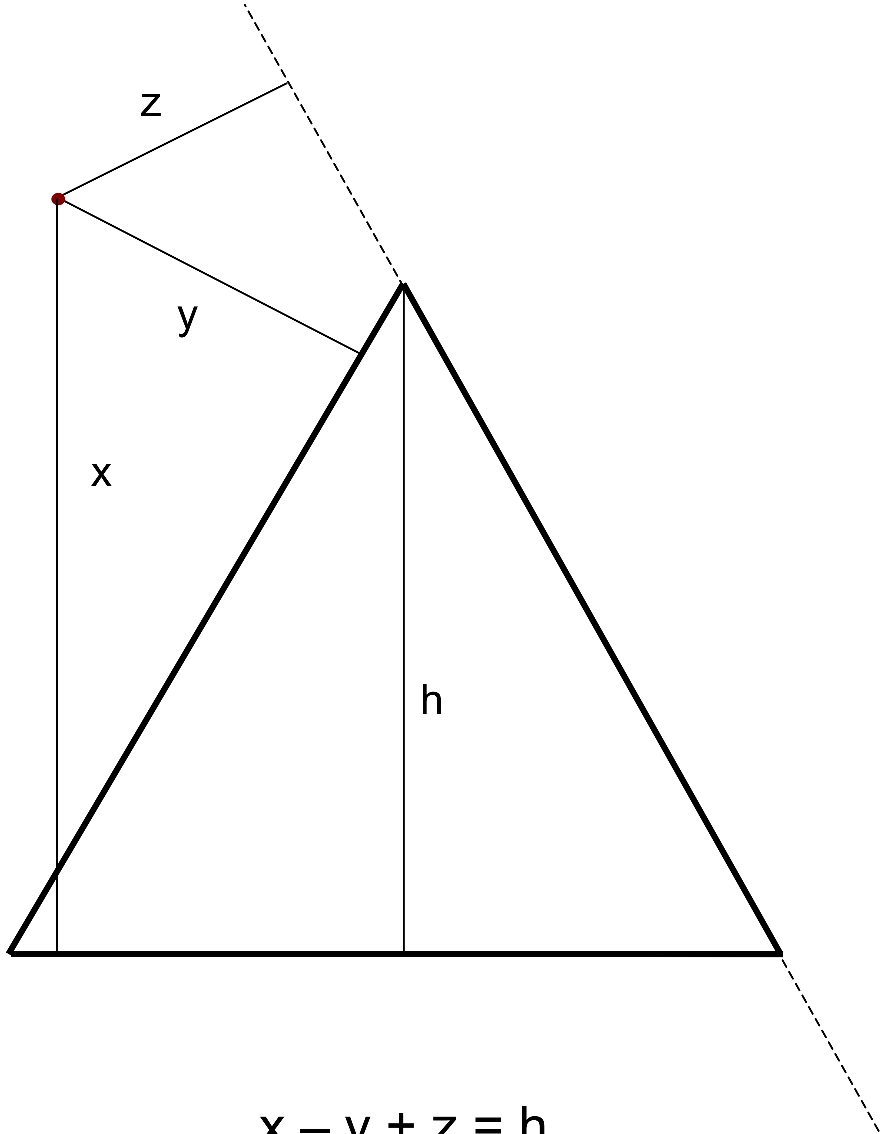
$$-x - y + z = h$$

- Idea odległości prosta-punkt
  (w odróżnieniu od odległości punkt-punt)
  – jeżeli punkt leży na prostej, to:
    - jego odległość do prostej wynosi 0
  – jeżeli punkt nie leży na prostej, to:
    - leży po jej lewej albo po jej prawej stronie
    - fak ten można sygnalizować (dodatnim lub ujemnym) znakiem
      (tak zmodyfikowana wartość nie stanowi już formalnie odległości)

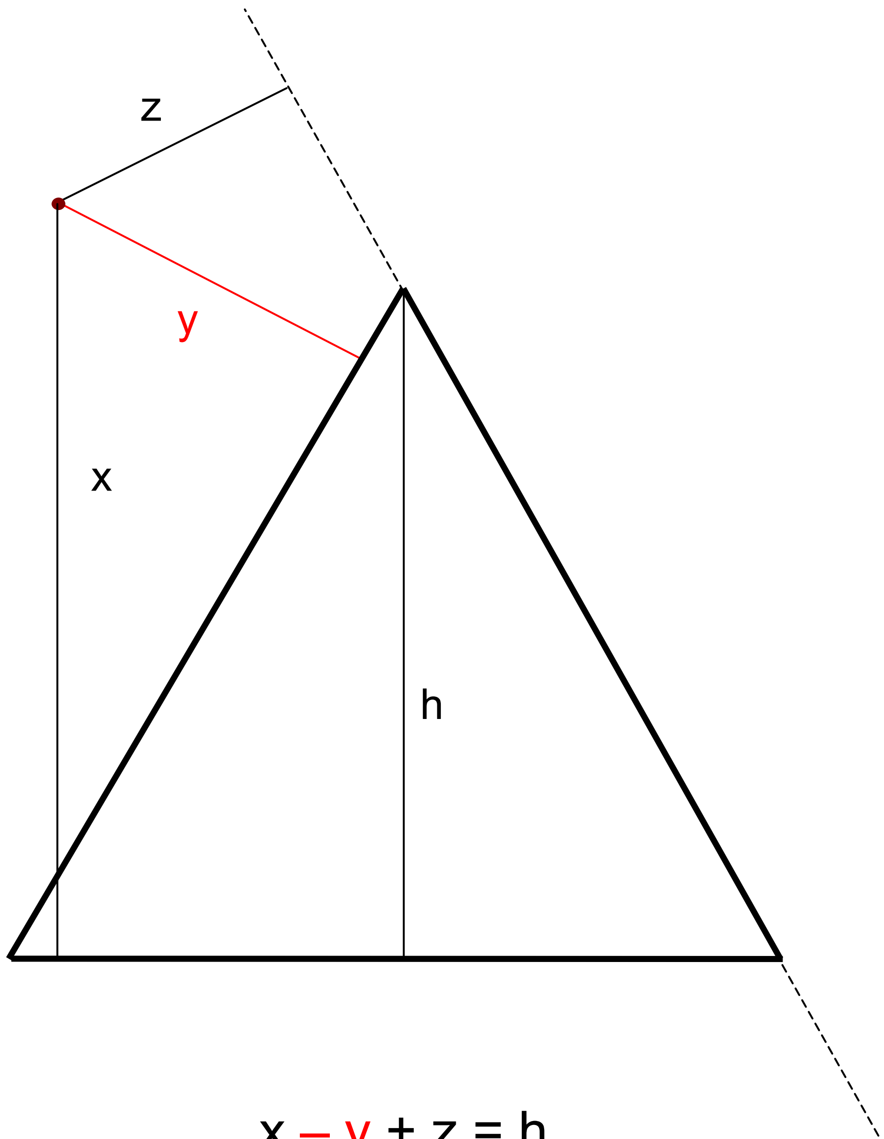
- Układ współrzędnych z odległościami ze znakiem
  - zakres zmienności zmiennych: $(-\infty, +\infty)$
  - jednak wskutek warunku $x + y + z = n$, gdzie $n > 0$, nie występują wszystkie kombinacje tych wartości
    - niech $n = 30$
    - jeżeli np. $x = 40$, to y i z muszą spełniać $y + z = -10$, co wymaga, aby np.:
      - $y = -20$, $z = +10$
      - $y = -15$, $z = +5$
      - $y = -10$, $z = 0$
      - $y = -5$, $z = -5$
      - $y = 0$, $z = -10$
      - $y = 5$, $z = -15$
      - $y = 10$, $z = -20$



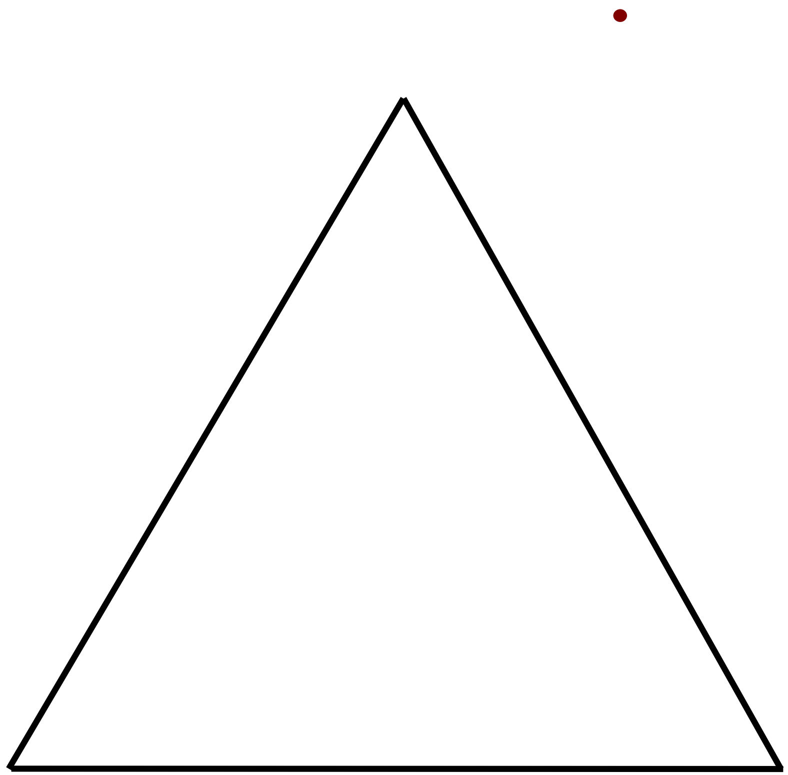

z
y
x

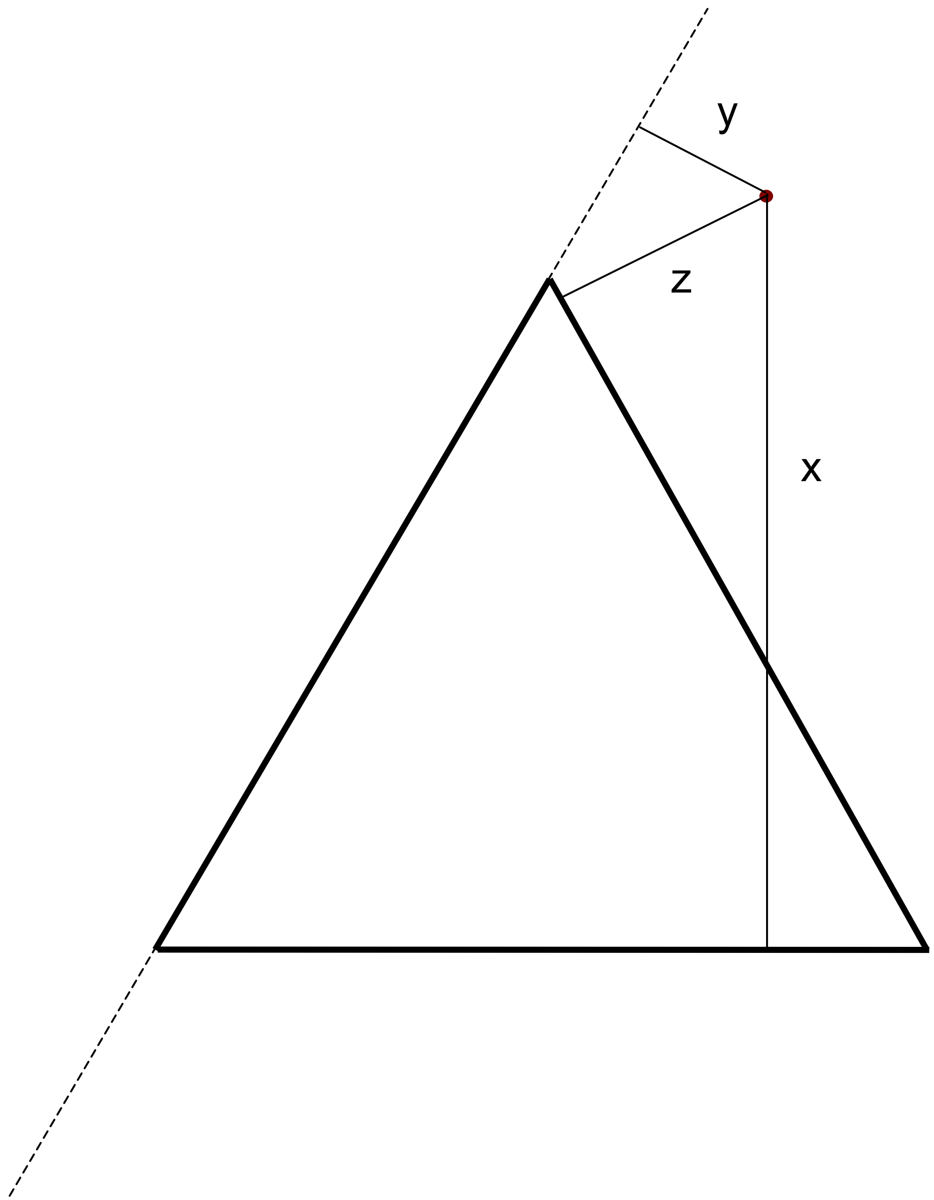


$$x - y + z = h$$

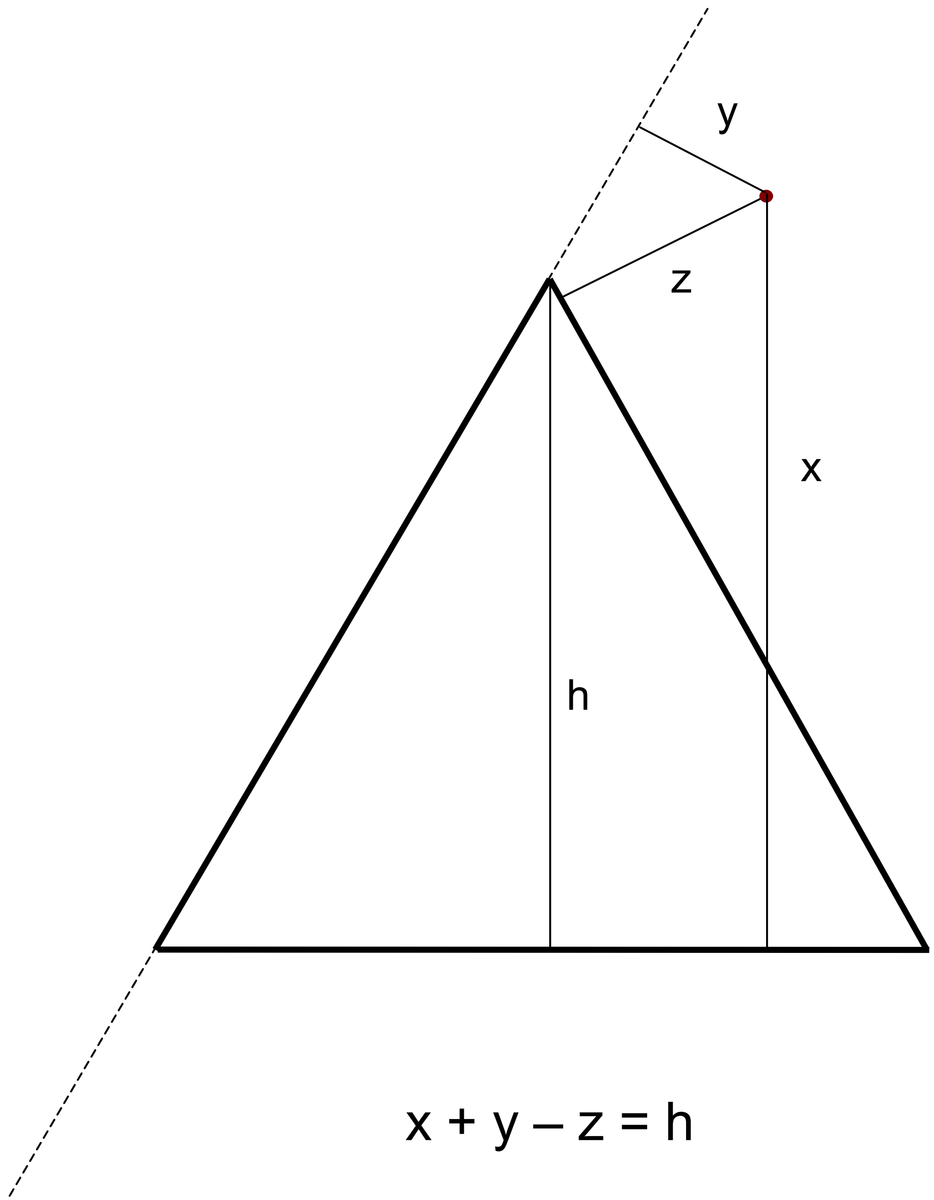


$$x - y + z = h$$

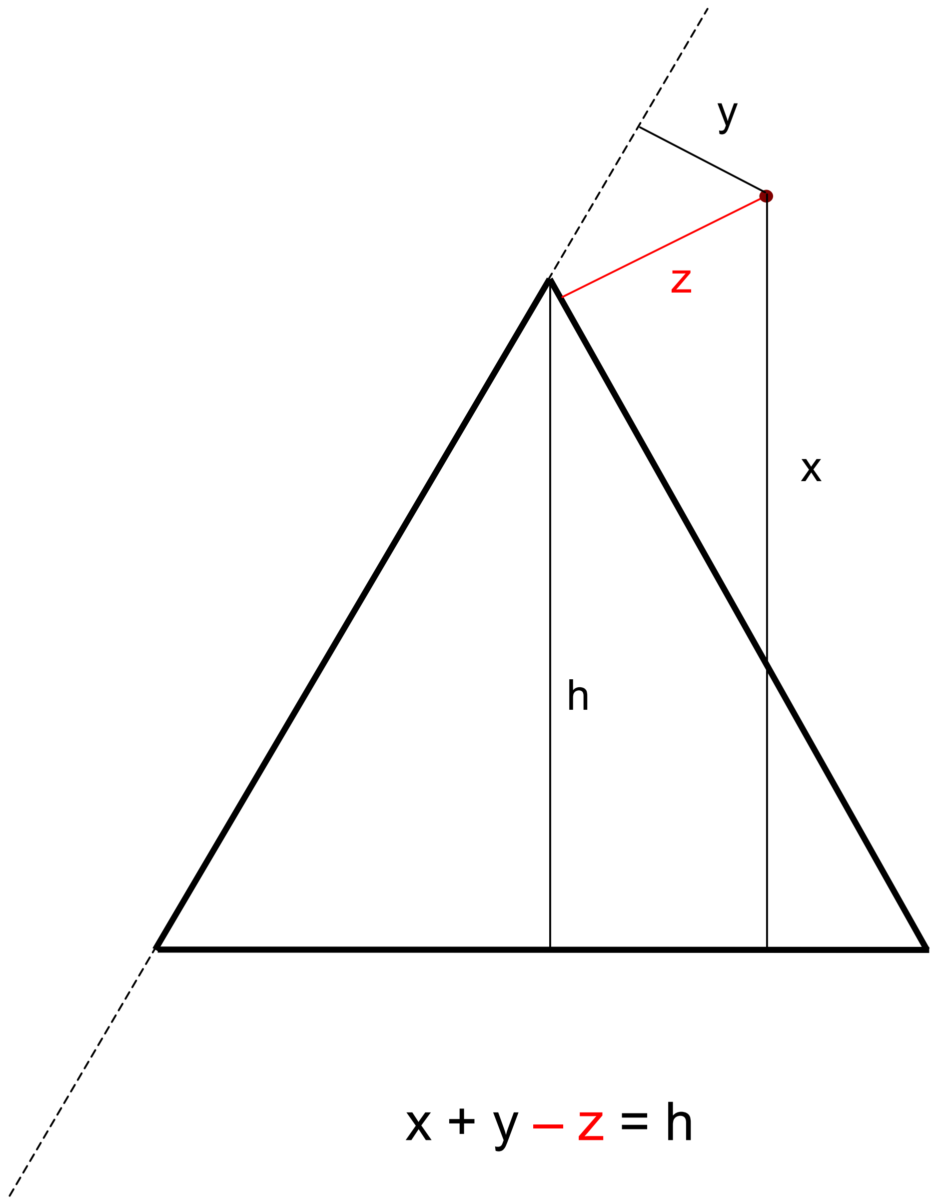




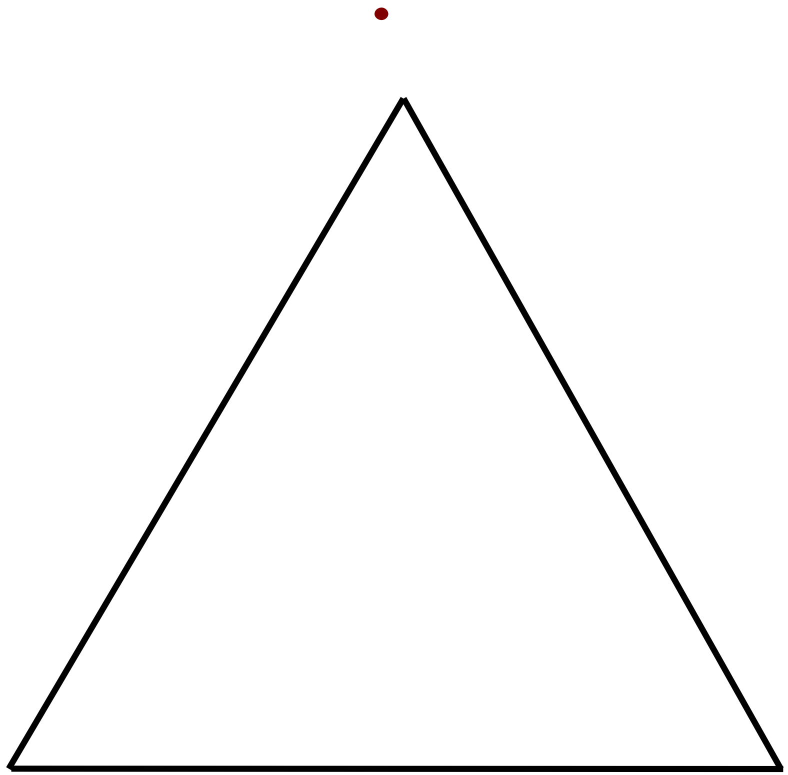
y
z
x

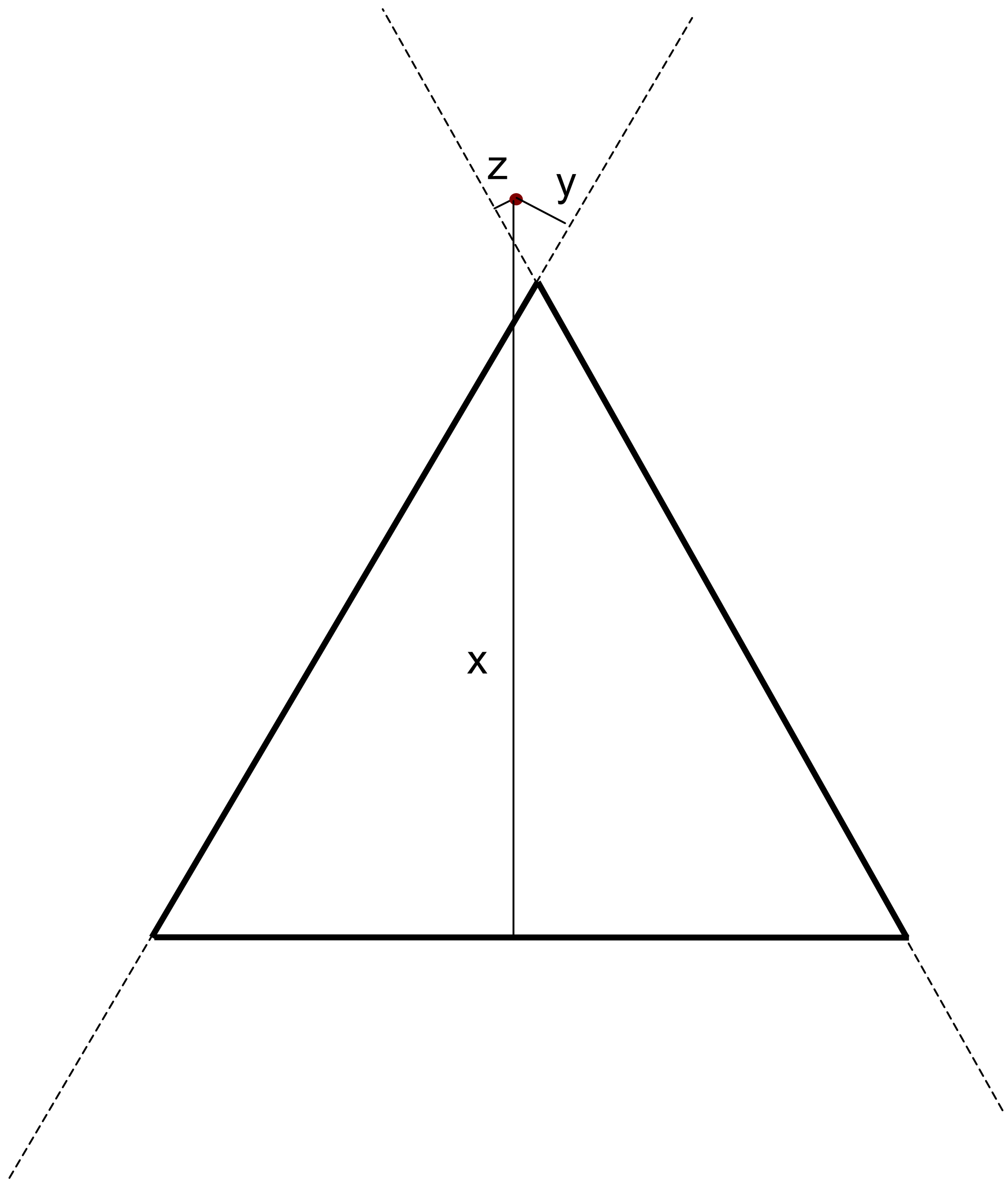


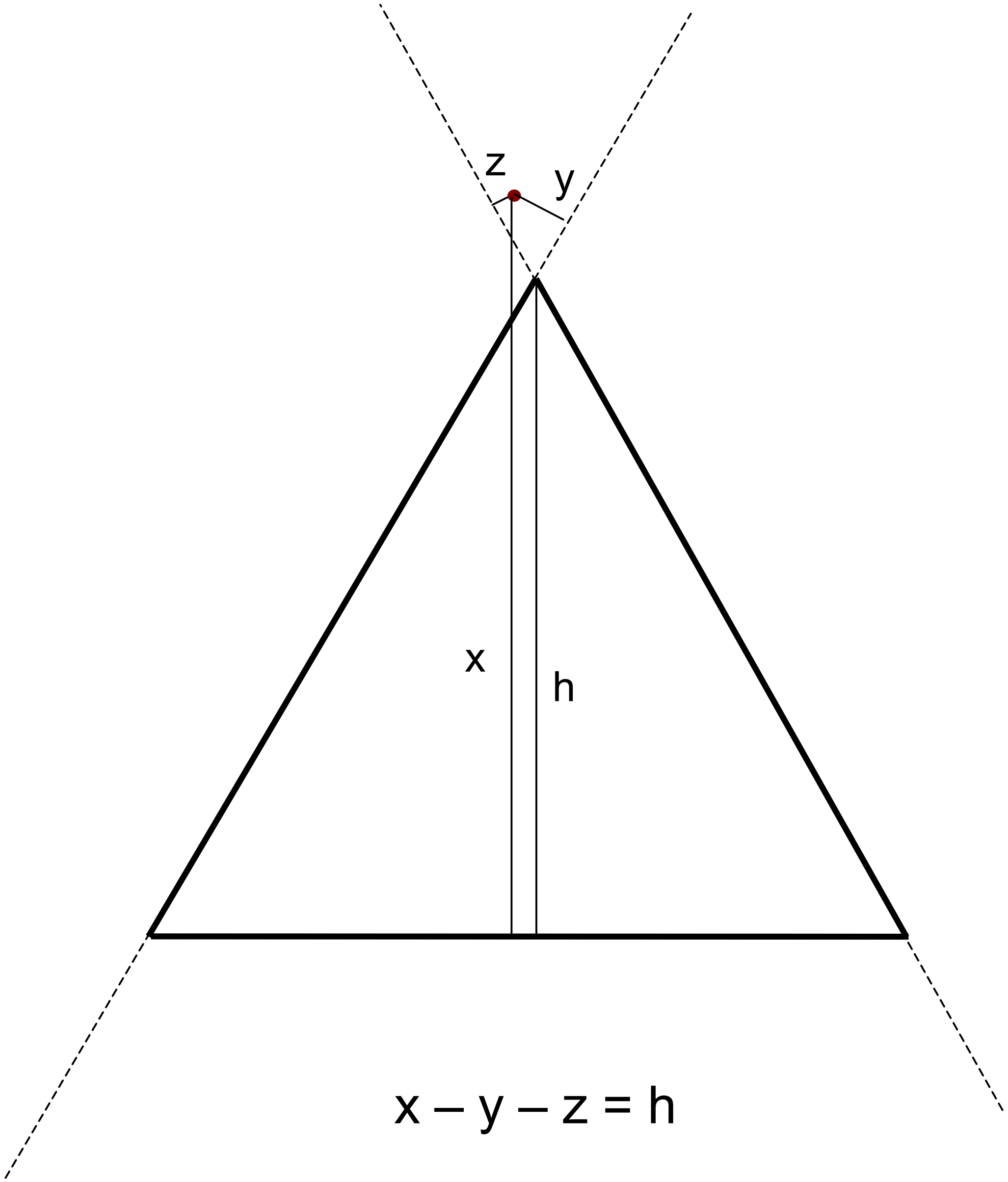
$$x + y - z = h$$



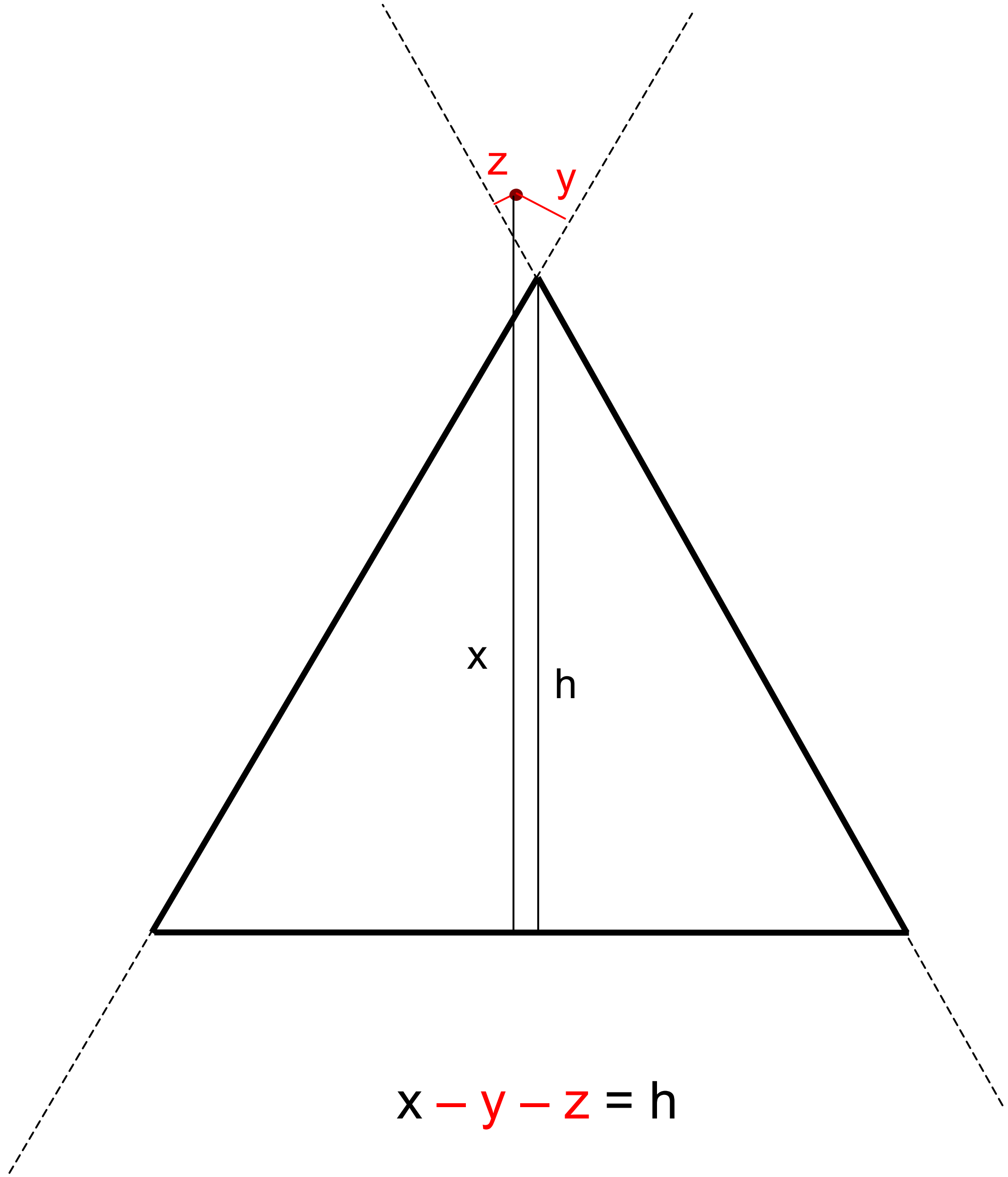
$$x + y - z = h$$




z
y
x



$$x - y - z = h$$



$$x - y - z = h$$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Podsumowując:
  - dla każdego punktu płaszczyzny zachodzi

    $\pm x \pm y \pm z = \text{const}$
    - gdzie x, y i z są odległościami tego punktu od trzech boków trójkata równobocznego
  - warunek poprawności: należy dobrać prawidłowo znaki

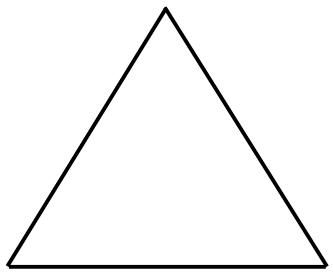
Barycentryczny układ współrzędnych

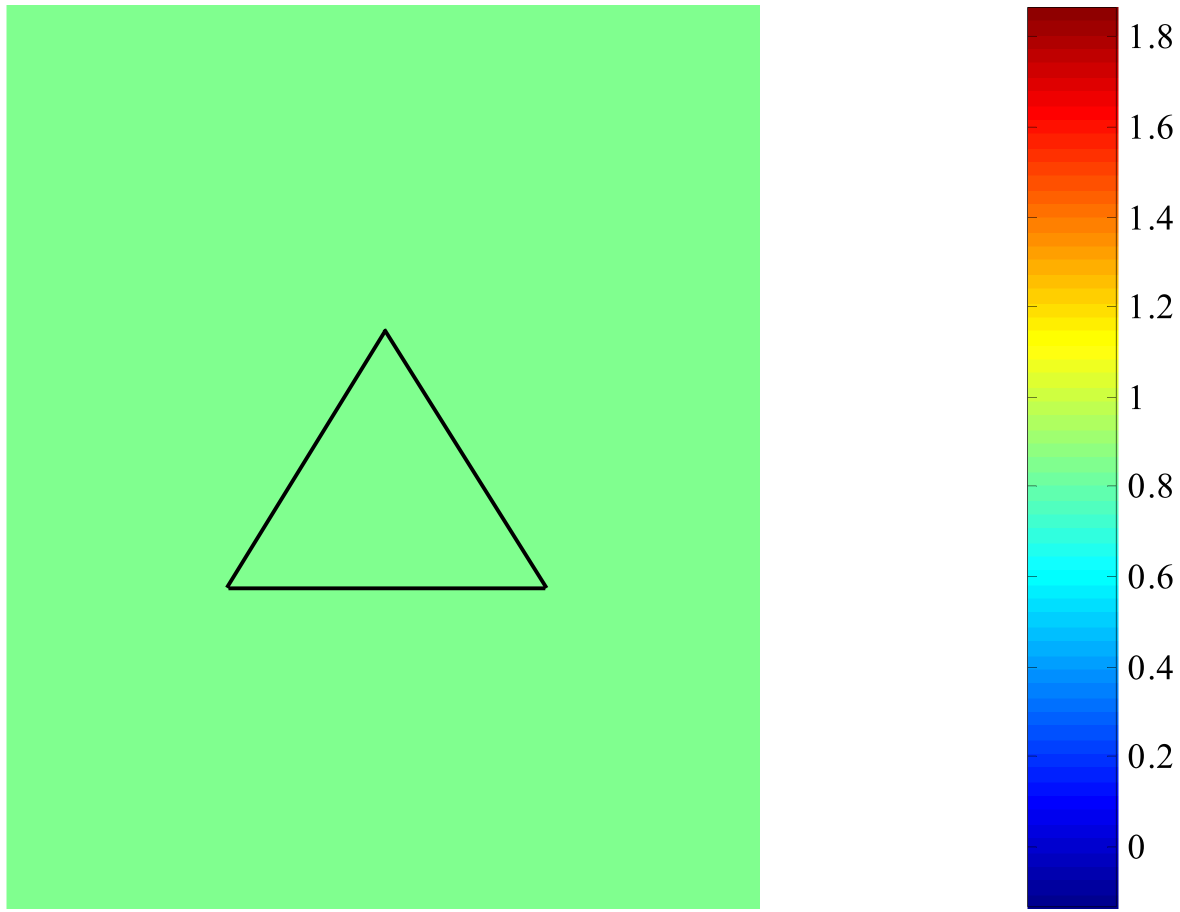
- Podsumowując:
  - dla każdego punktu płaszczyzny zachodzi

    $\pm x \pm y \pm z = const$
    - gdzie x, y i z są odległościami tego punktu od trzech boków trójkata równobocznego
  - warunek poprawności: należy dobrać prawidłowo znaki
    - ogólnie, gdy x, y i z dotyczą punktu po „niewłaściwej stronie” (i są wartościami dodatnimi), to odejmujemy je
      - to oznacza jednak, że można je potraktować jako ujemne, i wtedy dodać (dzięki czemu wzór pozostaje bez zmian /i stanowi zwykłą sumę/), a wynik jest identyczny
      - takie rozumiane odległości (ze znakiem) nazwiemy odległościami wartościowanymi

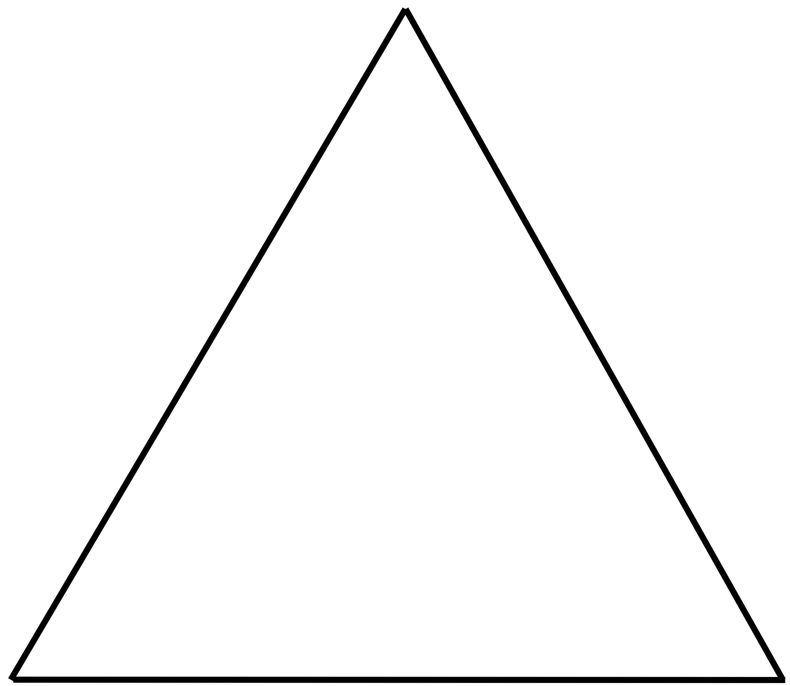
Barycentryczny układ współrzędnych

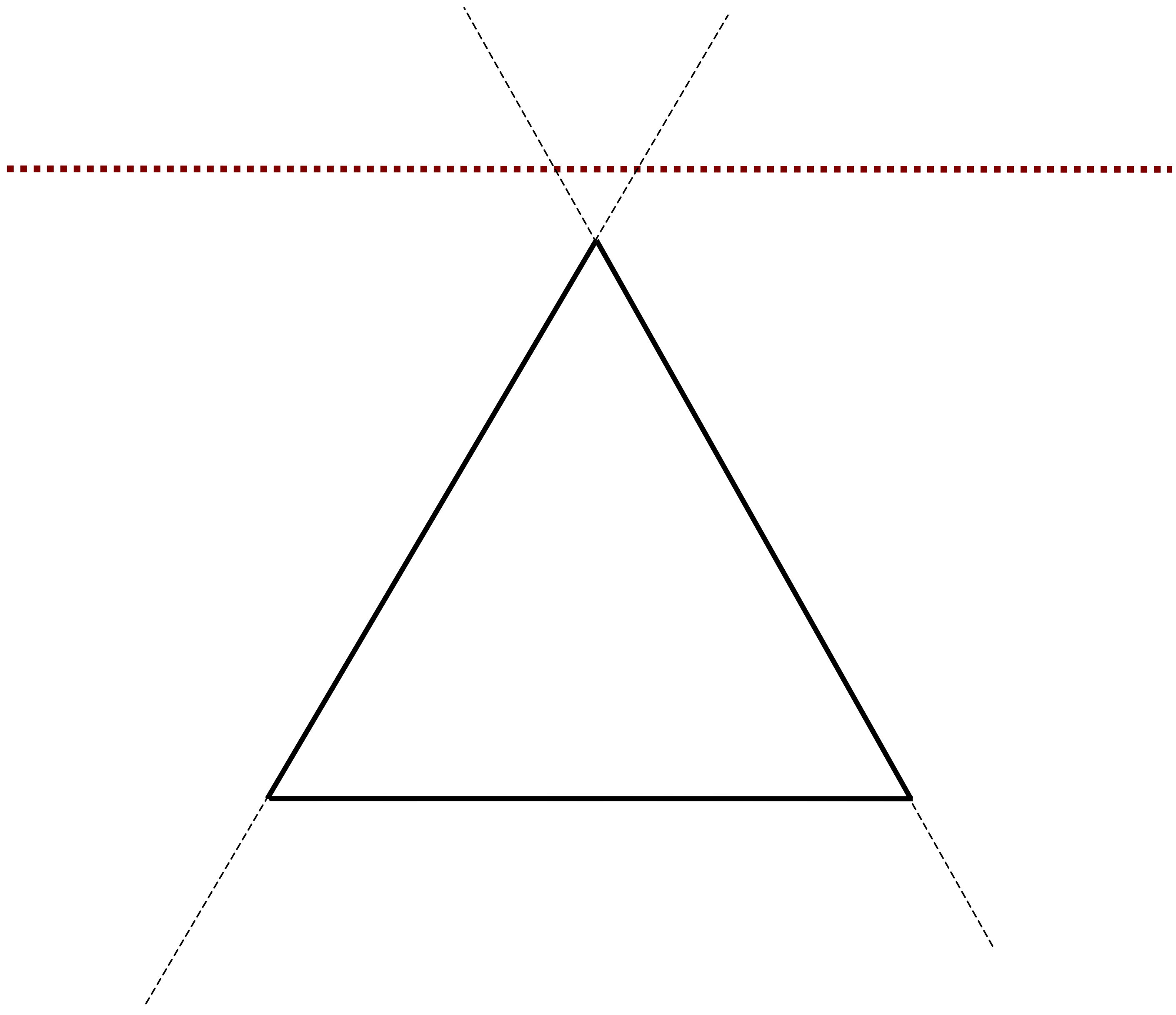
- Ilustracja „obliczeniowa”? (wizualizacja)

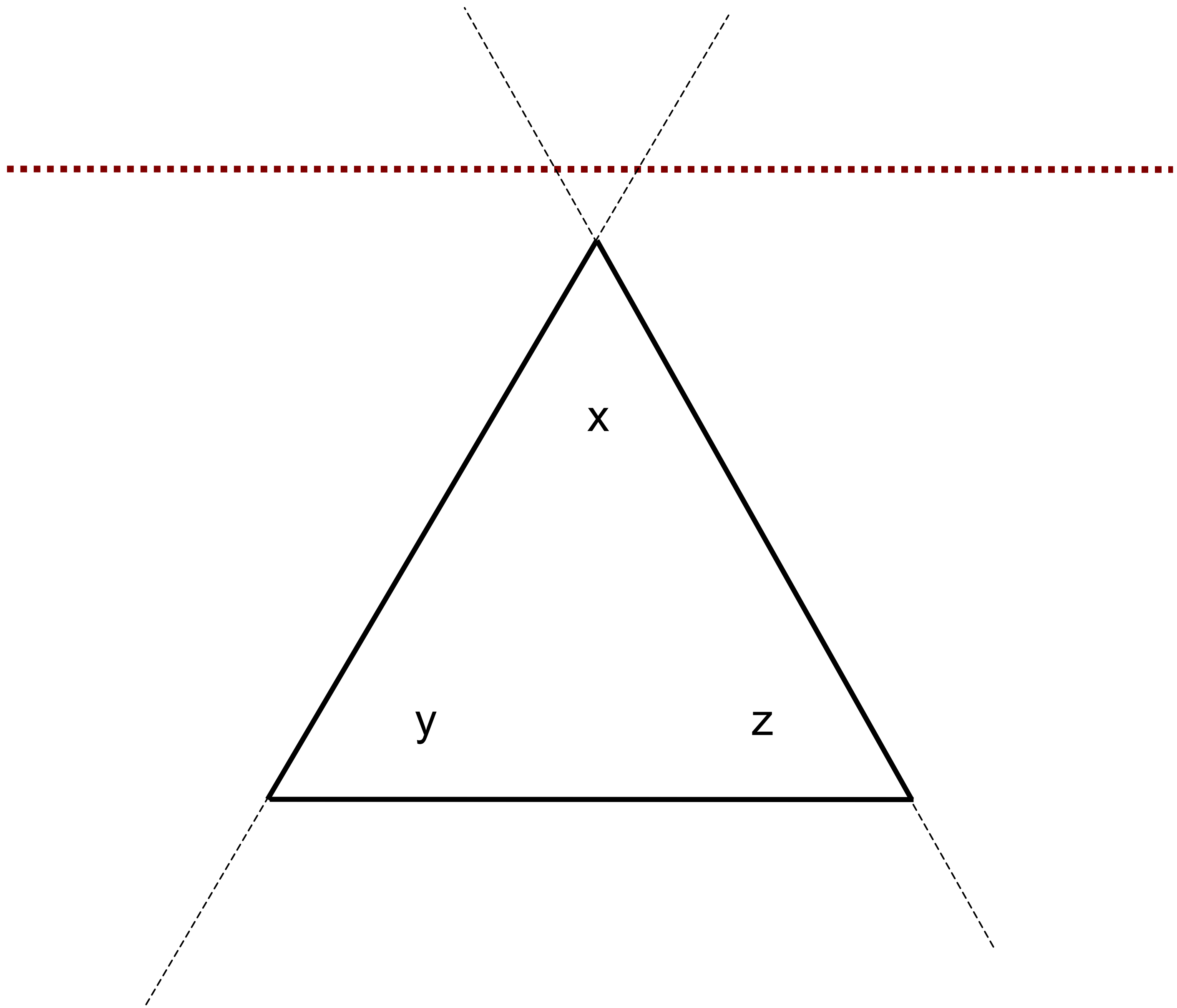


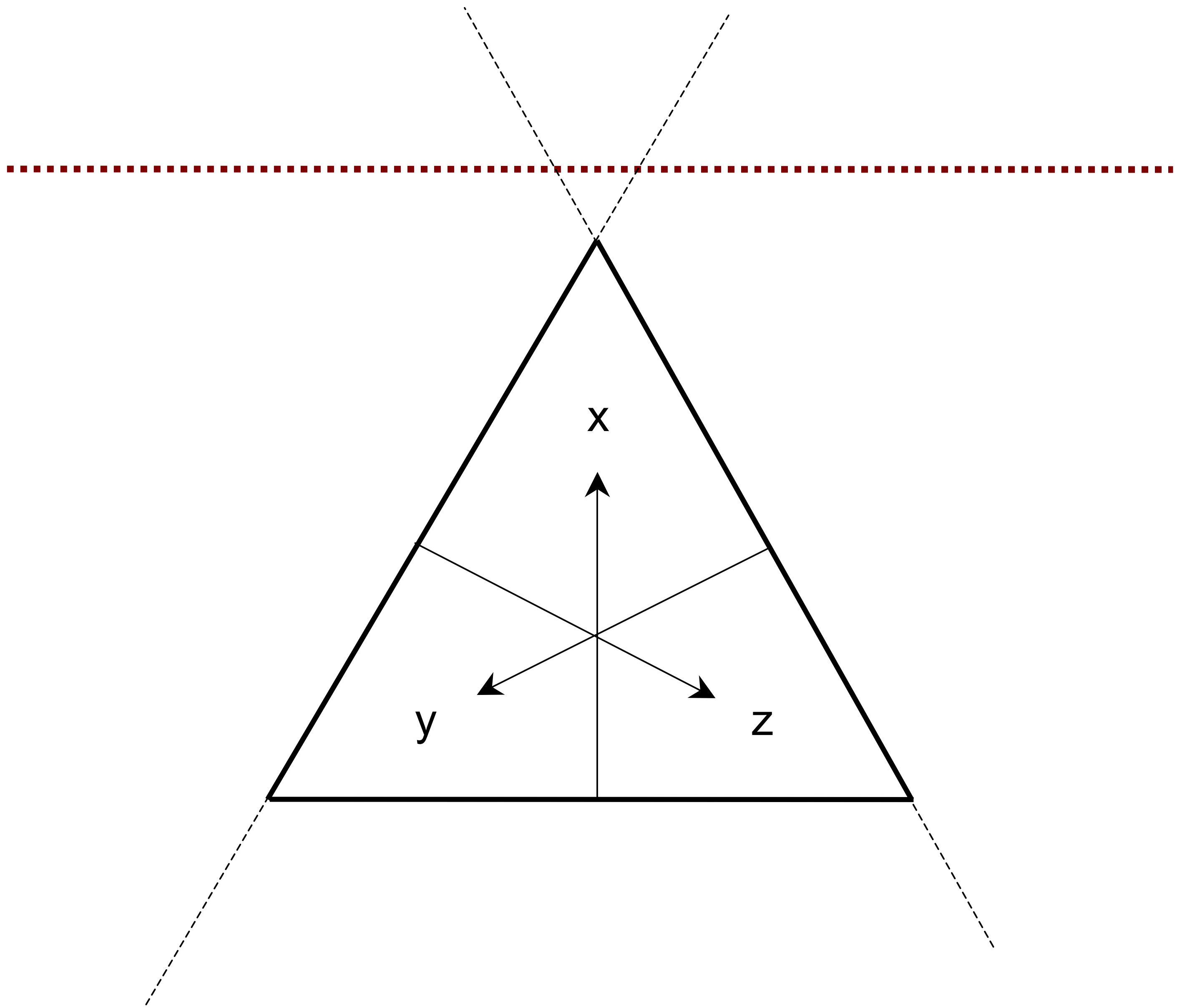


- Suma (wartościowanych) odległości każdego punktu od trzech boków trójkata wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty mają jednakowy kolor

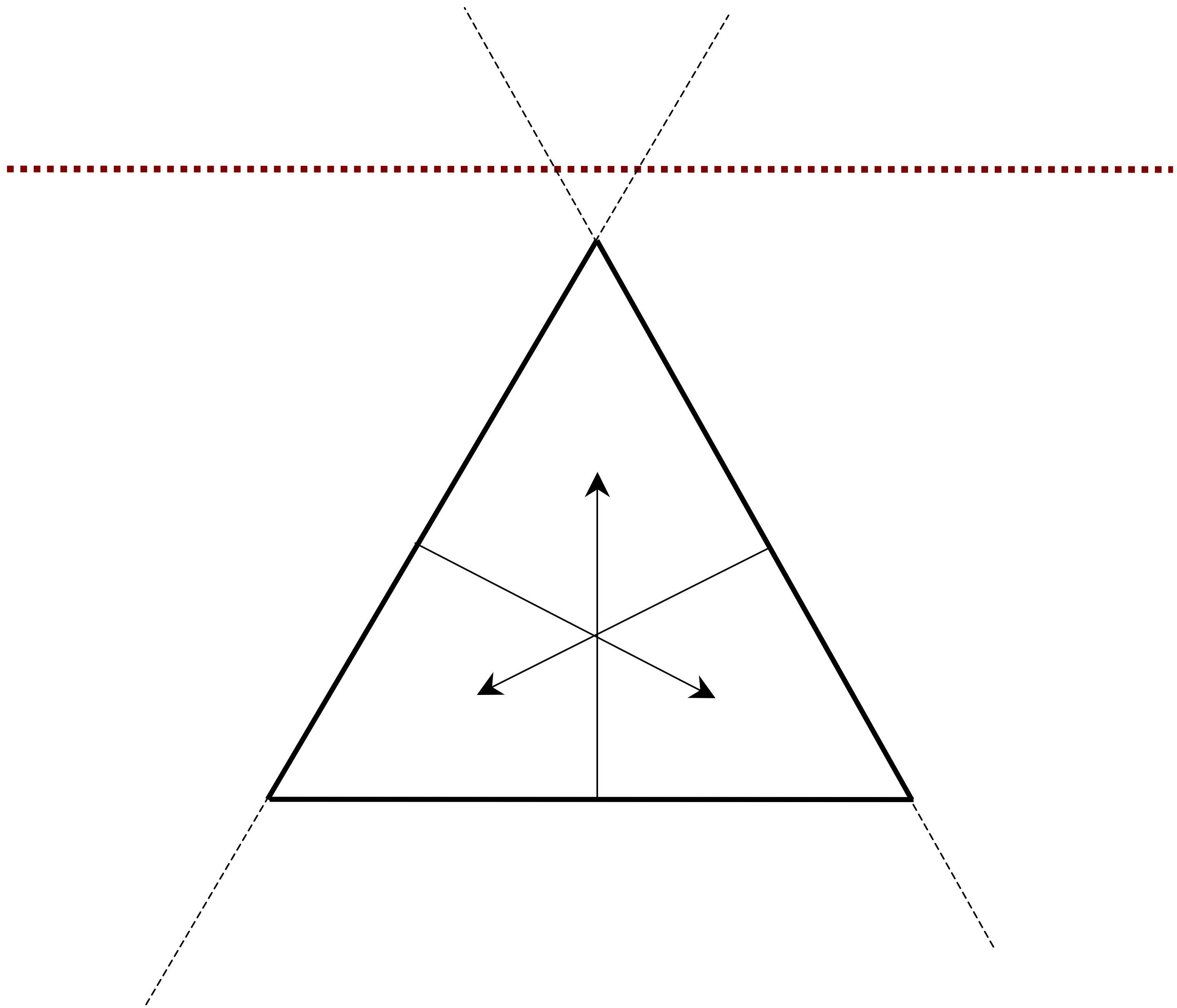


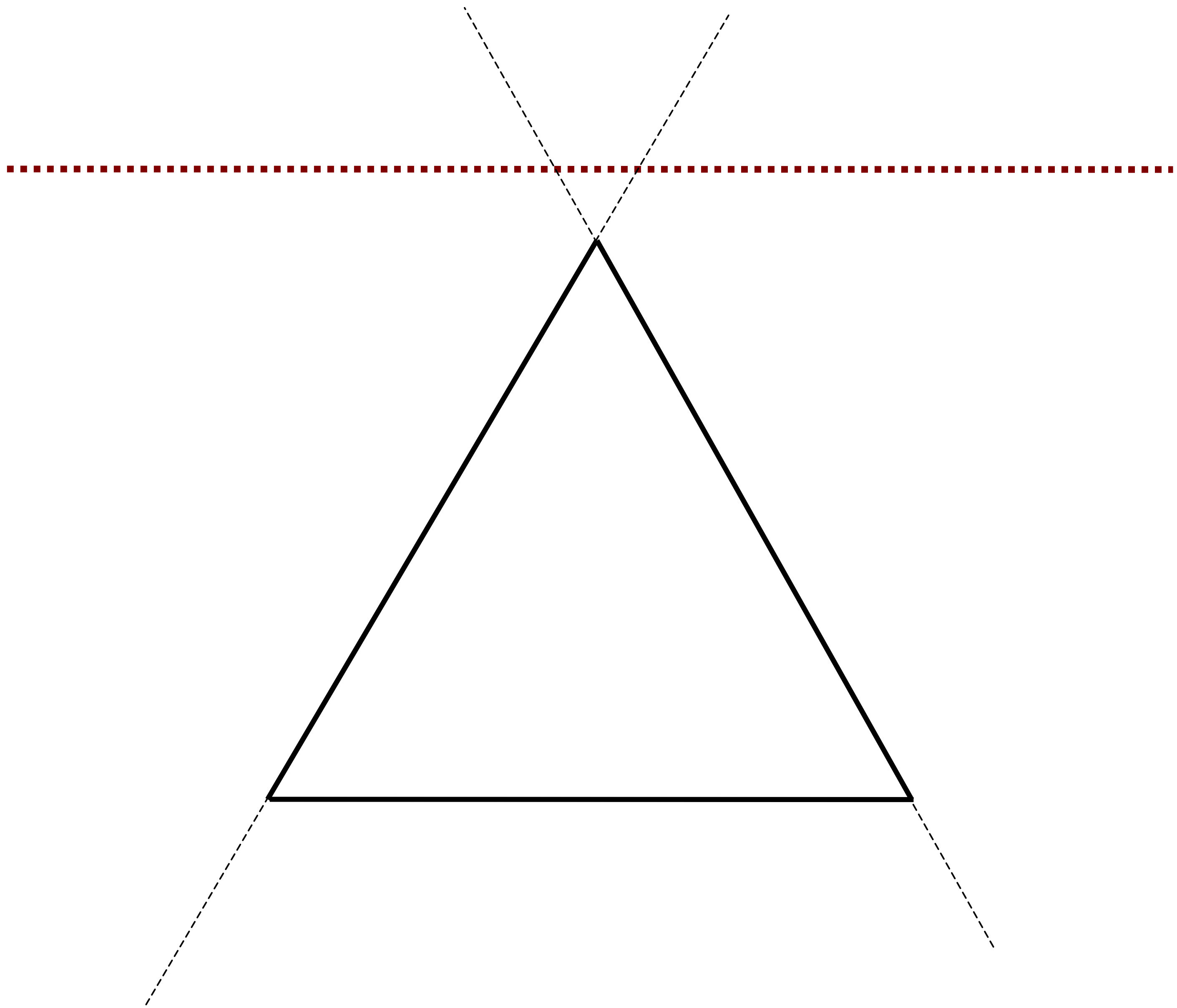


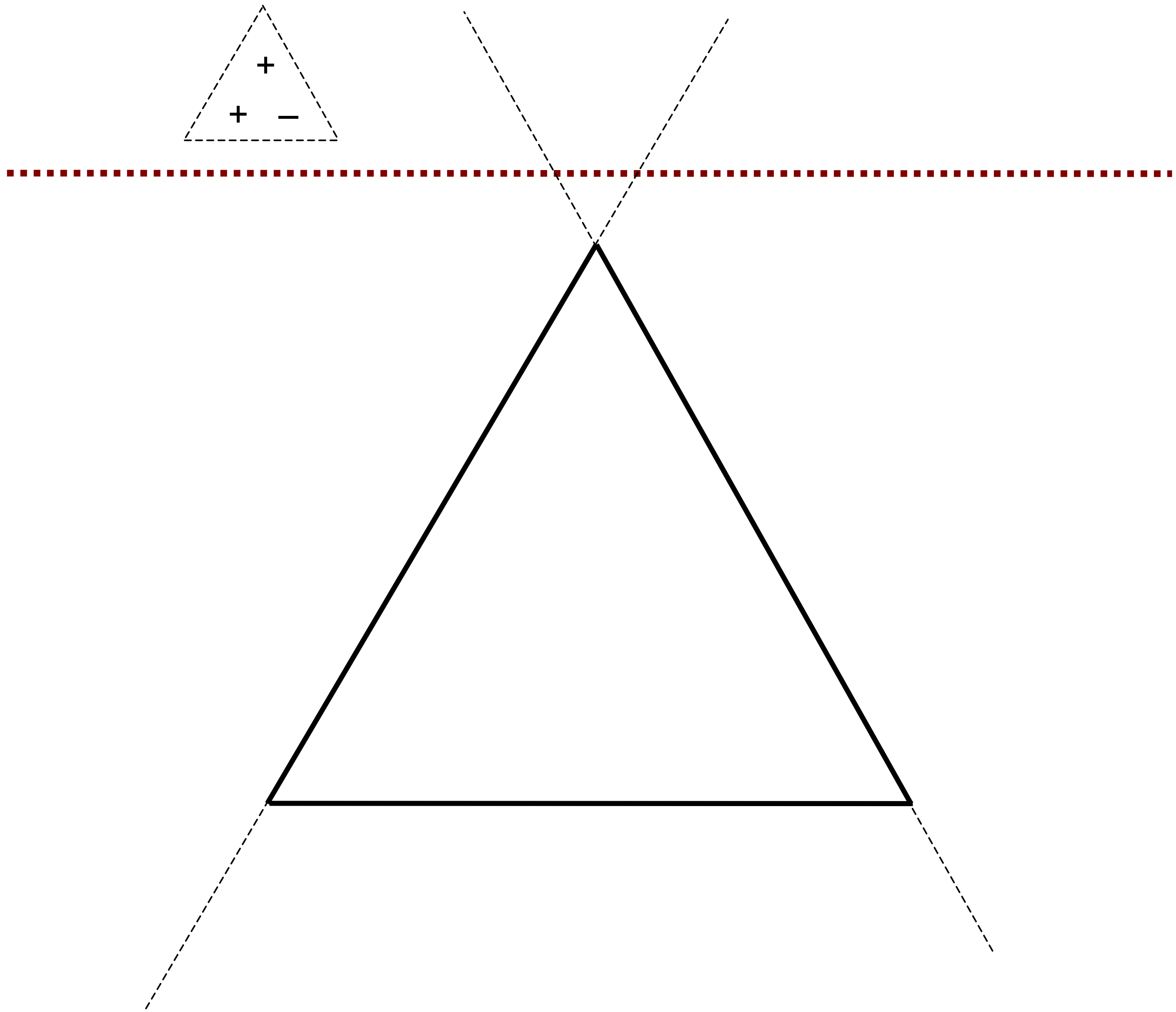

x
y
z

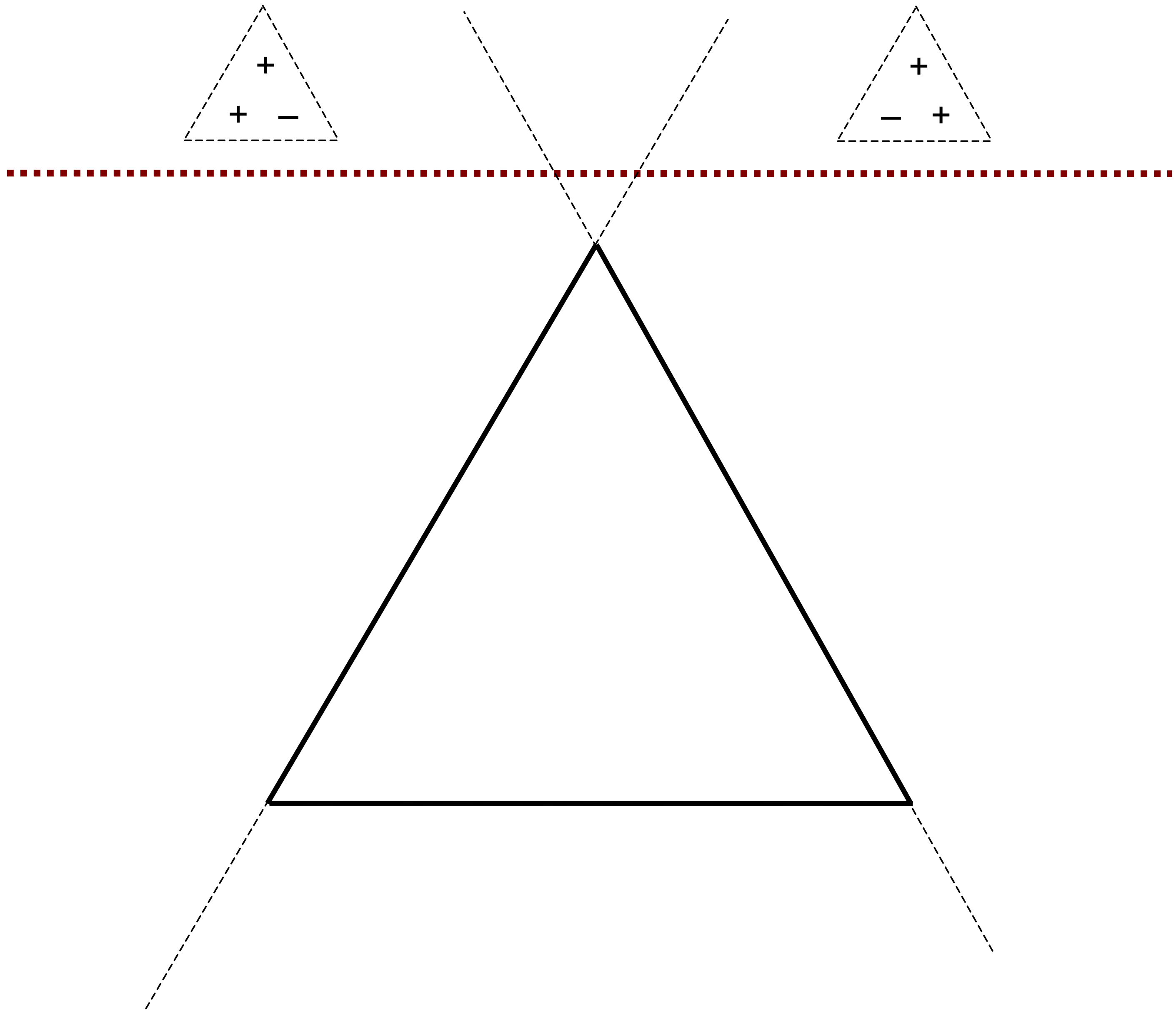


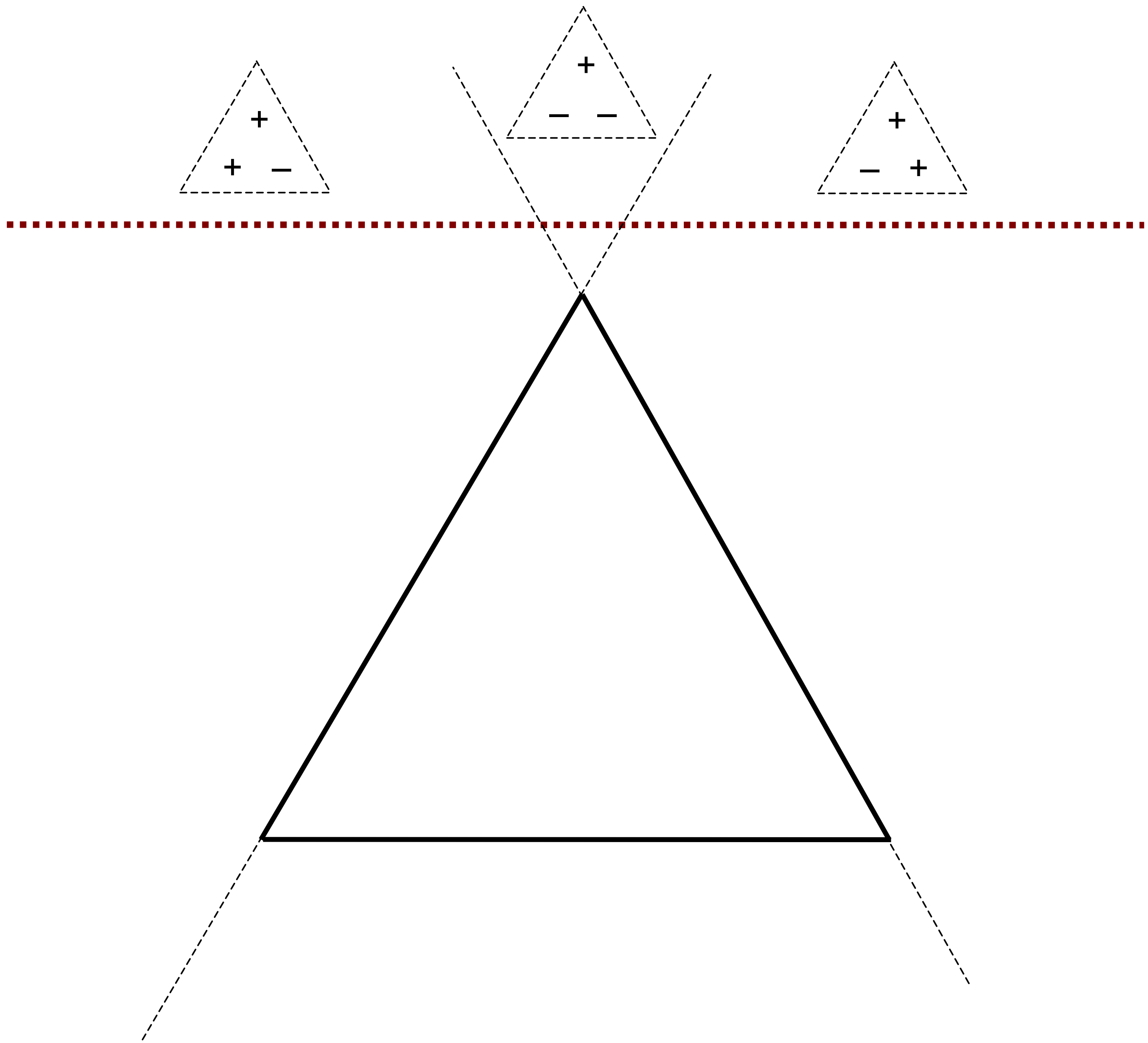
x
y
z

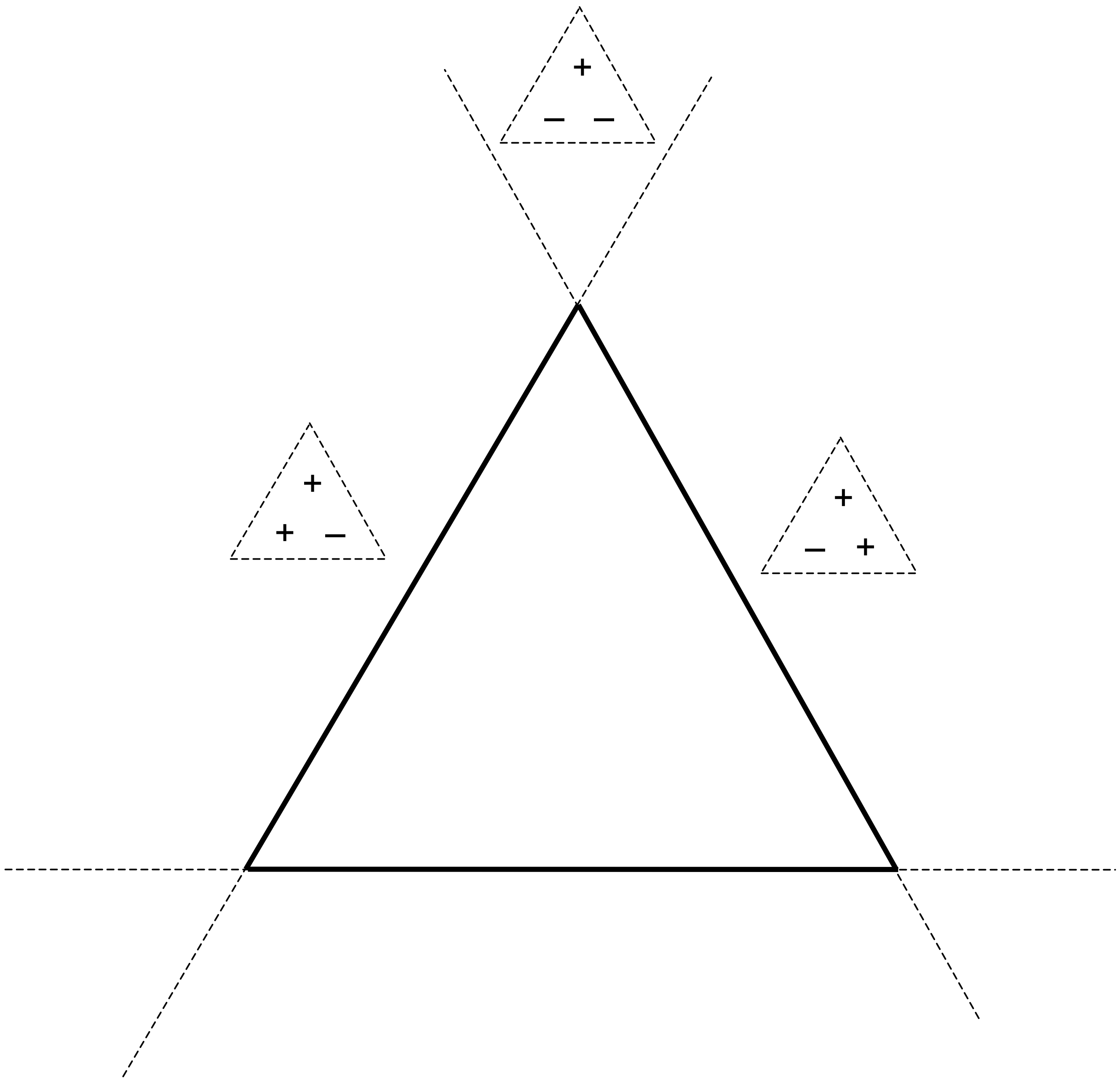


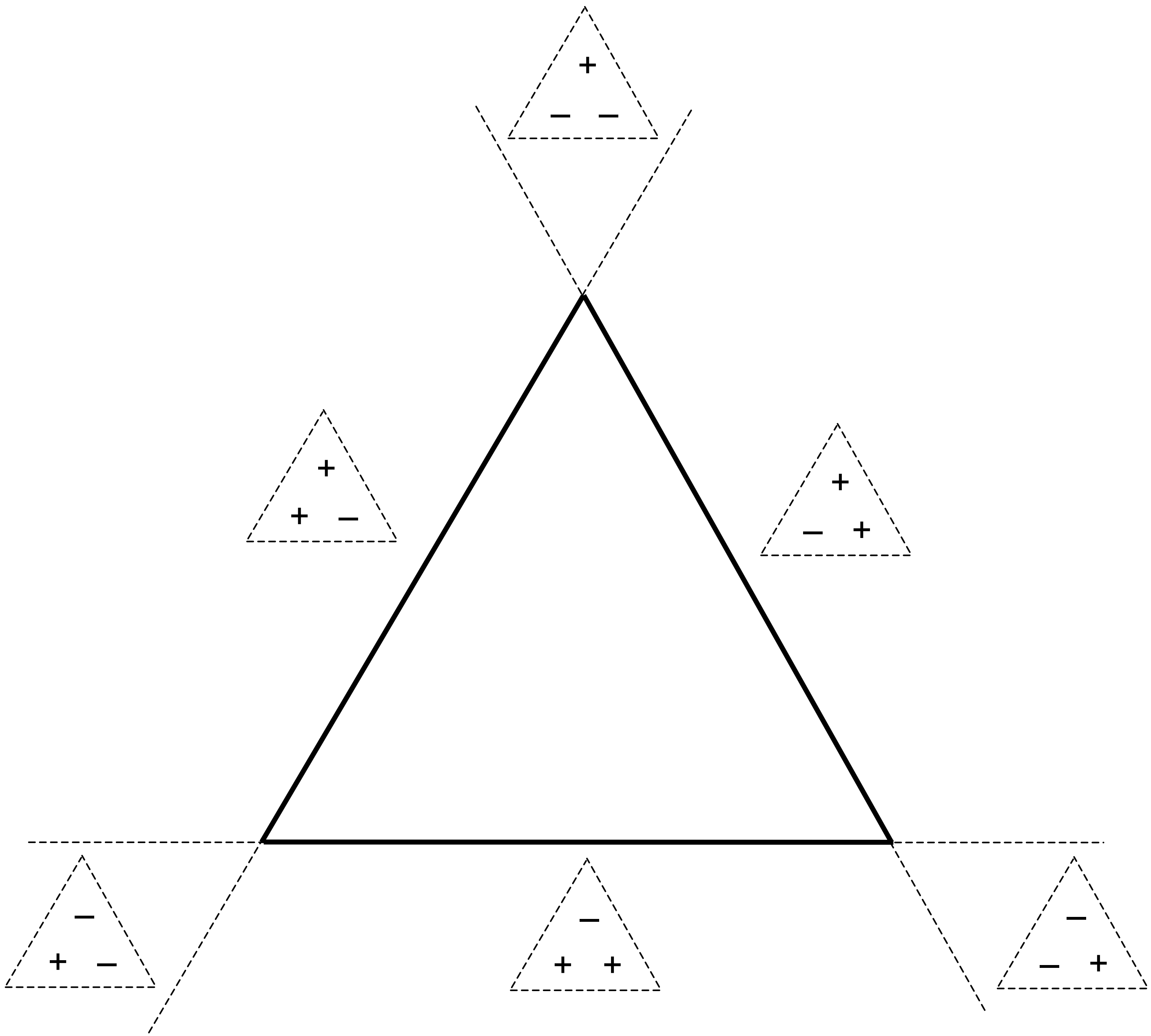


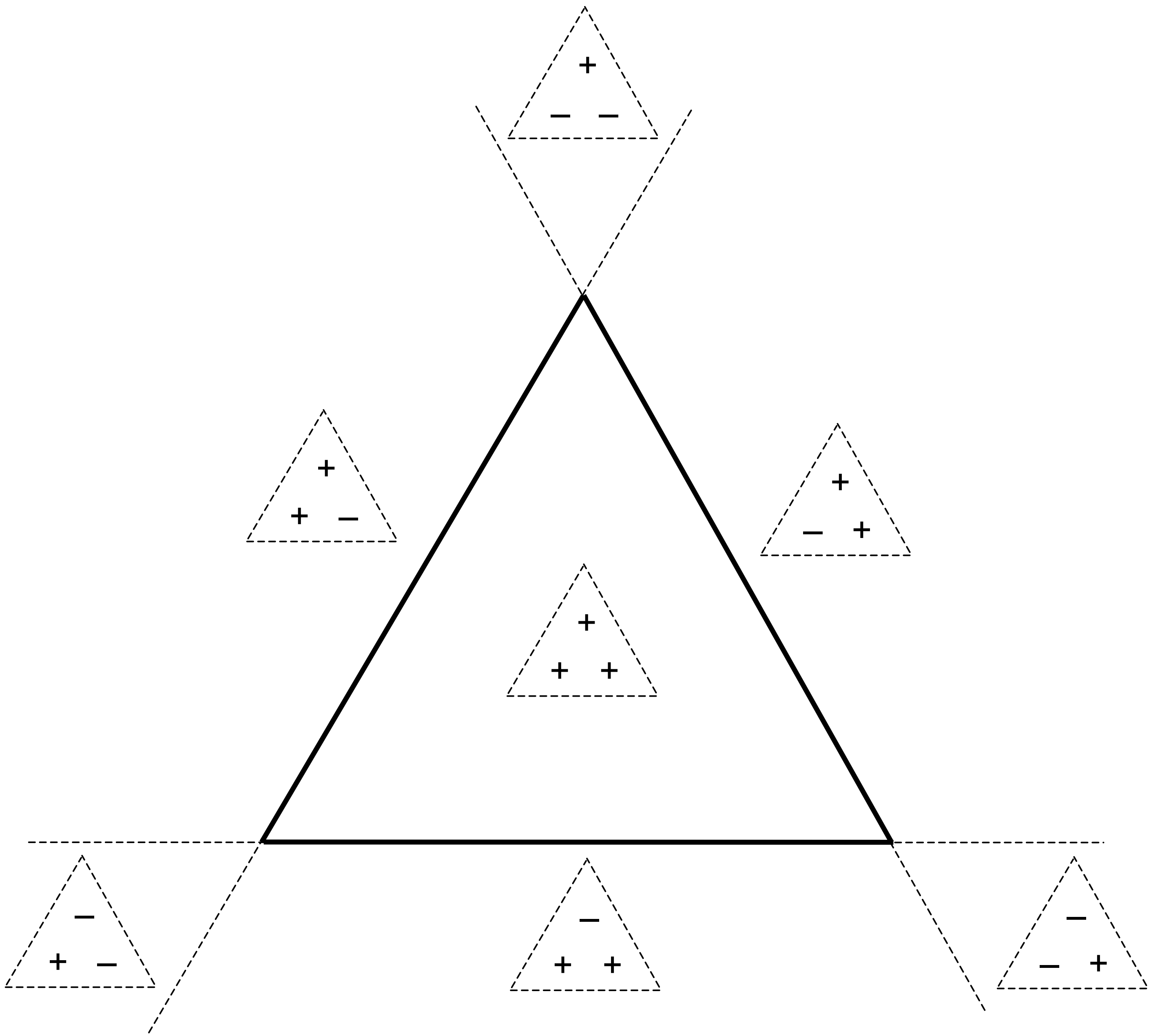












Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia twierdzenia Viviani'ego
  - $n = 0$?
  - $n < 0$?
  - $s_1, s_2, s_3 \to 0$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia twierdzenia Viviani'ego
  - trójkąt równoboczny i odległości ze znakiem naraz

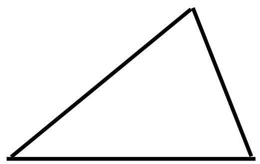
- Okazuje się, że obydwa uogólnienia, tzn.
  - uogolnienie z trojkąta równobocznego na trójkąt dowolny
  - uogolnienie odległości na odległości ze znakiem

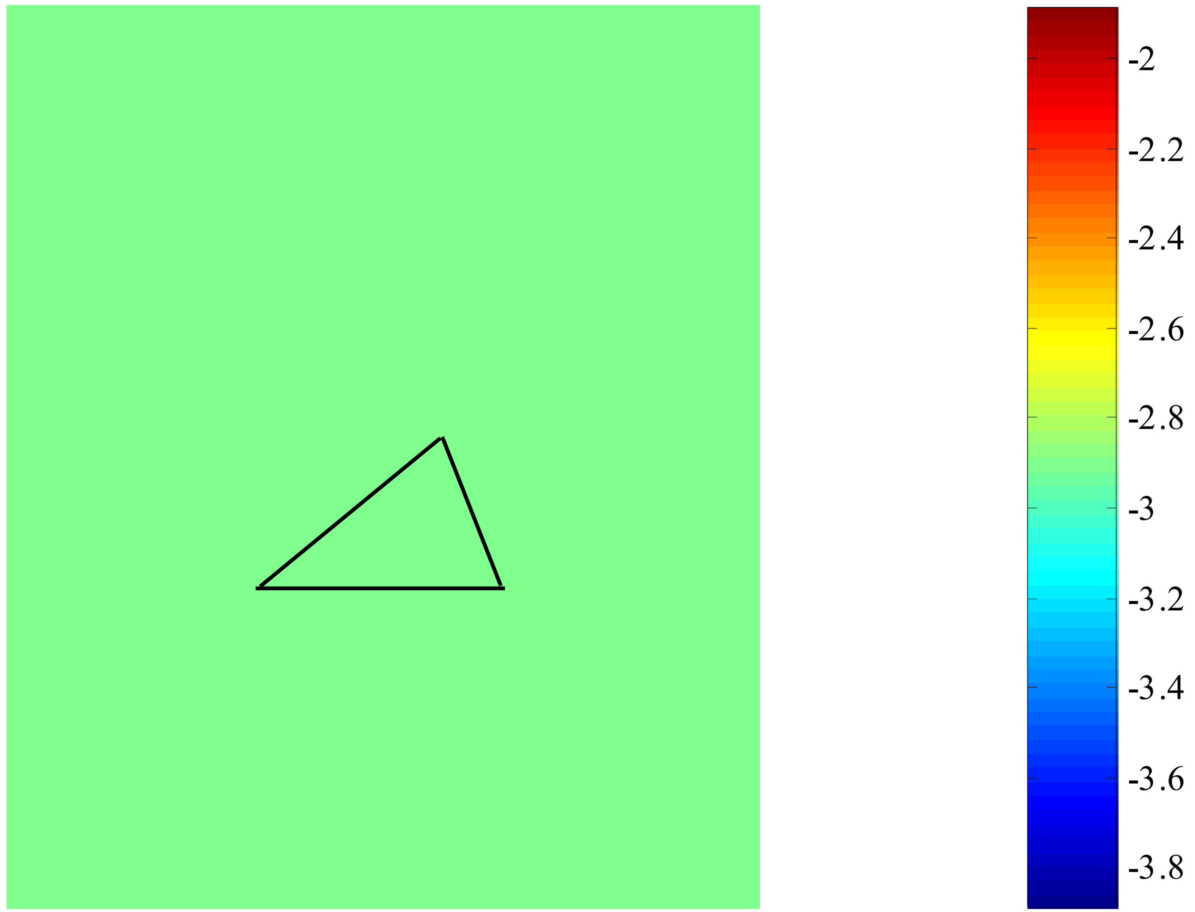
  można zastosować jednocześnie
- W rezultacie zachodzi równanie

  $\pm s_1 x \pm s_2 y \pm s_3 z = \text{const}$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Ilustracja „obliczeniowa”? (wizualizacja)





- Suma (wartościowanych) odległości każdego punktu od trzech boków trójkata wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty mają jednakowy kolor

...

Barycentryczny układ współrzędnych

- Uogólnienia twierdzenia Viviani'ego
  - czworościan

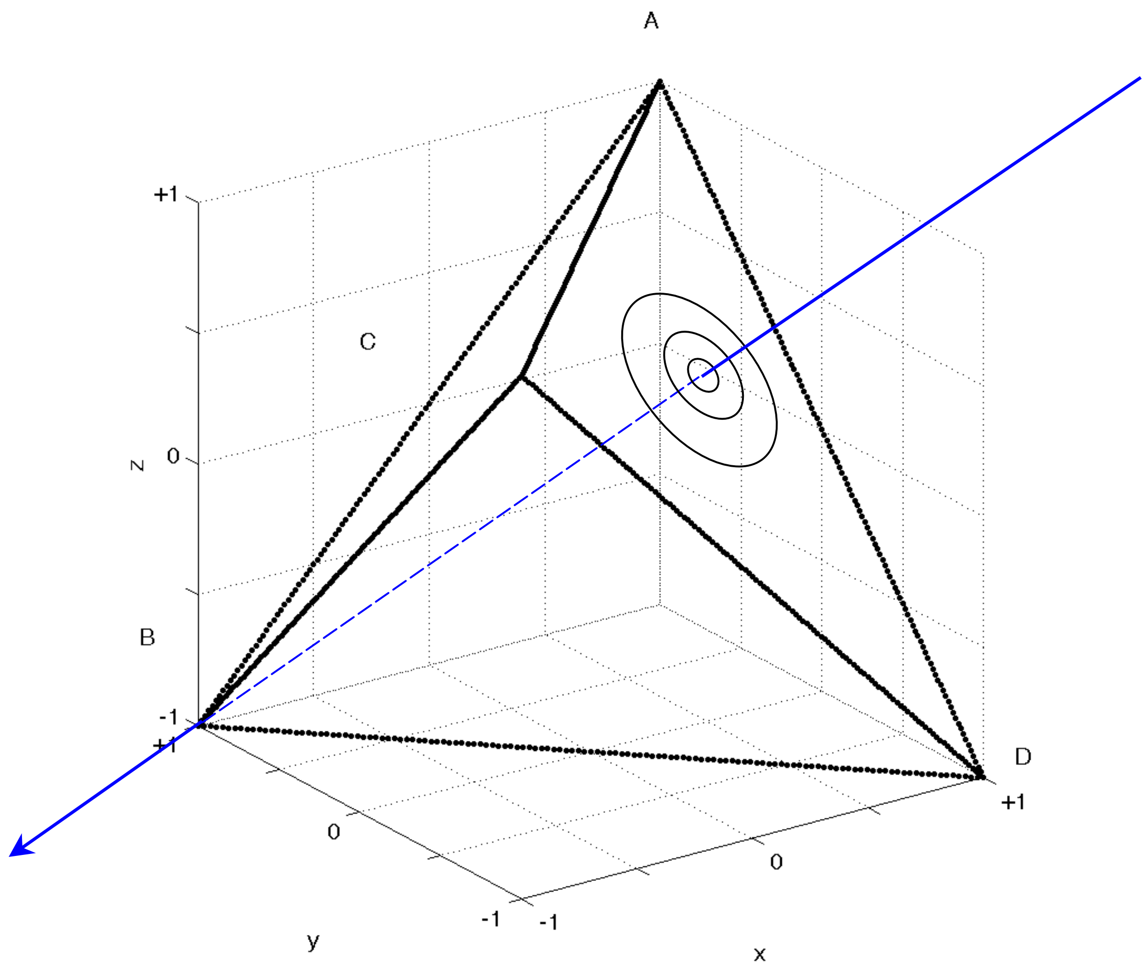
Czworościan

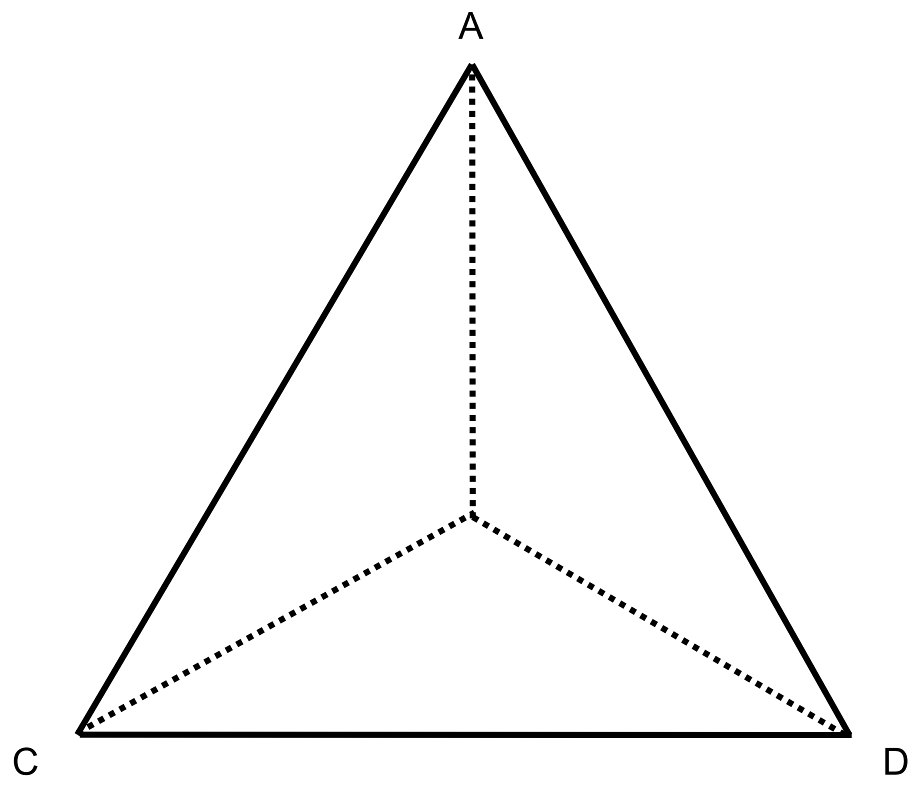
- Czworościan regularny (dalej krótko: czworościan)
  - długość krawędzi: a
  - długość wysokości ścianki: $h = 3^{1/2}/2 \cdot a$
  - pole powierzchni ścianki: $P = 3^{1/2}/4 \cdot a^2$
  - długość wysokości: $H = 6^{1/2}/3 \cdot a$
  - objętość: $V = 2^{1/2}/12 \cdot a^3$
- Dalej nazywany krótko: czworościan
  - ang. (regular) terahedron

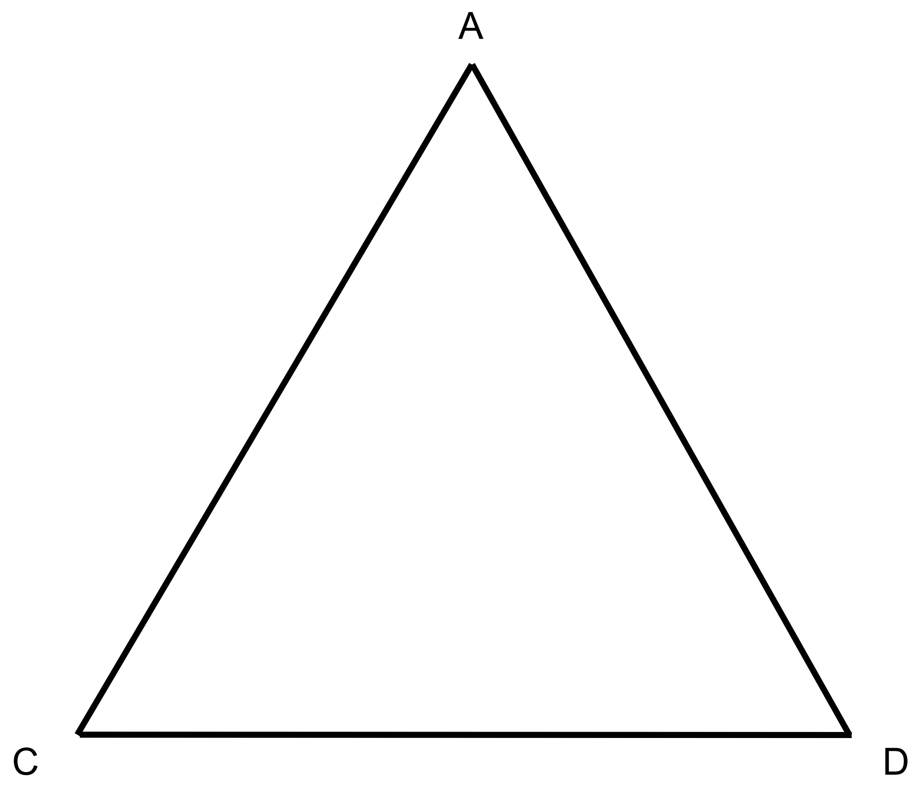
Czworościan

- Czworościan
  - simpleks 3D
  - ciekawa figura
    - przykład „uogólnienia” trójkąta i kwadratu, razem z:
      - piramidą
      - ośmiościanem foremnym (= dwie piramidy)
    - ciekawe rzuty
  - siatka: trójkąt równoboczny lub równoległobok

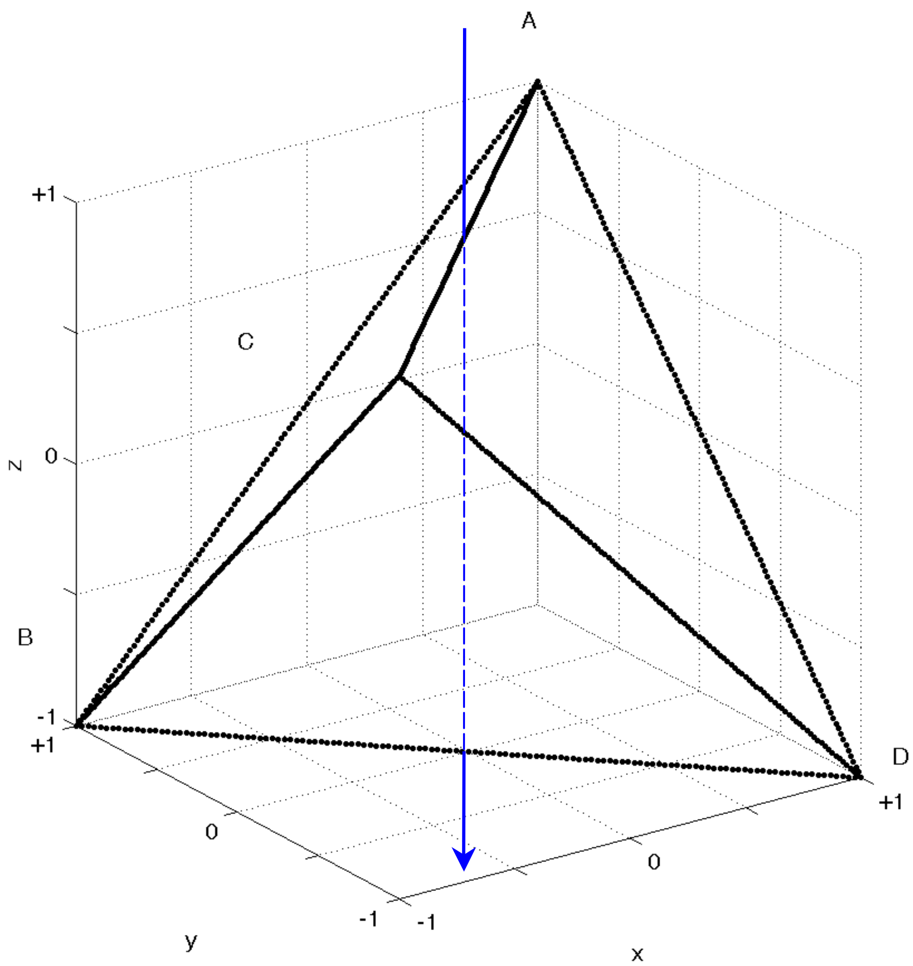
Czworościan

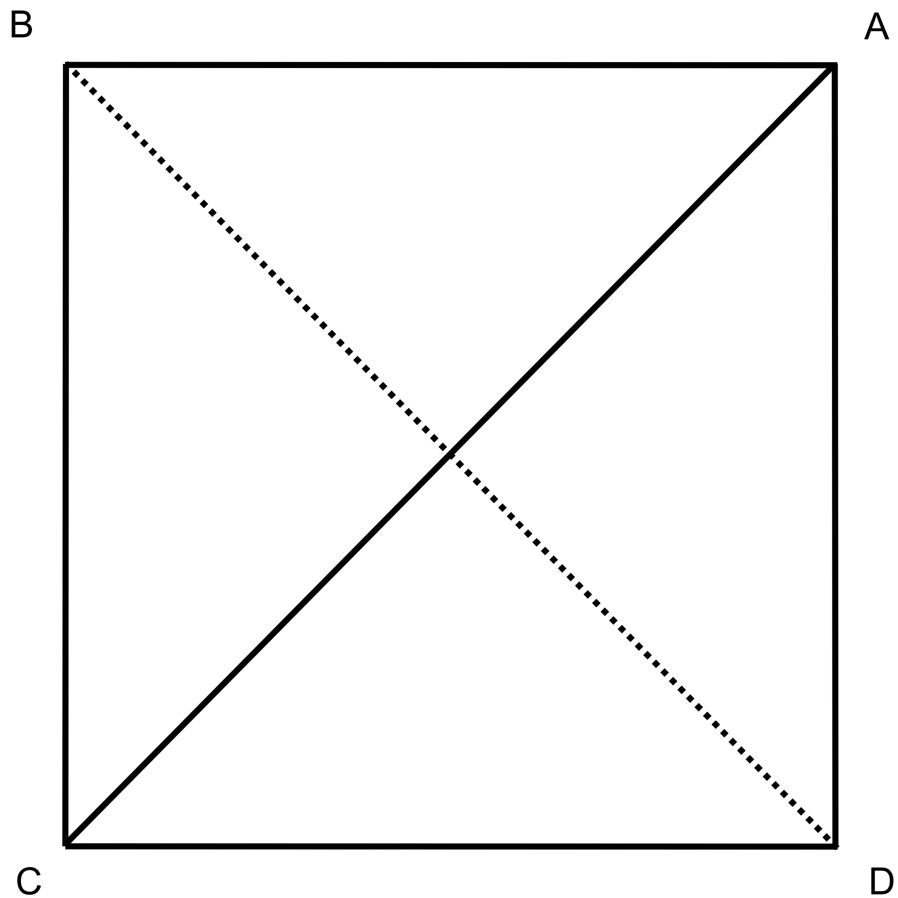


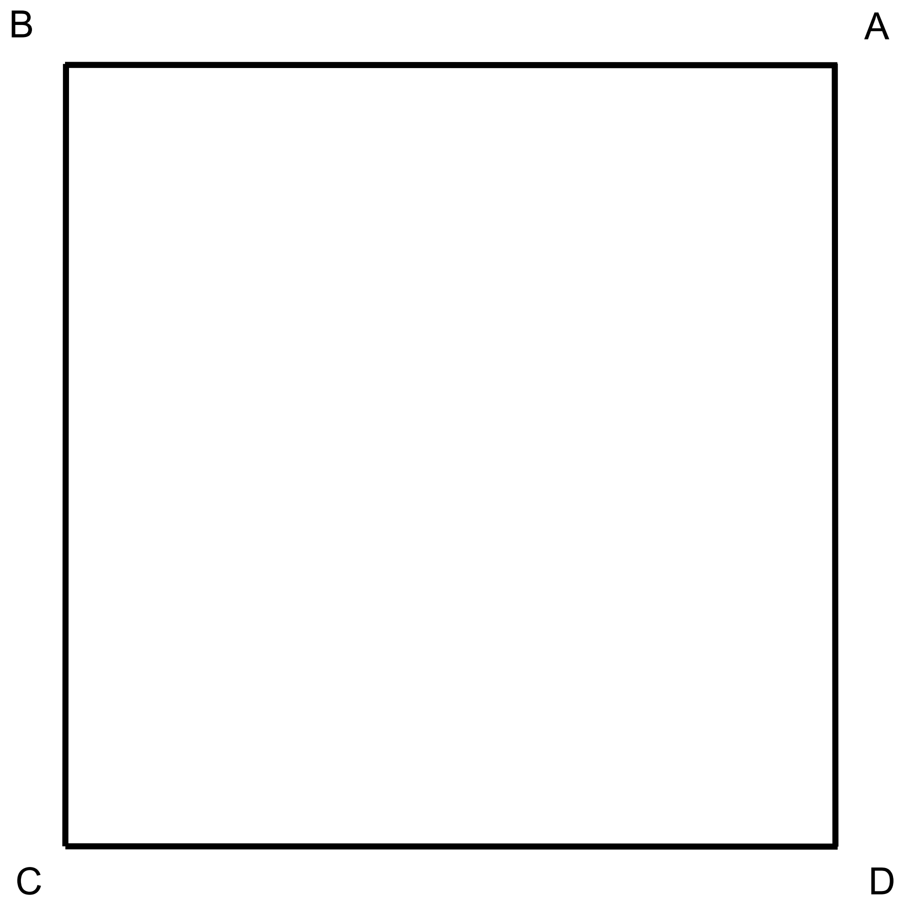

A
C
D


A
C
D

Czworościan




B
A
C
D


B
A
C
D

Czworościan

- Czworościan można wpisać w sześcian (i taka właśnie konstrukcja będzie prezentowana poniżej)
  - wierzchołki sześcianu: punkty o współrzędnych $[x,y,z]^T$

$[+1,+1,+1]^T$

$[+1,+1,-1]^T$

$[+1,-1,+1]^T$

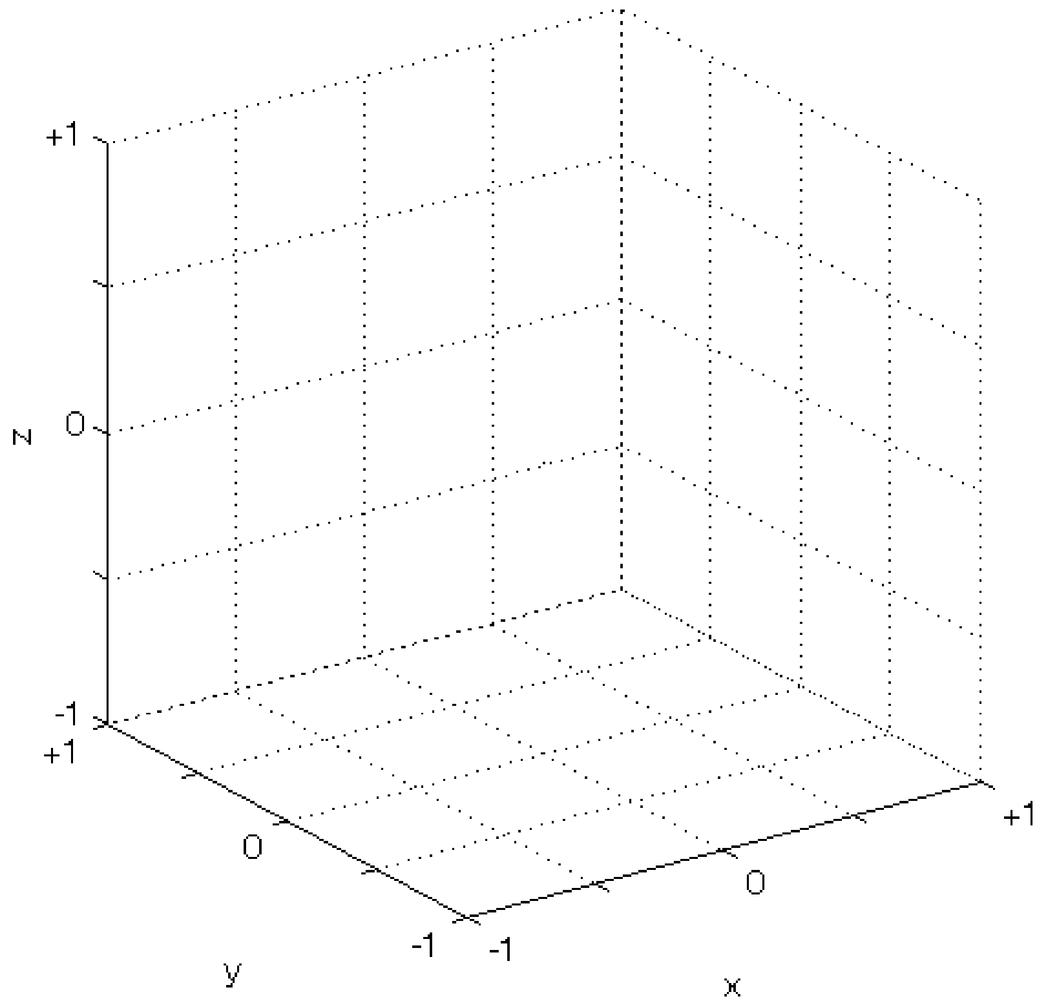
$[+1,-1,-1]^T$

$[-1,+1,+1]^T$

$[-1,+1,-1]^T$

$[-1,-1,+1]^T$

$[-1,-1,-1]^T$

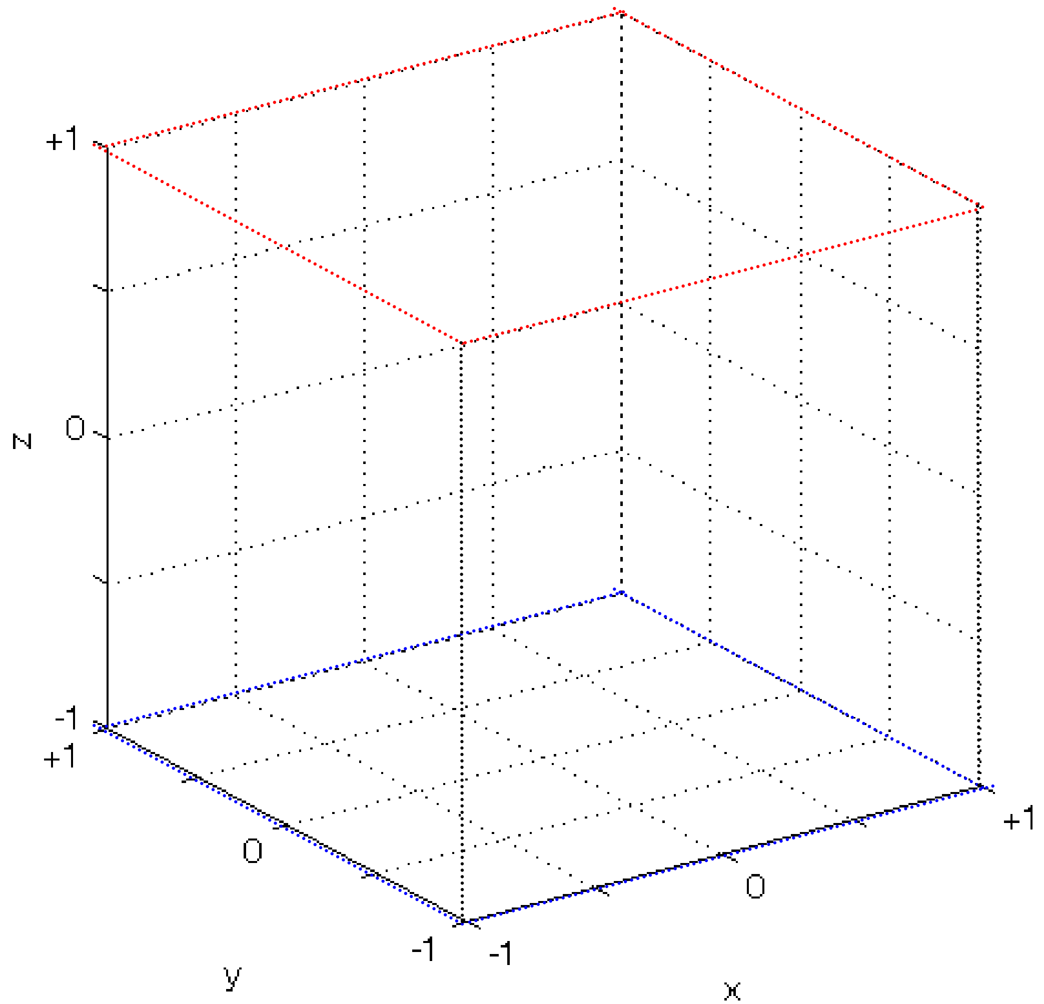


+1
0
-1
z
+1
0
-1
y
-1
0
+1
x

Czworościan

- Czworościan można wpisać w sześcian
  (i taka właśnie konstrukcja będzie prezentowana poniżej)
  - wierzchołki sześcianu: punkty o współrzędnych $[x,y,z]^T$

	$[+1,+1,+1]^T$	
(wyższy)	$[+1,+1,-1]^T$	kwadrat
	$[+1,-1,+1]^T$	
	$[+1,-1,-1]^T$	
	$[-1,+1,+1]^T$	
(niższy)	$[-1,+1,-1]^T$	kwadrat
	$[-1,-1,+1]^T$	
	$[-1,-1,-1]^T$	

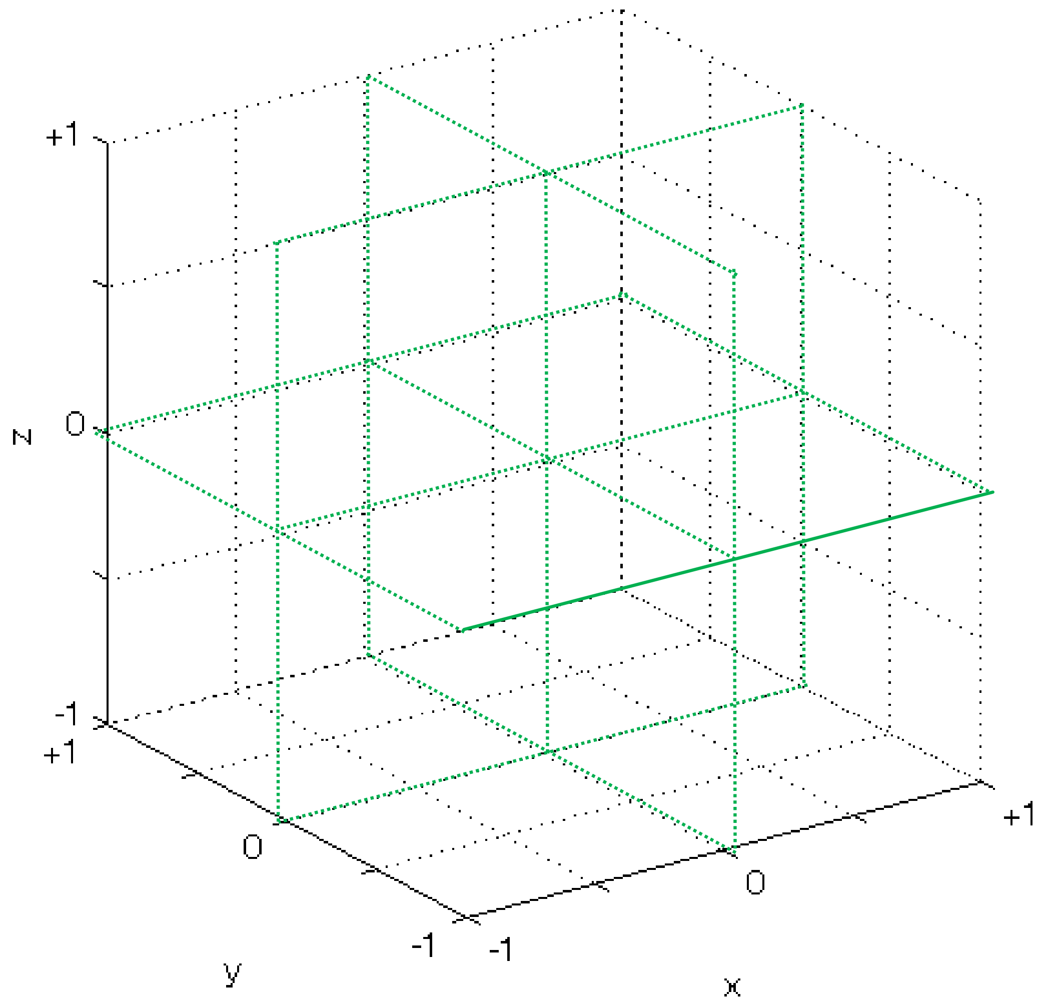


+1
0
z
-1
+1
0
y
-1
-1
0
x
+1

Czworościan

- Czworościan można wpisać w sześcian
  (i taka właśnie konstrukcja będzie prezentowana poniżej)
  - środek sześcianu: punkt o współrzędnych $[x,y,z]^T$

    $[0, 0, 0]^T$



+1
0
-1
z
+1
0
-1
y
-1
0
+1
x

Czworościan

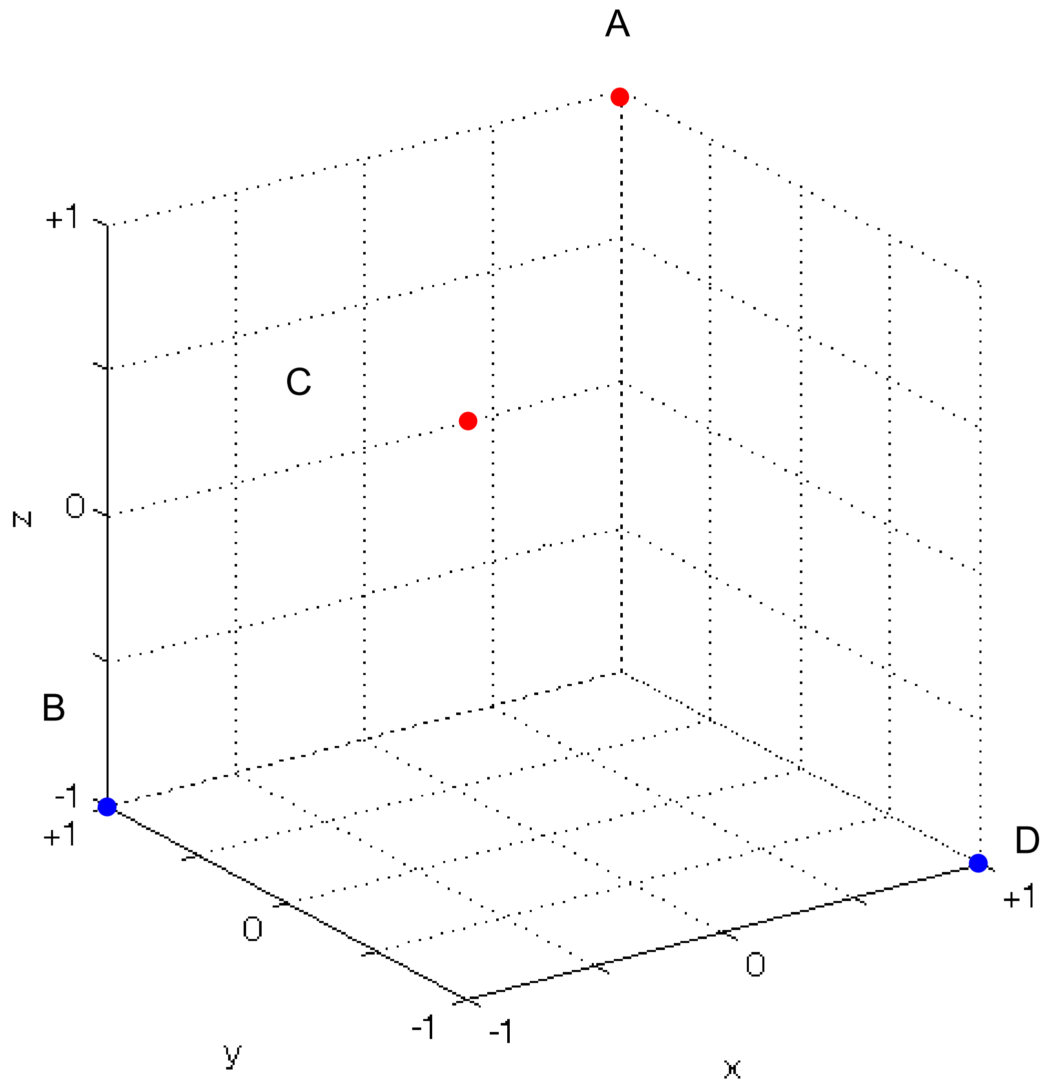
- Czworościan można wpisać w sześcian, c.d.
  - wierzchołki czworościanu: punkty o współrzędnych $[x,y,z]^T$

    $[+1,+1,+1]^T$ (A)

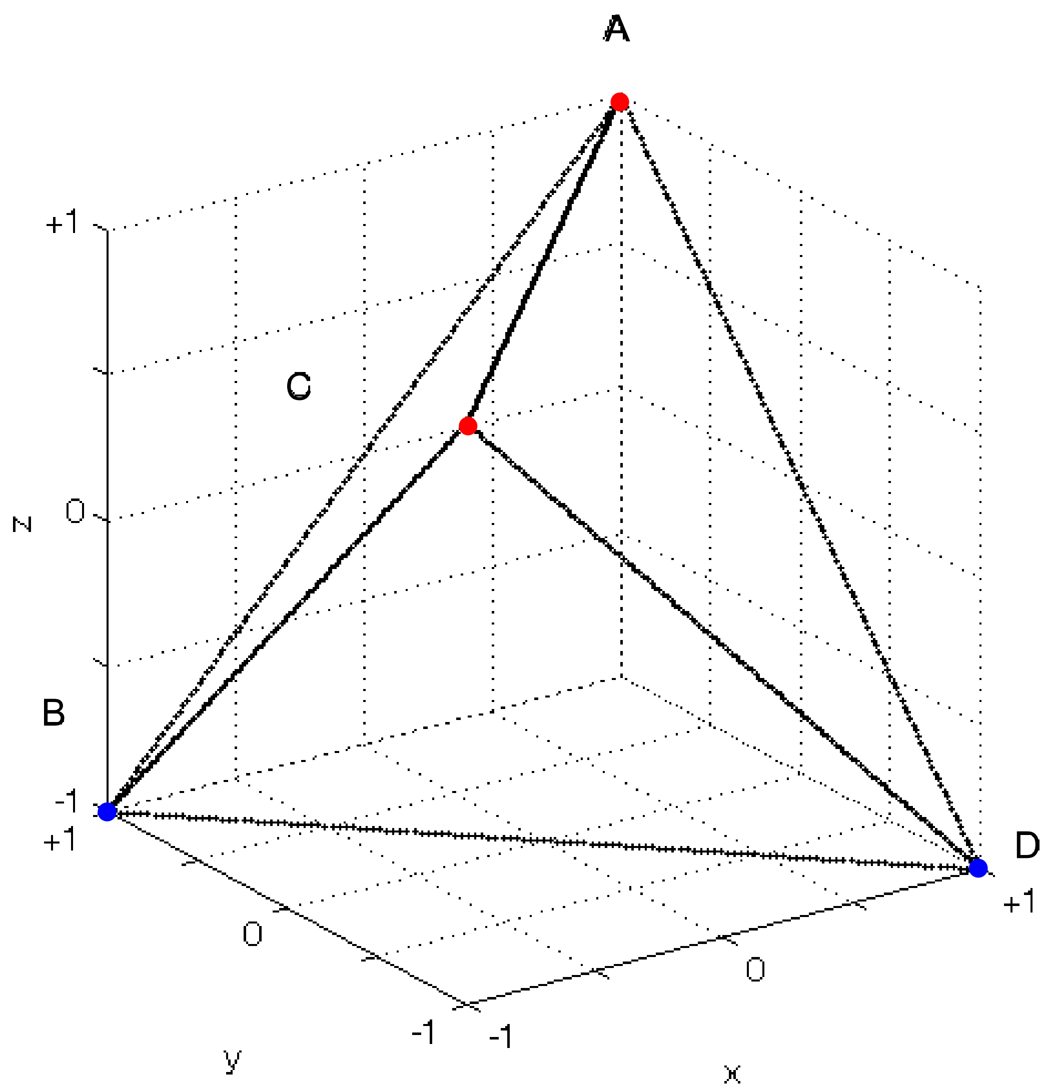
    $[-1,+1,-1]^T$ (B)

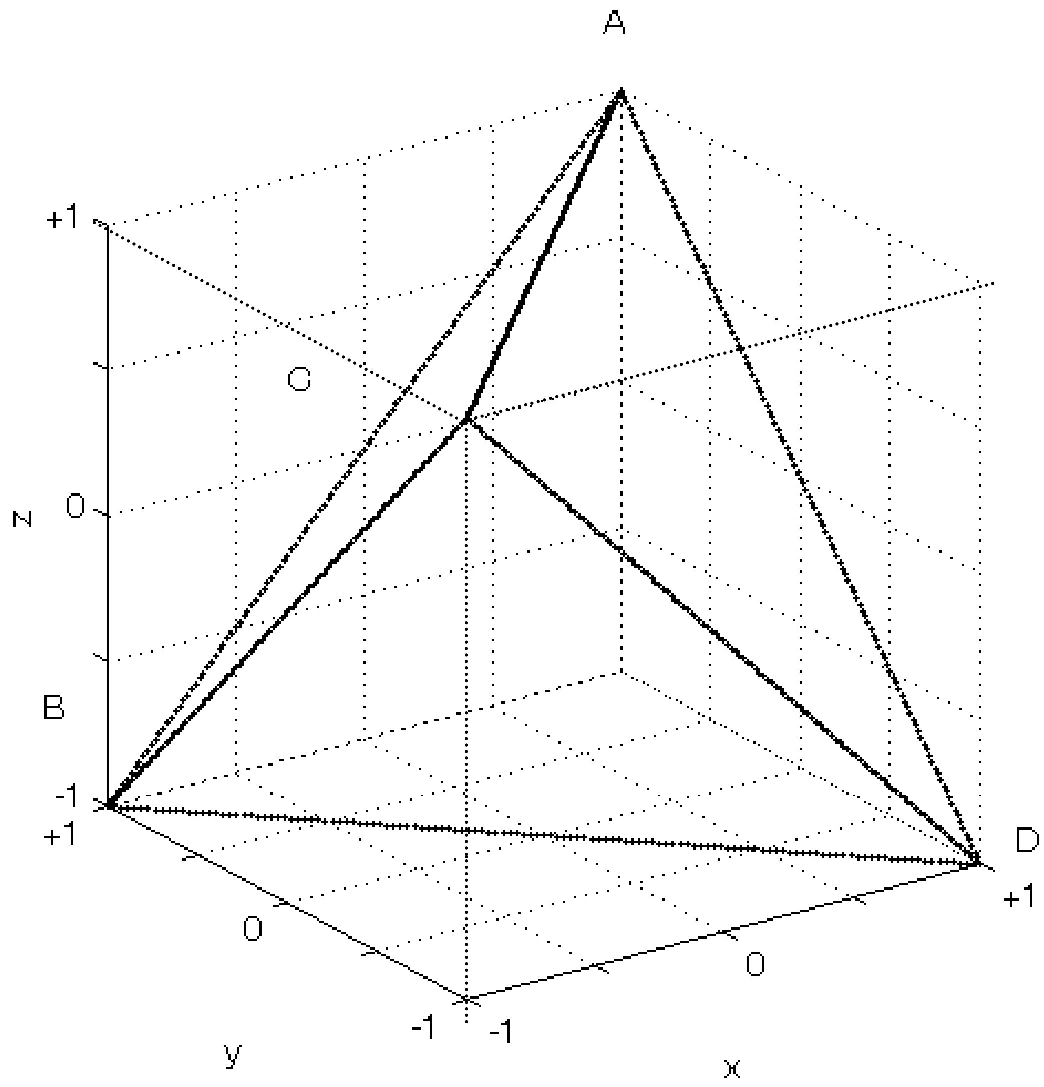
    $[-1,-1,+1]^T$ (C)

    $[+1,-1,-1]^T$ (D)



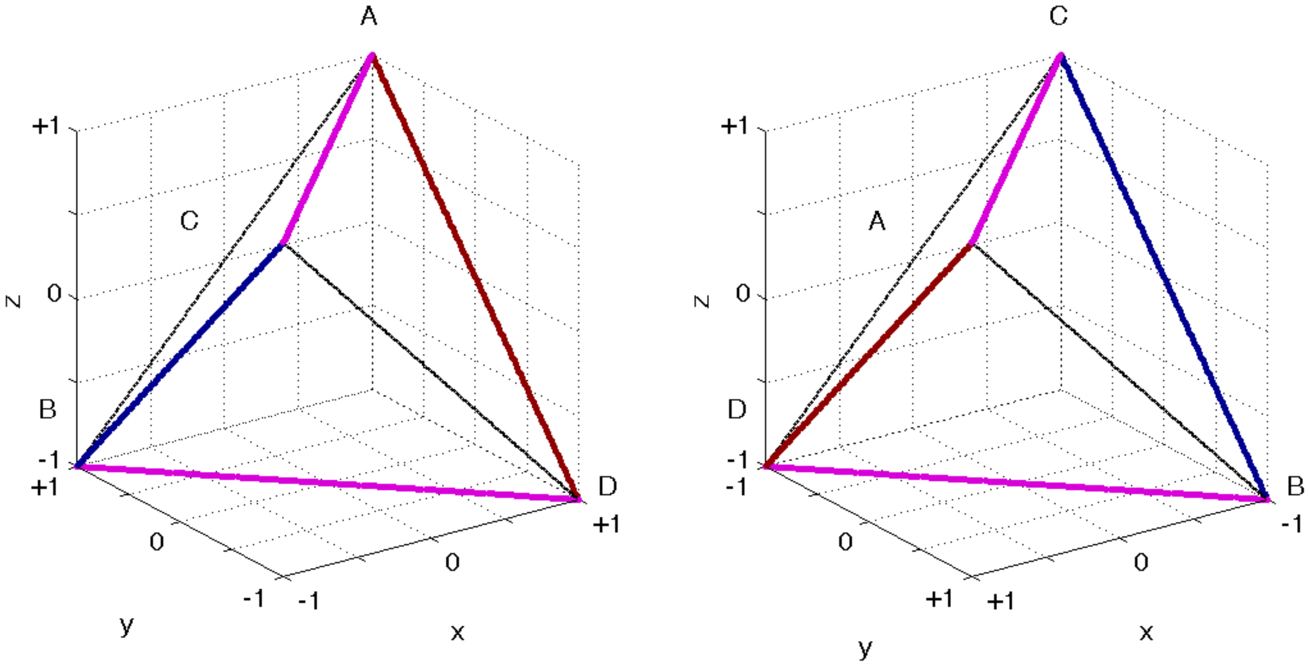
A
C
B
D
+1
0
-1
z
+1
0
-1
y
-1
0
+1
x


A
C
B
D
+1
0
-1
z
+1
0
-1
y
-1
0
+1
x



A
+1
C
z
0
B
-1
+1
D
+1
0
0
-1
-1
y
x

Standard 2-view

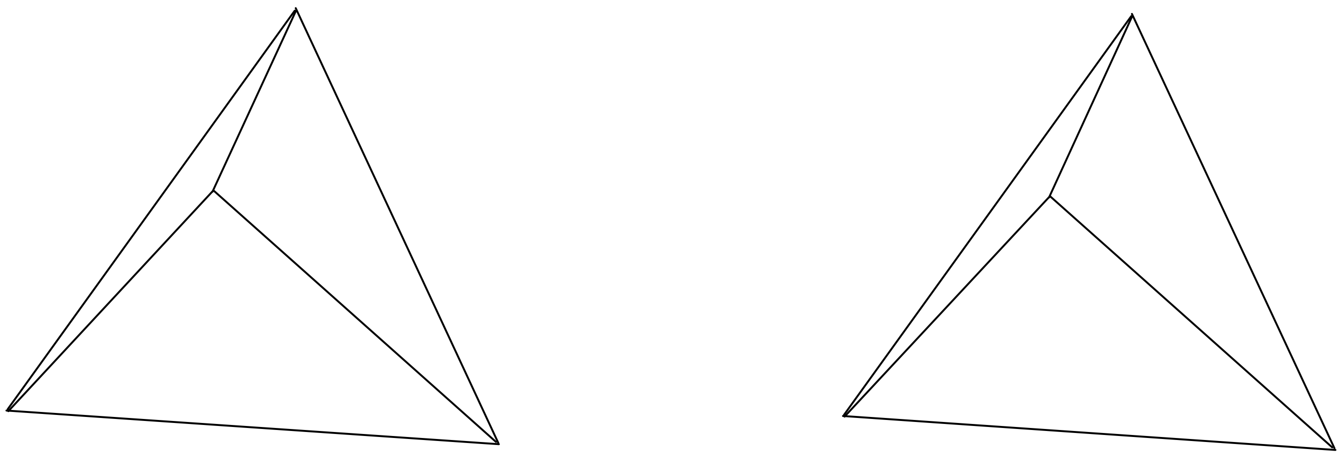


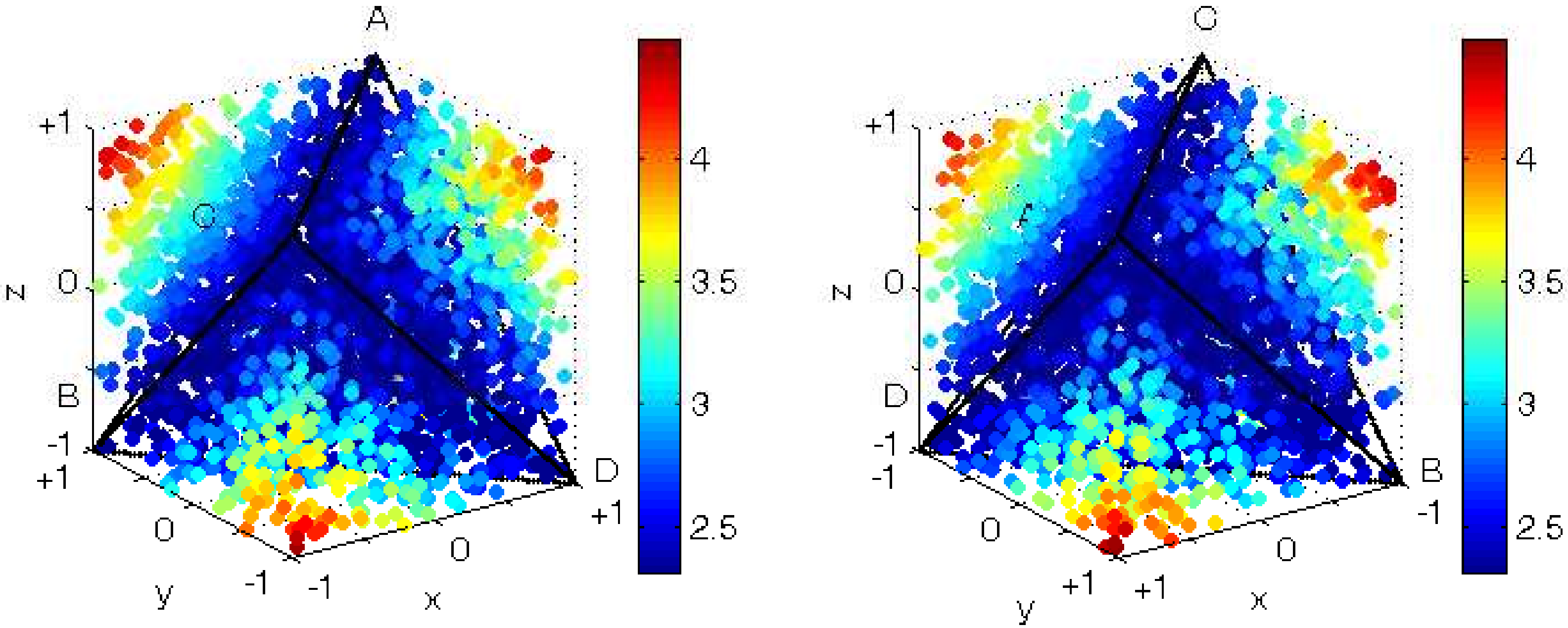
Czworościan

- Czworościan
  - na czworościan uogólnia się twierdzenie Viviani'ego
    - w czworościanie suma odległości dowolnego punktu znajdującego się wewnątrz tego czworościanu od wszystkich jego ścianek jest równa wysokości czworościanu
  - wniosek: układ współrzędnych trójkątnych można uogólnić na układ współrzędnych czworościennych

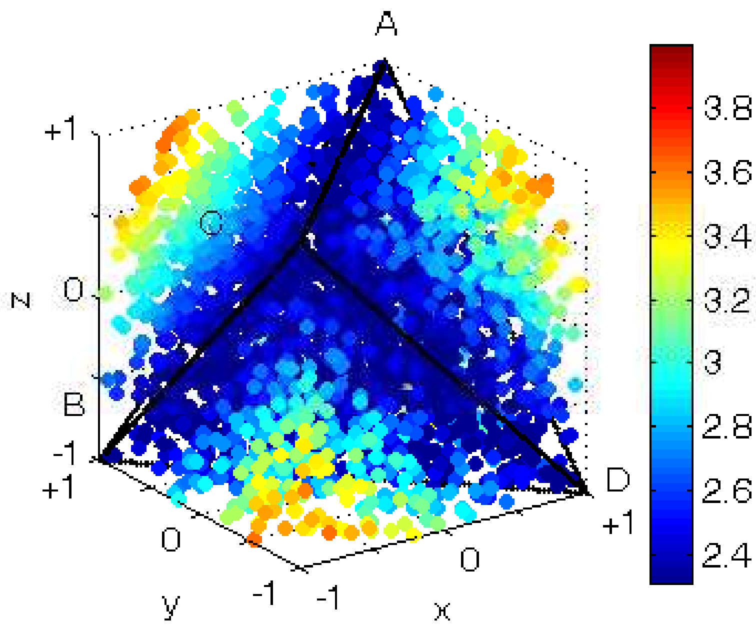
Barycentryczny układ współrzędnych

- Ilustracja „obliczeniowa”? (wizualizacja)

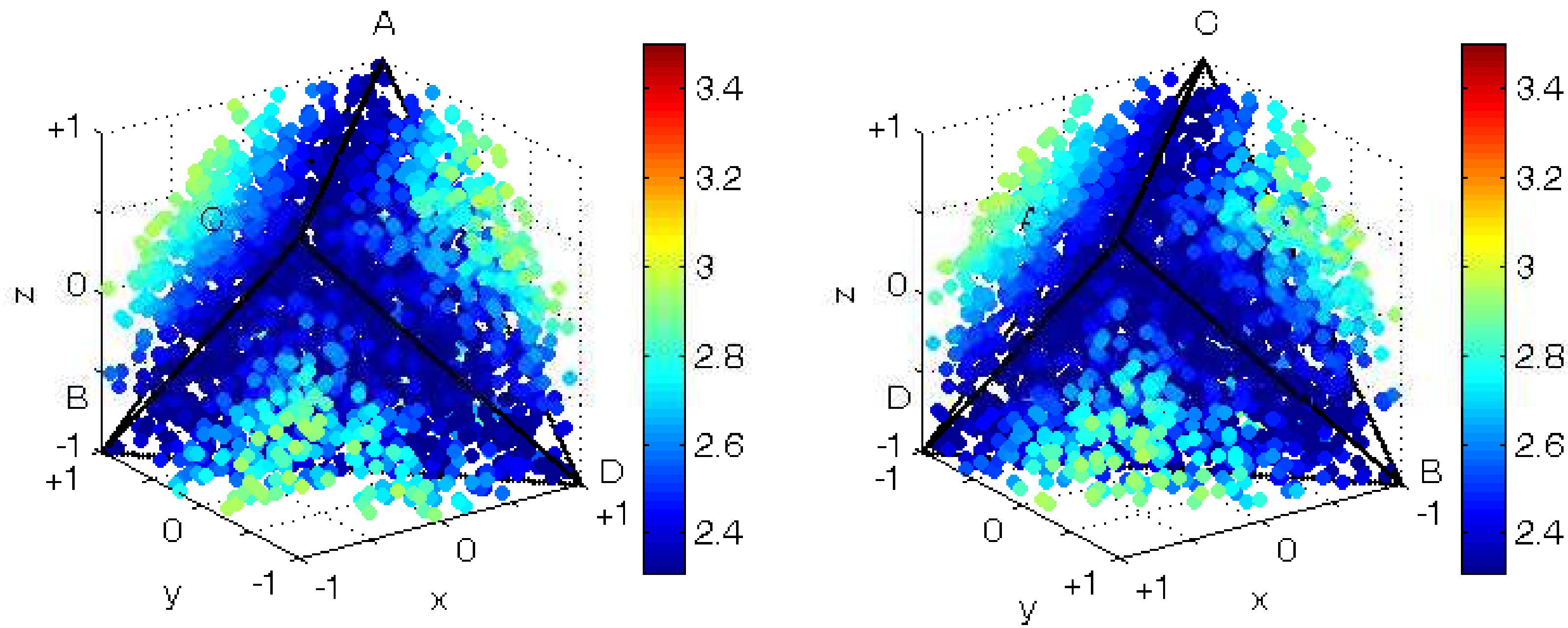




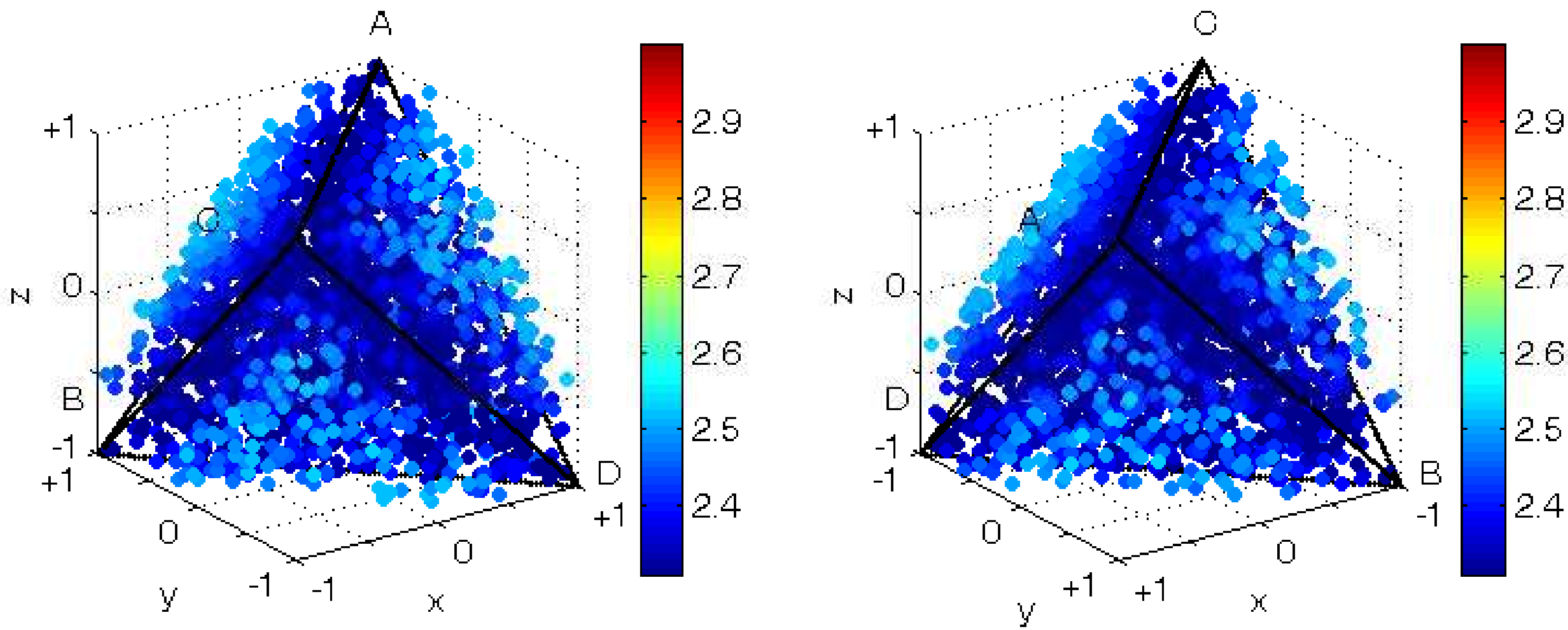
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



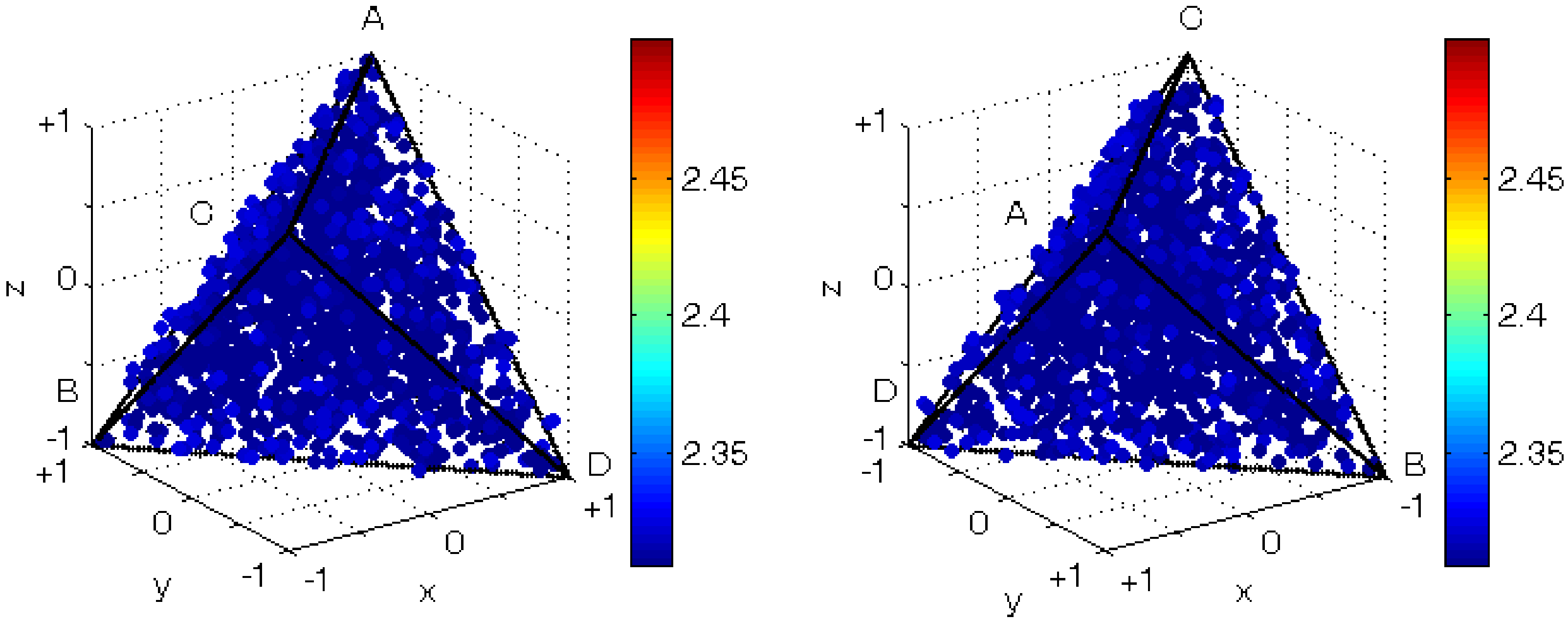
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



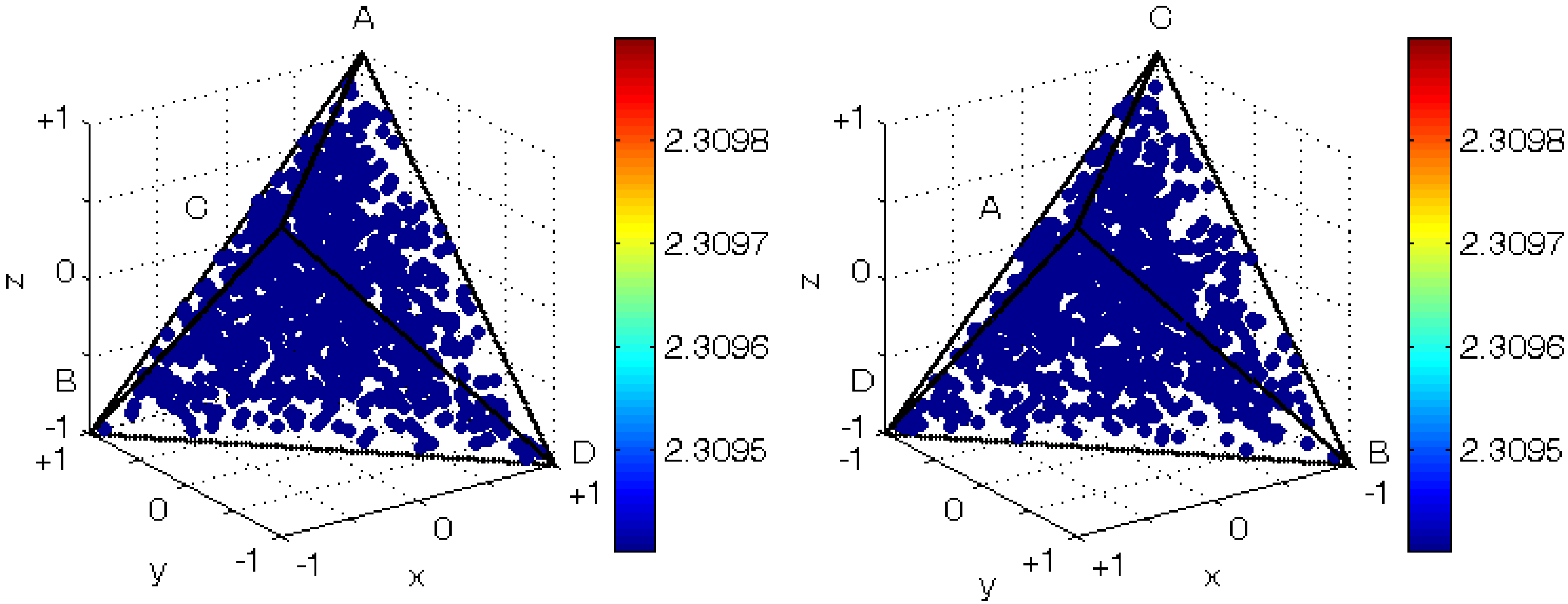
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



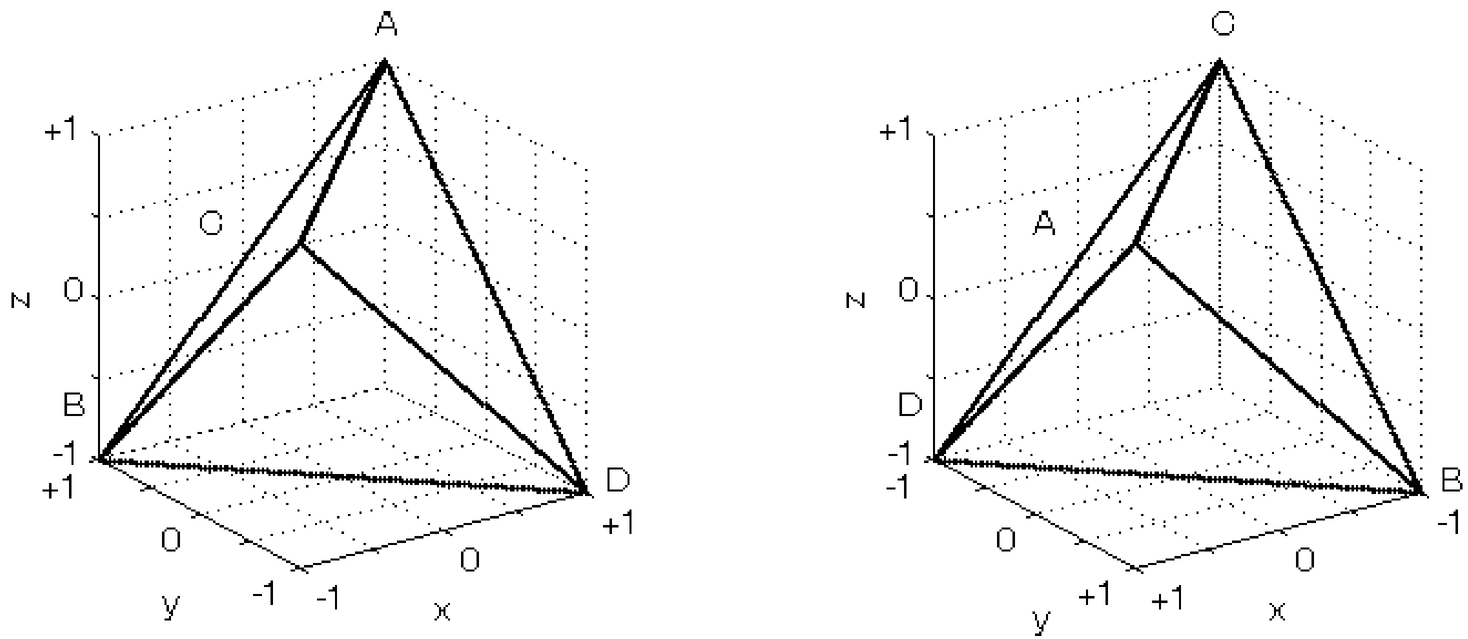
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

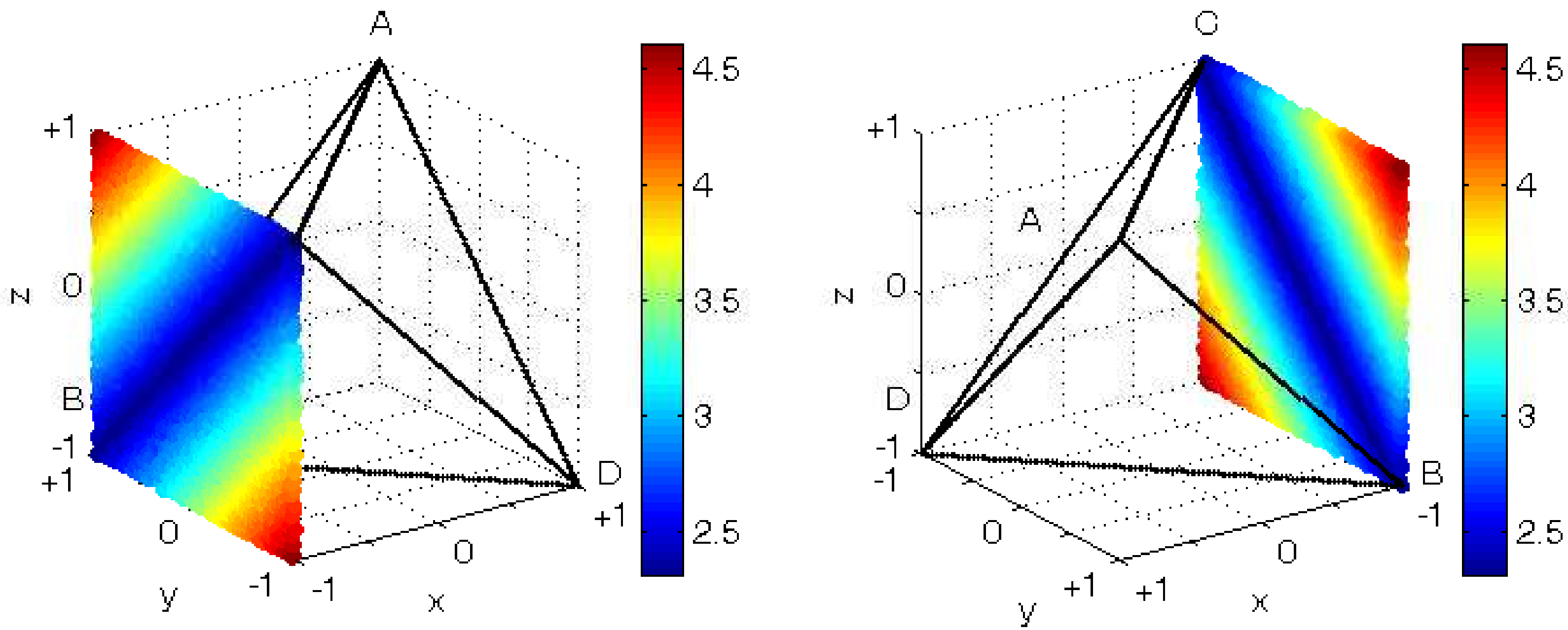


- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

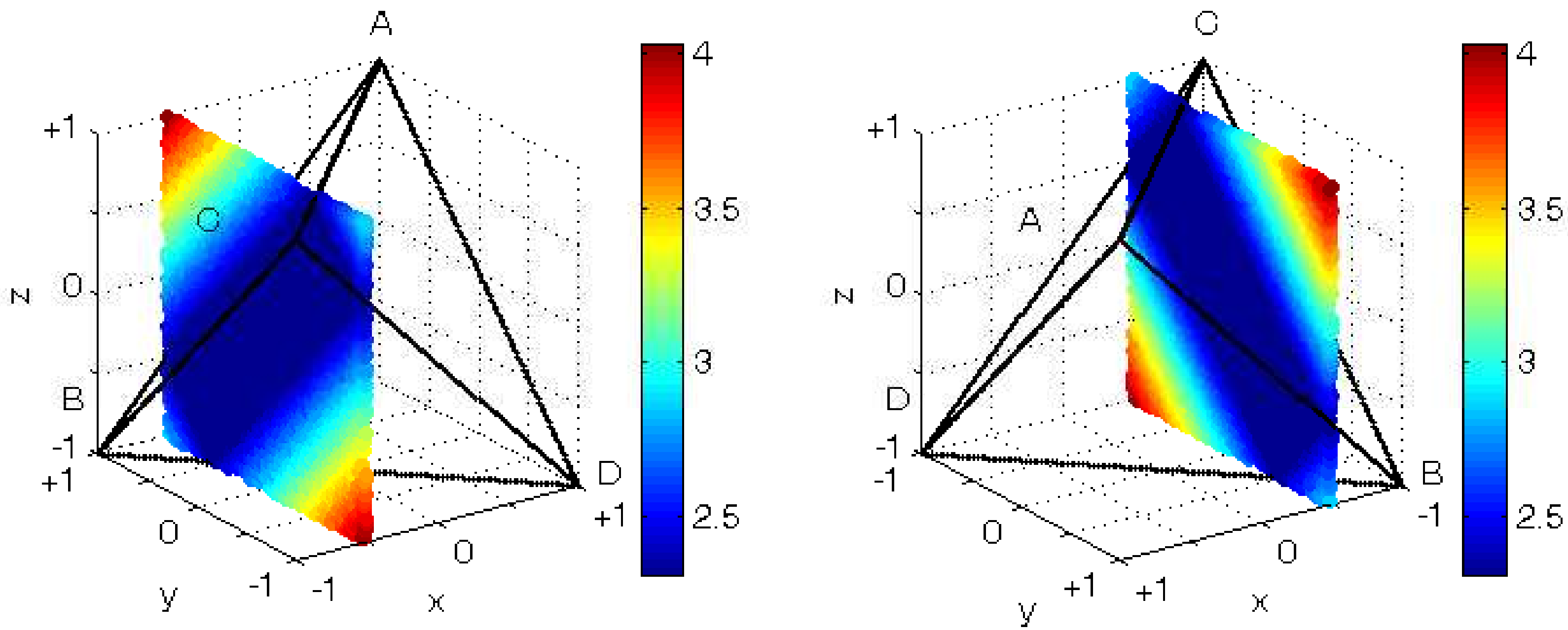


- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

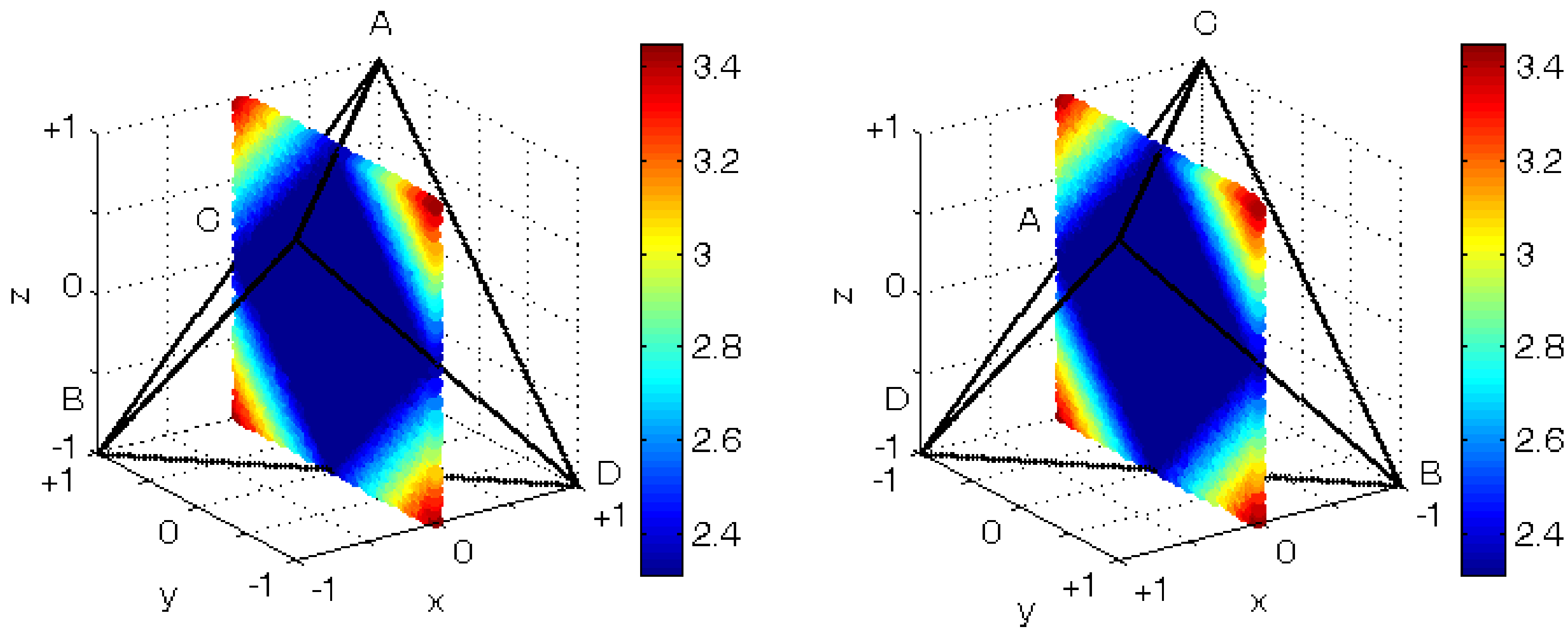

A
C
B
D
+1
0
-1
z
y
x
C
A
D
B



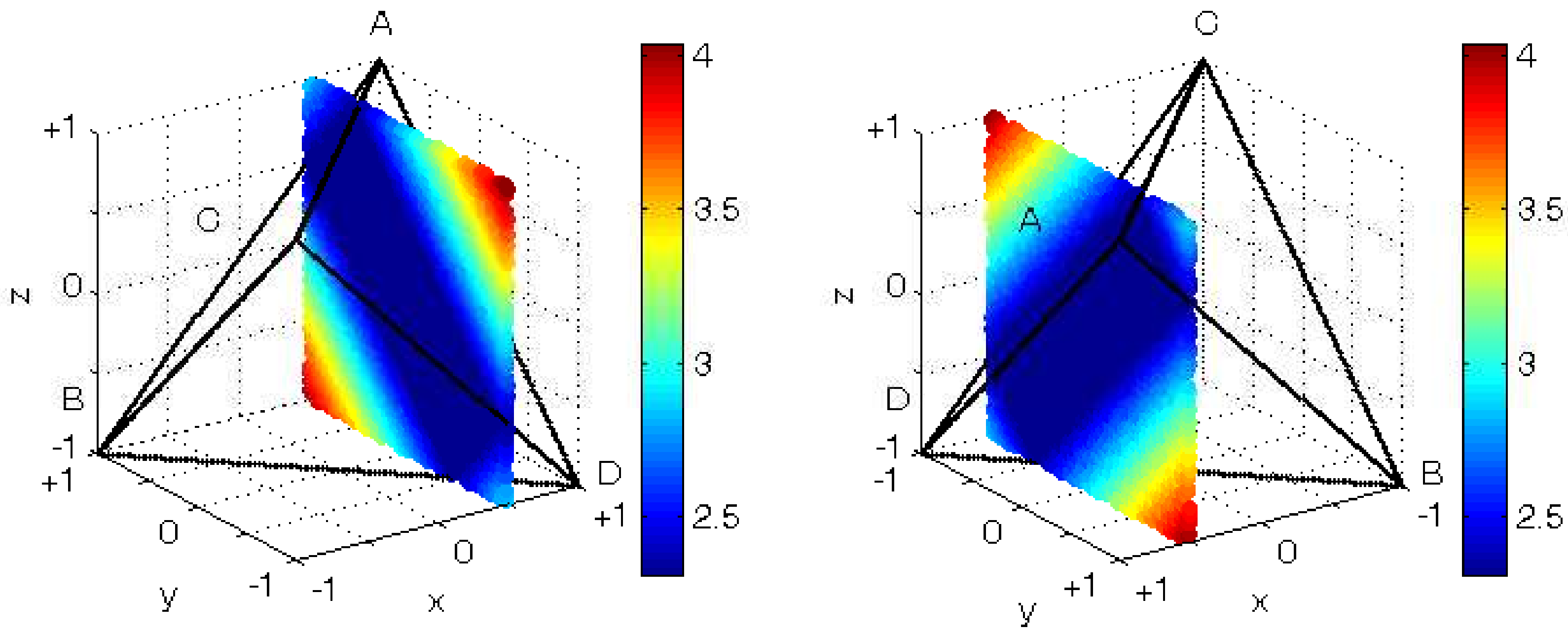
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



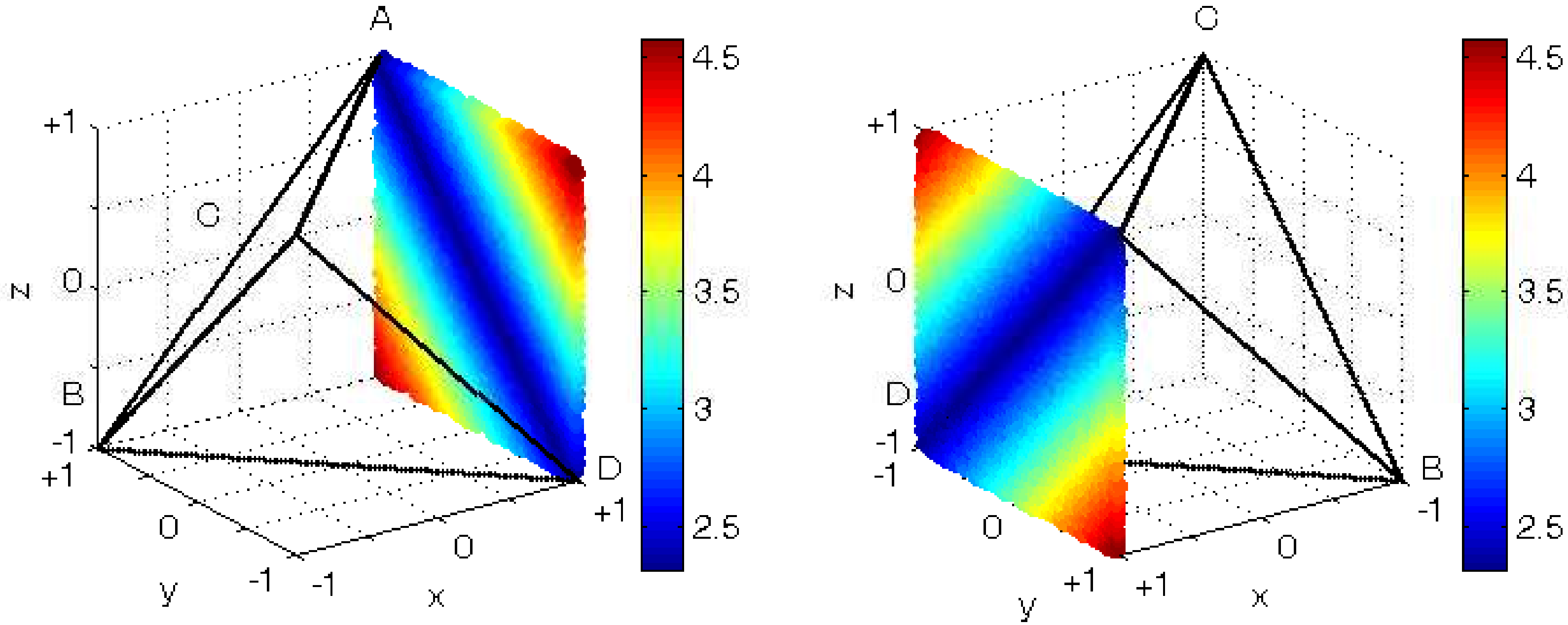
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



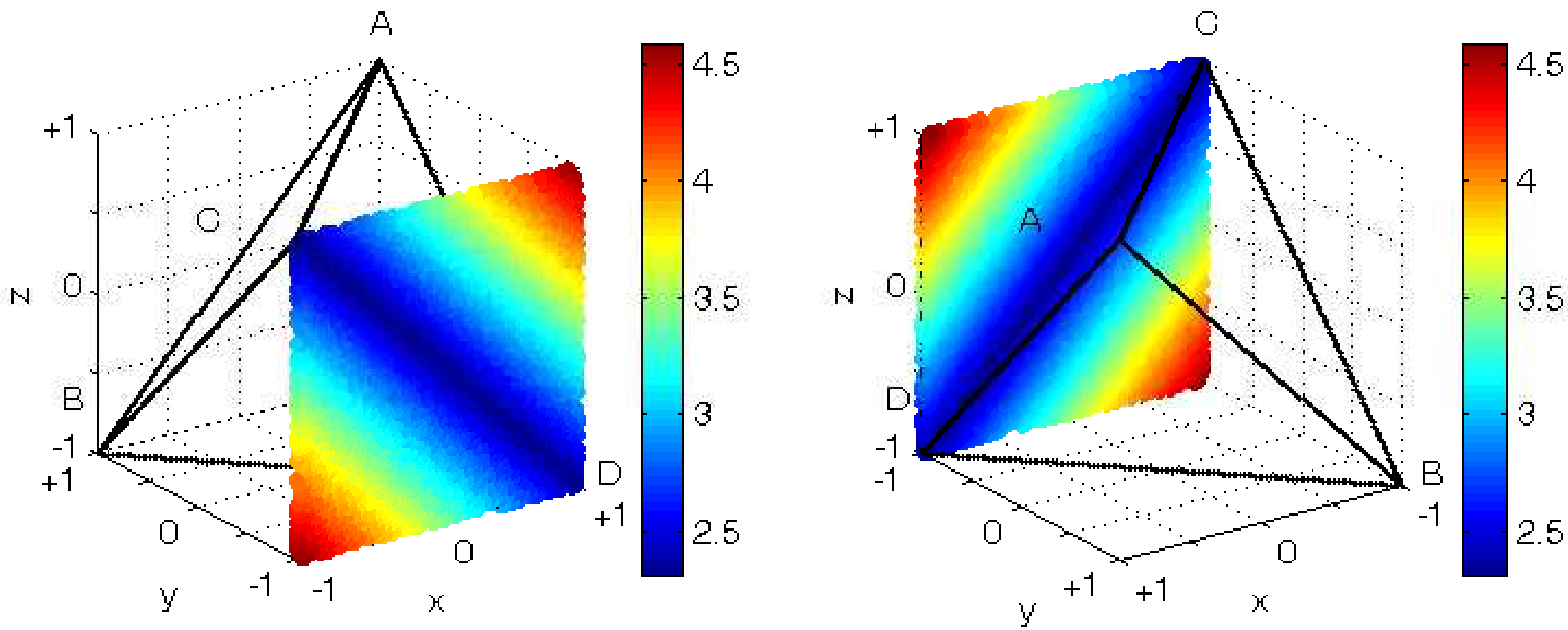
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



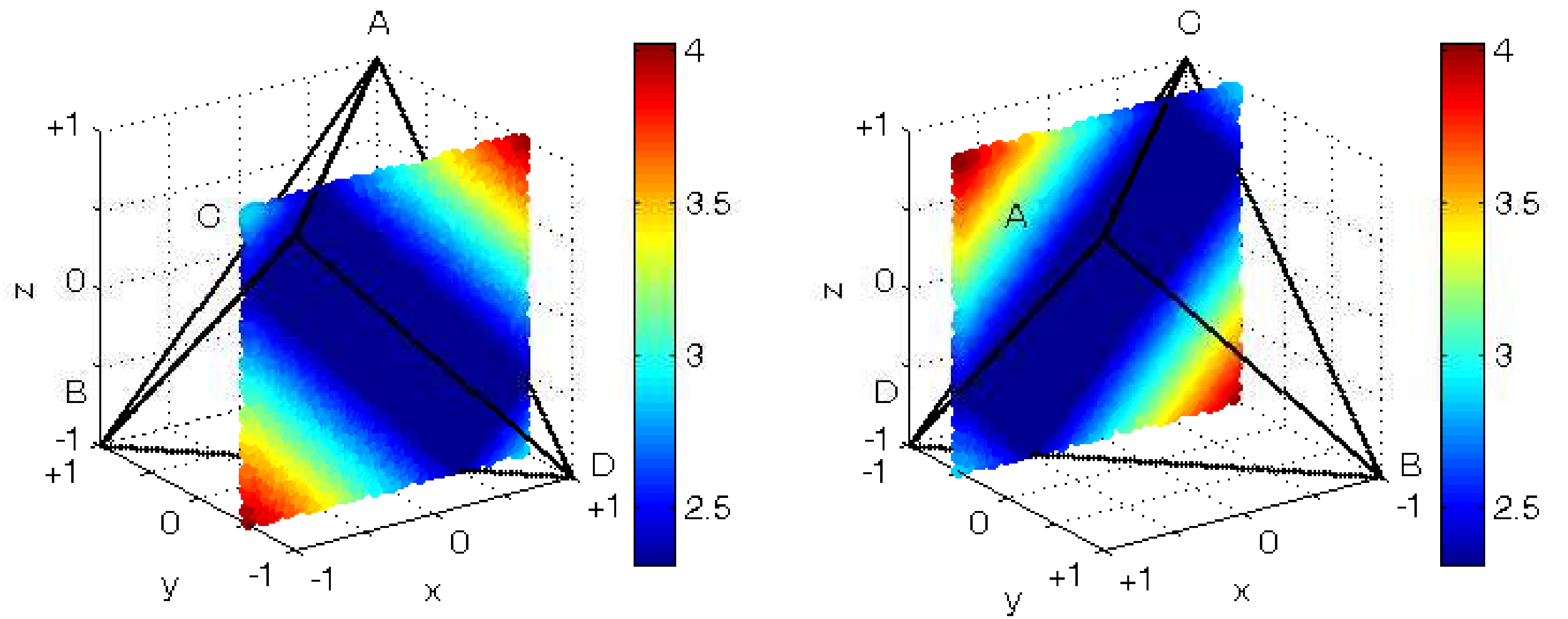
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



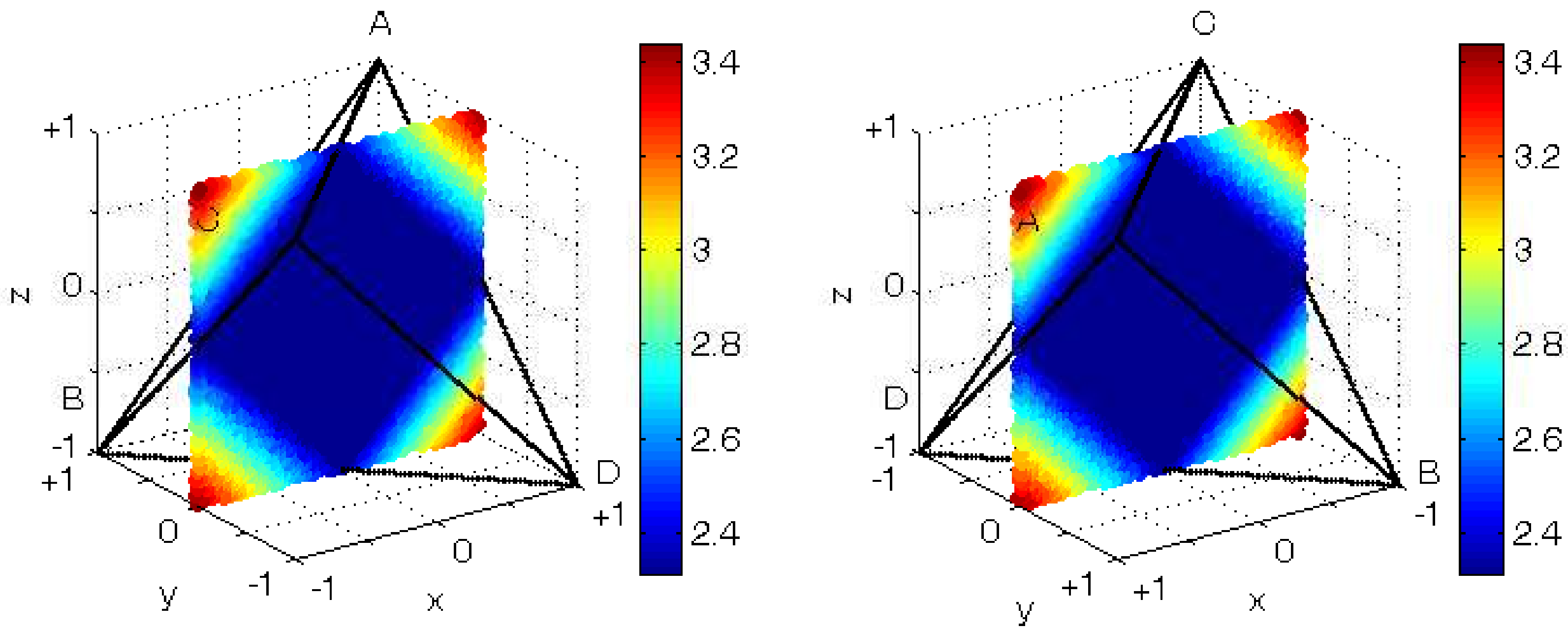
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



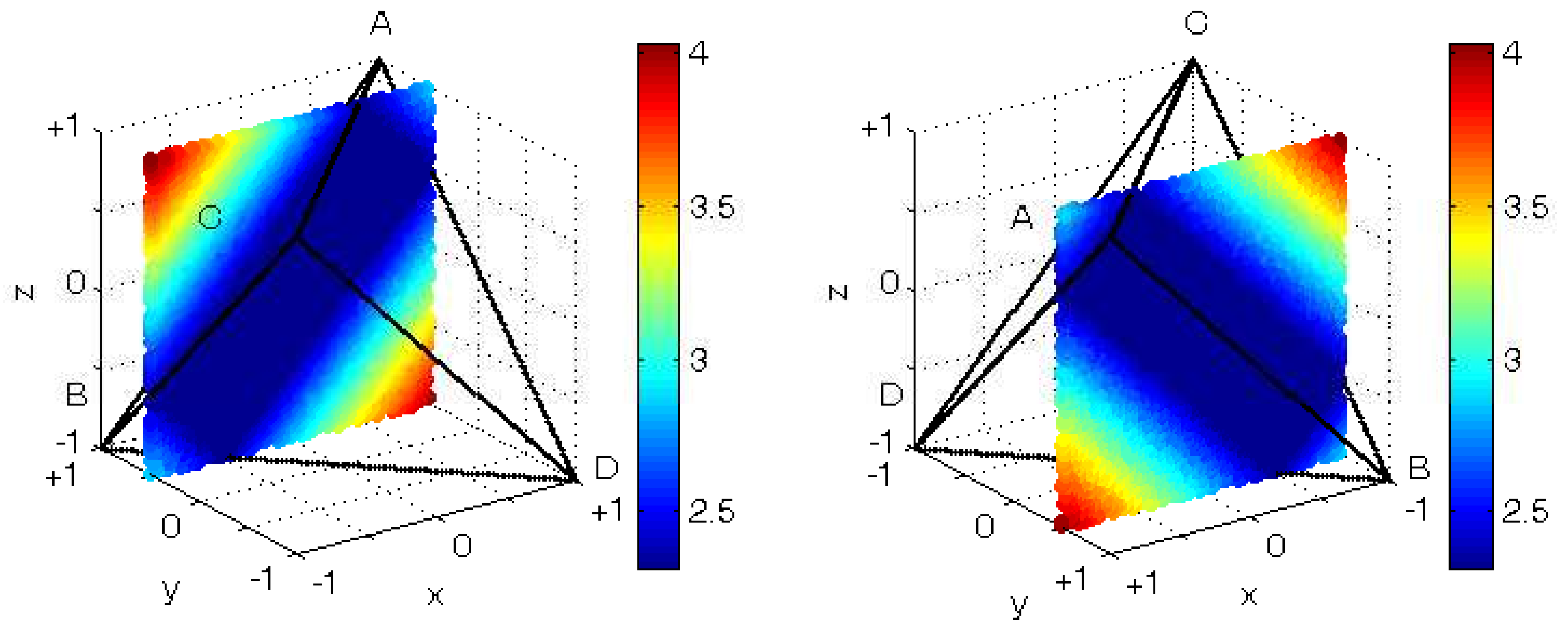
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



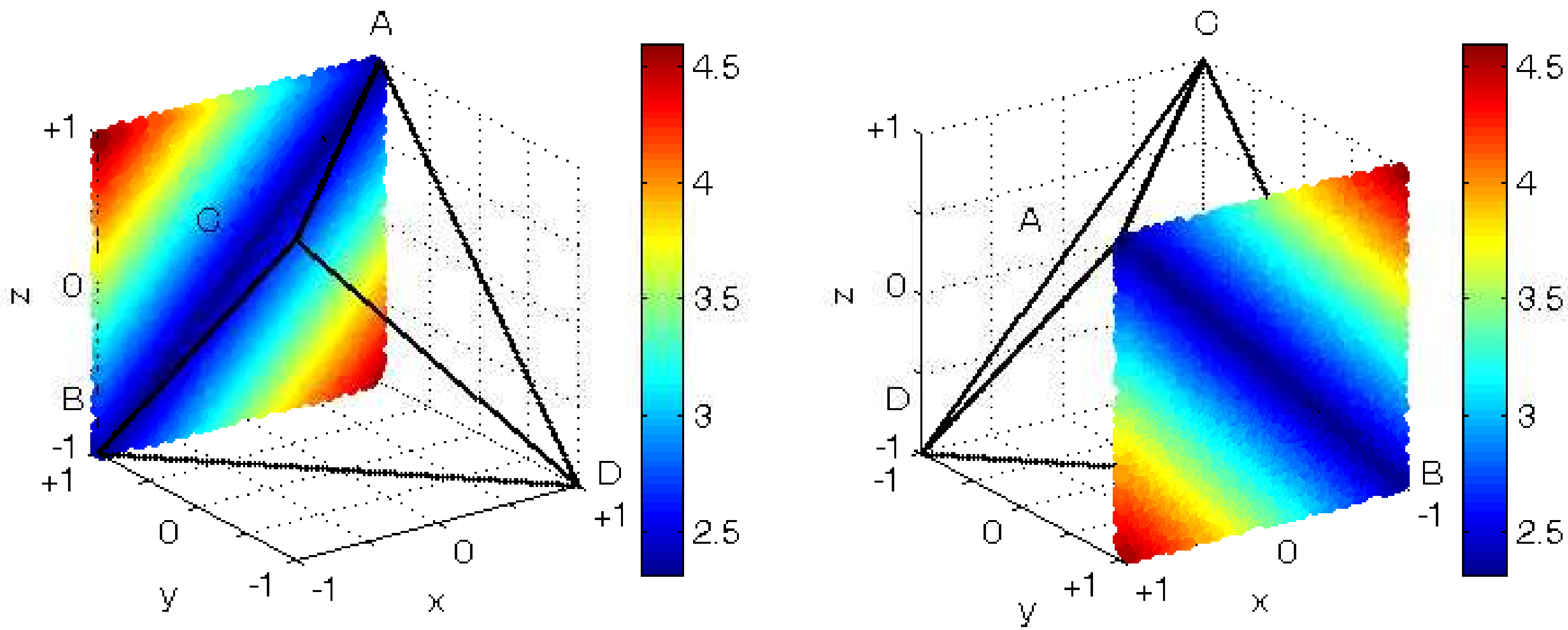
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



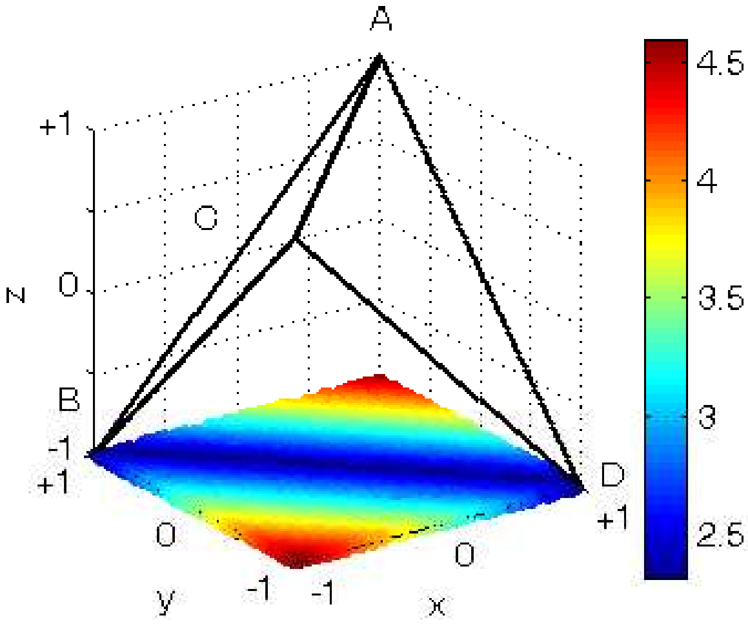
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

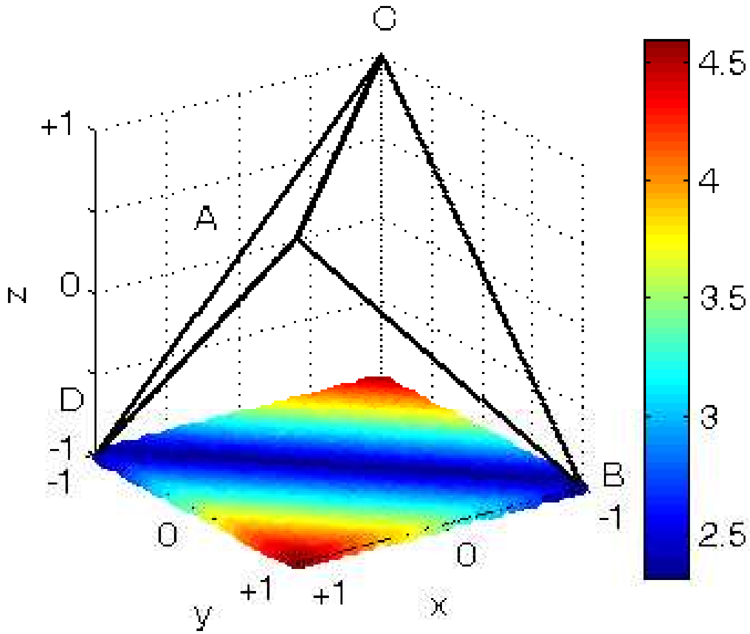


- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

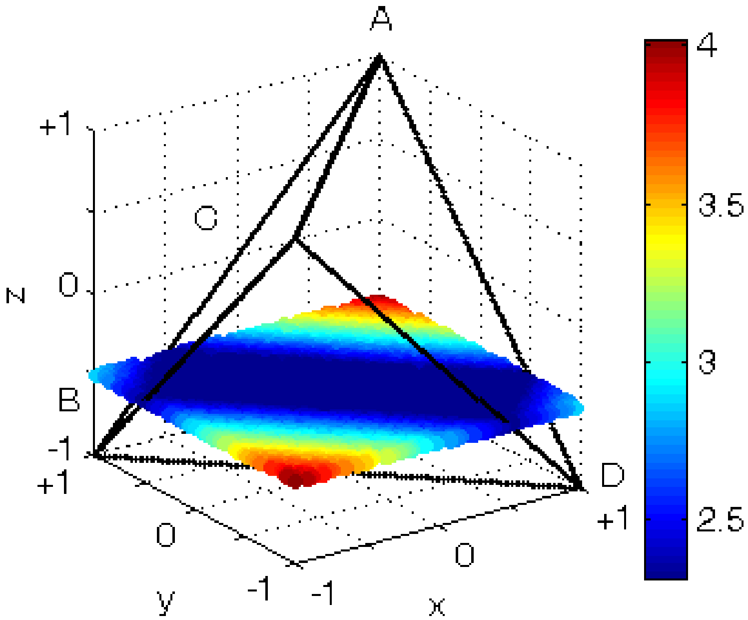


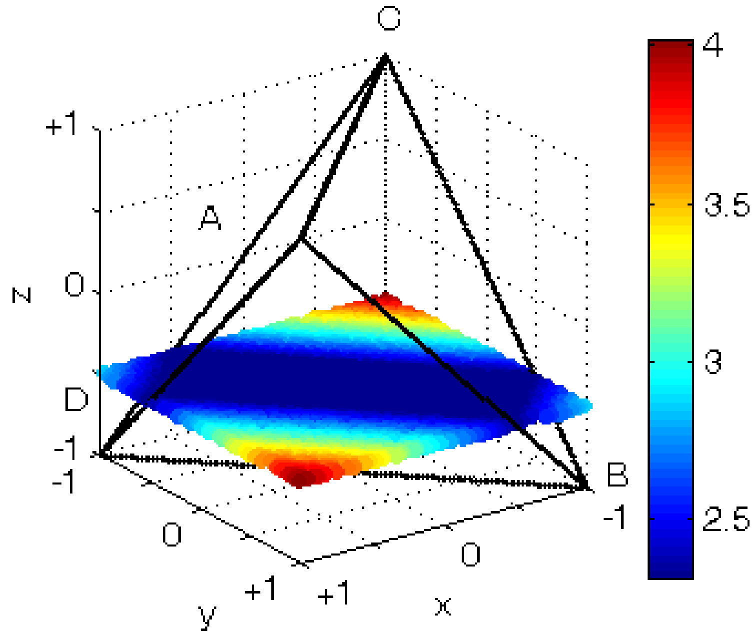
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



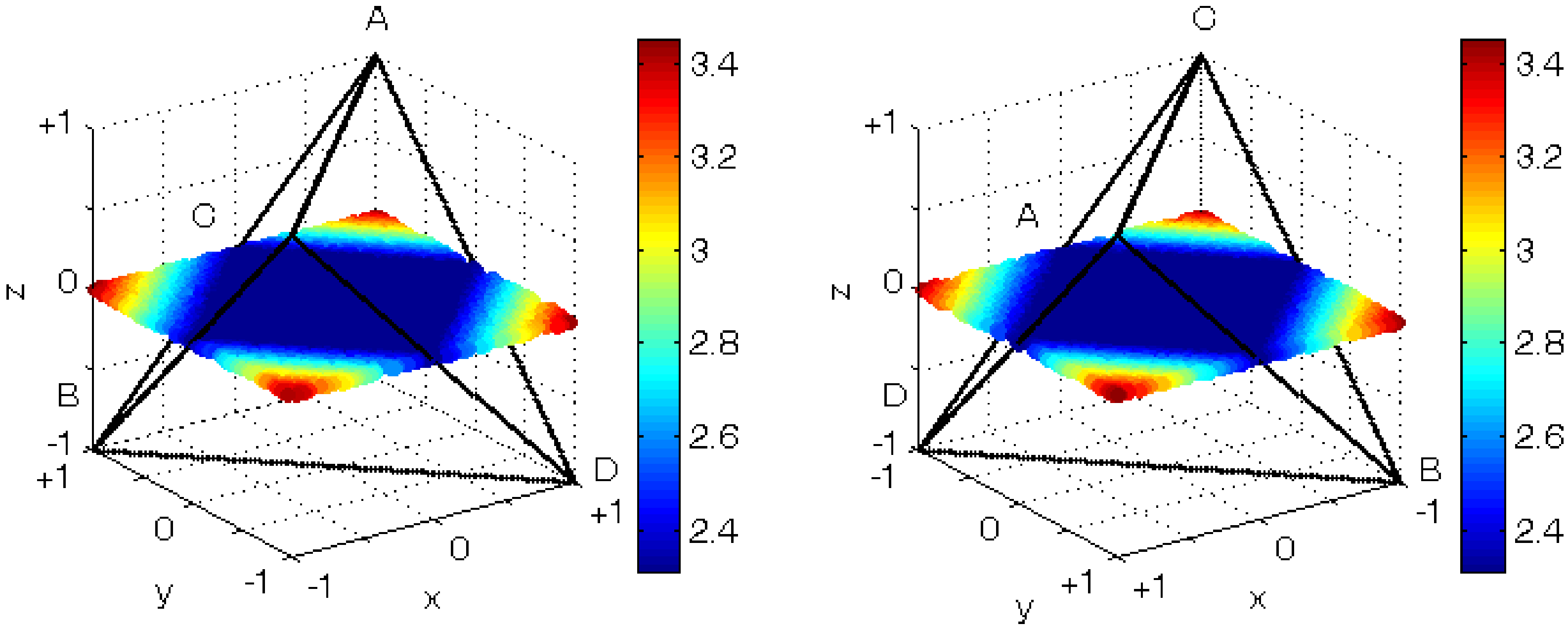


- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

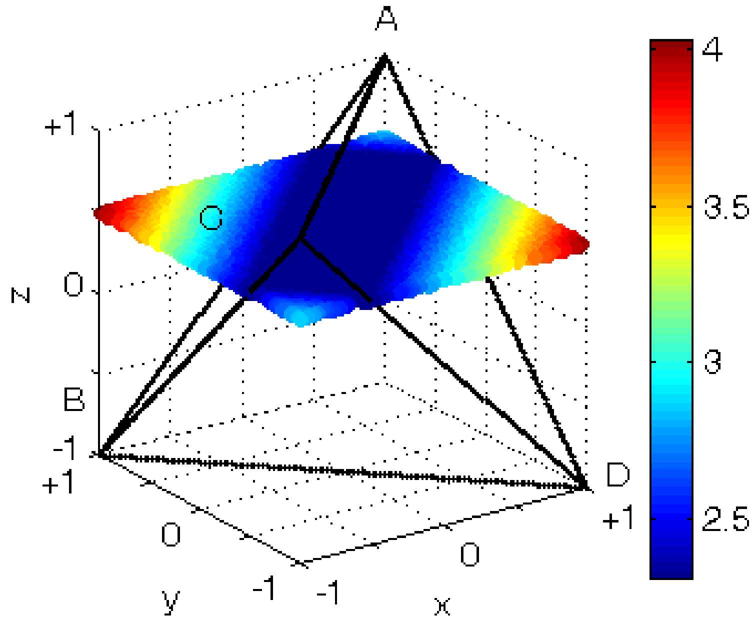


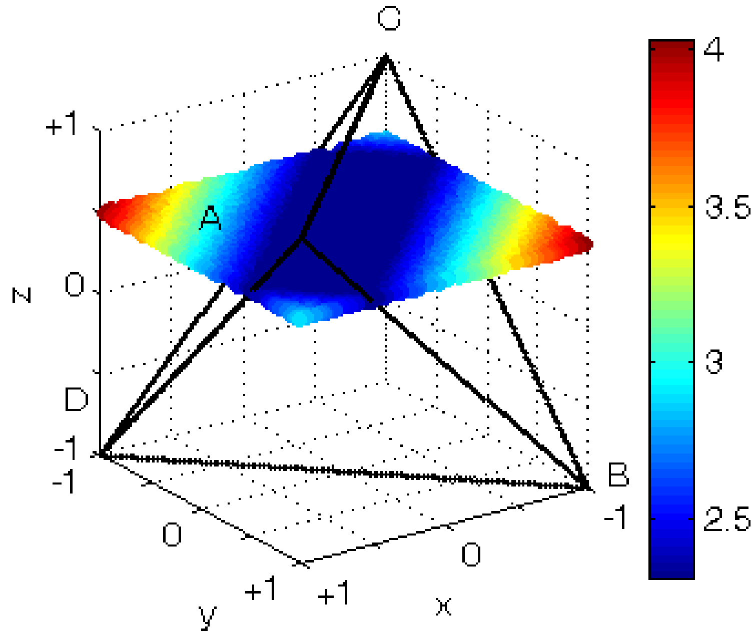


- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

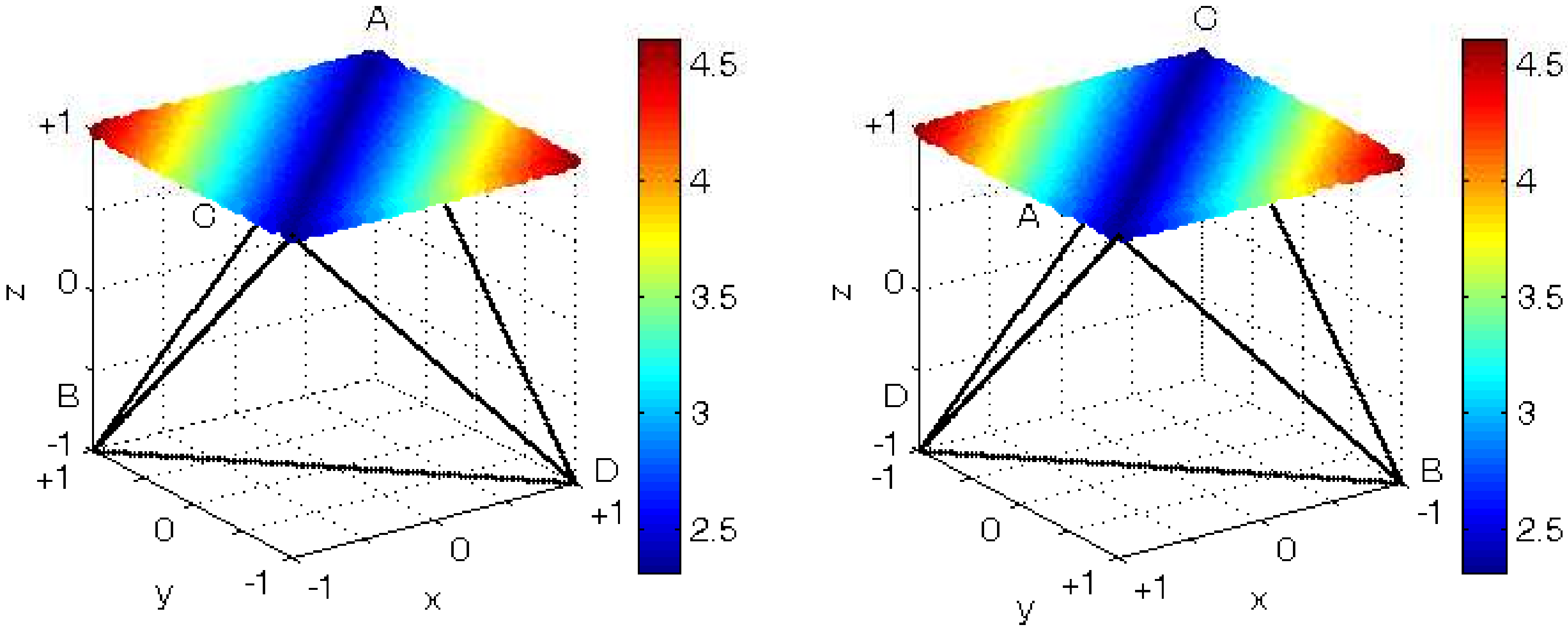


- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor

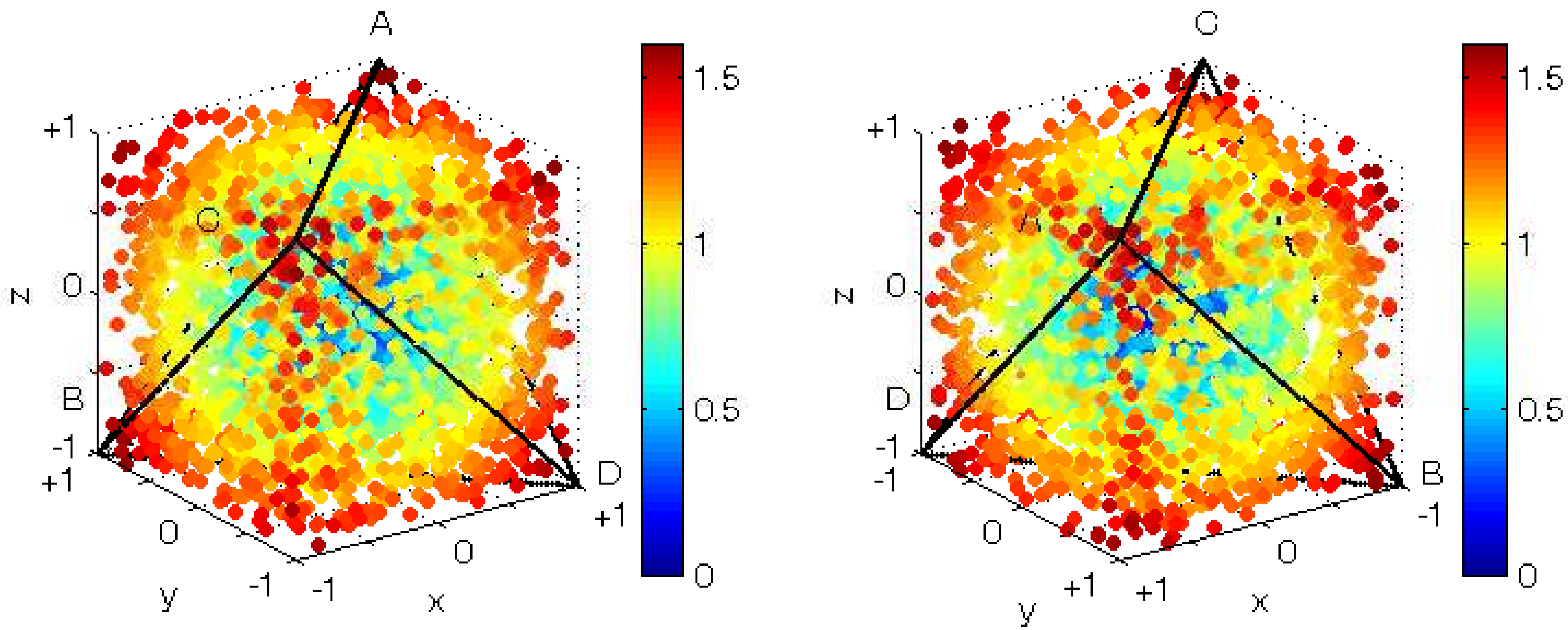




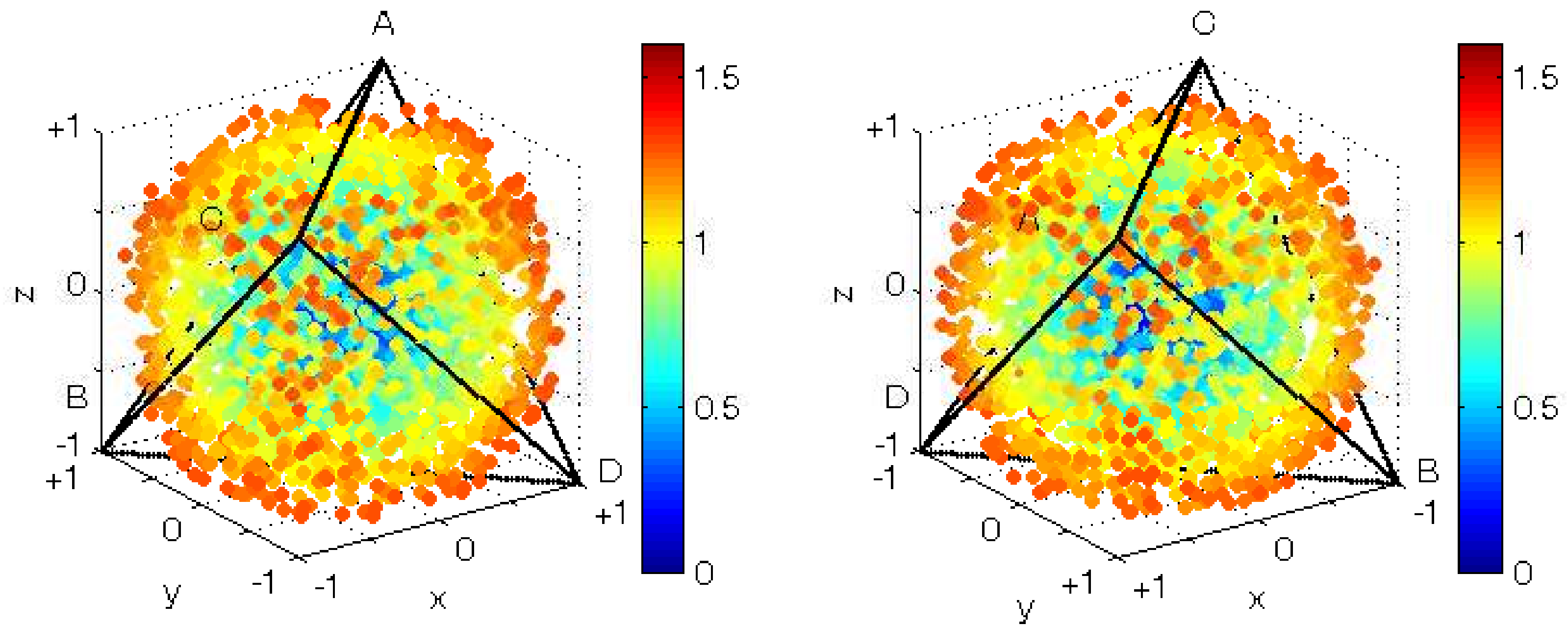
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



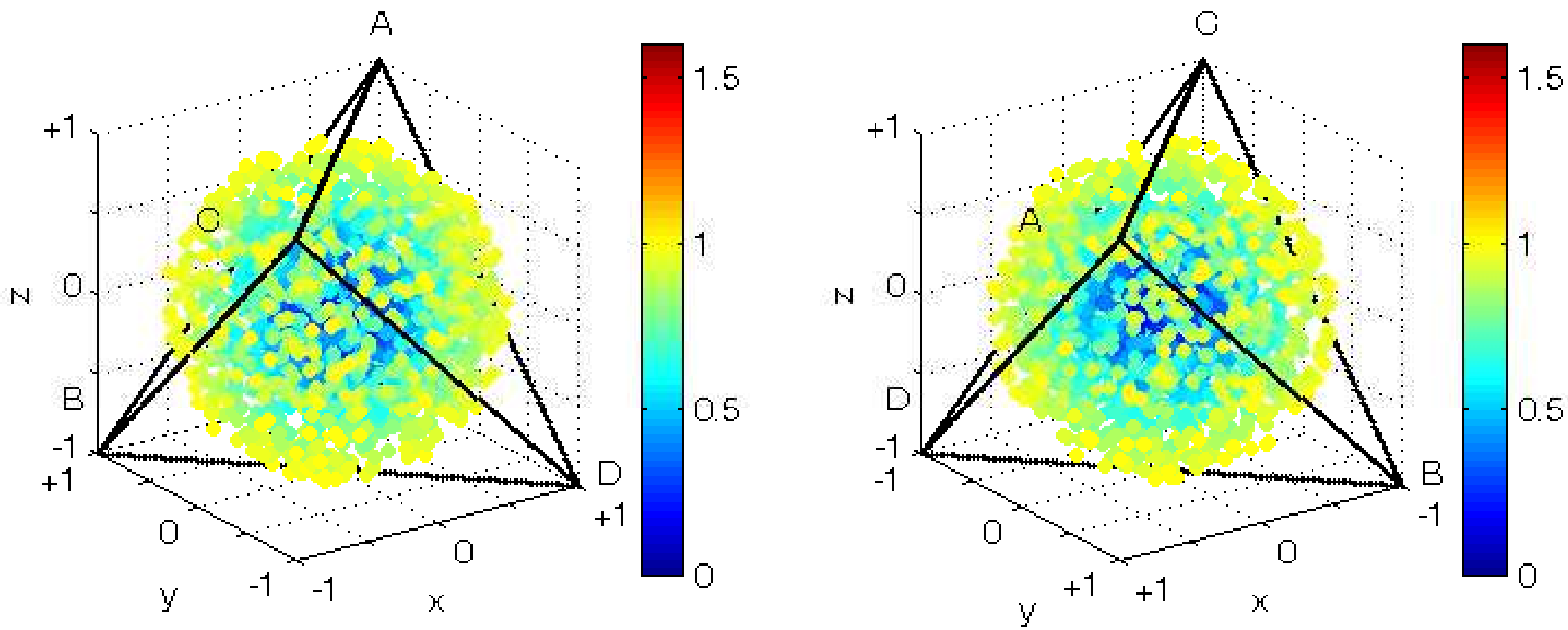
- Suma odległości każdego punktu od czterech ścianek czworościanu wyrażona kolorem
  - wszystkie punkty wewnątrz czworościanu mają jednakowy kolor



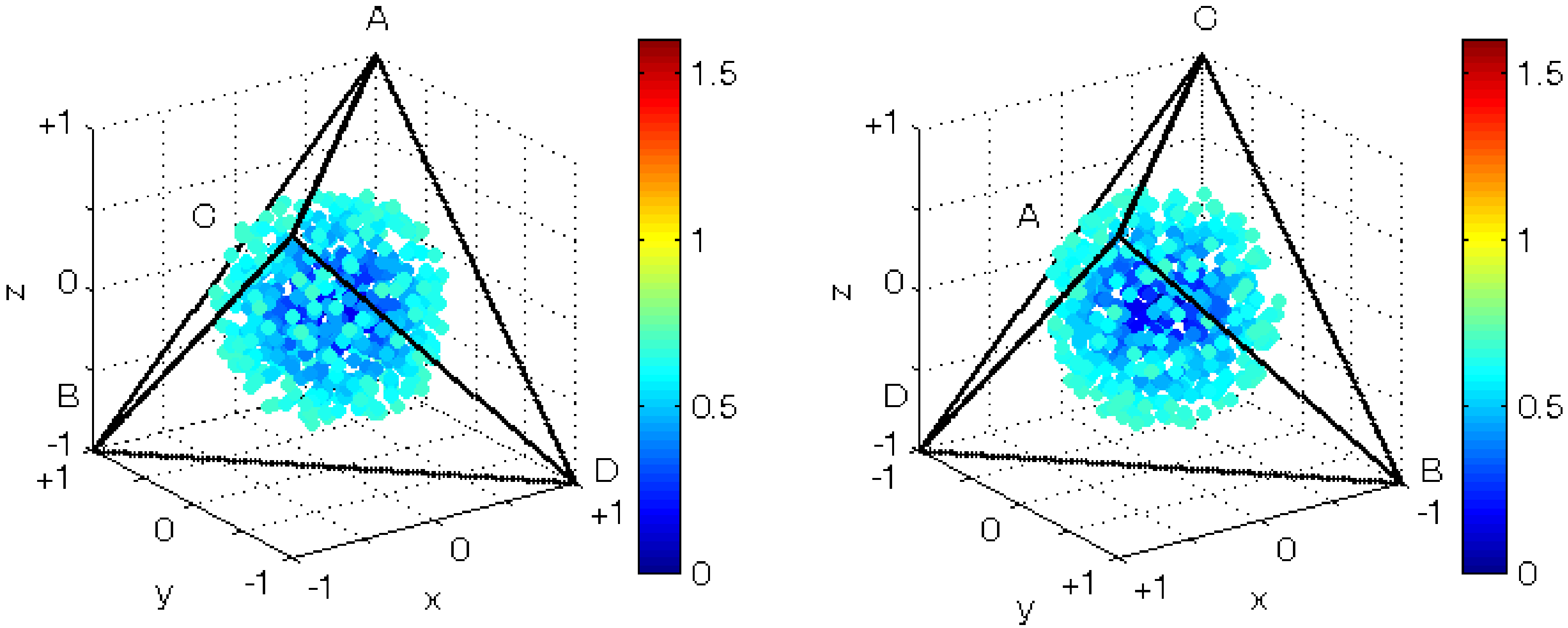
- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem



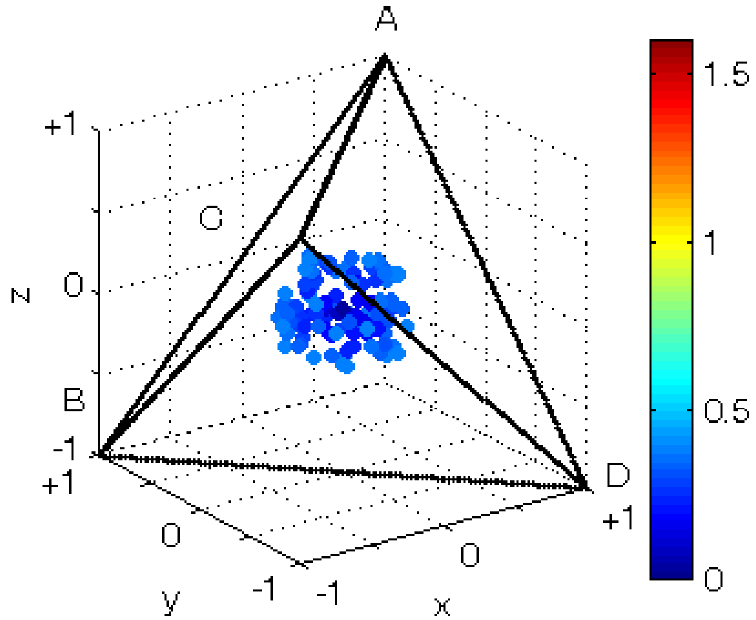
- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem

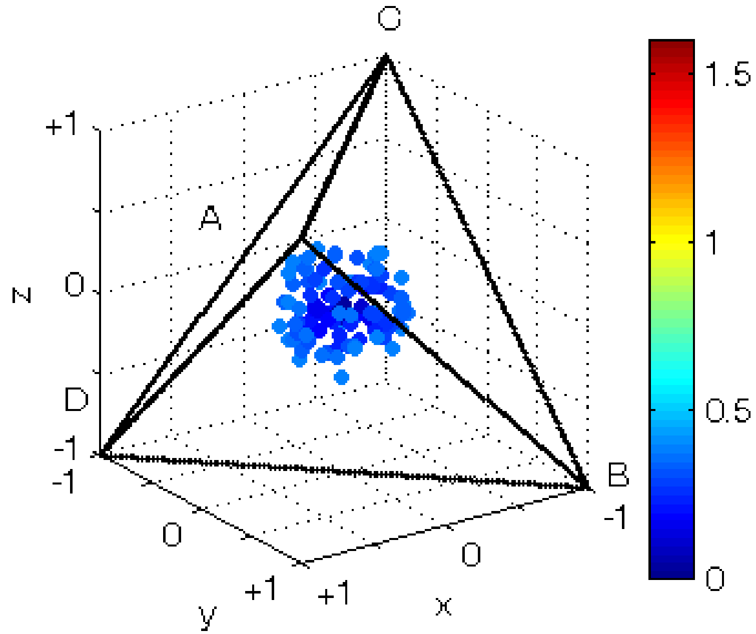


- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem

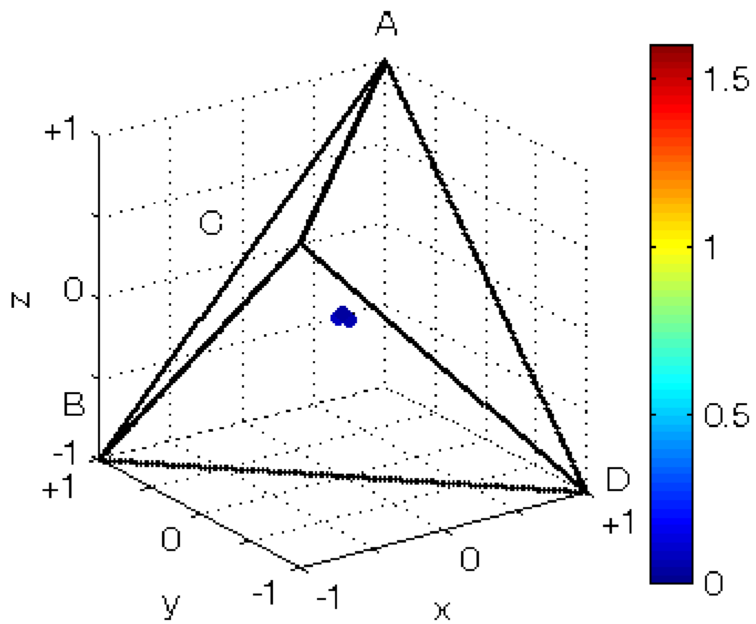


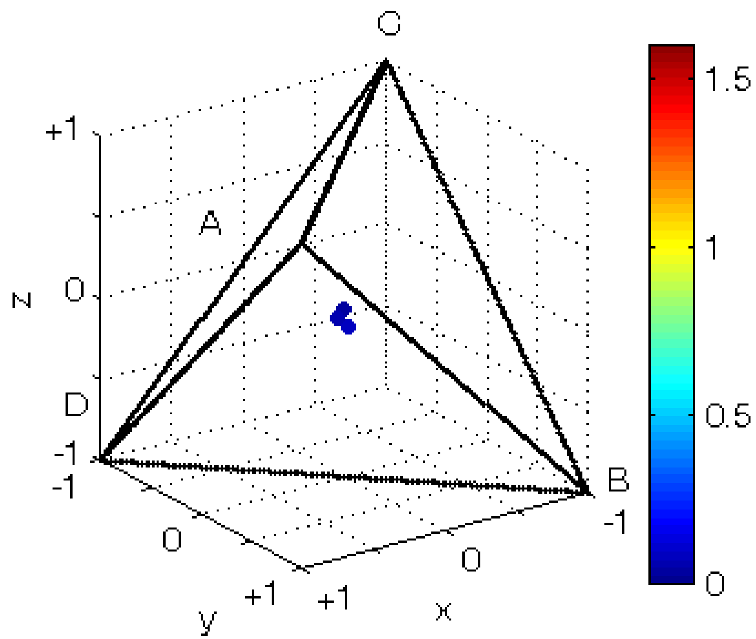
- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem



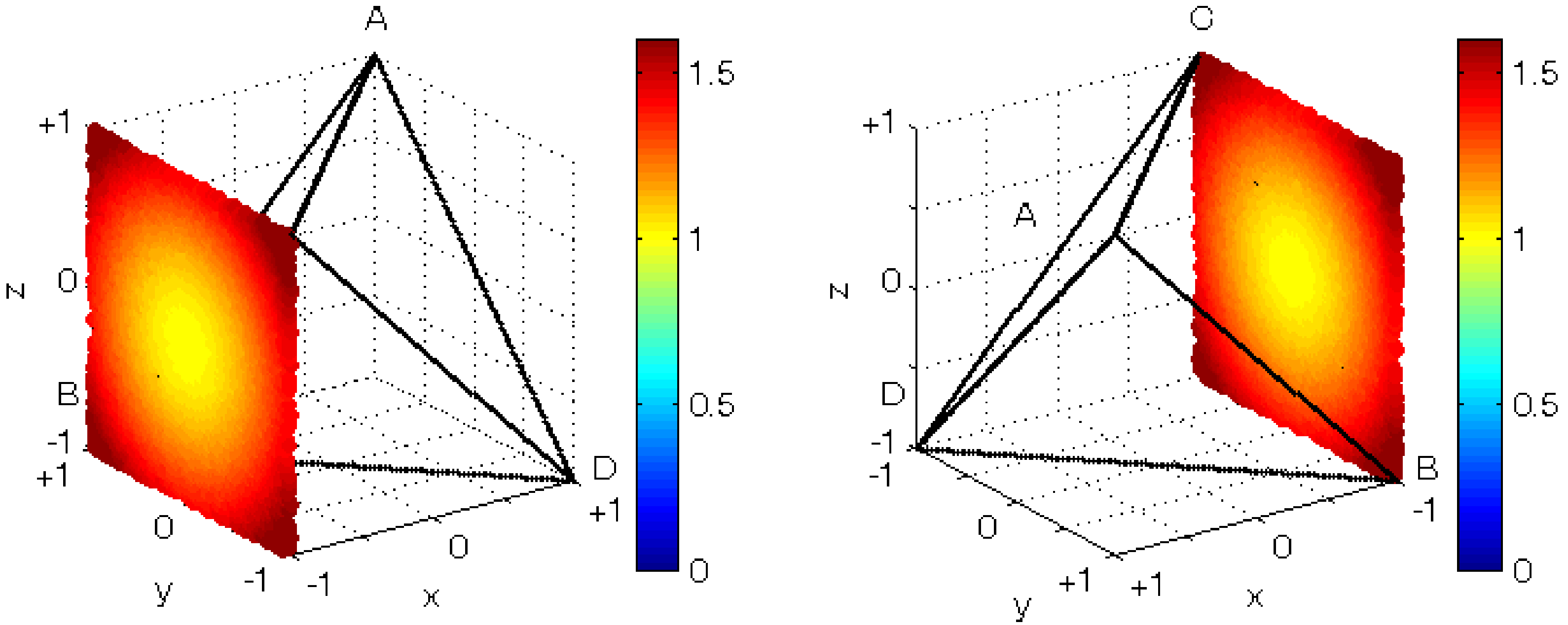


- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem

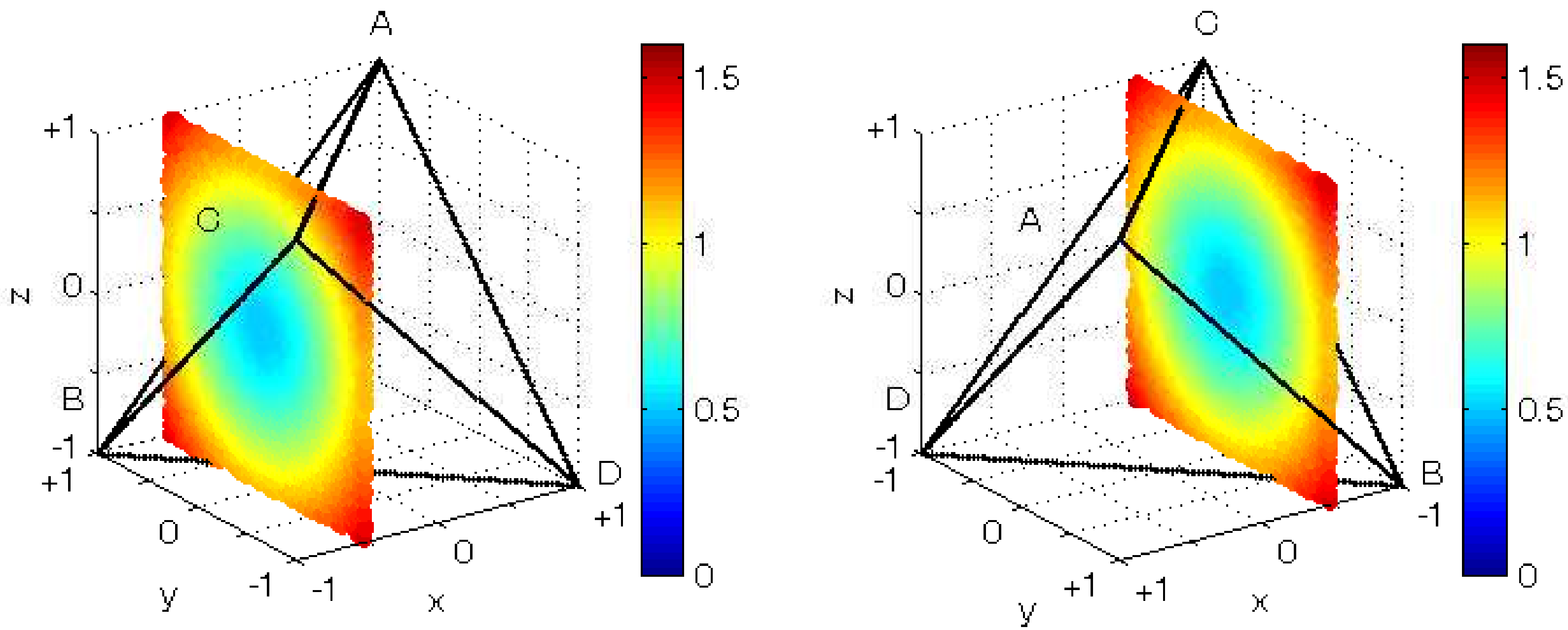




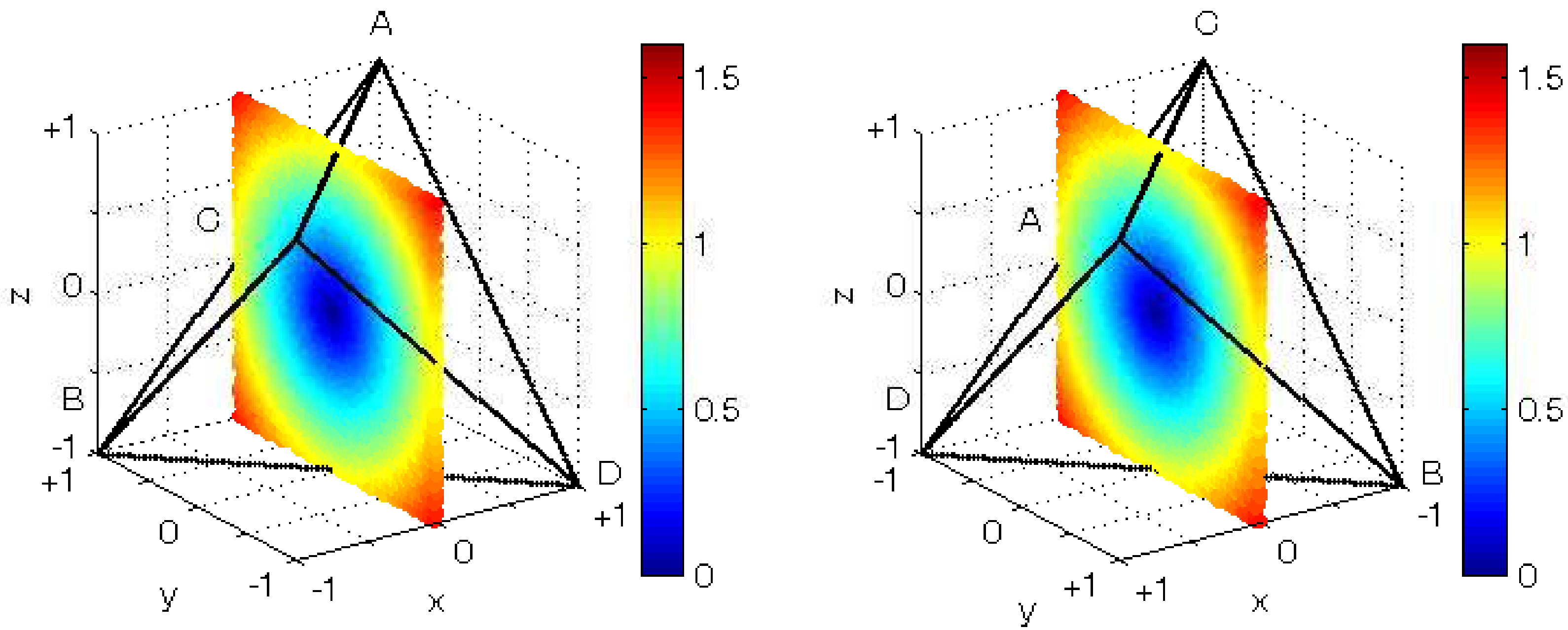
- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem



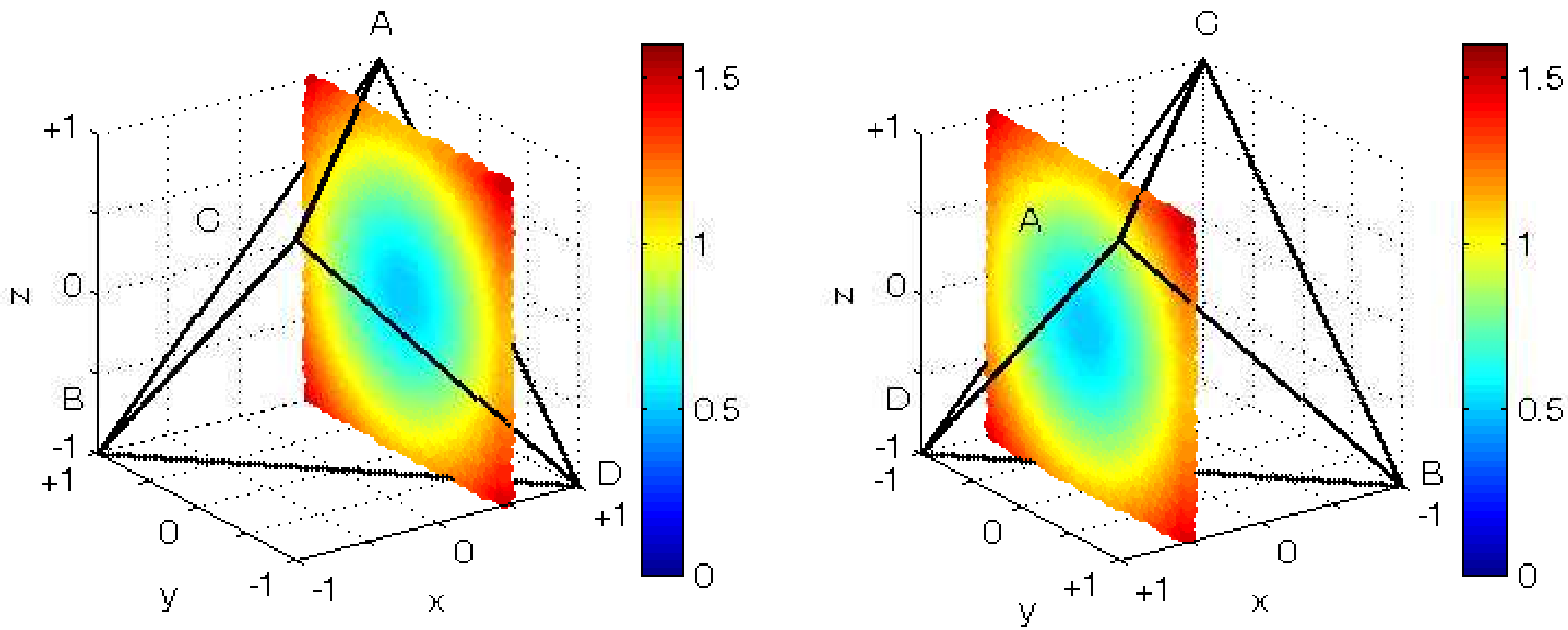
- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem



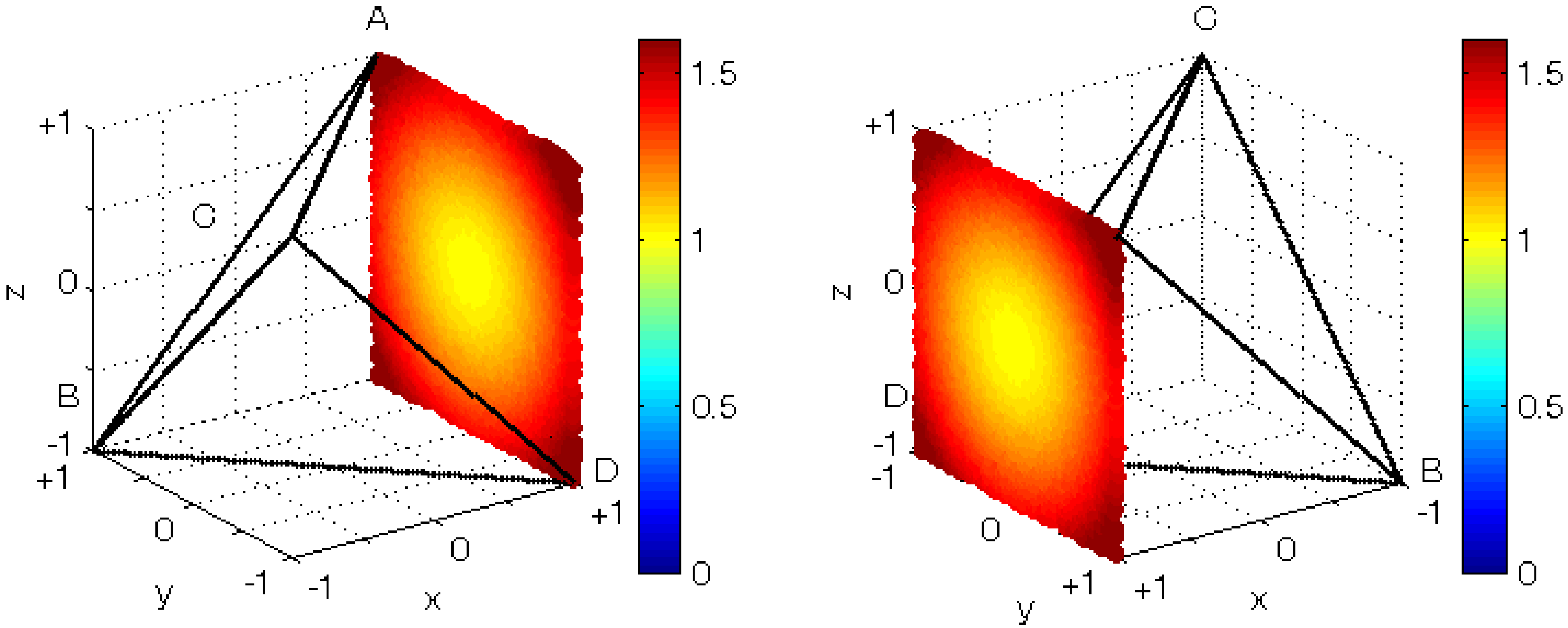
- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem



- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem



- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem



- Suma odległości każdego punktu od środka czworościanu wyrażona kolorem

Czworościan

- Układ współrzędnych czworościennych
  - niech dany będzie czworościan o wierzchołkach A, B, C i D
  - jeżeli $a + b + c + d = n$, gdzie $n > 0$, to wektor $[u, v, w, t]^T$, gdzie $u = a/n$, $v = b/n$, $w = c/n$ i $t = d/n$, odpowiada punktowi wewnątrz tego czworościanu
    - pozwala to na reprezentowanie (odpowiednich) danych czterowymiarowych w przestrzeni trójwymiarowej

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a+b+c+d** = n·**1** (n = 64)

a	**b**	**c**	**d**
23.00	4.00	9.00	28.00
7.00	24.00	15.00	18.00
30.00	0.00	33.00	1.00
16.00	2.00	36.00	10.00
9.00	14.00	2.00	39.00
21.00	34.00	4.00	5.00
15.00	8.00	6.00	35.00
	...		
a	b	c	d
	...		
18.00	6.00	15.00	25.00

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a+b+c+d** = n·**1**

a	**b**	**c**	**d**	**a+b+c+d**
23.00	4.00	9.00	28.00	64
7.00	24.00	15.00	18.00	64
30.00	0.00	33.00	1.00	64
16.00	2.00	36.00	10.00	64
9.00	14.00	2.00	39.00	64
21.00	34.00	4.00	5.00	64
15.00	8.00	6.00	35.00	64
	...			
a	b	c	d	a+b+c+d=64
	...			
18.00	6.00	15.00	25.00	64

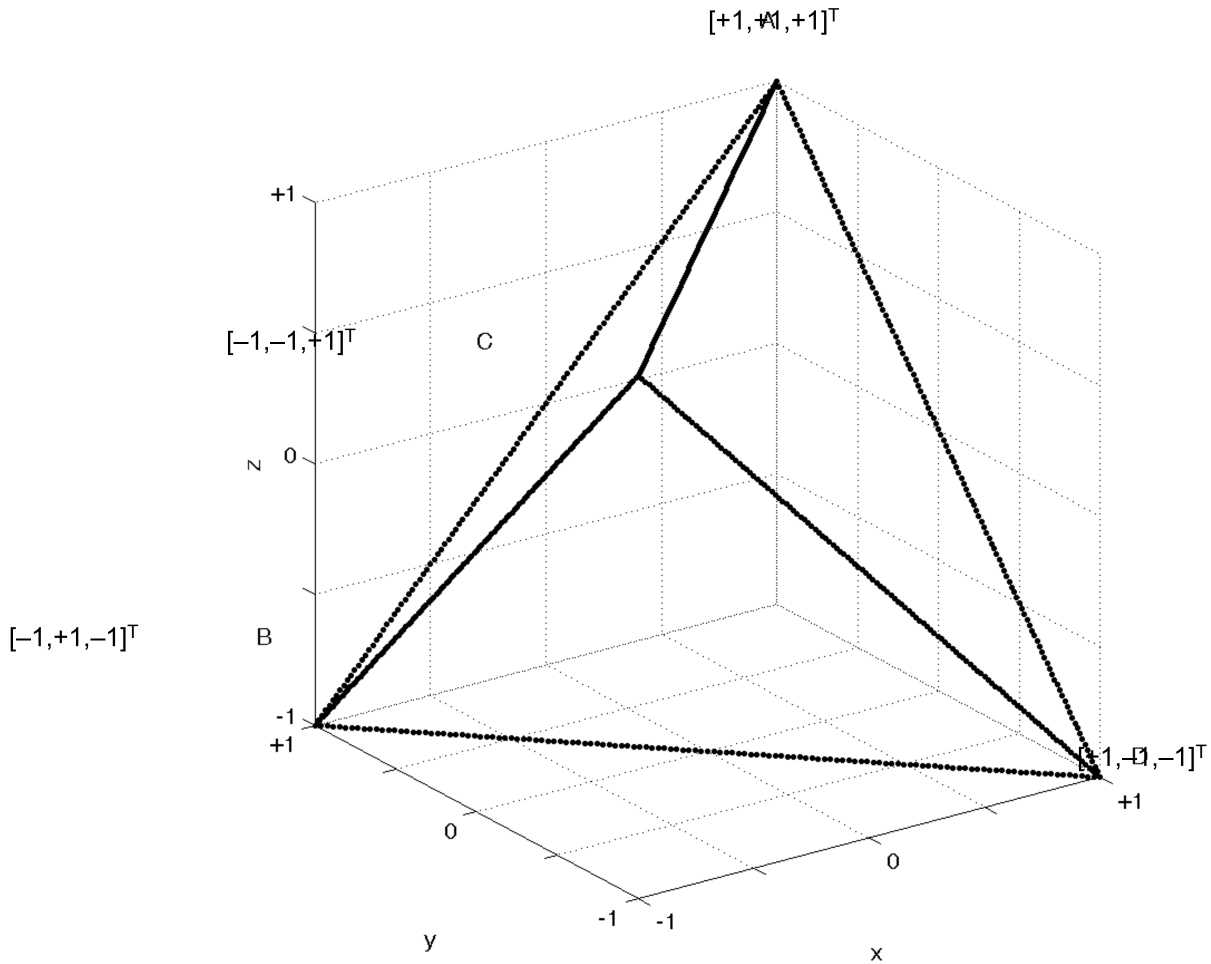
Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające **a**+**b**+**c**+**d** = n·**1**
  - przeskalowanie

a/n	**b**/n	**c**/n	**d**/n	(**a**+**b**+**c**+**d**)/n
0.36	0.06	0.14	0.44	1.0
0.11	0.38	0.23	0.28	1.0
0.47	0.00	0.52	0.02	1.0
0.25	0.03	0.56	0.16	1.0
0.14	0.22	0.03	0.61	1.0
0.33	0.53	0.06	0.08	1.0
0.23	0.13	0.09	0.55	1.0
	...			
u	v	w	t	u+v+w+t=1
	...			
0.28	0.09	0.23	0.39	1.0

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = n\cdot\mathbf{1}$
  - niech wierzchołki A, B, C i D czworościanu (reprezentującego odpowiedni układ barycentryczny) mają współrzędne dane wektorami (odpowiednio) $[+1,+1,+1]^T$, $[-1,+1,-1]^T$, $[-1,-1,+1]^T$ i $[+1,-1,-1]^T$



[+1,+1,+1]^T
A
[−1,−1,+1]^T
C
[−1,+1,−1]^T
B
[+1,−1,−1]^T
D
+1
0
-1
z
y
x

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = n\cdot\mathbf{1}$
  - wpółrzędne trójwymiarowe dla punktów reprezentowanych przez (przekształcone) wartości $[u,v,w,t]^T$ tworzy się wykorzystując wzór:

$$
\begin{aligned}
[x, y, z]^T &= u\cdot[+1,+1,+1]^T + v\cdot[-1,+1,-1]^T \\
&\quad + w\cdot[-1,-1,+1]^T + t\cdot[+1,-1,-1]^T \\
&= [u-v-w+t,\ u+v-w-t,\ u-v+w-t]
\end{aligned}
$$

który, dzięki faktowi, że $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, $t \geq 0$ i $u+v+w+t = 1$, reprezentuje elementy kombinacji wypukłej wektorów $[+1,+1,+1]^T$, $[-1,+1,-1]^T$, $[-1,-1,+1]^T$ i $[+1,-1,-1]^T$

Barycentryczny układ współrzędnych

- Przykładowe dane spełniające $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = n\cdot\mathbf{1}$
  - te same wpółrzędne można utworzyć bezpośrednio z (oryginalnych) wartości $[a,b,c,d]^T$, wykorzystując wzór

$$
\begin{aligned}
[x, y, z]^T &= a/(a+b+c+d)\cdot[+1,+1,+1]^T + b/(a+b+c+d)\cdot[-1,+1,-1]^T \\
&\quad + c/(a+b+c+d)\cdot[-1,-1,+1]^T + d/(a+b+c+d)\cdot[+1,-1,-1]^T \\
&= [a-b-c+d,\ a+b-c-d,\ a-b+c-d] / (a+b+c+d)
\end{aligned}
$$

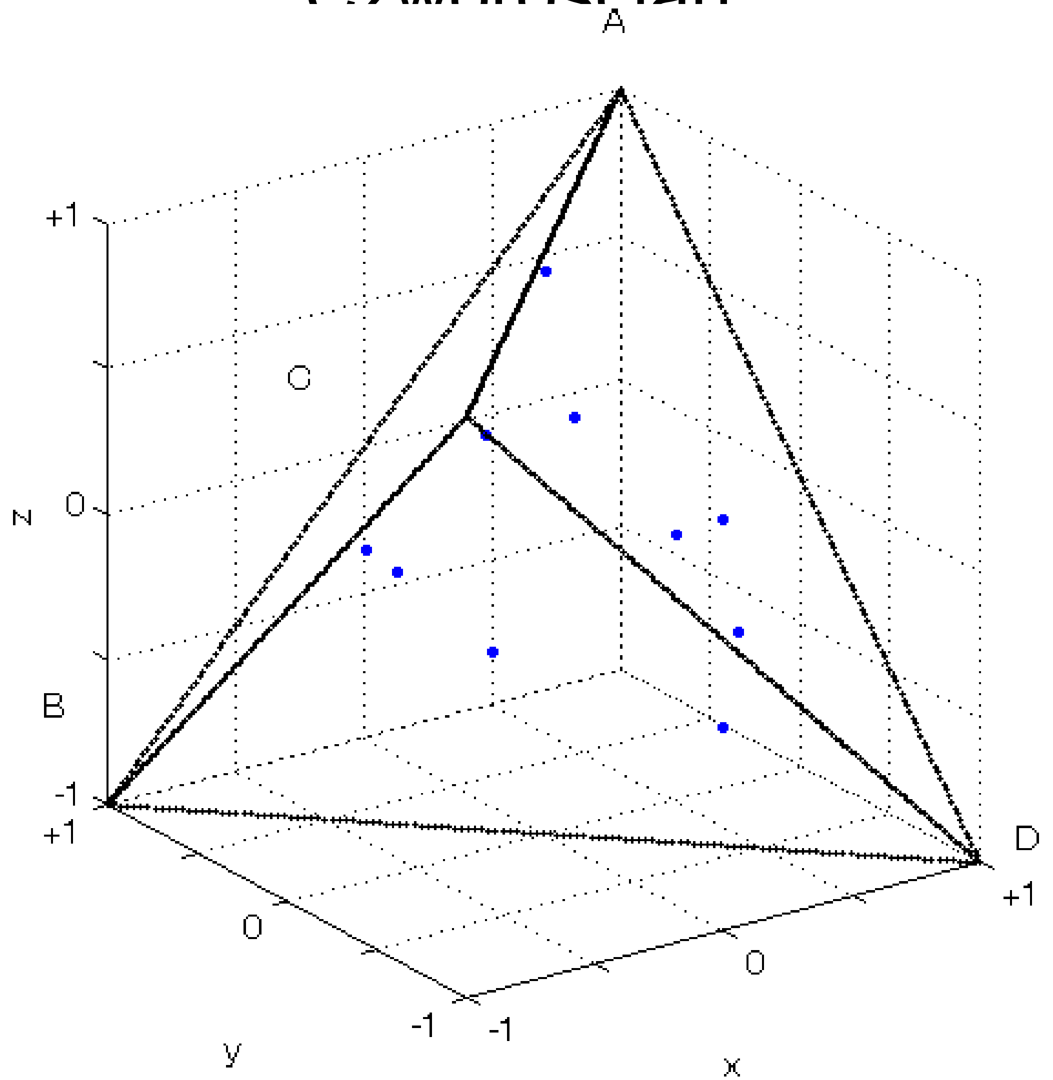
    - w którym uwzględniono:
      $u = a/(a+b+c+d)$, $v = b/(a+b+c+d)$,
      $w = c/(a+b+c+d)$, $t = d/(a+b+c+d)$
      - oczywiście pamiętamy, że $a, b, c, d \geq 0$

Barycentryczny układ współrzędnych

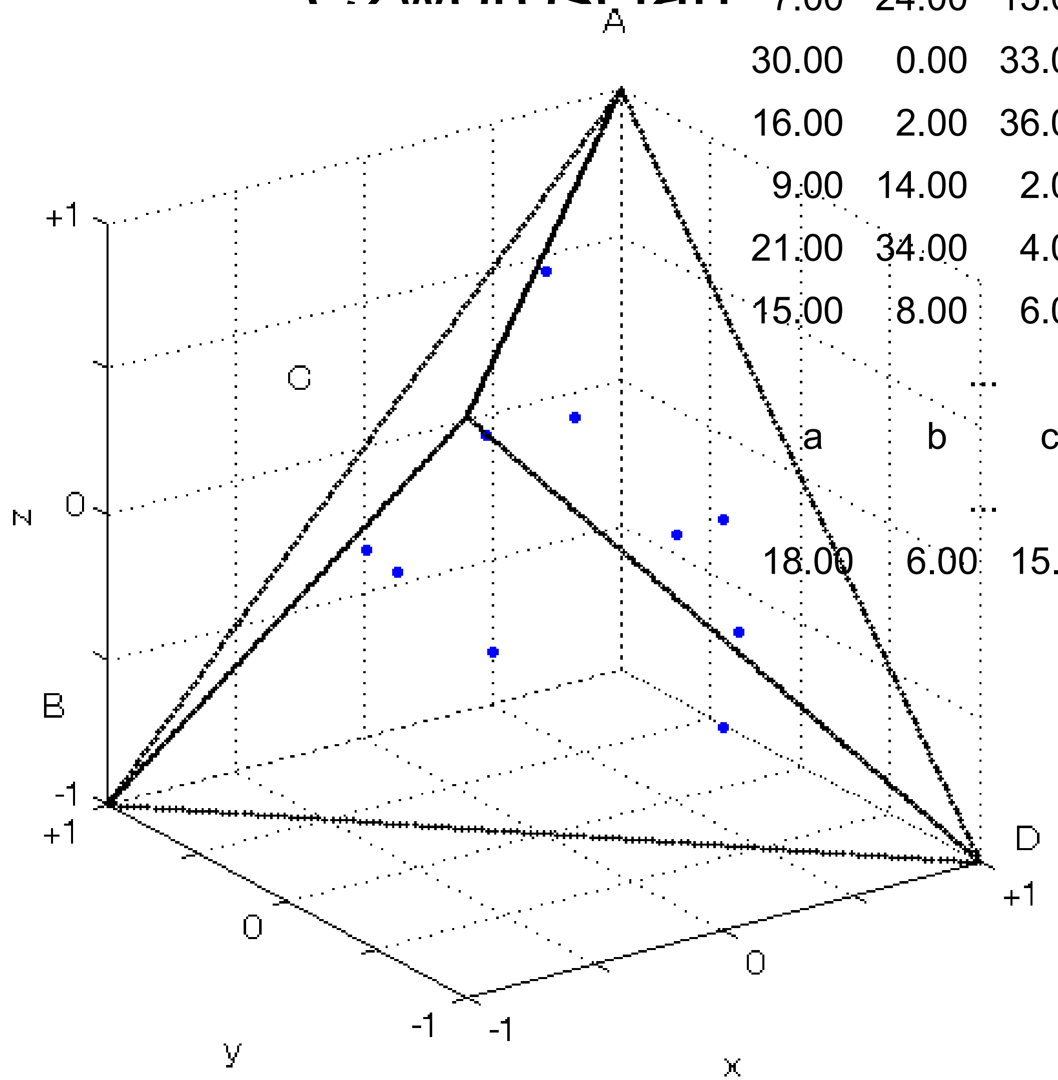
- Współrzędne trójwymiarowe danych spełniających **a**+**b**+**c**+**d** = n·**1**

x	**y**	**z**
0.59	-0.16	0.00
-0.22	-0.03	-0.31
-0.03	-0.06	0.97
-0.19	-0.44	0.63
0.50	-0.28	-0.66
-0.19	0.72	-0.22
0.56	-0.28	-0.34
	...	
x	y	z
	...	
0.34	-0.25	0.03

Czworościan

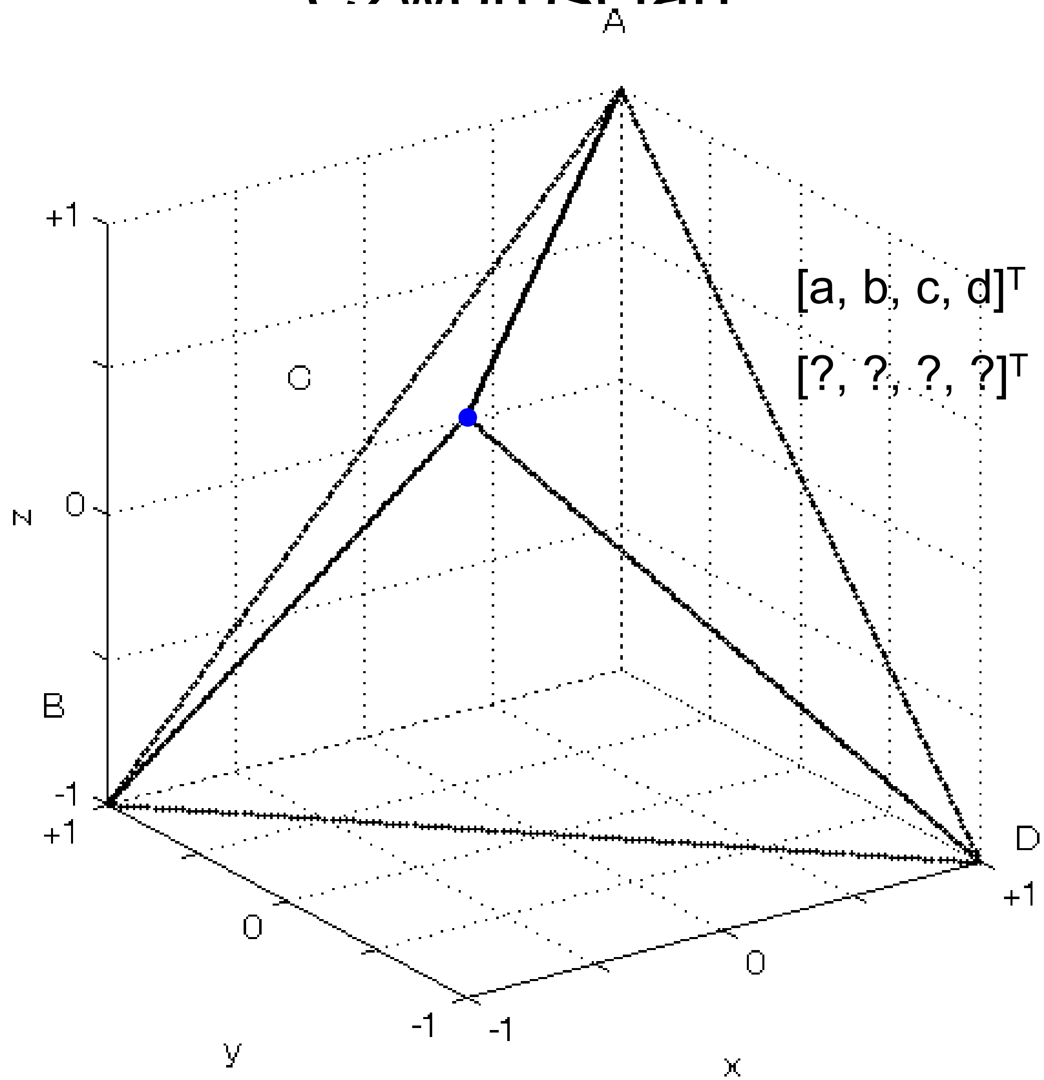


Czworościan

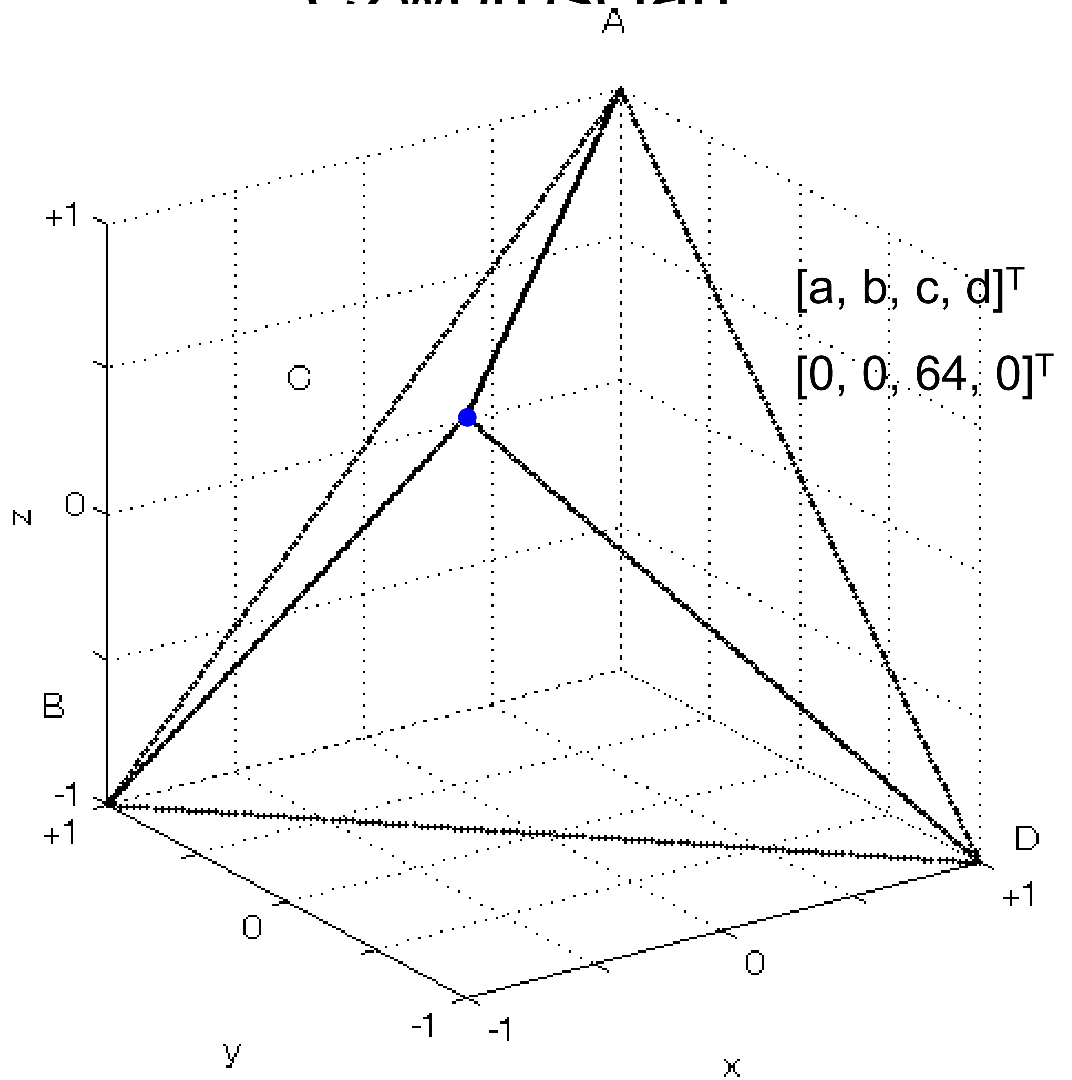


a	b	c	d
23.00	4.00	9.00	28.00
7.00	24.00	15.00	18.00
30.00	0.00	33.00	1.00
16.00	2.00	36.00	10.00
9.00	14.00	2.00	39.00
21.00	34.00	4.00	5.00
15.00	8.00	6.00	35.00
		...	
a	b	c	d
		...	
18.00	6.00	15.00	25.00

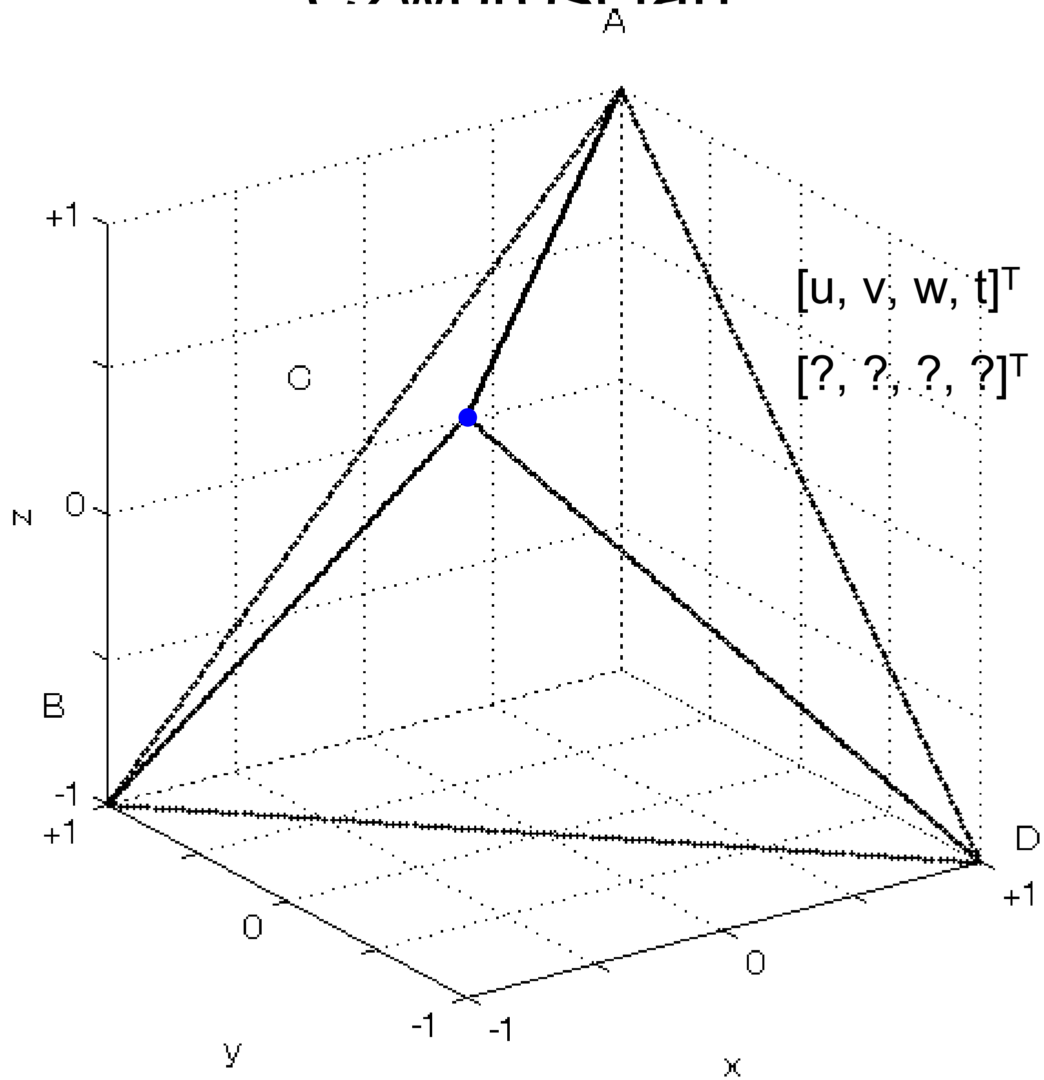
Czworościan



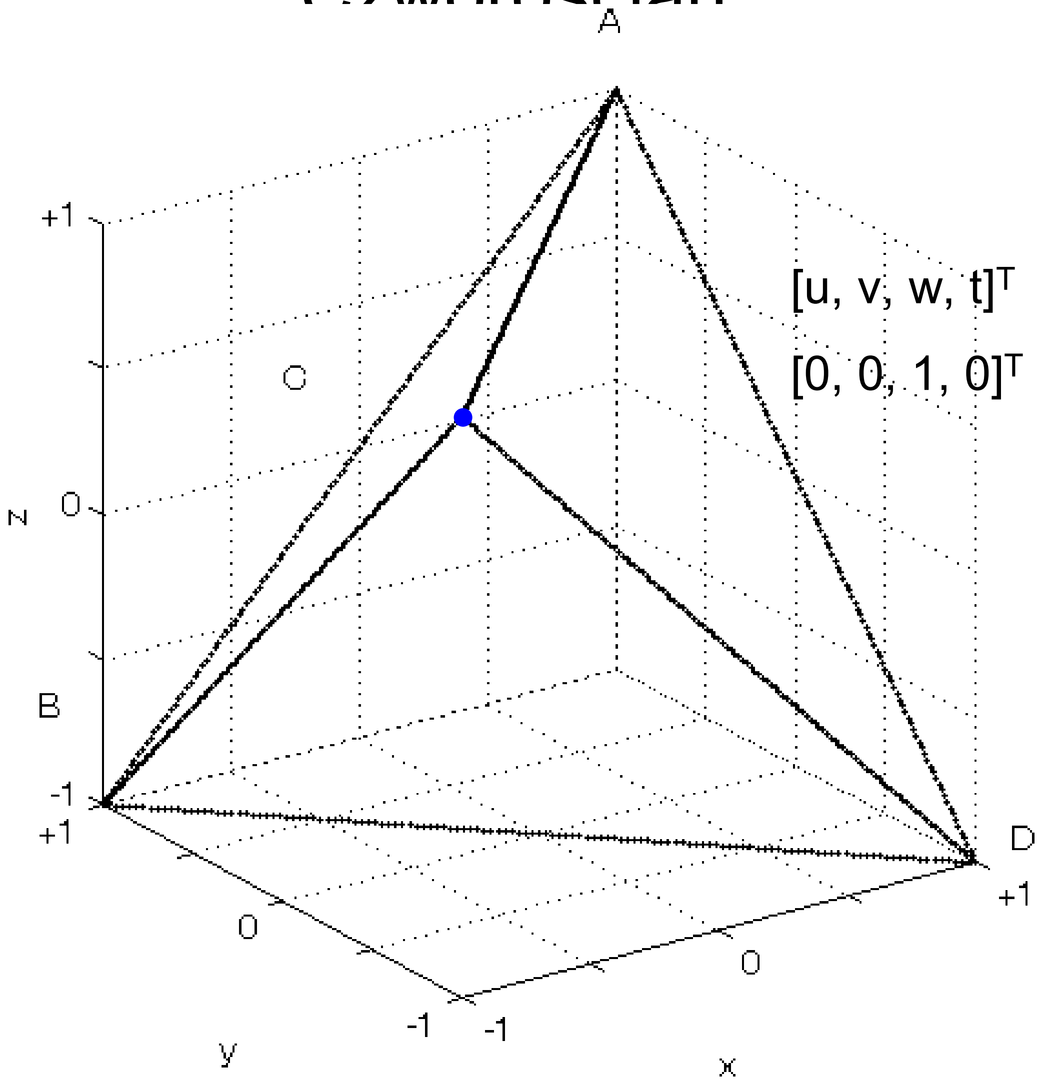
Czworościan



Czworościan



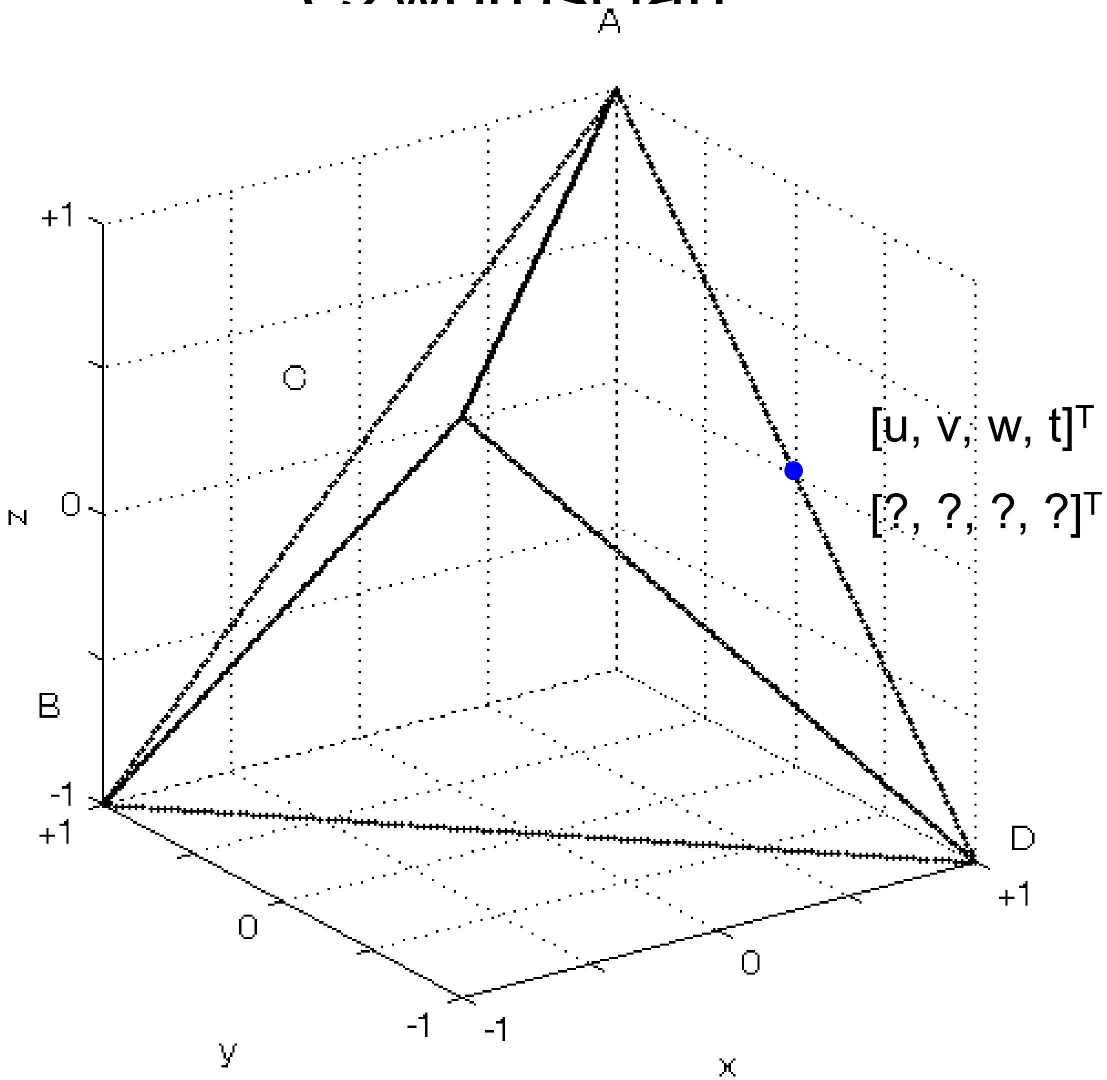
Czworościan



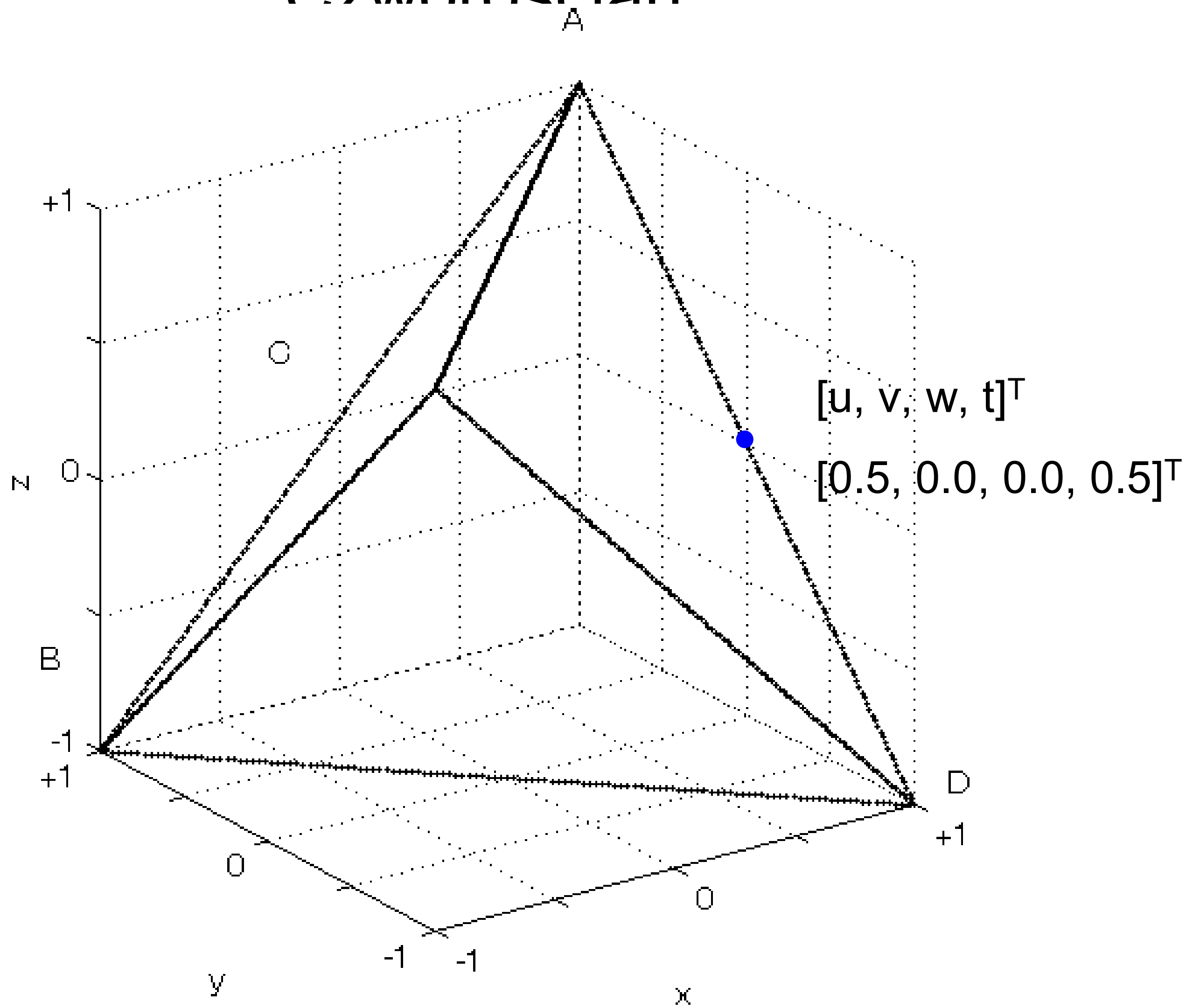
$[u, v, w, t]^T$

$[0, 0, 1, 0]^T$

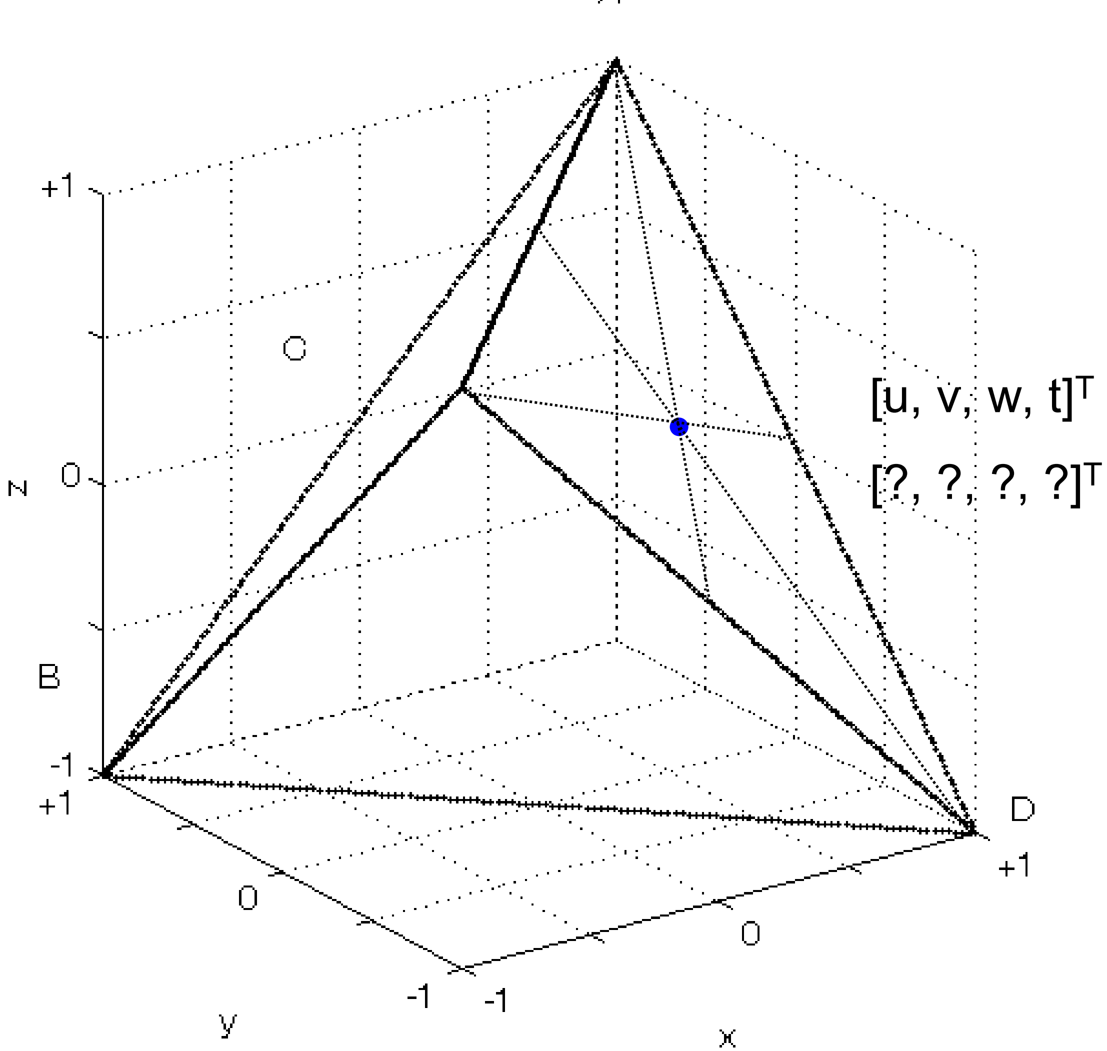
Czworościan



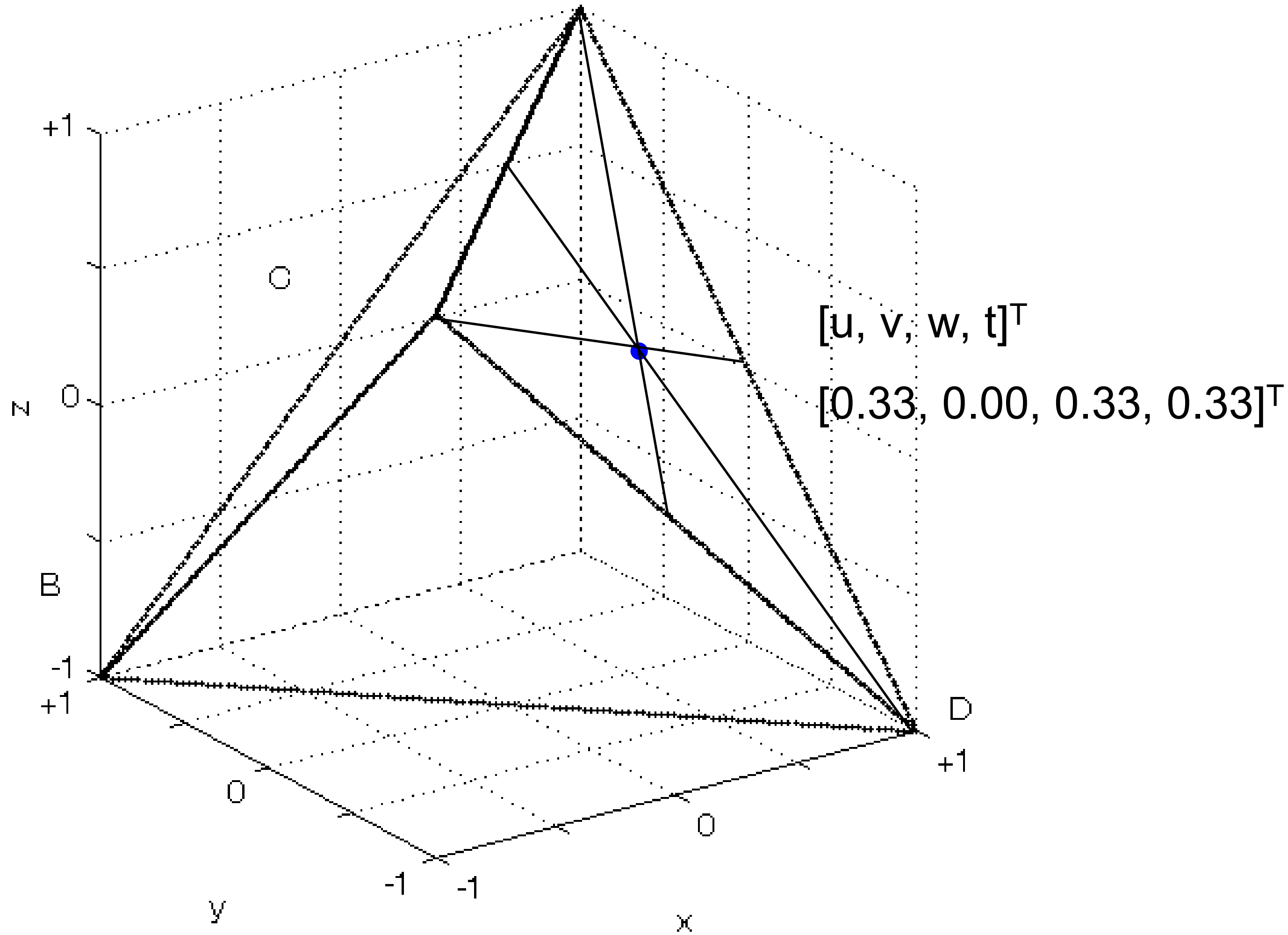
Czworościan



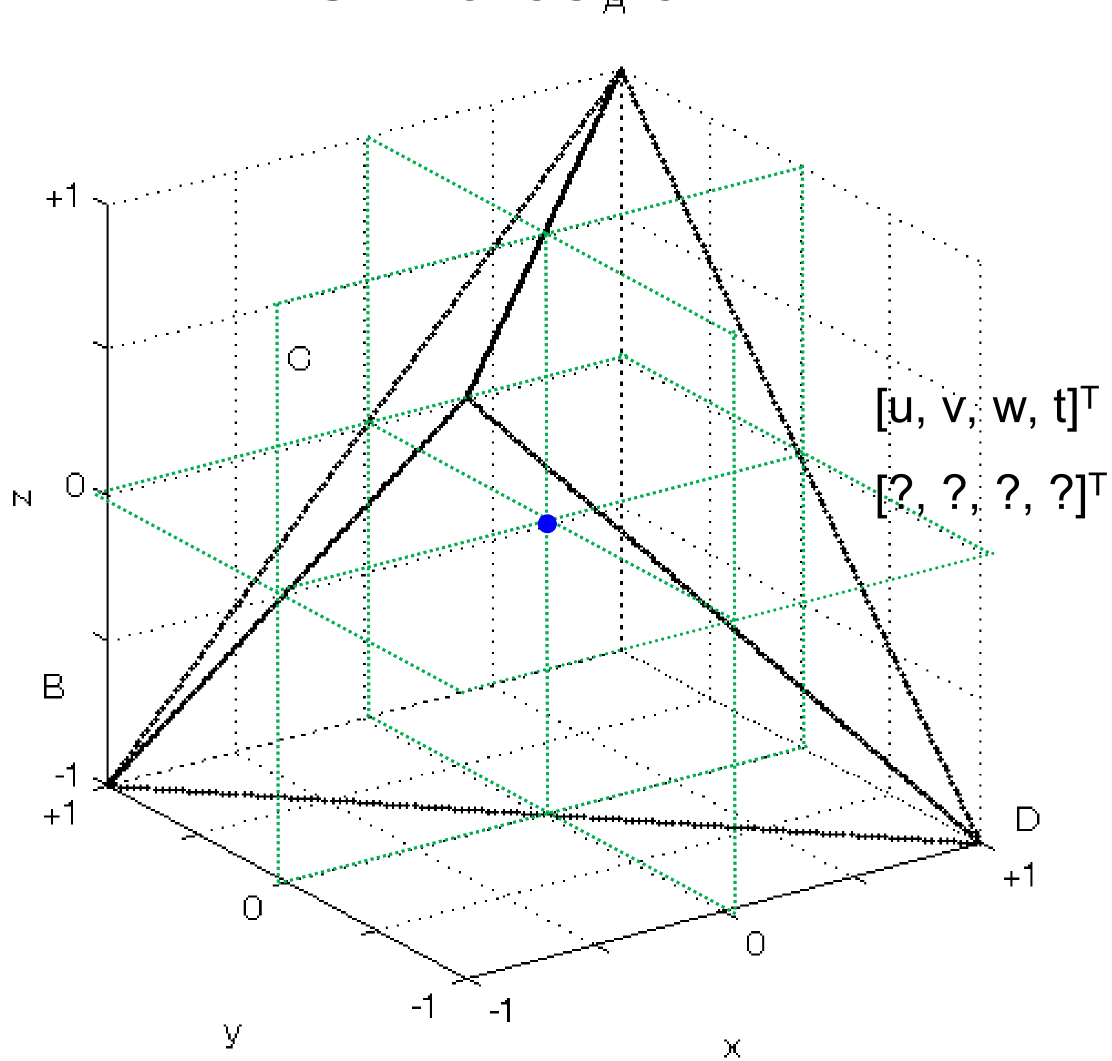
Czworościan



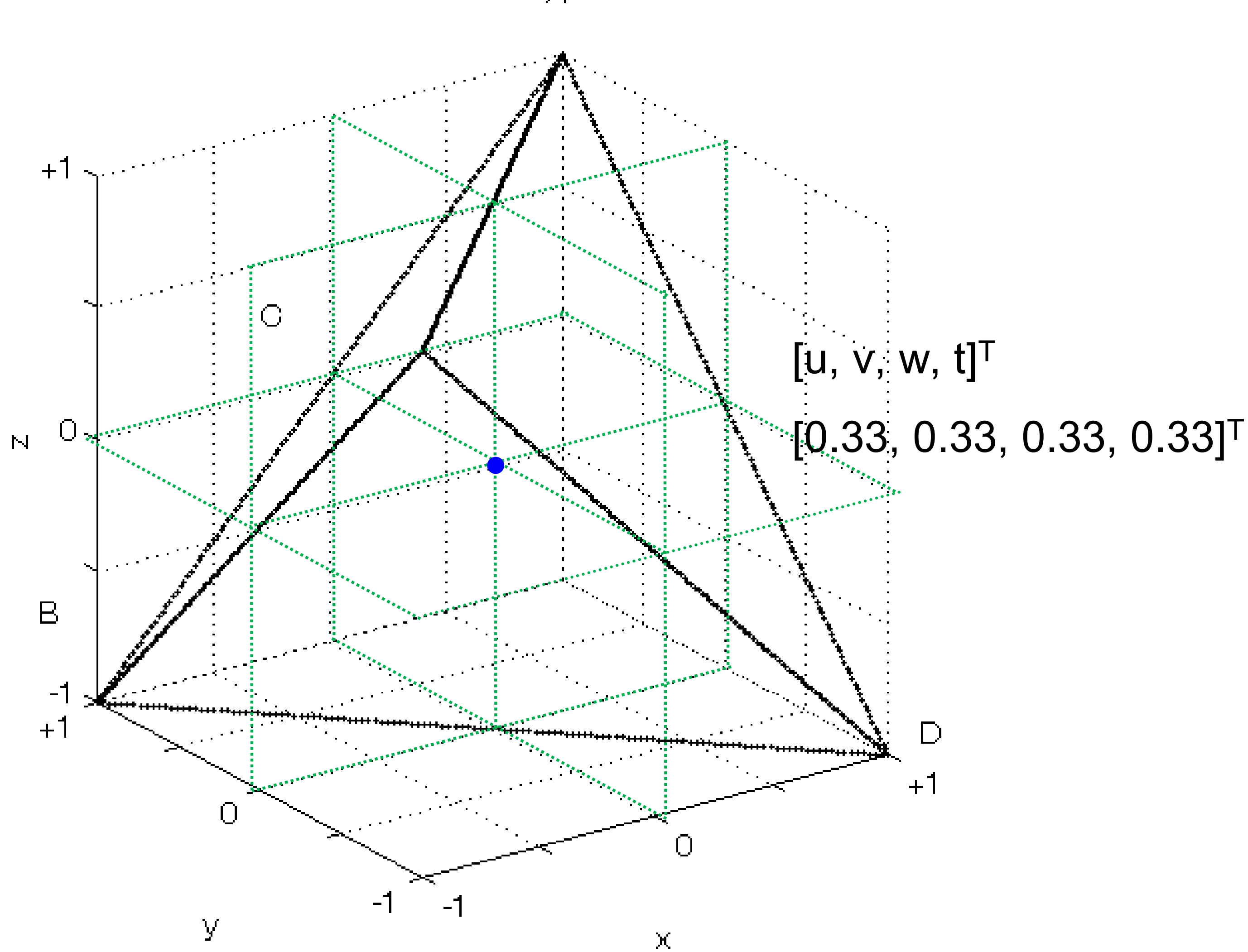
Czworościan



Czworościan



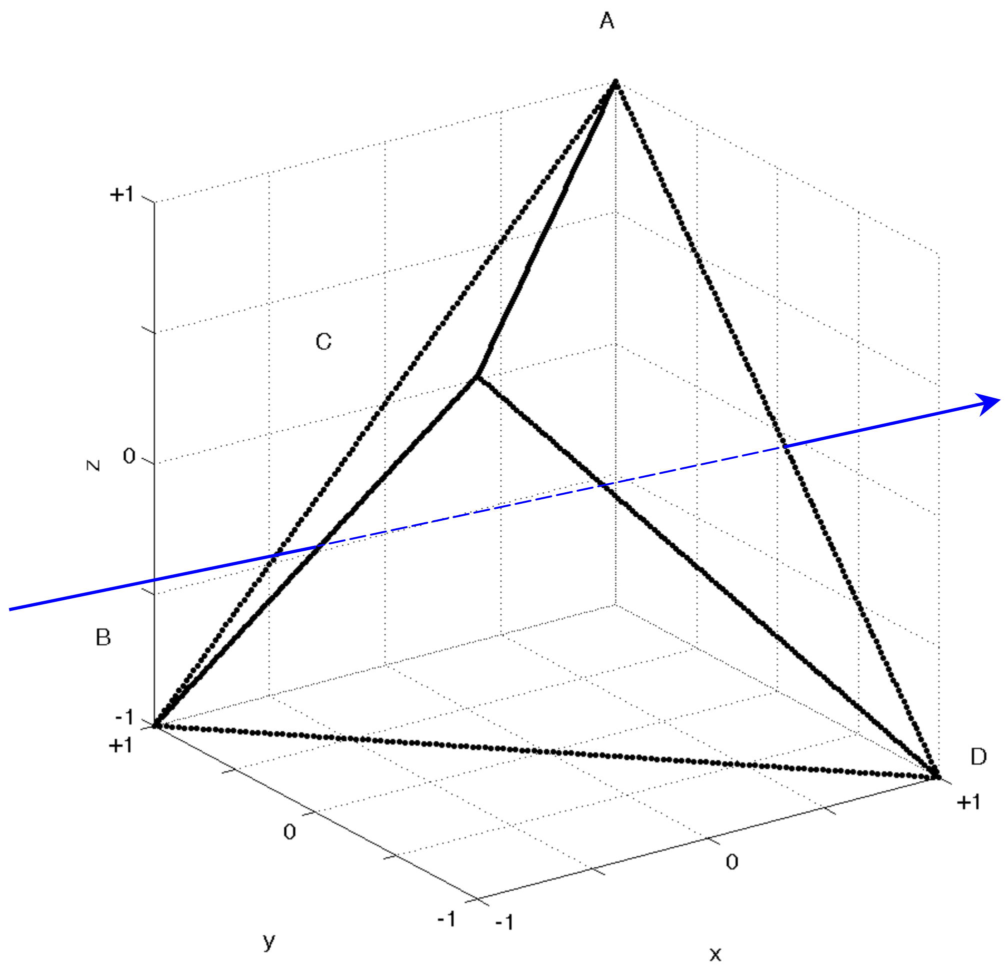
Czworościan

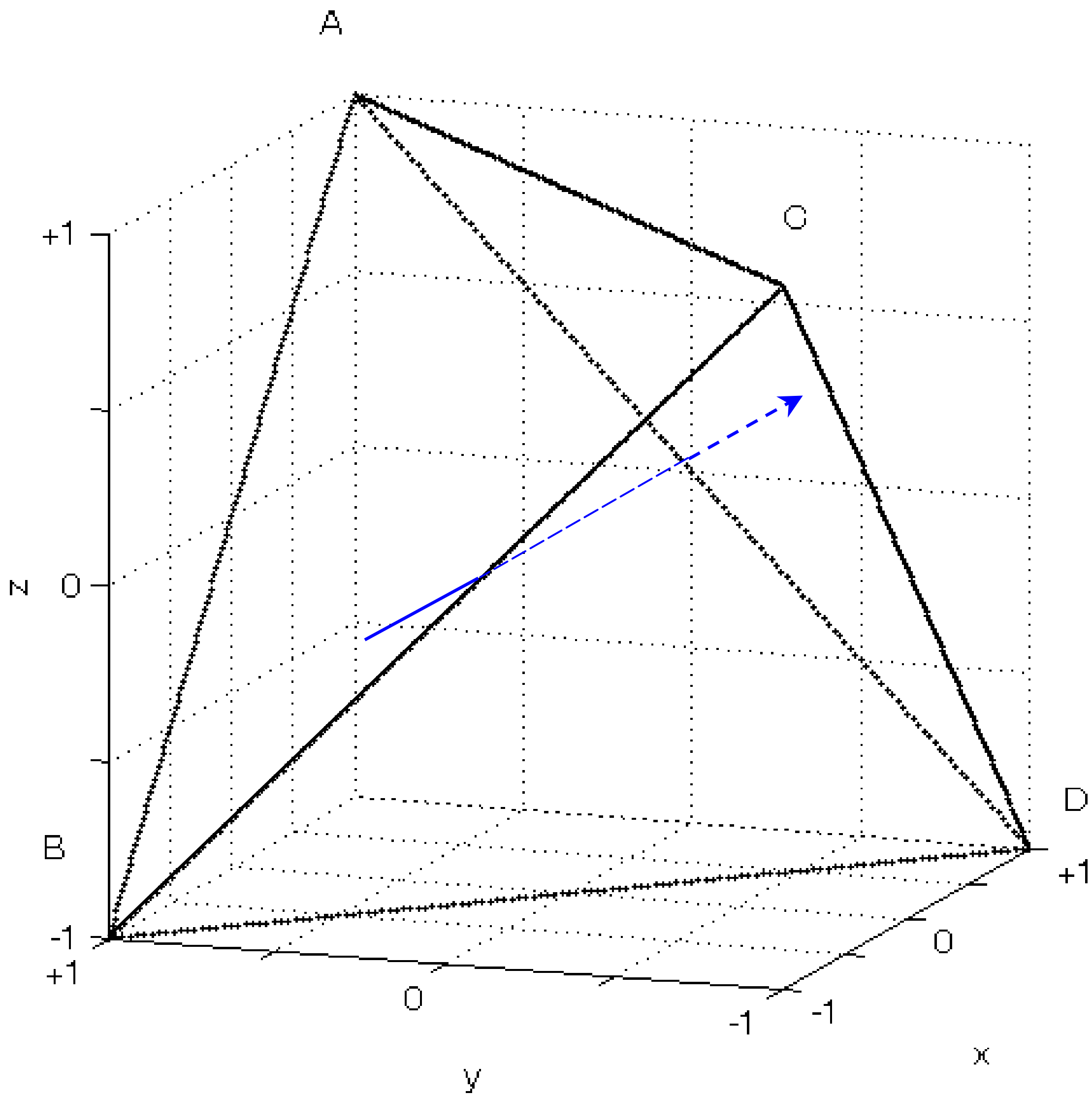


Czworościan

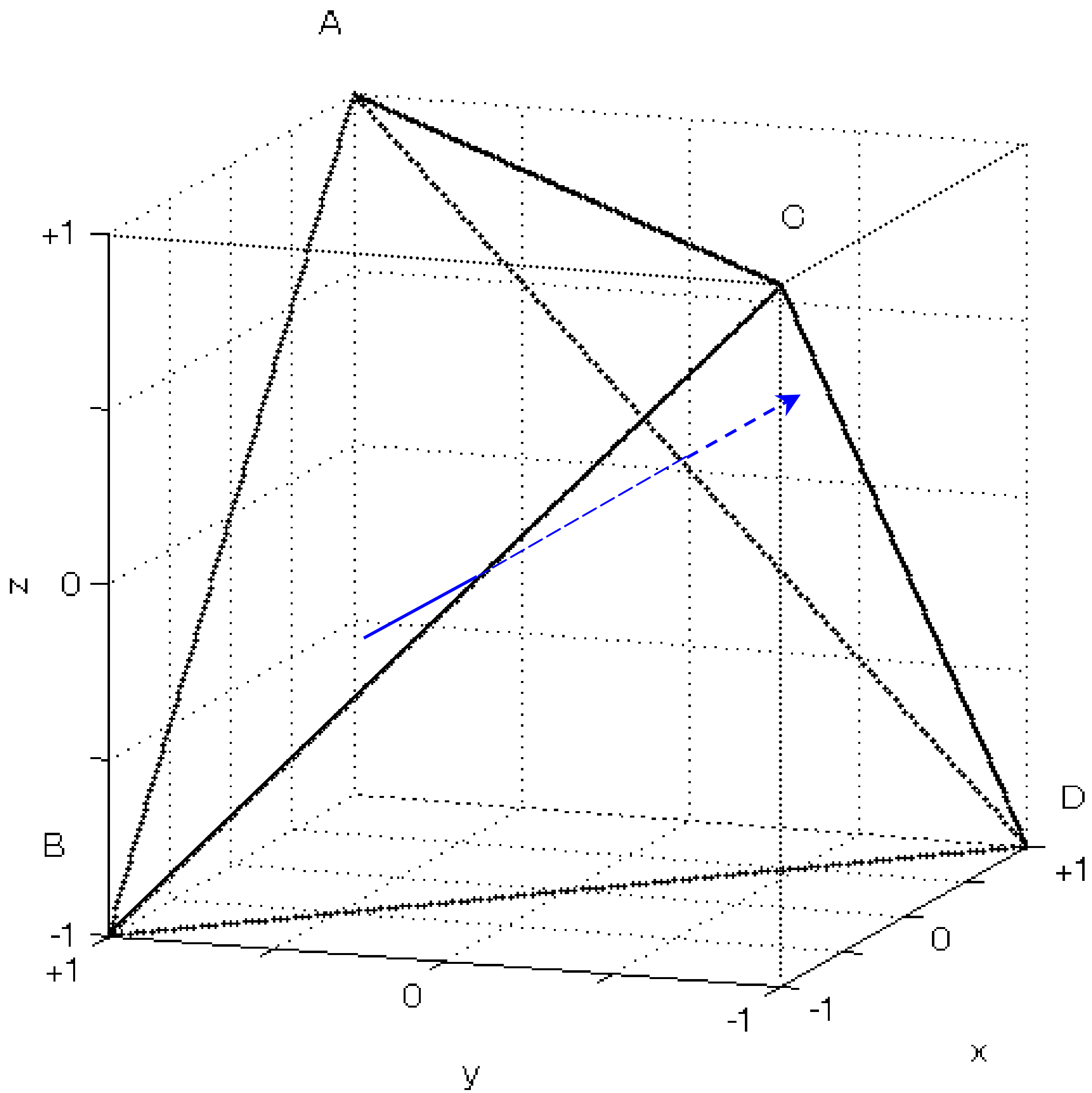
- Czworościan w wizualizacji wybranych danych

Czworościan

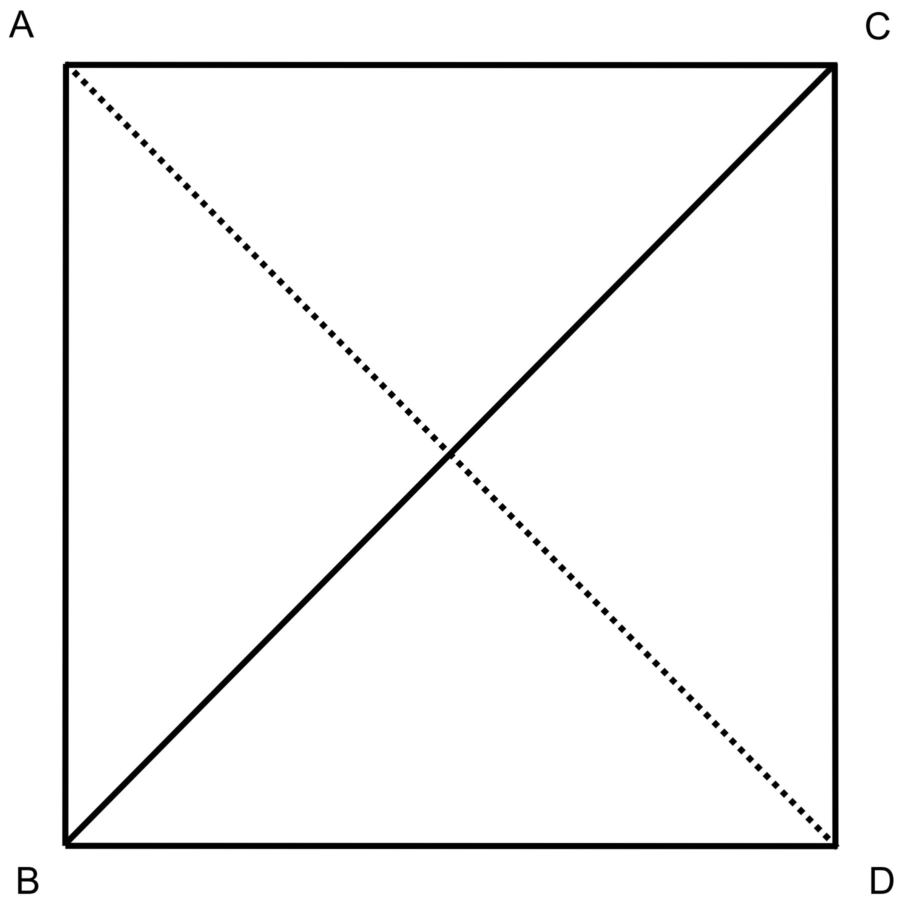


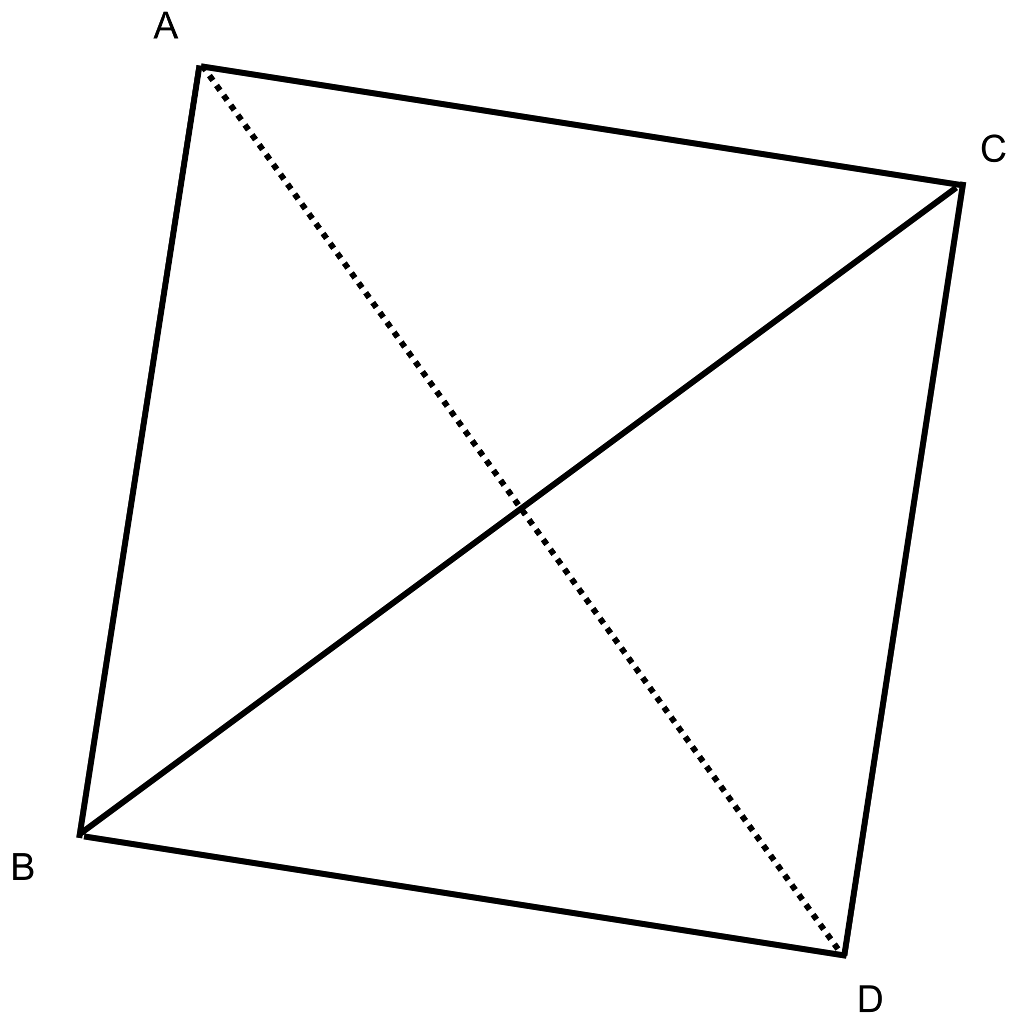


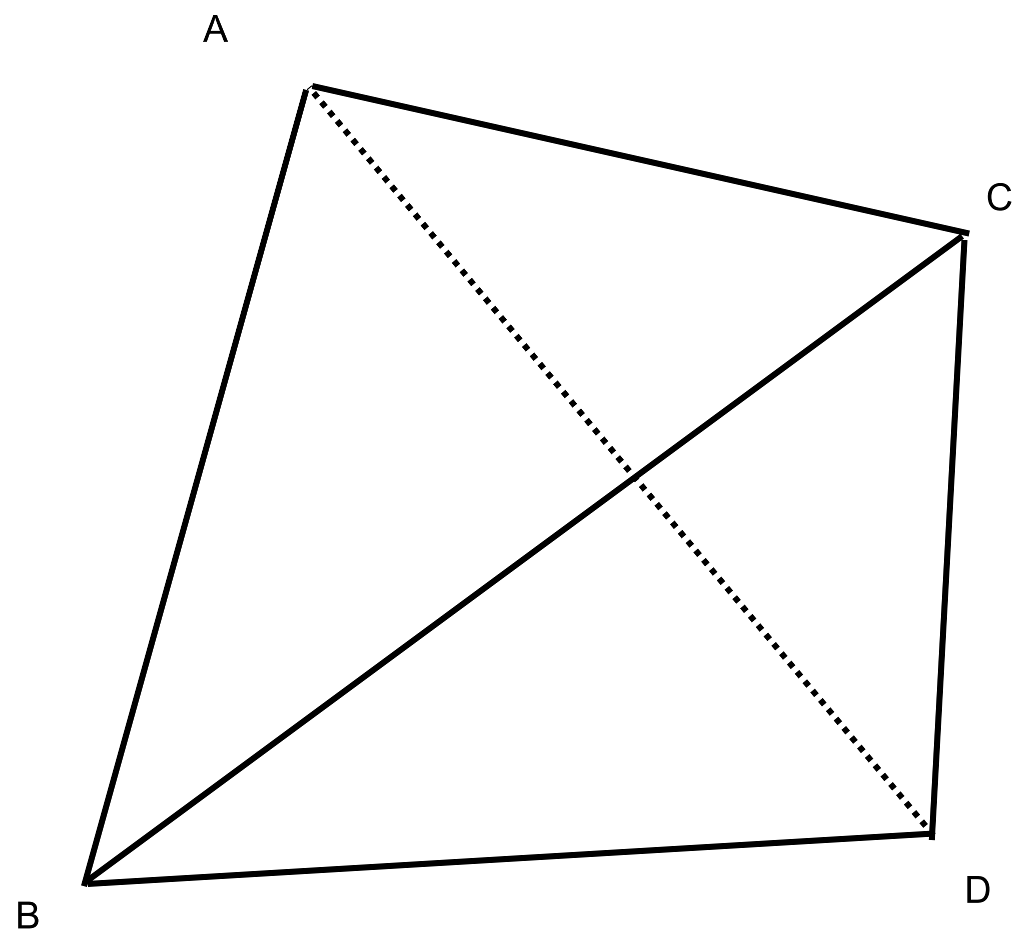
A
C
+1
z
0
B
D
-1
+1
0
-1
y
+1
0
-1
x

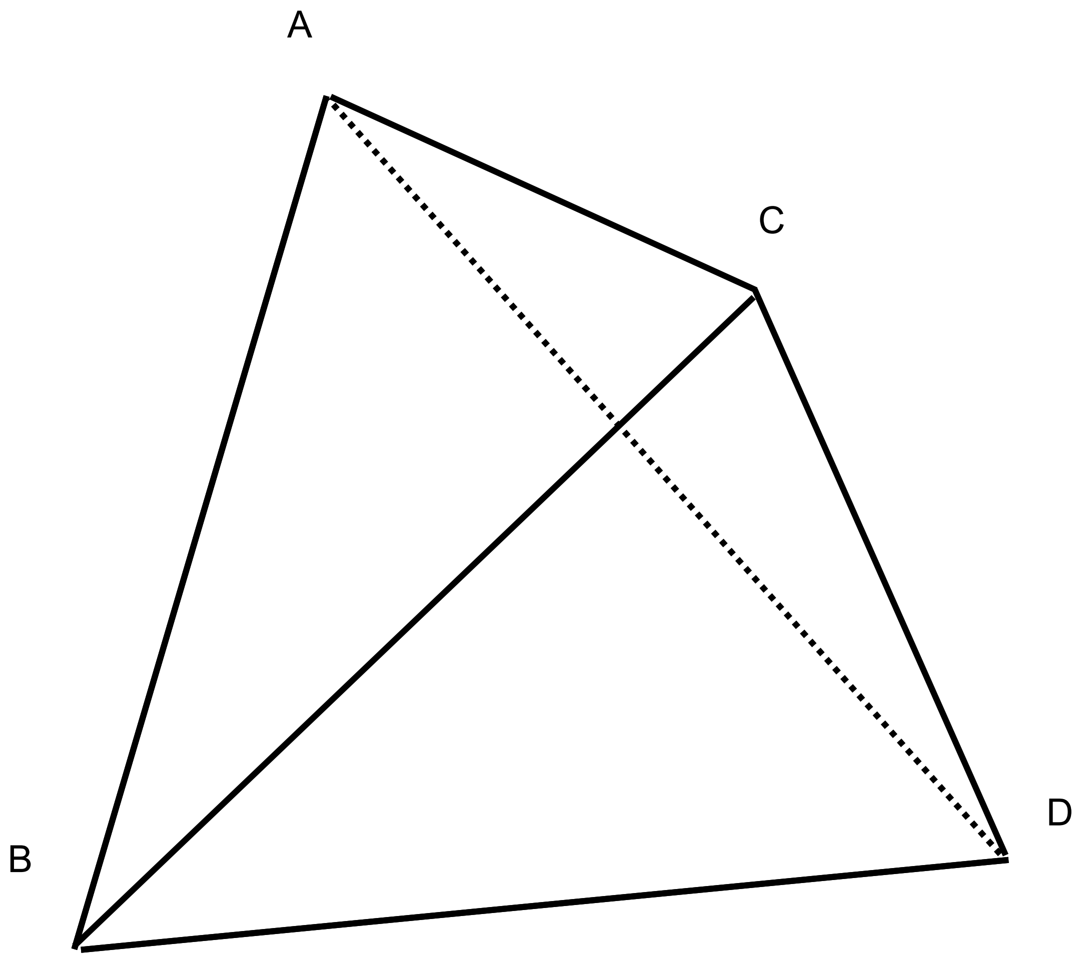


A
C
+1
z
0
B
-1
+1
0
-1
y
D
+1
0
-1
x

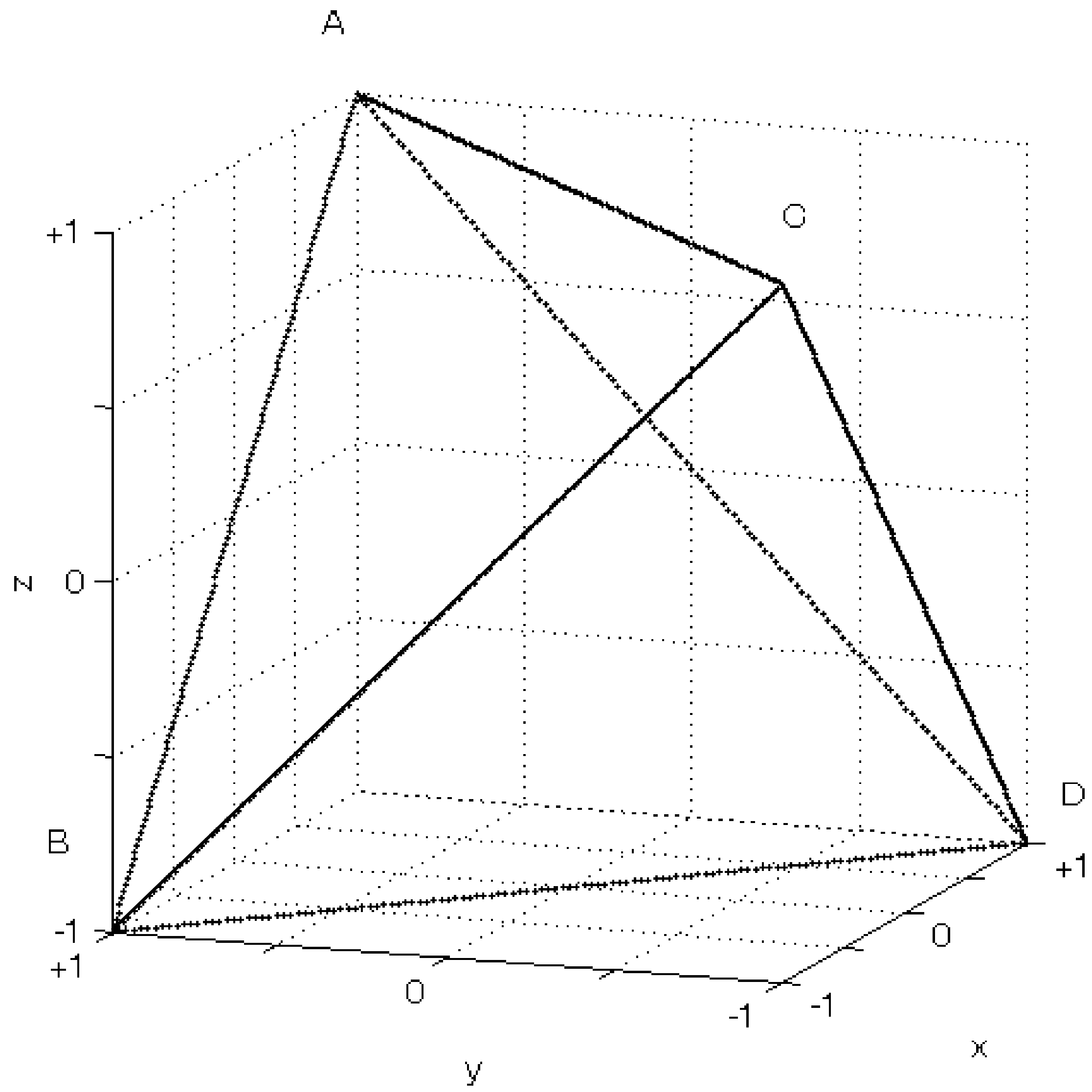

A
C
B
D

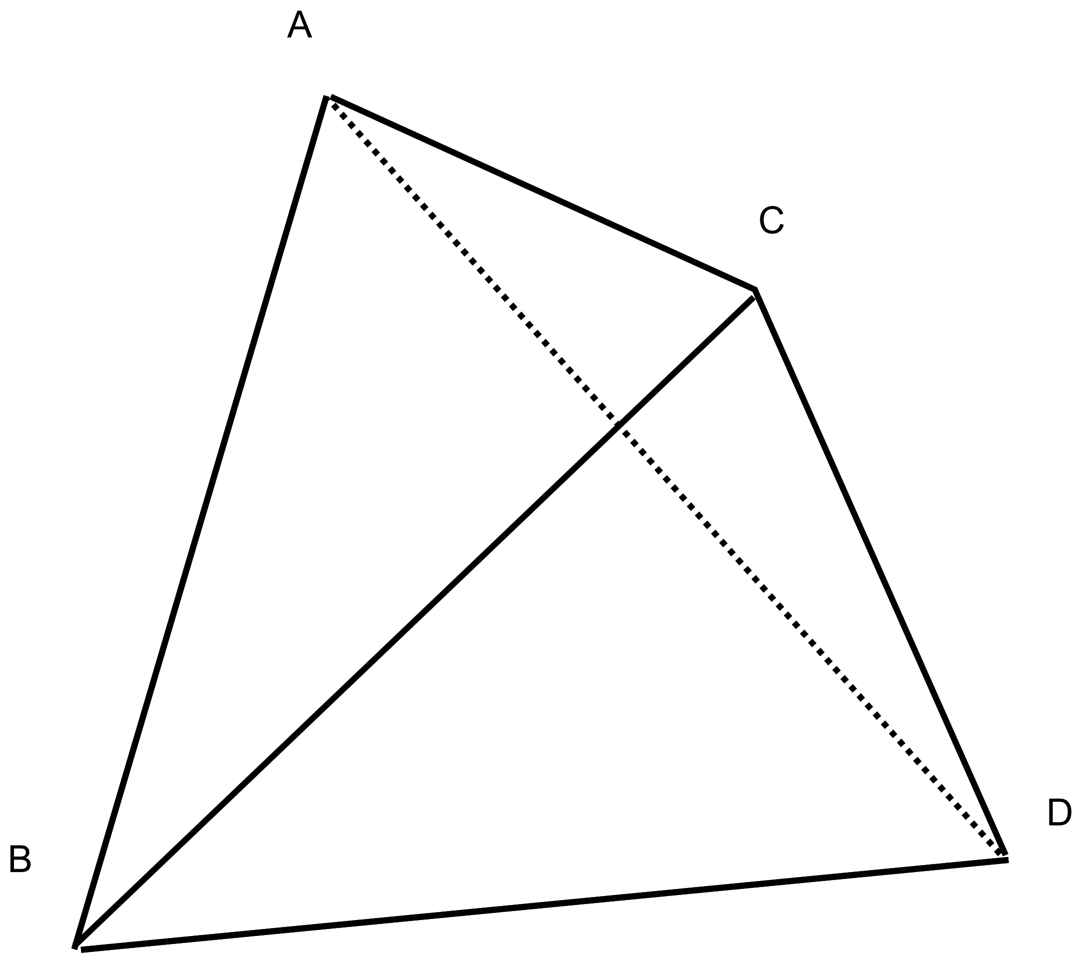

A
C
B
D

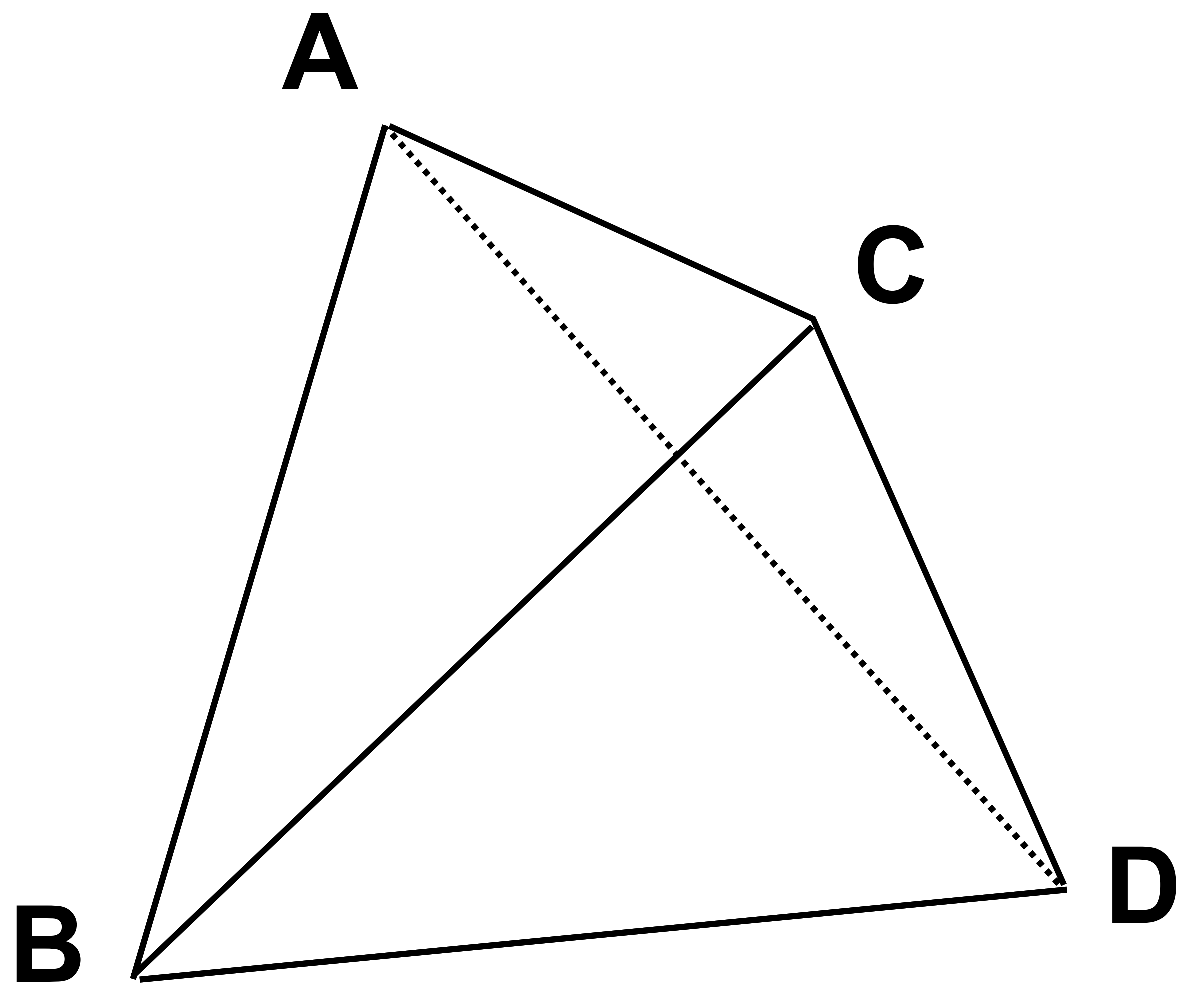

A
C
B
D

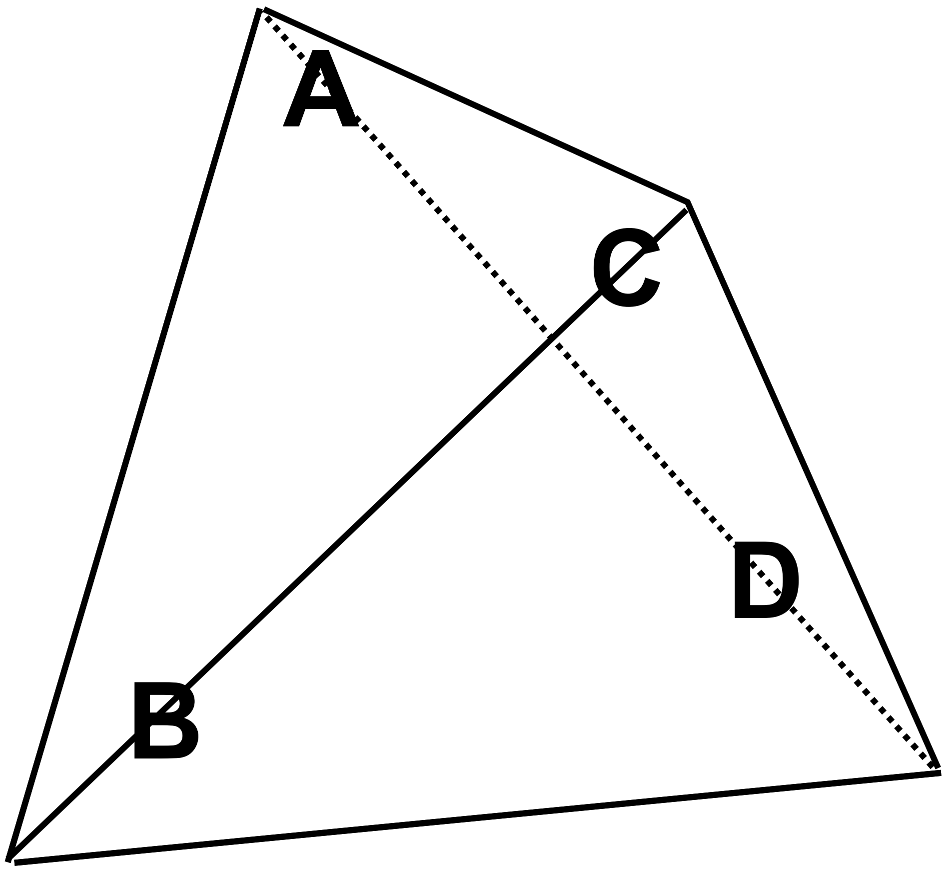


A
C
B
D

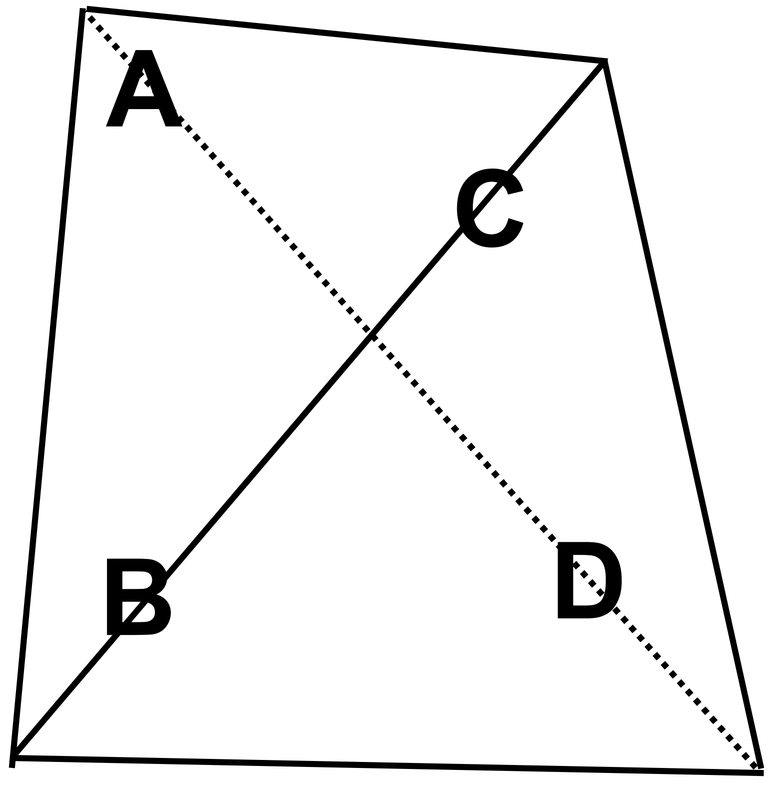

A
C
B
D
+1
0
-1
z
+1
0
-1
y
+1
0
-1
x

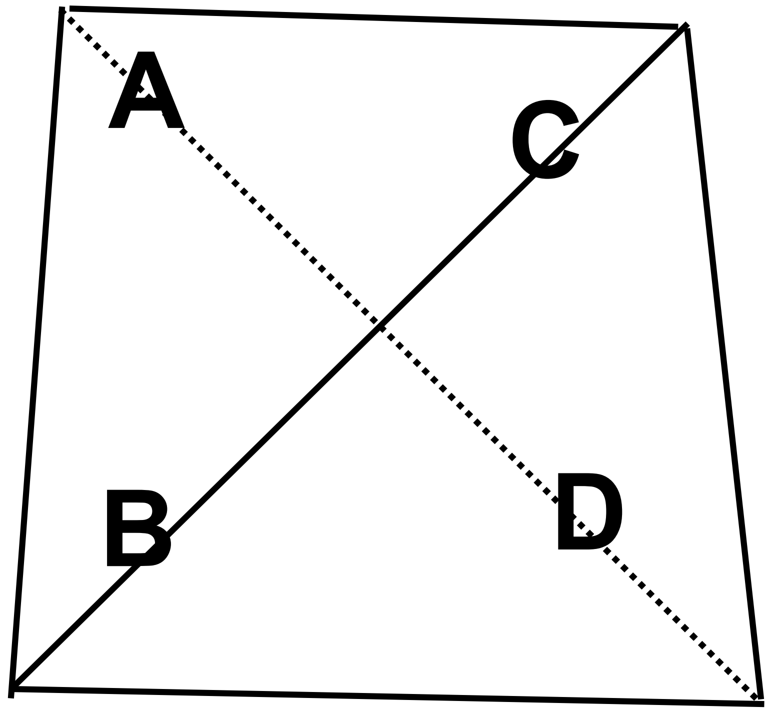

A
B
C
D

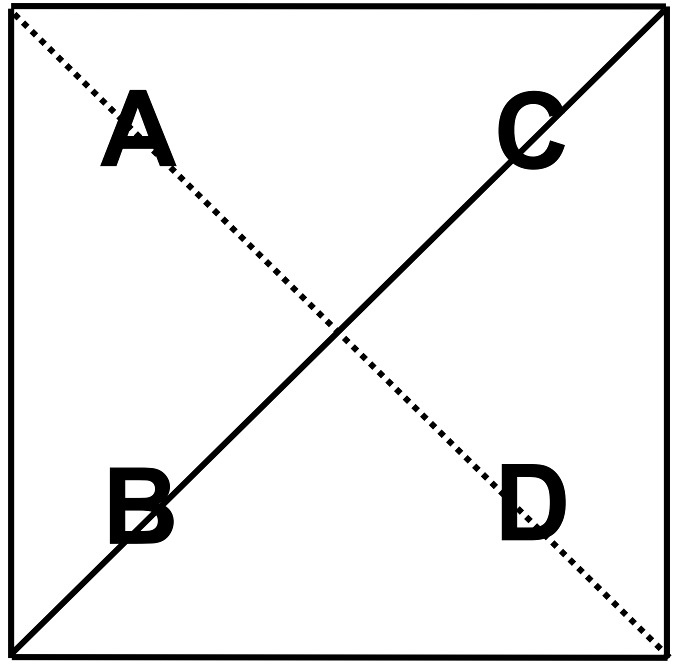

A
C
D
B

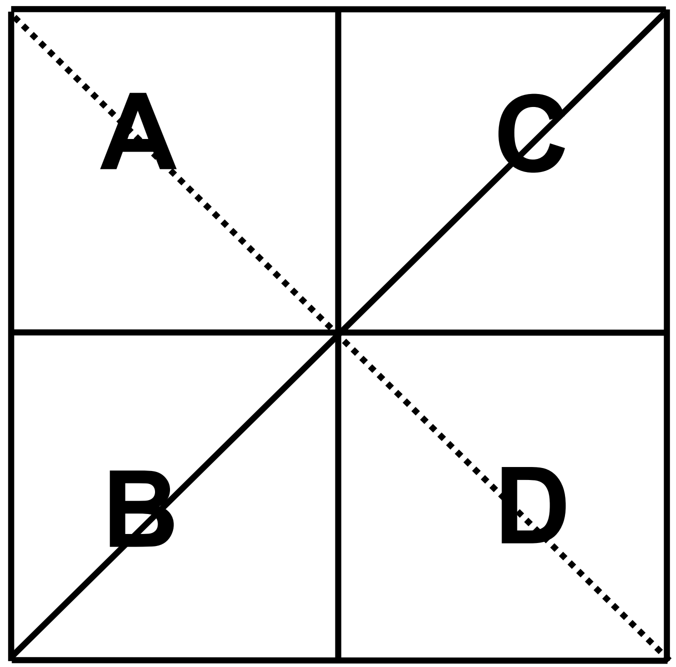


A
C
D
B


A
C
B
D

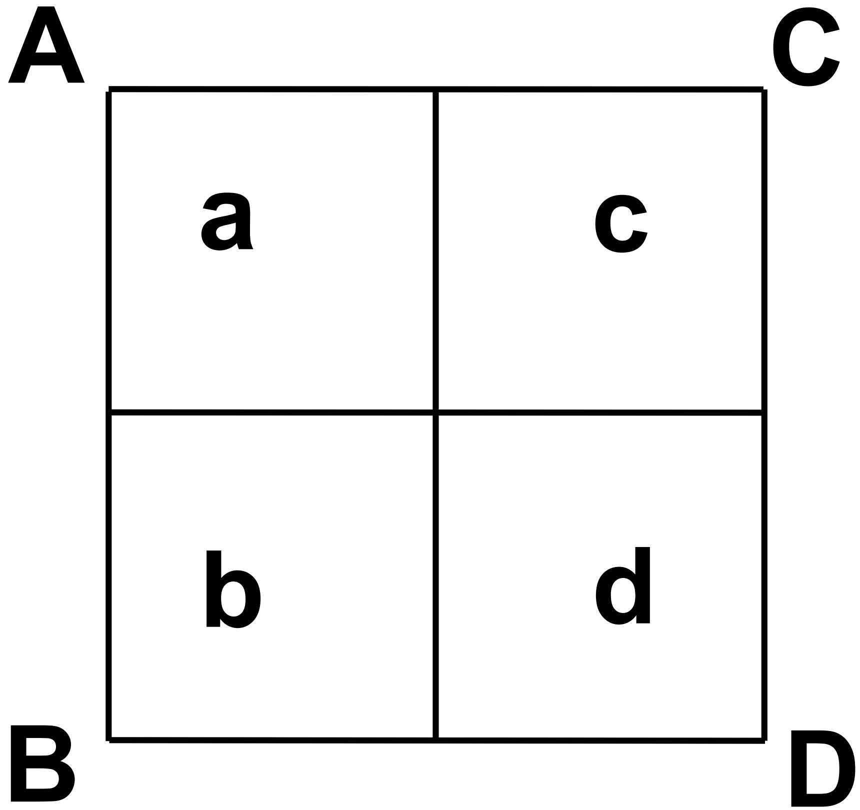

A
C
B
D


A
C
B
D


A
C
B
D

A	C
B	D

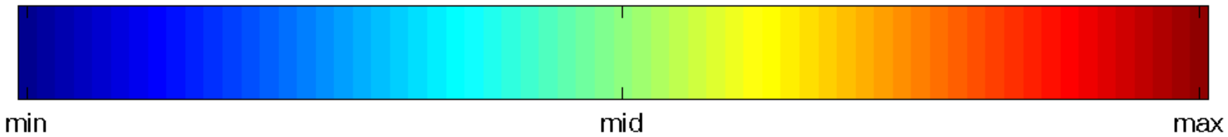
a	c
b	d

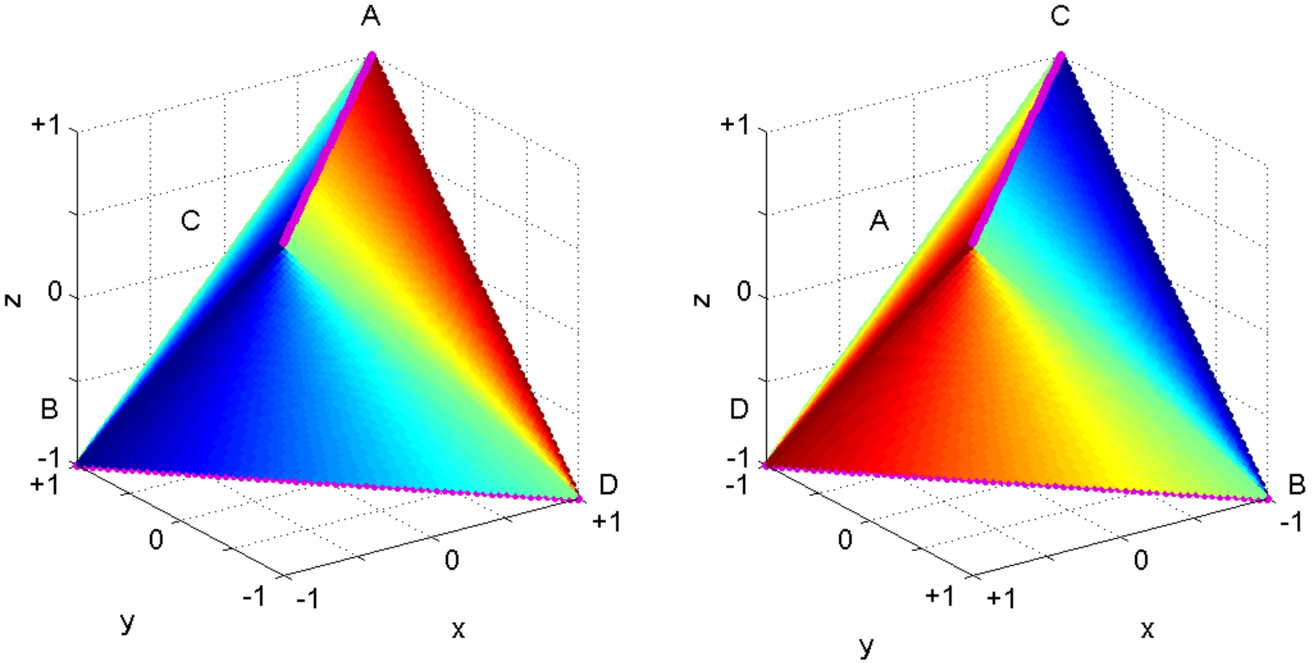

A
C
a
c
b
d
B
D

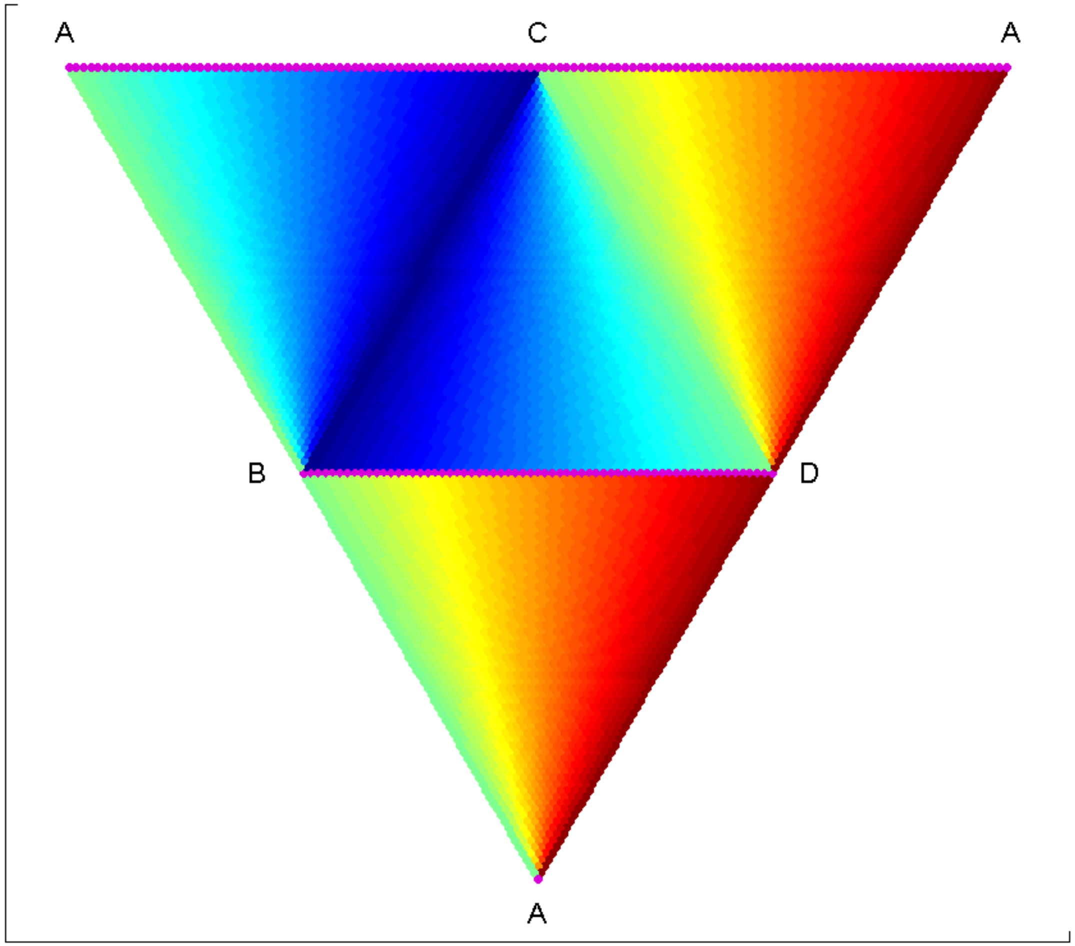
- Przykład: funkcja

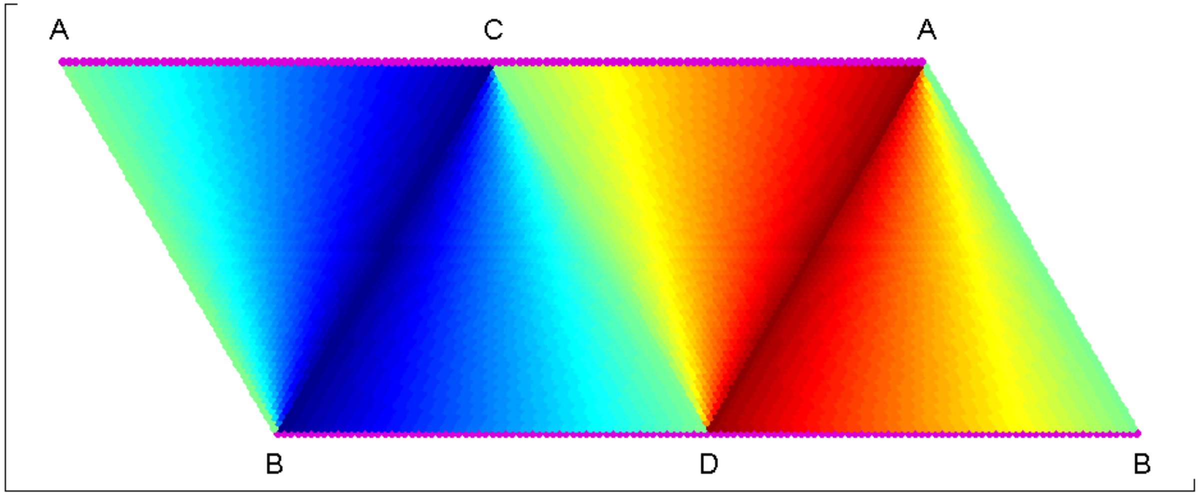
  $f(a,b,c,d) = a/(a+c) – b/(b+d)$

  (tzw. miara konfirmacji S)

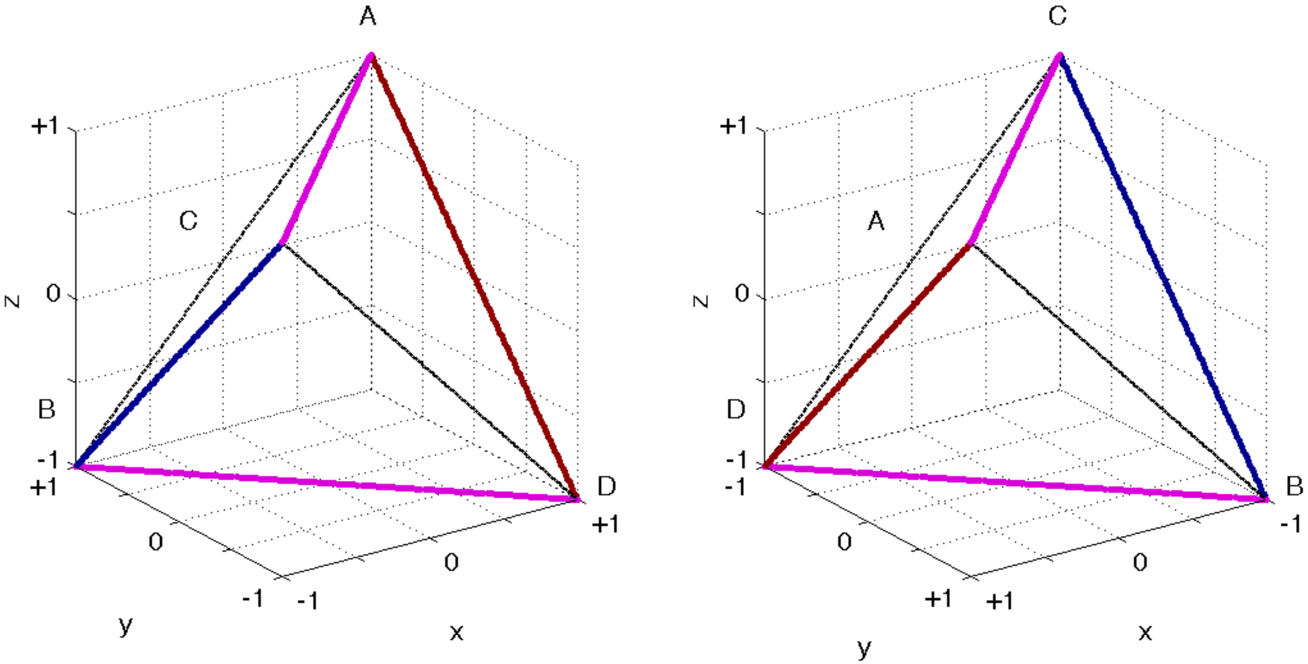

min
mid
max


A
C
B
D
z
+1
0
-1
y
x
C
A
D
B
z
+1
0
-1
y
x


A
C
A
B
D
A

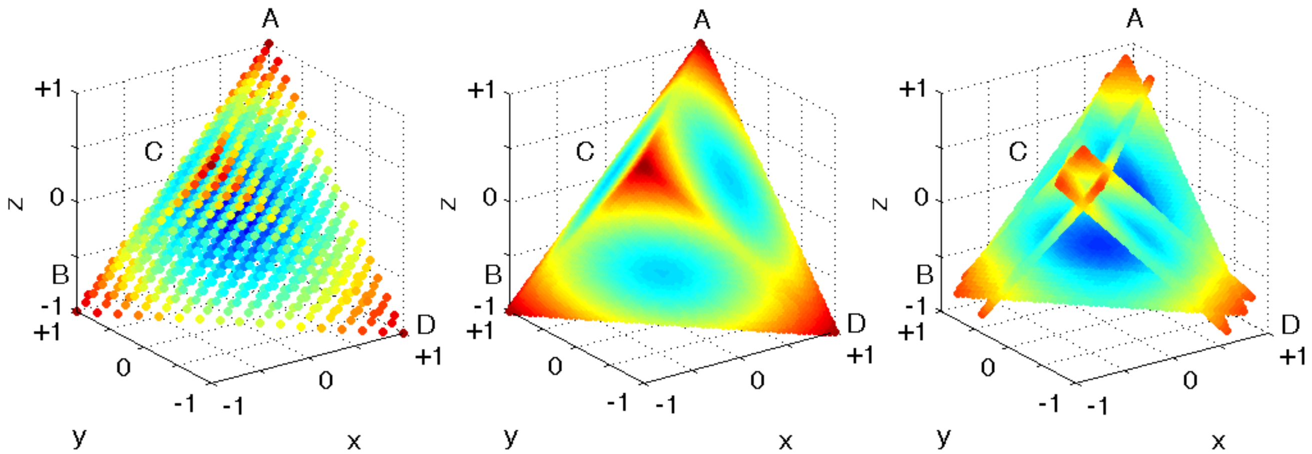


A
C
A
B
D
B

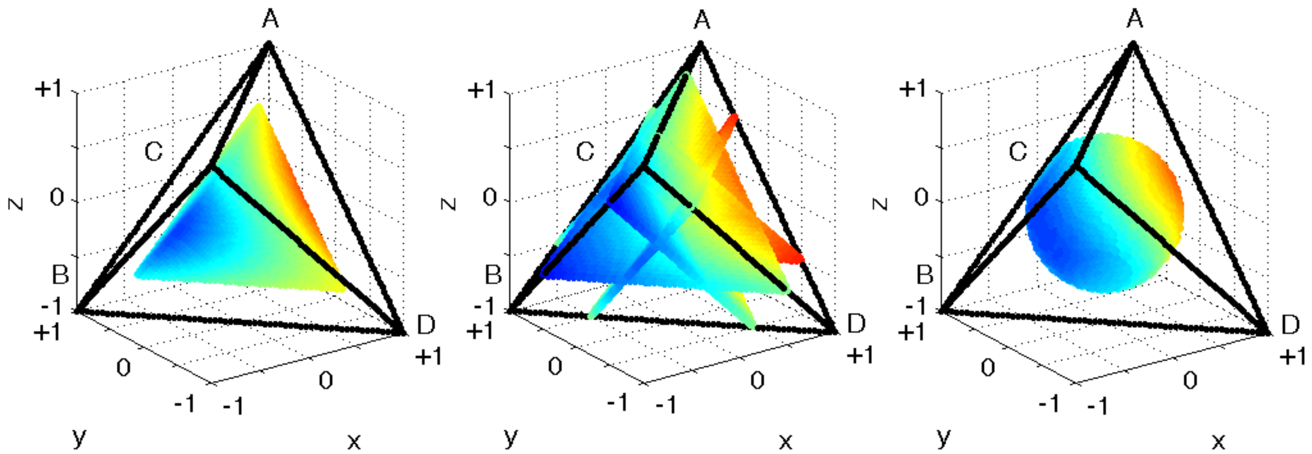

A
C
B
D
+1
0
-1
z
y
x
C
A
D
B
+1
0
-1
z
y
x

- Problem: a co ze środkiem figury?

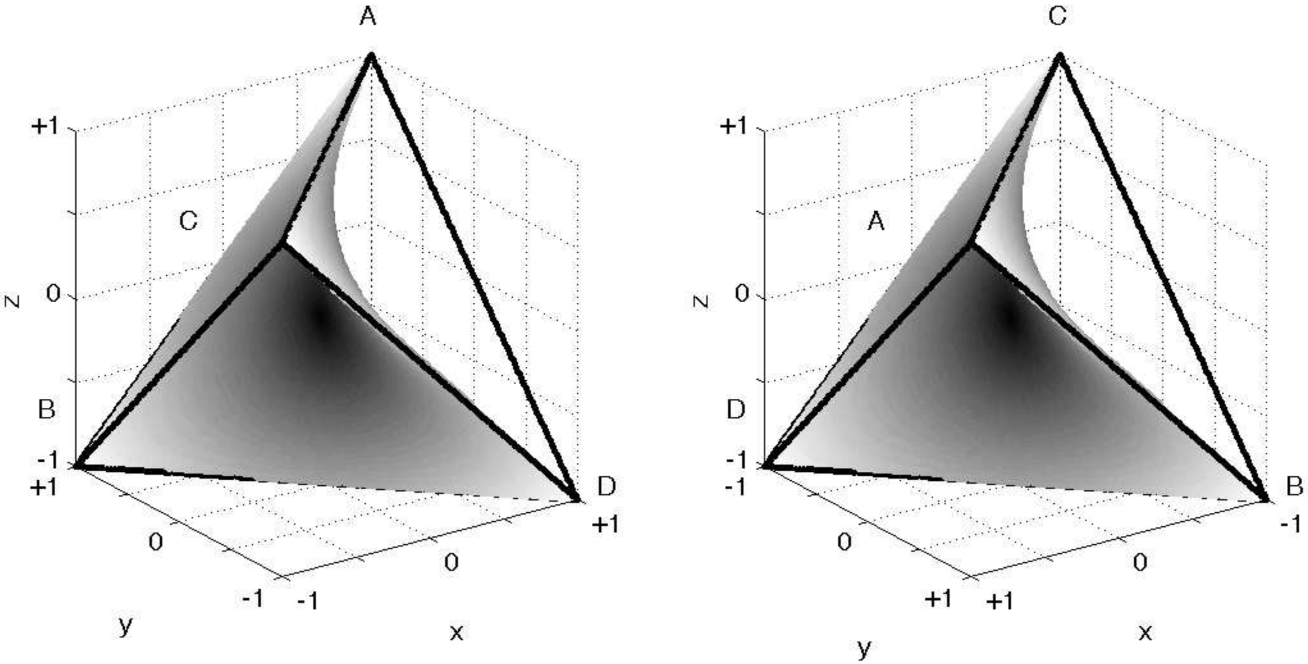
  (inne funkcje)

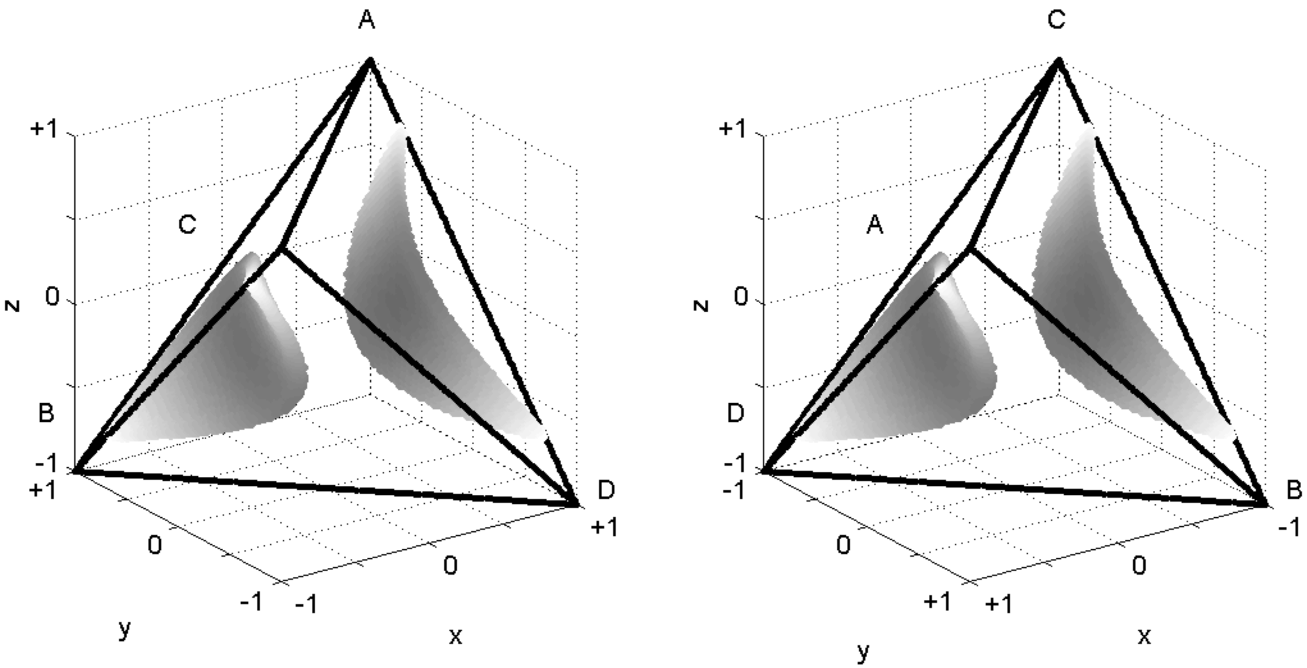


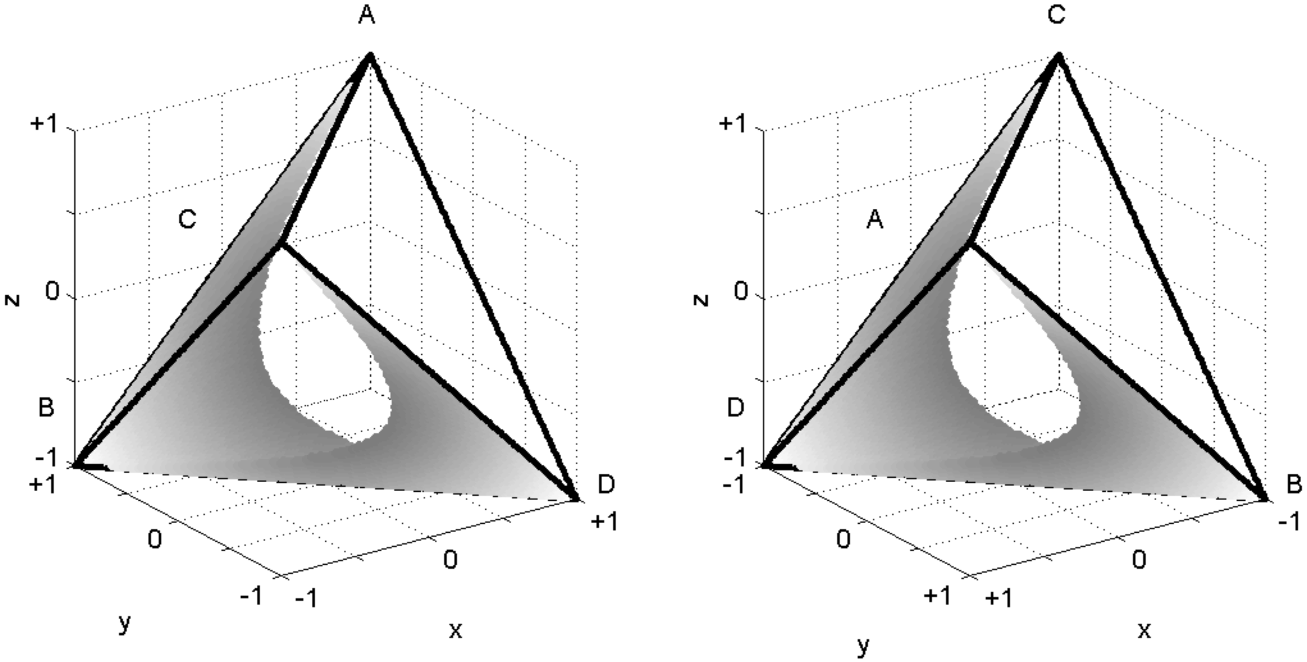
A
B
C
D
+1
0
-1
x
y
z



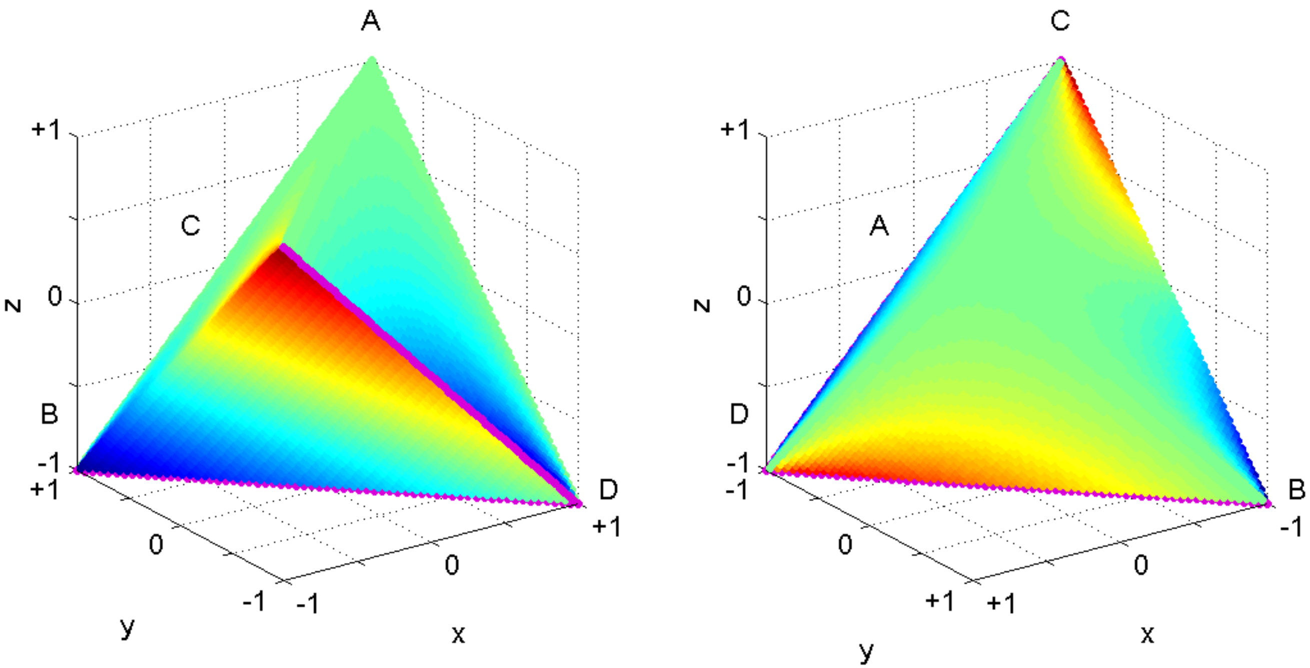
A
B
C
D
x
y
z
+1
0
-1


A
C
B
D
z
y
x
+1
0
-1
C
A
D
B
z
y
x
+1
0
-1

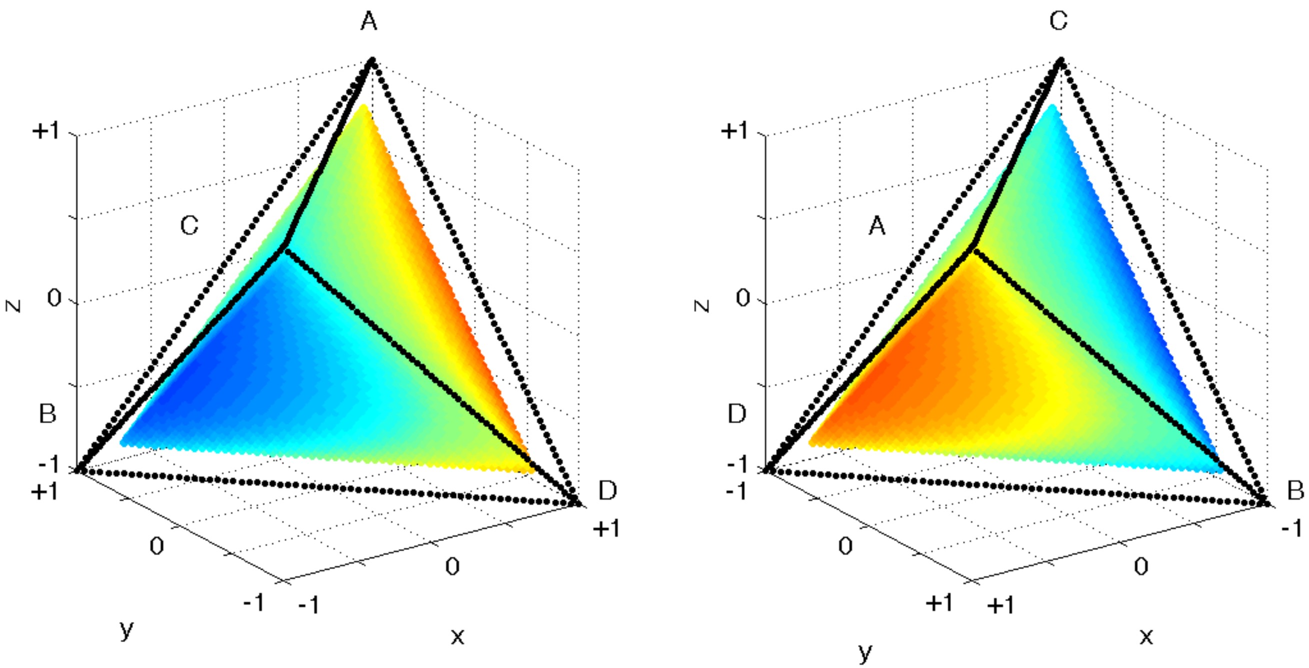

A
C
B
D
z
y
x
+1
0
-1
+1
0
-1
-1
0
+1
C
A
D
B
z
y
x
+1
0
-1
-1
0
+1
+1
0
-1

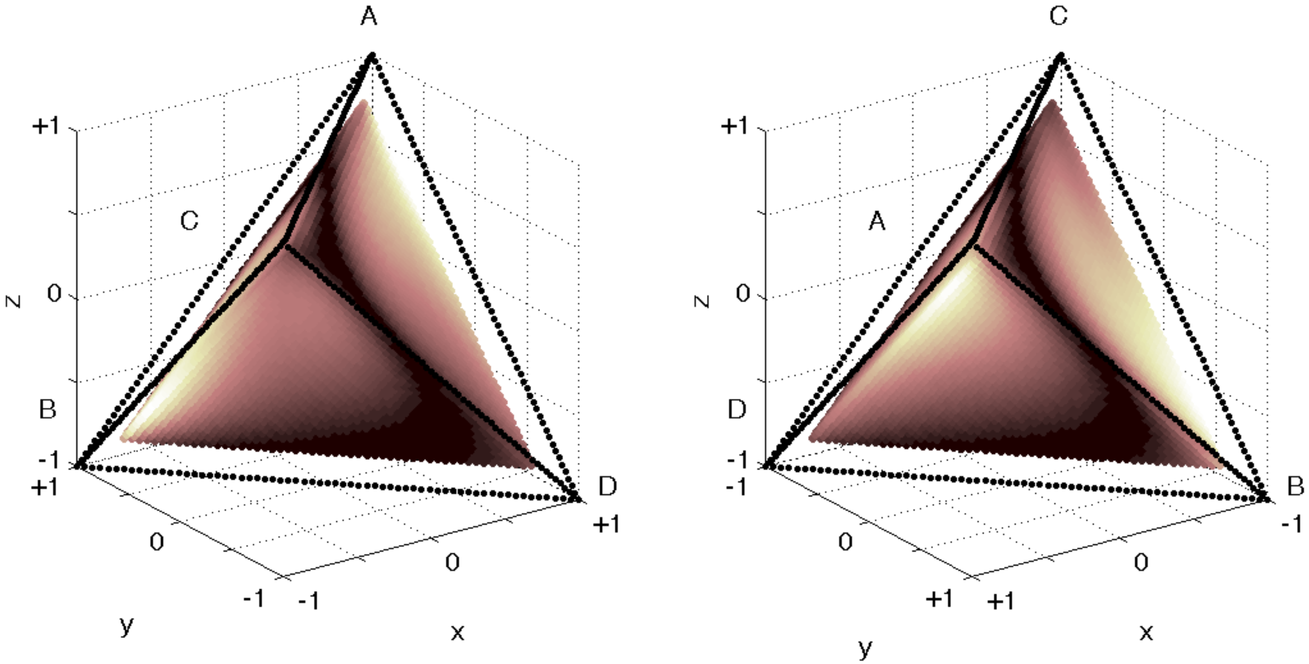

A
C
B
D
z
+1
0
-1
+1
0
-1
y
-1
0
+1
x
C
A
D
B
z
+1
0
-1
-1
0
+1
y
+1
0
-1
x

- I dalej, mając dwie (lub więcej) takich funkcji, możemy wizualizować ich:
  - sumy
  - średnie
  - różnice
  - wariancje
  - max/min
  - itp.



A
C
B
D
+1
0
-1
z
+1
0
-1
y
-1
0
+1
x
C
A
D
B
+1
0
-1
z
-1
0
+1
y
+1
0
-1
x


A
C
B
D
z
y
x
+1
0
-1
C
A
D
B
z
y
x
+1
0
-1

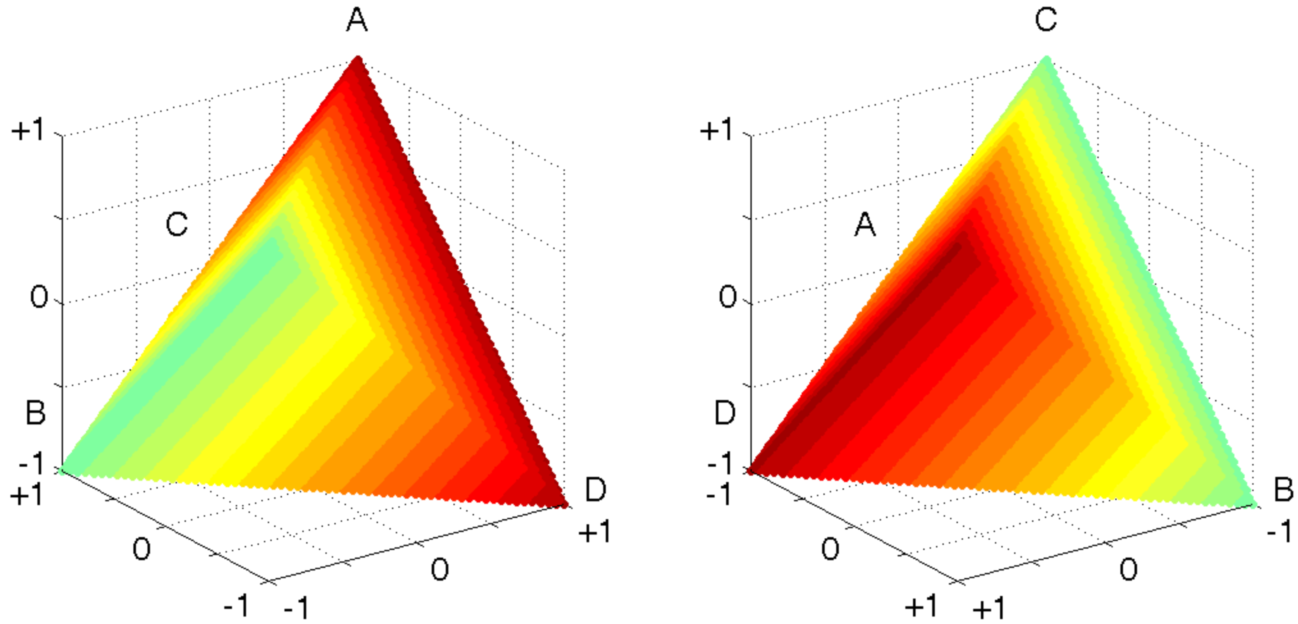


A
C
B
D
z
+1
0
-1
+1
0
-1
y
-1
0
+1
x
C
A
D
B
z
+1
0
-1
-1
0
+1
y
+1
0
-1
x

- Przykład: funkcja

  $f(a,b,c,d) = (a+d)/(a+b+c+d)$

  („accuracy”)

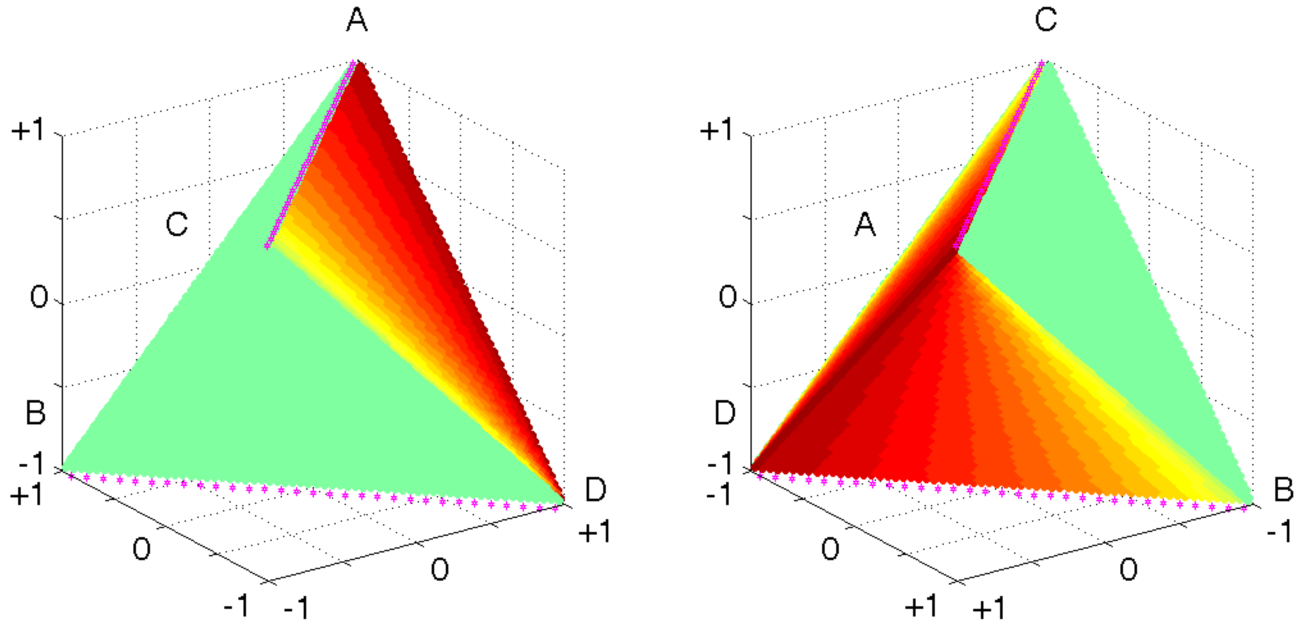


A
C
B
D
+1
0
-1
+1
0
-1
-1
0
+1
C
A
D
B
+1
0
-1
-1
0
+1
+1
0
-1

- Przykład: funkcja

  $f(a,b,c,d) = (a/(a+c)\cdot d/(b+d))^{1/2}$

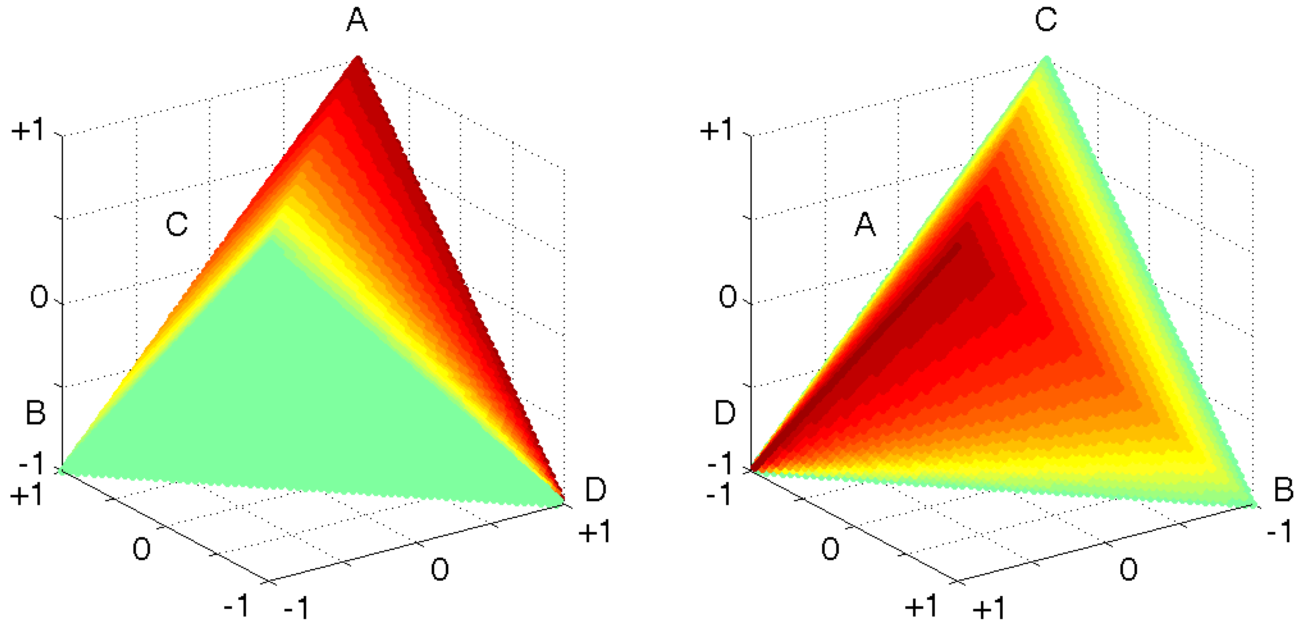
  („G-mean”)


A
C
B
D
+1
0
-1
+1
0
-1
-1
0
+1
C
A
D
B
+1
0
-1
-1
0
+1
+1
0
-1

- Przykład: funkcja

  $f(a,b,c,d) = 2a/(2a+b+c)$

  (inne)
  - w tym przypadku: modyfikacja współczynnika Jaccarda



A
C
B
D
+1
0
-1
+1
0
-1
-1
0
+1
C
A
D
B
+1
0
-1
-1
0
+1
+1
0
-1

...