...

Robert Susmaga
Instytut Informatyki
ul. Piotrowo 2
Poznań

kontakt mail'owy
Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL
kontakt osobisty
Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

Autor

...

Charakterystyki skalarne macierzy

- Śladem macierzy $\mathbf{A}_{nxn} = [a_{ij}]$ nazywamy sumę $a_{11} + ... + a_{nn}$
  - uwagi
  - oznaczenia tr(**A**), trace(**A**), t(**A**), Sp(**A**), S(**A**)
    - trace – ślad (ang.)
    - die Spur – ślad (niem.)

Charakterystyki skalarne macierzy

- Właściwości śladu

  $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

  $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA})$

  ...

  – cykliczna rotacja czynników

…

Funkcje macierzowe

- Funkcje macierzowe

  $\mathbf{A}^p$ (potęgowanie)

  $\mathbf{A}^{1/p}$ (pierwiastkowanie)

  $\mathbf{A}^{-1}$ (odwracanie)

  $\mathbf{A}^{-p}$ (potęgowanie odwrotności)

  $e^{\mathbf{A}} \equiv \exp(\mathbf{A})$, $\sin(\mathbf{A})$, $\cos(\mathbf{A})$ ... (różne funkcje)

Funkcje macierzowe

- Potęgowanie macierzy
  - iloczyn macierzy jako złożenie operatorów liniowych

    $\mathbf{A}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{AA})\mathbf{X} = \mathbf{A}^2\mathbf{X}$
  - dwukrotne przemnożenie danych przez macierz może być realizowane jako przemnożenie przez kwadrat tej macierzy
  - potęgi macierzy mogą być więc obliczanie w celu ustalenia wpływu wielokrotnych przekształceń na dane

Funkcje macierzowe

- Dygresja
  - jeżeli $p \to \infty$, to istnieją
    - skalary s takie, że $s^p \to \infty$
      oraz
    - skalary z takie, że $z^p \to 0$
  - co decyduje?
  - pytanie: jak zachowują się w tej sytuacji macierze?
    - co się dzieje z $\mathbf{A}^p$ gdy $p \to \infty$?
      $\mathbf{A} \to [\infty, ..., \infty; ...; \infty, ..., \infty]$?
      - czy
        $\mathbf{A} \to \mathbf{O}$?
  - co decyduje?

Funkcje macierzowe

- Potęgowanie macierzy
  - promień spektralny macierzy – odpowiednik wartości bezwzględnej liczby
    - dla skalara *a*
      - jeżeli $|a| < 1$ to $a^{\infty} = 0$
      - jeżeli $|a| \geq 1$ to $a^{\infty} \neq 0$
    - dla macierzy **A**
      - jeżeli $|\mathbf{A}| < 1$ to $\mathbf{A}^{\infty} = \mathbf{O}$
      - jeżeli $|\mathbf{A}| \geq 1$ to $\mathbf{A}^{\infty} \neq \mathbf{O}$

Funkcje macierzowe

- Pierwiastkowanie macierzy
  - macierz **B** nazywamy pierwiastkiem p-tego stopnia z macierzy **A** gdy $\mathbf{B}^p = \mathbf{A}$
    - uwaga: pierwiastki macierzy nie są określone jednoznacznie!
  - najbardziej popularny pierwiastek (kwadratowy): $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$

Funkcje macierzowe

- Obliczanie potęg odwrotności macierzy

  $\mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^{p} = (\mathbf{A}^{p})^{-1}$

Funkcje macierzowe

- Różne funkcje

  $e^{\mathbf{A}}$, $\sin(\mathbf{A})$, $\cos(\mathbf{A})$, ...

Funkcje macierzowe

- Definicja funkcji macierzowych nie jest definicją „po-elementową”, tzn.:

$$\sin\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \quad \text{nie jest zdefiniowane jako} \quad \left(\begin{bmatrix} \sin(a) & \sin(b) \\ \sin(c) & \sin(d) \end{bmatrix}\right)$$

  – uzasadnienie:
    - gdyby tak było, to funkcje macierzowe nie spełniałyby zależności właściwych tym funkcjom
    - np.: ponieważ dla każdego skalara *a* zachodzi

      $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

      dla każdej macierzy **A** powinno zachodzić:

      $\sin^2(\mathbf{A}) + \cos^2(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$ (macierz jednostkowa)
    - tymczasem przy definicje „po-elementowej” zachodziłoby

      $\sin^2(\mathbf{A}) + \cos^2(\mathbf{A}) = \mathbf{E}$ (macierz jedynek)

Funkcje macierzowe

- Dlatego stosuje się definicje oparte na szeregach (które wykorzystują potęgowanie macierzy) np.:

  $e^{\mathbf{A}} = (1/0!)\mathbf{A}^0 + (1/1!)\mathbf{A}^1 + (1/2!)\mathbf{A}^2 + (1/3!)\mathbf{A}^3 + \ldots$

  $\sin(\mathbf{A}) = (1/1!)\mathbf{A}^1 - (1/3!)\mathbf{A}^3 + (1/5!)\mathbf{A}^5 - (1/7!)\mathbf{A}^7 + \ldots$

  $\cos(\mathbf{A}) = (1/0!)\mathbf{A}^0 - (1/2!)\mathbf{A}^2 + (1/4!)\mathbf{A}^4 - (1/6!)\mathbf{A}^6 + \ldots$

  – (wymagana jest kontrola zbieżności)

…

Macierz odwrotna do danej macierzy

- Macierzą odwrotną do macierzy **A** nazywamy macierz **B** spełniającą **AB** = **BA** = **I**
  - uwagi
  - równość spełniona tylko dla kwadratowych **A** i **B**
  - inna nazwa macierzy odwrotnej do **A**: odwrotność macierzy **A**
  - oznaczenie macierzy **B** (odwrotności **A**): $\mathbf{A}^{-1}$

Macierz odwrotna do danej macierzy

- Macierz odwrotna do **A** istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy det(**A**) $\neq 0$
  - uzasadnienie
  - det(**A**) $\neq 0 \Rightarrow$ istnieje macierz odwrotna do **A**
    (pominięte)

Macierz odwrotna do danej macierzy

- Macierz odwrotna do **A** istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy...
  - uzasadnienie
  - istnieje macierz odwrotna do **A** $\Rightarrow$ det(**A**) $\neq 0$
    (pominięte)

Macierz odwrotna do danej macierzy

- Jeżeli istnieje macierz odwrotna do macierzy **A**, to jest ona unikalna
  - uzasadnienie
  - niech macierze **B** i **C** będą macierzami odwrotnymi do macierzy **A**
  - *macierzą odwrotną do macierzy **A** nazywamy macierz **B** spełniającą **AB** = **BA** = **I** [ref]*
  - czyli **AB** = **BA** = **I** oraz **AC** = **CA** = **I**
  - z powyższego wynika **AB** = **AC**, a więc

    AB = **AC** $\Rightarrow$ **BAB** = **BAC** $\Leftrightarrow$ **IB** = **IC** $\Leftrightarrow$ **B** = **C**
  - wniosek: macierz odwrotna do **A** jest unikalna

Macierz odwrotna do danej macierzy

- Macierz **B** jest odwrotna do macierzy **A** wtedy i tylko wtedy, gdy macierz **A** jest odwrotna do macierzy **B**
  - uwagi
  - $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ i $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$, czyli $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
  - uzasadnienie

    (bezpośrednio z definicji i faktu unikalności macierzy odwrotnej)

Macierz odwrotna do danej macierzy

- det($\mathbf{A}^{-1}$) = 1/det($\mathbf{A}$)
  - uzasadnienie
  - *det($\boldsymbol{AB}$) = det($\boldsymbol{A}$)det($\boldsymbol{B}$) [ref]*
  - mamy więc det($\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$) = det($\mathbf{A}^{-1}$)det($\mathbf{A}$)
  - *macierzą odwrotną do macierzy **A** nazywamy macierz **B** spełniającą **AB** = **BA** = **I** [ref]*
  - *det($\boldsymbol{I}$) = 1 [ref]*
  - czyli det($\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$) = det($\mathbf{I}$) = 1
  - zatem det($\mathbf{A}^{-1}$)det($\mathbf{A}$) = 1
  - *macierz odwrotna do **A** istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy det($\boldsymbol{A}$) $\neq$ 0 [ref]*
  - czyli det($\mathbf{A}$) $\neq$ 0, a to pozwala na obustronne podzielenie przez det($\mathbf{A}$)
  - wniosek: det($\mathbf{A}^{-1}$) = 1/det($\mathbf{A}$)

Macierz odwrotna do danej macierzy

- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
  - uzasadnienie
  - *macierzą odwrotną do macierzy* $\boldsymbol{A}$ *nazywamy macierz* $\boldsymbol{B}$ *spełniającą* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ *[ref]*
  - czyli

    $\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$
  - wniosek: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Macierz odwrotna do danej macierzy

- Jeżeli $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, to $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$
  - uwagi
  - macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ spełniające $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ nazywa się komutującymi
  - uzasadnienie
  - *macierzą odwrotną do macierzy* $\boldsymbol{A}$ *nazywamy macierz* $\boldsymbol{B}$ *spełniającą* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ *[ref]*
  - czyli

    $\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$
  - ale (z założenia) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, a więc

    $\mathbf{ABA}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{BAA}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{BIB}^{-1} = \mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$
  - wniosek: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$

Macierz odwrotna do danej macierzy

- $(\mathbf{A}^{-1})^{T} = (\mathbf{A}^{T})^{-1}$
  - uzasadnienie
    (pominięte)

…

Podstawy rozkładu EVD

- Niech dla danej macierzy **A**
  - skalary $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ będą wartościami własnymi
  - wektory $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n$ będą (im odpowiadającymi) wektorami własnymi
- Z definicji wektorów własnych zachodzi:

  $\mathbf{Ak}_1 = \mathbf{k}_1\lambda_1, \quad \mathbf{Ak}_2 = \mathbf{k}_2\lambda_2, ..., \mathbf{Ak}_n = \mathbf{k}_n\lambda_n$
- Ponieważ lewe i prawe strony powyższych równości są wektorami, to równania te można zapisać w postaci macierzowej:

  $[\ \mathbf{Ak}_1, \mathbf{Ak}_2, ..., \mathbf{Ak}_n\ ] = [\ \mathbf{k}_1\lambda_1, \mathbf{k}_2\lambda_2, ..., \mathbf{k}_n\lambda_n\ ]$
- Jednocześnie:
  - zakładając, że $\mathbf{K} = [\ \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n\ ]$

    $[\ \mathbf{Ak}_1, \mathbf{Ak}_2, ..., \mathbf{Ak}_n\ ]$ można przedstawić jako **AK**
  - zakładając, że $\mathbf{L} = \mathrm{diag}([\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\ ])$

    $[\ \mathbf{k}_1\lambda_1, \mathbf{k}_2\lambda_2, ..., \mathbf{k}_n\lambda_n\ ]$ można przedstawić jako **KL**
- Czyli początkowy zestaw układów równań można zapisać jako:

  $\mathbf{AK} = \mathbf{KL}$

Podstawy rozkładu EVD

- Dla każdej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ istnieją macierze $\mathbf{K}$ i $\mathbf{L}$ takie, że
  $\mathbf{AK} = \mathbf{KL}$
- Zakładamy, że $\det(\mathbf{K}) \neq 0$
- *Macierz odwrotna do **A** istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ *[ref]*
- Wtedy istnieje $\mathbf{K}^{-1}$ spełniająca $\mathbf{KK}^{-1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{I}$
- Stosując $\mathbf{K}^{-1}$ do
  $\mathbf{AK} = \mathbf{KL}$
  otrzymujemy
  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{AK} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{KL}$
  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{AK} = \mathbf{IL}$
  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{AK} = \mathbf{L}$

Podstawy rozkładu EVD

- Wniosek: przemnożenie macierzy **A** przez macierze

  K^{-1} (lewostronne)

  oraz

  K (prawostronne)

  przekształca tę macierz do macierzy diagonalnej **L**
  - elementami przekątnej macierzy **L** są wartości własne macierzy **A**
- Iloczyn ten nazywa się diagonalizacją
- Diagonalizacja macierzy jest dziedziną samą w sobie ponieważ ma wiele zastosowań (głównie w rozwiązywaniu równań różniczkowych)

Podstawy rozkładu EVD

- Dla każdej macierzy kwadratowej **A** istnieją macierze **K** i **L** takie, że
  $\mathbf{AK} = \mathbf{KL}$
- Zakładamy, że $\det(\mathbf{K}) \neq 0$
- *Macierz odwrotna do **A** istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ [ref]*
- Wtedy istnieje $\mathbf{K}^{-1}$ spełniająca $\mathbf{KK}^{-1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{I}$
- Stosując $\mathbf{K}^{-1}$ do
  $\mathbf{AK} = \mathbf{KL}$
  otrzymujemy
  $\mathbf{AKK}^{-1} = \mathbf{KLK}^{-1}$
  $\mathbf{AI} = \mathbf{KLK}^{-1}$
  $\mathbf{A} = \mathbf{KLK}^{-1}$

Podstawy rozkładu EVD

- Wniosek: przemnożenie diagonalnej macierzy **L** przez macierze
  - elementami przekątnej macierzy **L** są wartości własne macierzy **A**

    K (lewostronne)

    oraz

    $\mathbf{K}^{-1}$ (prawostronne)

  przekształca tę macierz do macierzy **A**
- Iloczyn ten nazywa się rozkładem EVD macierzy **A**
  - EVD: eigenvalue decomposition (ang.)
- EVD macierzy jest dziedziną samą w sobie ponieważ ma wiele zastosowań (głównie w algebrze macierzy)

…

Istnienie rozkładu EVD

- Istnienie rozkładu:
  - interesujący przypadek szczególny:
    - jeżeli $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, to
      istnieją **K** (ortogonalna) i **L** (diagonalna) takie, że $\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{L}\mathbf{K}^T$

Istnienie rozkładu EVD

- Istnienie rozkładu:
  - w ogólności:
    - warunki istnienia rozkładu EVD
      - (pominięte /ze względu na złożoność/)

Istnienie rozkładu EVD

- Istnienie rozkładu:
  - przyczyna brak rozkładu EVD:
    nieodwracalność macierzy wektorów własnych
    - dla dowolnej macierzy kwadratowej **A**
      - zachodzi
        - » wartości własne zawsze istnieją, ale mogą być (w ogólności zespolonymi) wartościami niekoniecznie różnymi od siebie
        - » wektory własne zawsze istnieją, ale (po unormowaniu) nie muszą być wektorami różnymi od siebie (identycznym wartościom własnym mogą odpowiadać identyczne wektory)
      - i wtedy
        - » macierz unormowanych wektorów własnych **K** macierzy **A** nie ma odwrotności (a więc rozkład EVD macierzy **A** nie istnieje)
    - szczególnej uwagi wymagają macierze, których wartości własne nie są wszystkie różne od siebie (widmo w postaci wektora nie jest wektorem różnowartościowym)
      - macierze te mogą, ale nie muszą posiadać rozkładów EVD

Istnienie rozkładu EVD

- Macierze, których widmo w postaci wektora nie jest wektorem różnowartościowym:
  - macierz jednostkowa $\mathbf{I}_{3x3}$ posiada widmo {1} i wektor $[1\ 1\ 1]^T$, który nie jest wektorem różnowartościowym, ale wszystkie jej wektory własne mają postać $\mathbf{k}_i=[\alpha_i, \beta_i, \gamma_i]^T$, możliwe jest więc takie dobranie wartości α_i, β_i, γ_i aby istniała macierz $\mathbf{K}^{-1}$

$$\underset{\mathbf{I}}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{K}}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}} * \underset{\mathbf{L}}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}} * \underset{\mathbf{K}^{-1}}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

Istnienie rozkładu EVD

- Macierze, których widmo w postaci wektora nie jest wektorem różnowartościowym:
  - macierz jednostkowa $\mathbf{O}_{3x3}$ posiada widmo {0} i wektor $[0\ 0\ 0]^T$, który nie jest wektorem różnowartościowym, ale wszystkie jej wektory własne mają postać $\mathbf{k}_i=[\alpha_i, \beta_i, \gamma_i]^T$, możliwe jest więc takie dobranie wartości α_i, β_i, γ_i aby istniała macierz $\mathbf{K}^{-1}$

$$\underset{\mathbf{O}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{K}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} * \underset{\mathbf{L}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} * \underset{\mathbf{K}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Istnienie rozkładu EVD

- Macierze, których widmo w postaci wektora nie jest wektorem różnowartościowym:
  - w innych przypadkach jest to niemożliwe (widmo **A**: {1, 0}, w postaci wektora: $[1\ 1\ 0]^T$)

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{K}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3^{-1/2} \\ 0 & 0 & 3^{-1/2} \\ 0 & 0 & -3^{-1/2} \end{bmatrix}} * \underset{\mathbf{L}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} * \underset{\mathbf{K}^{-1}}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}$$

Właściwości rozkładu EVD

- Niech $\mathbf{A}_{nxn} = \mathbf{KLK}^{-1}$
  - dzięki temu, że $\mathbf{KK}^{-1} = \mathbf{I}$ oraz macierz $\mathbf{L}$ jest diagonalna możemy wykazać wiele właściwości macierzy, np.:

    $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{KLK}^{-1}) = \det(\mathbf{L}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

    - „iloczyn wszystkich wartości własnych jest równy wyznacznikowi macierzy”

    $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{KLK}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathbf{L}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

    - „suma wszystkich wartości własnych jest równa śladowi macierzy”

    $\mathrm{spec}(\mathbf{A}) = \mathrm{spec}(\mathbf{KLK}^{-1}) = \mathrm{spec}(\mathbf{L}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$

    - „promień spektralny macierzy jest równy maksymalnej wartości bezwzględnej z wartości własnych macierzy”

    $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{KLK}^{-1}) = \mathrm{rank}(\mathbf{L}) = \sum(\lambda_i \neq 0 ? 1 : 0)$

    - „liczba niezerowych wartości własnych jest równa rzędowi macierzy”

    itd.

Właściwości rozkładu EVD

- Właściwości wartości i wektorów własnych
  - wyznacznik jest iloczynem wartości własnych
    - niech $\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{L}\mathbf{K}^{-1}$, wtedy:

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{K}\mathbf{L}\mathbf{K}^{-1}) = \\
&= \det(\mathbf{K})\cdot\det(\mathbf{L})\cdot\det(\mathbf{K}^{-1}) = \\
&= \det(\mathbf{K}^{-1})\cdot\det(\mathbf{K})\cdot\det(\mathbf{L}) = \\
&= \det(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K})\cdot\det(\mathbf{L}) = \\
&= \det(\mathbf{I})\cdot\det(\mathbf{L}) = \\
&= 1\cdot\det(\mathbf{L}) = \\
&= \det(\mathbf{L}) = \\
&= \lambda_{11} \cdot \lambda_{22} \cdot \ldots \cdot \lambda_{nn}
\end{aligned}
$$

Właściwości rozkładu EVD

- Właściwości wartości i wektorów własnych
  - ślad jest sumą wartości własnych
    - niech $\mathbf{A} = \mathbf{KLK}^{-1}$, wtedy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{A}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{KLK}^{-1}) = \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{KL}) = \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{IL}) = \\
&= \mathrm{tr}(\mathbf{L}) = \\
&= \lambda_{11} + \lambda_{22} + \ldots + \lambda_{nn}
\end{aligned}$$

Właściwości rozkładu EVD

- Właściwości wartości i wektorów własnych
  - liczba niezerowych wartości własnych jest równa rzędowi macierzy

    (uzasadnienie pominięte)

Zastosowania rozkładu EVD

- Potęgowanie macierzy
  - jeżeli $\mathbf{A} = \mathbf{KLK}^{-1}$ to:

    $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{KLK}^{-1})^2 = \mathbf{KLK}^{-1}\mathbf{KLK}^{-1} = \mathbf{KLILK}^{-1} = \mathbf{KLLK}^{-1} = \mathbf{KL}^2\mathbf{K}^{-1}$

    $\mathbf{A}^3 = (\mathbf{KLK}^{-1})^3 = \mathbf{KLK}^{-1}\mathbf{KLK}^{-1}\mathbf{KLK}^{-1} = \mathbf{KLILILK}^{-1} = \mathbf{KLLLK}^{-1} = \mathbf{KL}^3\mathbf{K}^{-1}$

    itd.
  - ogólnie dla całkowitoliczbowego $p > 0$:

    $\mathbf{A}^p = (\mathbf{KLK}^{-1})^p = (\mathbf{KLK}^{-1})(\mathbf{KLK}^{-1})...(\mathbf{KLK}^{-1}) = \mathbf{KL}^p\mathbf{K}^{-1}$

Zastosowania rozkładu EVD

- Potęgowanie macierzy c.d.:
  - wykorzystując dodatkowo fakt, że:

    $(\mathrm{diag}(\lambda_{11}, ..., \lambda_{nn}))^p = \mathrm{diag}((\lambda_{11})^p, ..., (\lambda_{nn})^p)$

    mamy:

    $\mathbf{A}^p = \mathbf{K}\mathbf{L}^p\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}\cdot\mathrm{diag}((\lambda_{11})^p, ..., (\lambda_{nn})^p)\cdot\mathbf{K}^{-1}$
    - potęgowanie macierzy **A** sprowadza się więc do potęgowania macierzy diagonalnej, co jest operacją trywialną (i oczywiście przemnożenia wyniku przez macierze **K** i $\mathbf{K}^{-1}$)
  - dla p całkowitego i dodatniego potęgowanie macierzy można realizować poprzez wielokrotne wymnażanie
  - pytanie, co zrobić, gdy p nie jest całkowitą liczbą dodatnią?

Zastosowania rozkładu EVD

- Potęgowanie macierzy c.d.:
  - okazuje się, że stosując tę metodę można stosować także niecałkowite, niedodatnie, nierzeczywiste (tzn. zespolone) p
  - w tym celu predefiniowuje się potęgowanie macierzy przy wykładniku skalarnym p jako operację:

    $\mathbf{A}^p = \mathbf{K}\mathbf{L}^p\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}\cdot\mathrm{diag}((\lambda_{11})^p, ..., (\lambda_{nn})^p)\cdot\mathbf{K}^{-1}$
  - dla p=–1 mamy odwrotność:

    $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}\cdot\mathrm{diag}(1/\lambda_{11}, ..., 1/\lambda_{nn})\cdot\mathbf{K}^{-1}$
  - dla p=1/2 mamy pierwiastek kwadratowy:

    $\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{K}\cdot\mathrm{diag}(\lambda_{11})^{1/2}, ..., (\lambda_{nn})^{1/2})\cdot\mathbf{K}^{-1}$
  - itd.

Zastosowania rozkładu EVD

- Rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{KLK}^{-1}$ pozwala też na uproszczenie obliczania innych funkcji macierzowych, np.:
  - zdefiniowanej za pomocą szeregu nieskończonego funkcji potęgowej macierzy, czyli:

    $$e^{\mathbf{A}} = \frac{1}{0!}\mathbf{A}^0 + \frac{1}{1!}\mathbf{A}^1 + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots$$

  - obliczanie wartości $e^{\mathbf{A}}$ jest proste jedynie dla pewnych macierzy szczególnych, np.:
    - $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
    - $e^{\mathbf{I}} = e \cdot \mathbf{I}$
    - $e^{\mathrm{diag}(s_{11},\, s_{22},\, \ldots,\, s_{nn})} = \mathrm{diag}(e^{s_{11}}, e^{s_{22}}, \ldots, e^{s_{nn}})$
    - ...

    (w ogólnym przypadku wymaga jednak obliczania wysokich potęg macierzy, co może być dość skomplikowane)

Zastosowania rozkładu EVD

- Obliczanie wartości $e^{\mathbf{A}}$ upraszcza się jednak dzięki rozkładowi $\mathbf{A} = \mathbf{KLK}^{-1}$, mamy bowiem:

$$e^{\mathbf{A}} = \frac{1}{0!}(\mathbf{KLK}^{-1})^0 + \frac{1}{1!}(\mathbf{KLK}^{-1})^1 + \frac{1}{2!}(\mathbf{KLK}^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{KLK}^{-1})^3 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{0!}(\mathbf{KLK}^{-1})^0 + \frac{1}{1!}(\mathbf{KLK}^{-1})^1 + \frac{1}{2!}(\mathbf{KLK}^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{KLK}^{-1})^3 + \ldots$$

- ponieważ:

  $(\mathbf{KLK}^{-1})^2 = \mathbf{KLK}^{-1}\mathbf{KLK}^{-1} = \mathbf{KLILK}^{-1} = \mathbf{KLLK}^{-1} = \mathbf{KL}^2\mathbf{K}^{-1}$

  $(\mathbf{KLK}^{-1})^3 = \mathbf{KLK}^{-1}\mathbf{KLK}^{-1}\mathbf{KLK}^{-1} = \mathbf{KLILILK}^{-1} = \mathbf{KLLLK}^{-1} = \mathbf{KL}^3\mathbf{K}^{-1}$

  - mamy:

    $(\mathbf{KLK}^{-1})^p = \mathbf{KL}^p\mathbf{K}^{-1}$

$$= \frac{1}{0!}\mathbf{KL}^0\mathbf{K}^{-1} + \frac{1}{1!}\mathbf{KL}^1\mathbf{K}^{-1} + \frac{1}{2!}\mathbf{KL}^2\mathbf{K}^{-1} + \frac{1}{3!}\mathbf{KL}^3\mathbf{K}^{-1} + \ldots$$

$$= \mathbf{K}e^{\mathbf{L}}\mathbf{K}^{-1}$$

Zastosowania rozkładu EVD

- Obliczanie wartości $e^{\mathbf{A}}$...
  - ponieważ z:

    $(\mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, ..., s_{NN}))^p = \mathrm{diag}((s_{11})^p, (s_{22})^p, ..., (s_{NN})^p)$
  - wynika, że:

    $e^{\mathrm{diag}(s11,\ s22,\ ...,\ sNN)} = \mathrm{diag}(e^{s_{11}}, e^{s_{22}}, ..., e^{s_{nn}})$
- Ostatecznie:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{K}e^{\mathbf{L}}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}e^{\mathrm{diag}(\lambda 11,\ \lambda 22,\ ...,\ \lambda nn)}\mathbf{K}^{-1} =$$
$$= \mathbf{K}\mathrm{diag}(e^{\lambda 11}, e^{\lambda 22}, ..., e^{\lambda nn})\mathbf{K}^{-1}$$

- Wniosek:
  - obliczanie macierzowej funkcji wykładniczej sprowadza się do obliczenia skalarnej funkcji wykładniczej na elementach macierzy diagonalnej, co jest operacją trywialną (i oczywiście przemnożenia wyniku przez macierze **K** i $\mathbf{K}^{-1}$)

…