...

Robert Susmaga

Instytut Informatyki

ul. Piotrowo 2

Poznań

kontakt mail'owy

Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL

kontakt osobisty

Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

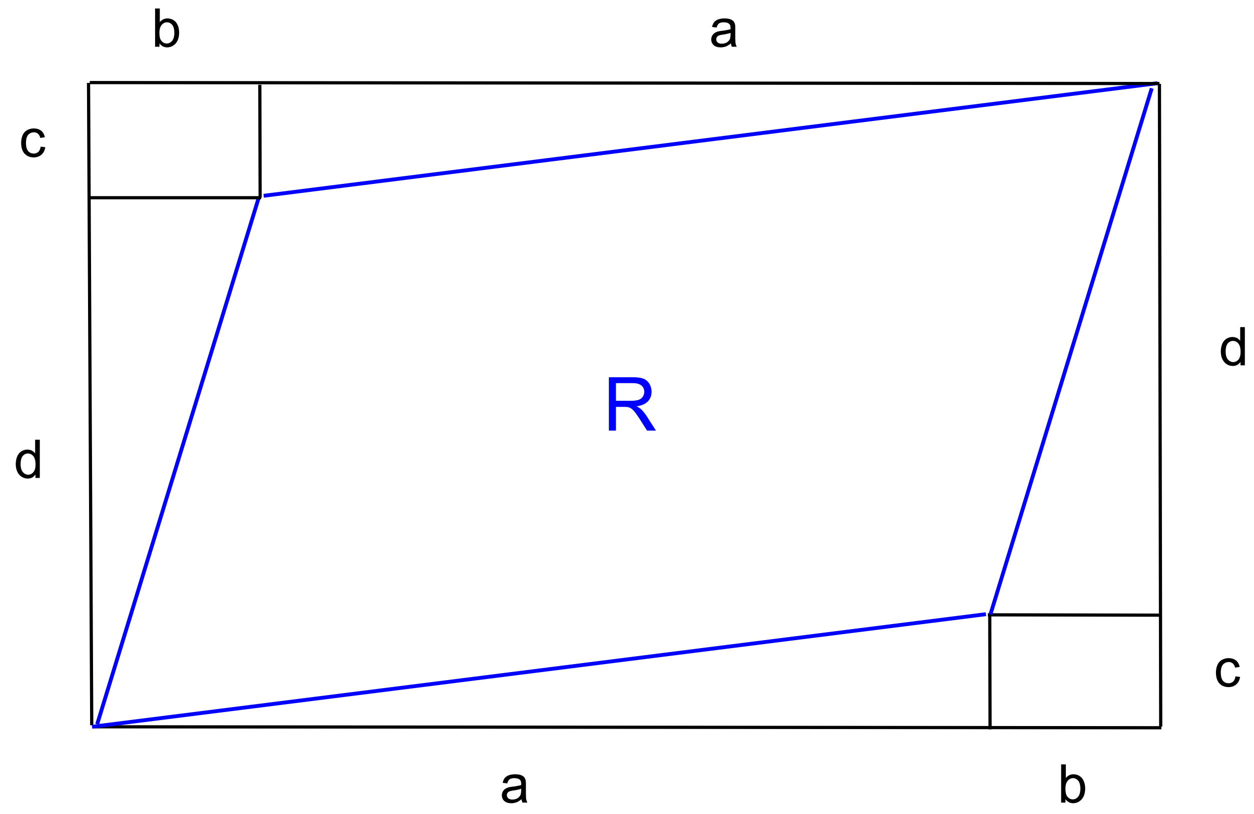
Autor

…

Wyznacznik macierzy

- Geometryczna interpretacja wyznacznika macierzy

Wyznacznik macierzy



Pole(R) =

$= (a + b)(c + d) - 2(ac/2 + bc + bd/2) =$

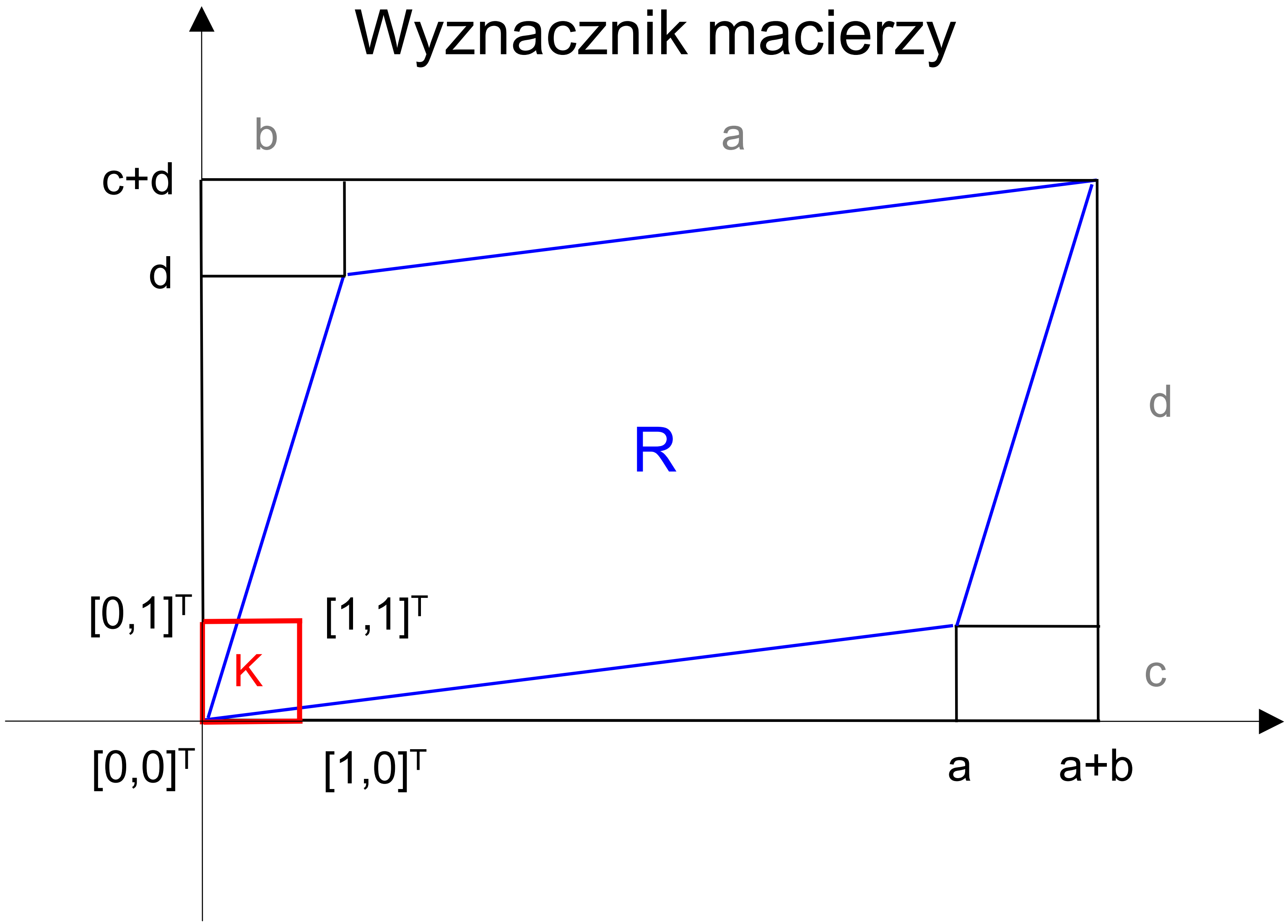
$= (a + b)(c + d) - ac - 2bc - bd =$

$= (a + b)c + (a + b)d - ac - 2bc - bd =$

$= ac + bc + ad + bd - ac - 2bc - bd =$

$= ad - bc$

Wyznacznik macierzy



Wyznacznik macierzy

- Niech dana będzie macierz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $d > 0$

(ale poniższy wynik uogólnia się także na inne wartości)

Wyznacznik macierzy

- Działanie (w znaczeniu: mnożenie) macierzy (przekształcającej) [a b ; c d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

- To samo mnożenie w (bardziej zwartym) zapisie macierzowym:

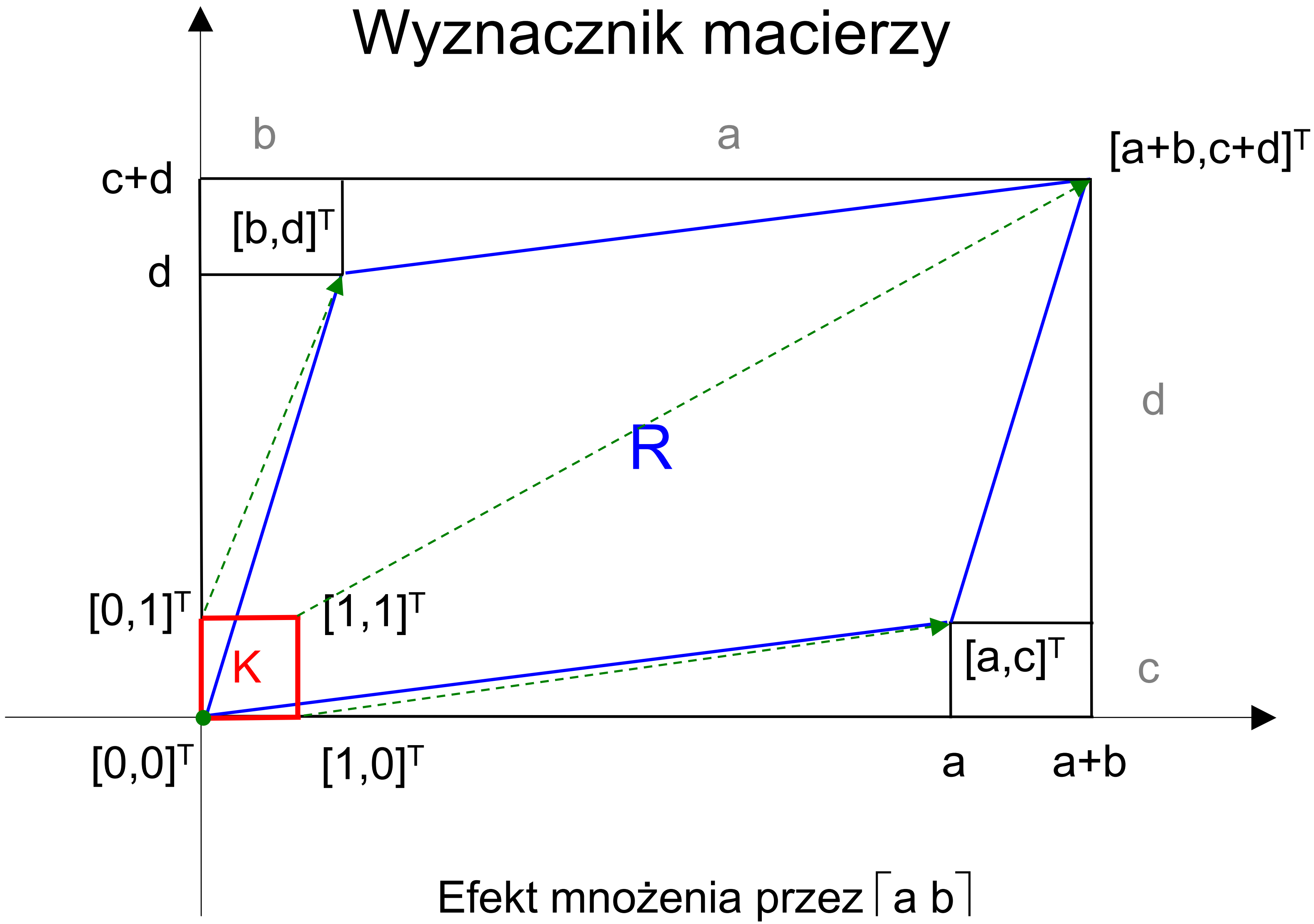
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & a+b \\ 0 & c & d & c+d \end{bmatrix}$$

macierz danych wyjściowych
(obiekty w kolumnach)

macierz danych wejściowych
(obiekty w kolumnach)

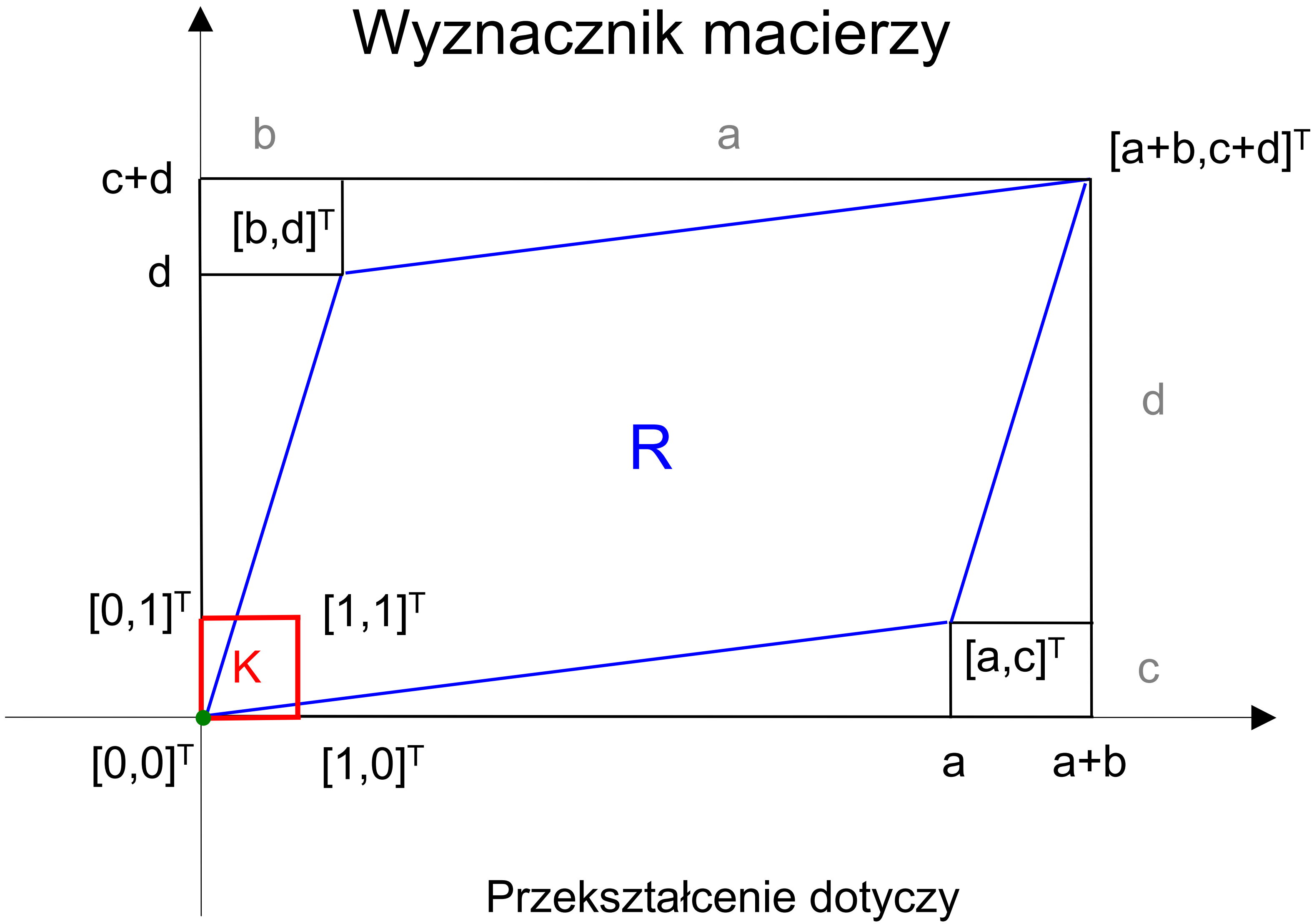
macierz przekształcająca

Wyznacznik macierzy



Efekt mnożenia przez $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Wyznacznik macierzy



Przekształcenie dotyczy
wszystkich punktów kwadratu, a nie tylko jego wierzchołków
(dzięki temu, że przekształcenie liniowe kombinacji liniowej jest kombinacją liniową przekształceń liniowych)

Wyznacznik macierzy

- Uwaga:
  - pytanie: czym różnią się wierzchołki figury wypukłej od wszystkich pozostałych punktów tej figury?
    - klasyczne pytanie analizy wypukłej
  - odpowiedź: wierzchołki figury wypukłej są trywialnymi kombinacjami wypukłymi jej innych punktów (ale nie są żadnymi innymi kombinacjami wypukłymi tych punktów, w szczególności nie są kombinacjami wypukłymi o współczynnikach dodatnich wierzchołków tej figury)
    - w ogólności jednak można powiedzieć, że każdy punkt figury wypukłej jest (jakąś) kombinacją wypukłą (w tym: trywialną kombinacją wypukłą) wierzchołków tej figury

Wyznacznik macierzy

- Każdy punkt kwadratu K jest (jakąś) kombinacją wypukłą (czyli: kombinacją liniową) wierzchołków tego kwadratu; w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

- Rezultatem przekształcenia jest więc

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

- Z właściwości łączności mnożenia macierzy wynika:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & a+b \\ 0 & c & d & c+d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

współczynniki
kombinacji wypukłej

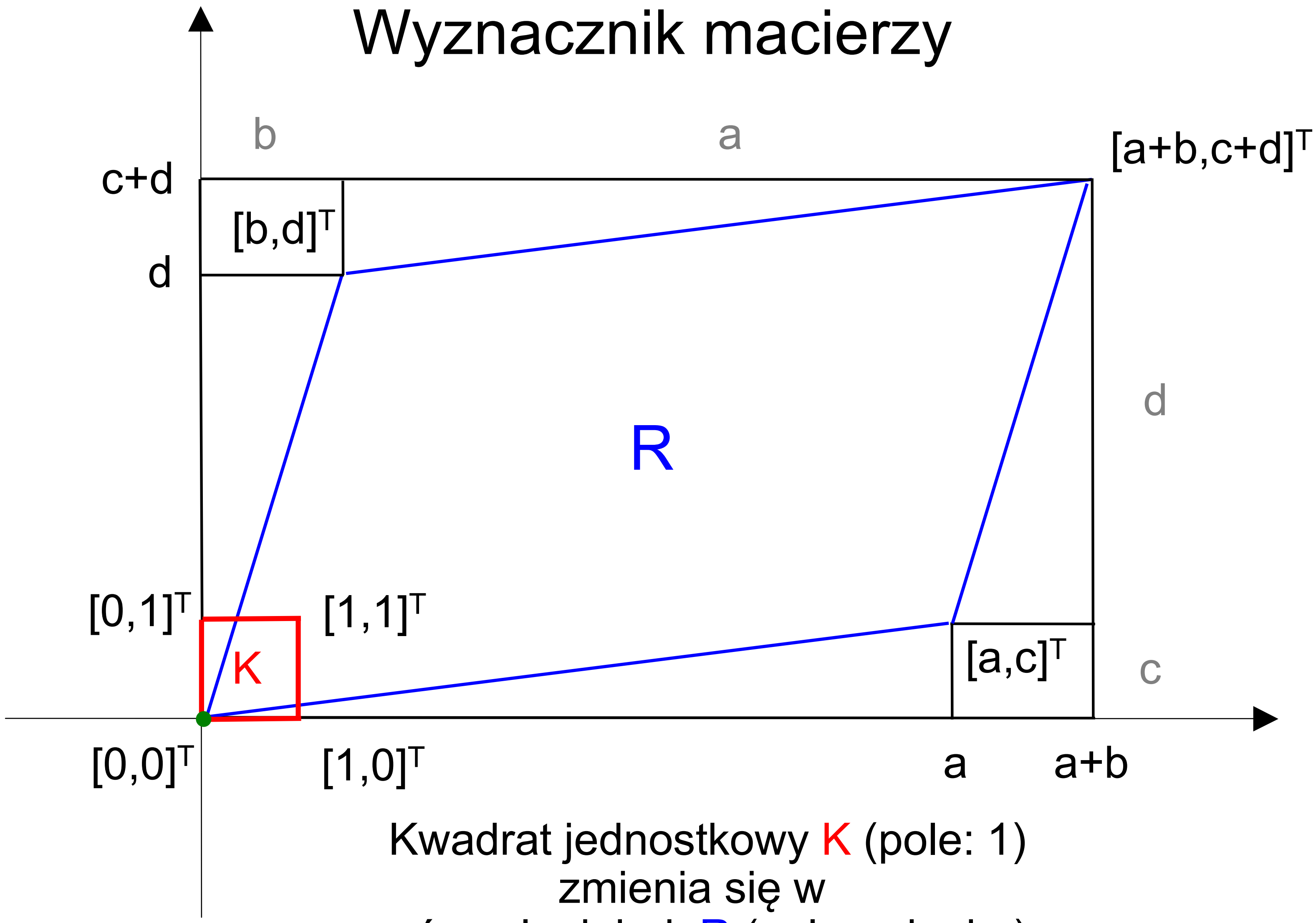
Wyznacznik macierzy

- Z właściwości łączności mnożenia macierzy wynika:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{\text{wierzchołki kwadratu K}}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & a & b & a+b\\ 0 & c & d & c+d\end{bmatrix}}_{\text{wierzchołki równoległoboku R}}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\end{bmatrix}$$

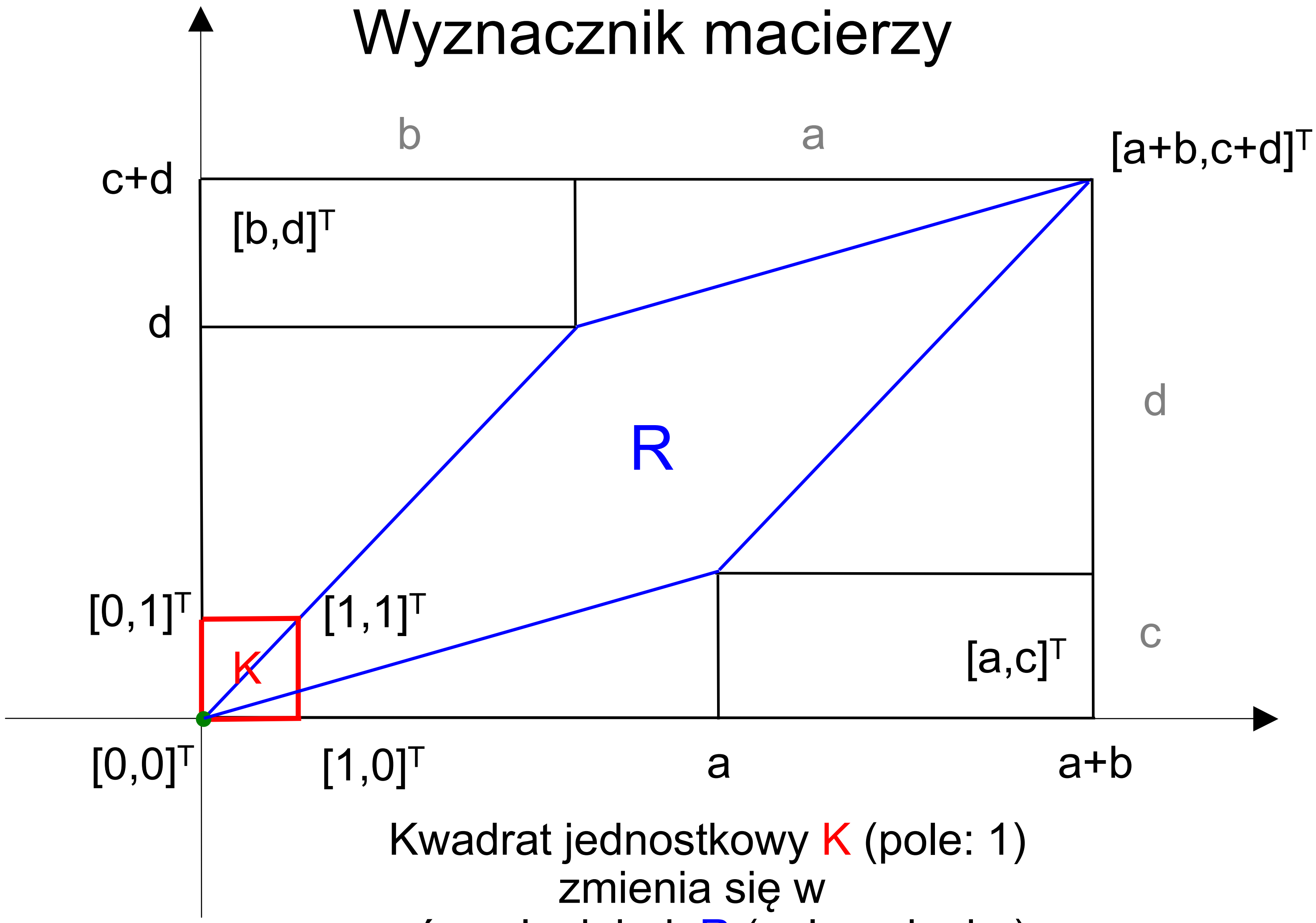
- Wniosek:
  - każdy punkt równoległoboku R jest (jakąś) kombinacją wypukłą wierzchołków tego równoległoboku; a więc (cały) ten równoległobok jest przekształceniem (całego) kwadratu K

Wyznacznik macierzy



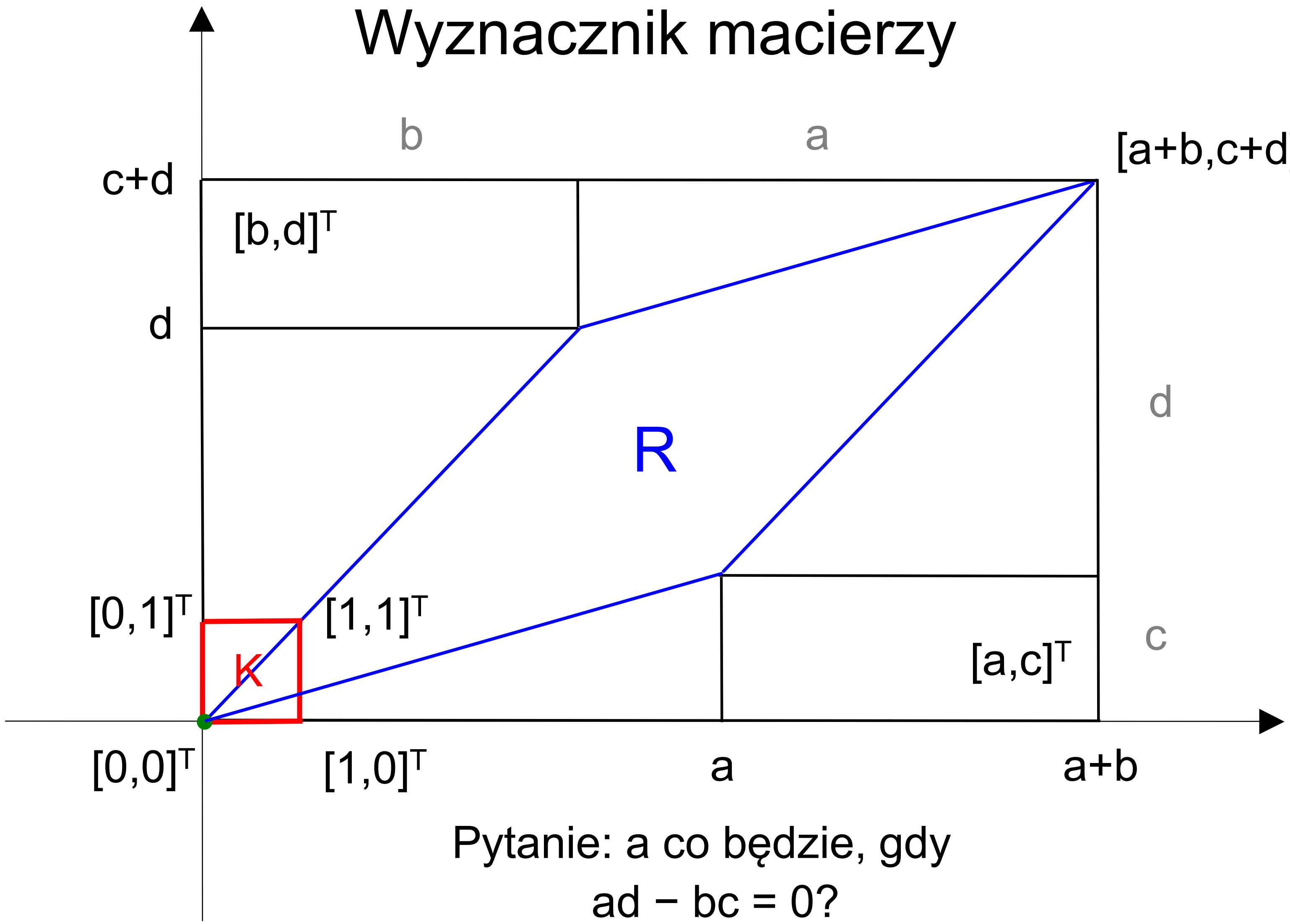
Kwadrat jednostkowy K (pole: 1)
zmienia się w
równoległobok R (pole: ad – bc)

Wyznacznik macierzy



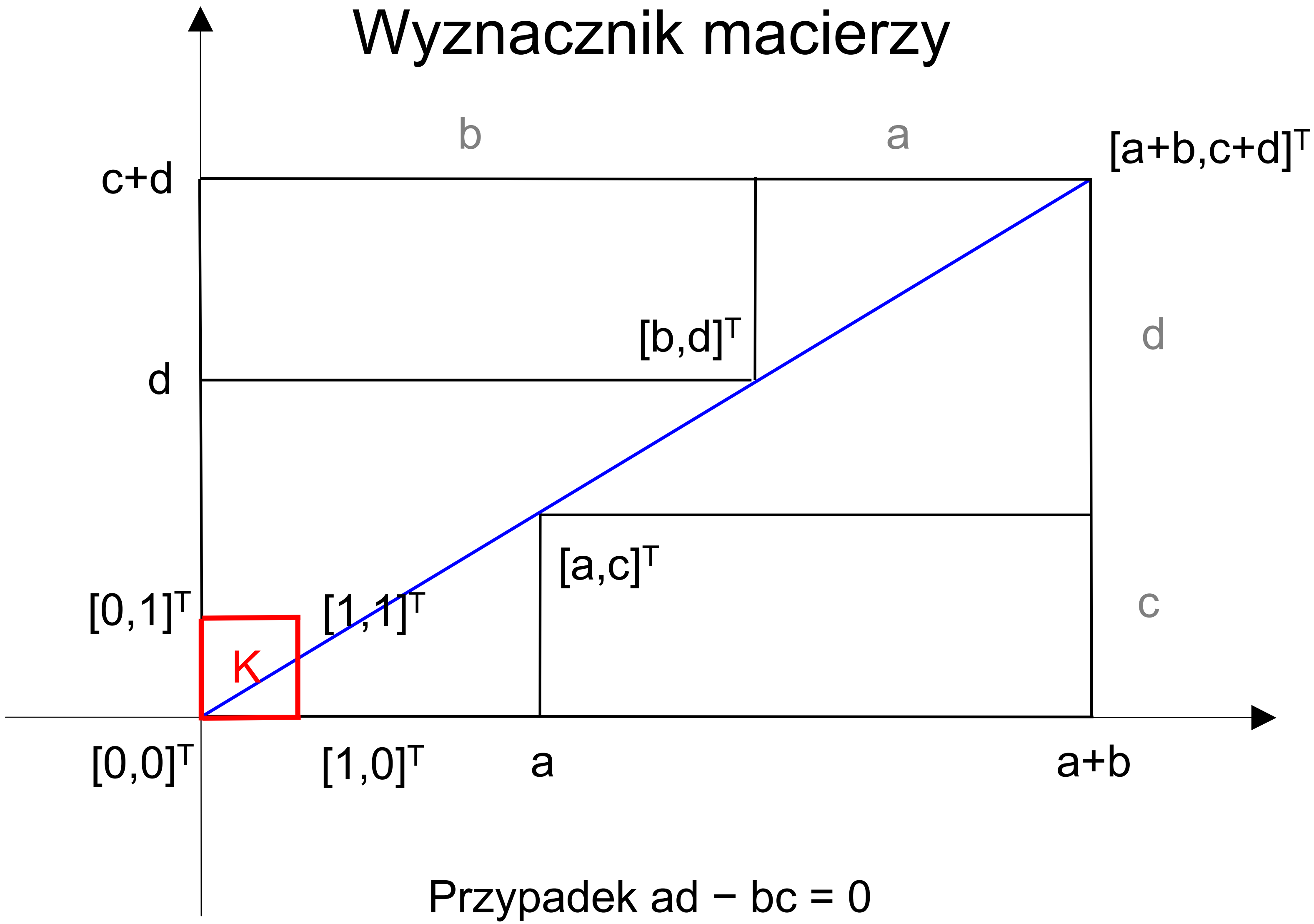
Kwadrat jednostkowy K (pole: 1)
zmienia się w
równoległobok R (pole: ad – bc)
(inny przypadek)

Wyznacznik macierzy



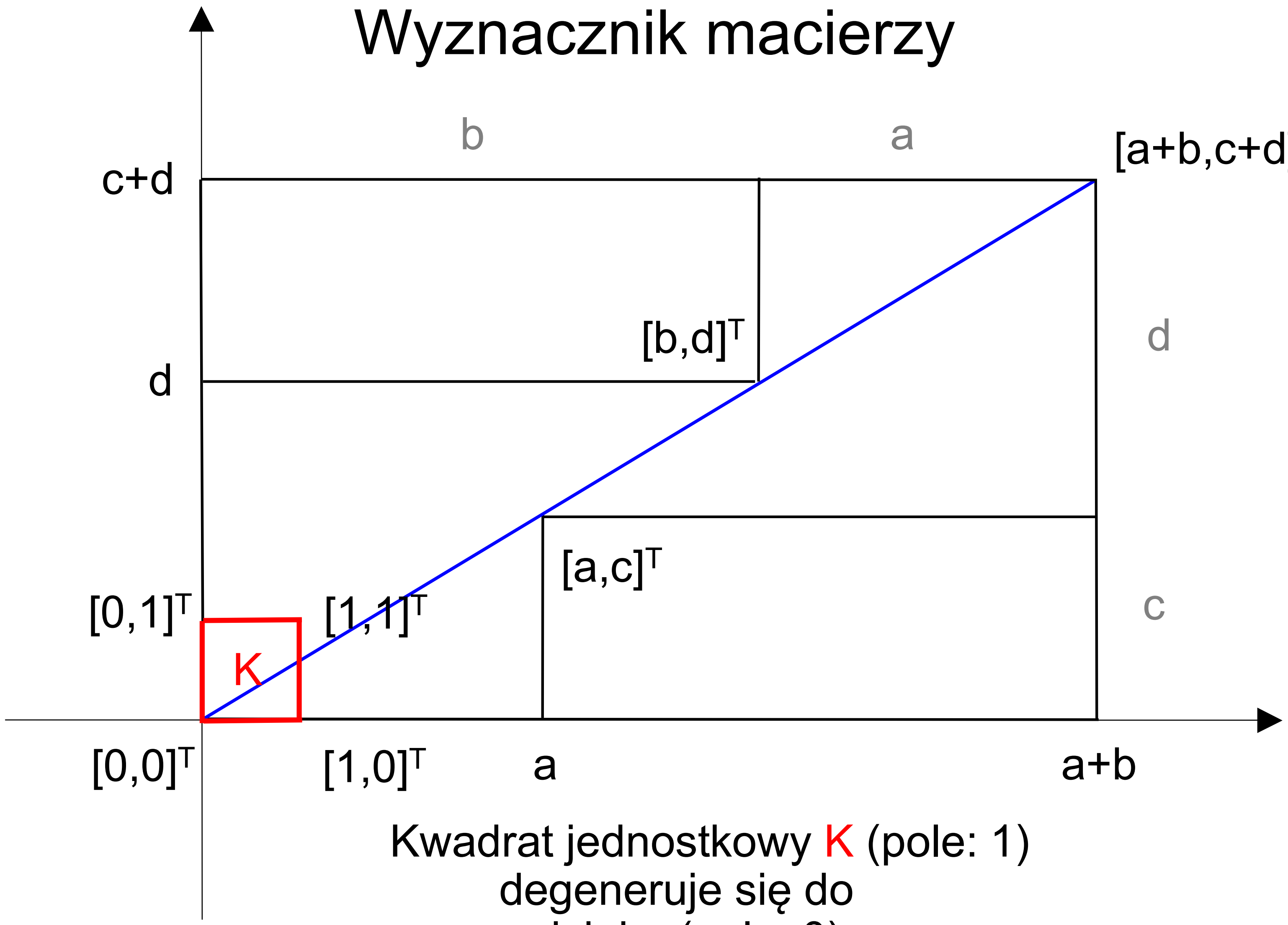
Pytanie: a co będzie, gdy
$ad - bc = 0$?

Wyznacznik macierzy



Przypadek $ad - bc = 0$

Wyznacznik macierzy



Kwadrat jednostkowy K (pole: 1)
degeneruje się do
odcinka (pole: 0)

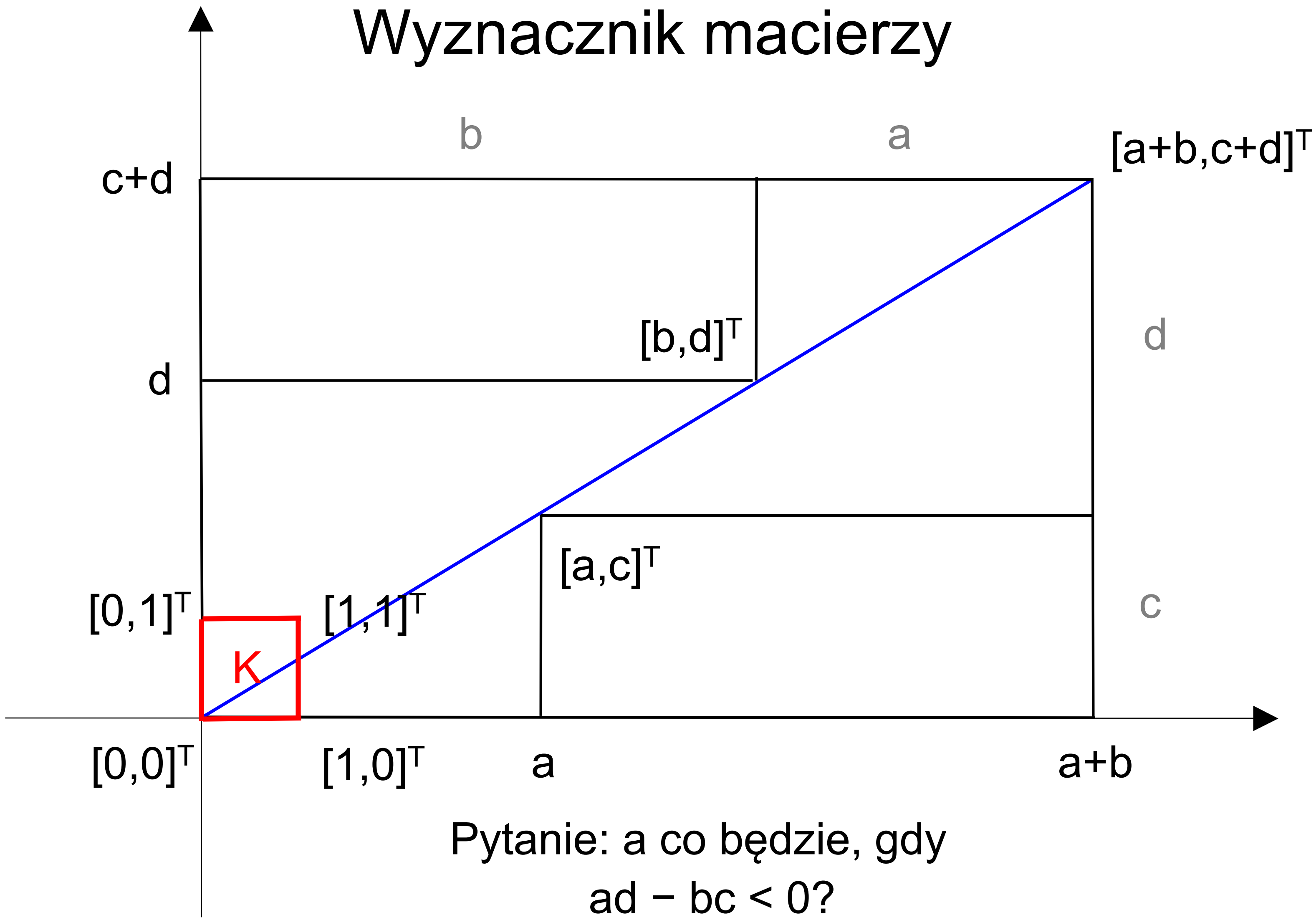
Wyznacznik macierzy

- Wniosek:
  mnożenie przez macierz przekształcającą
  o wyznaczniku zerowym kompletnie „spłaszcza”
  kwadrat jednostkowy!

- Operacja taka
  – bezpowrotnie „niszczy” (a mówiąc mniej dramatycznie: zeruje) jeden wymiar kwadratu (degeneracja)

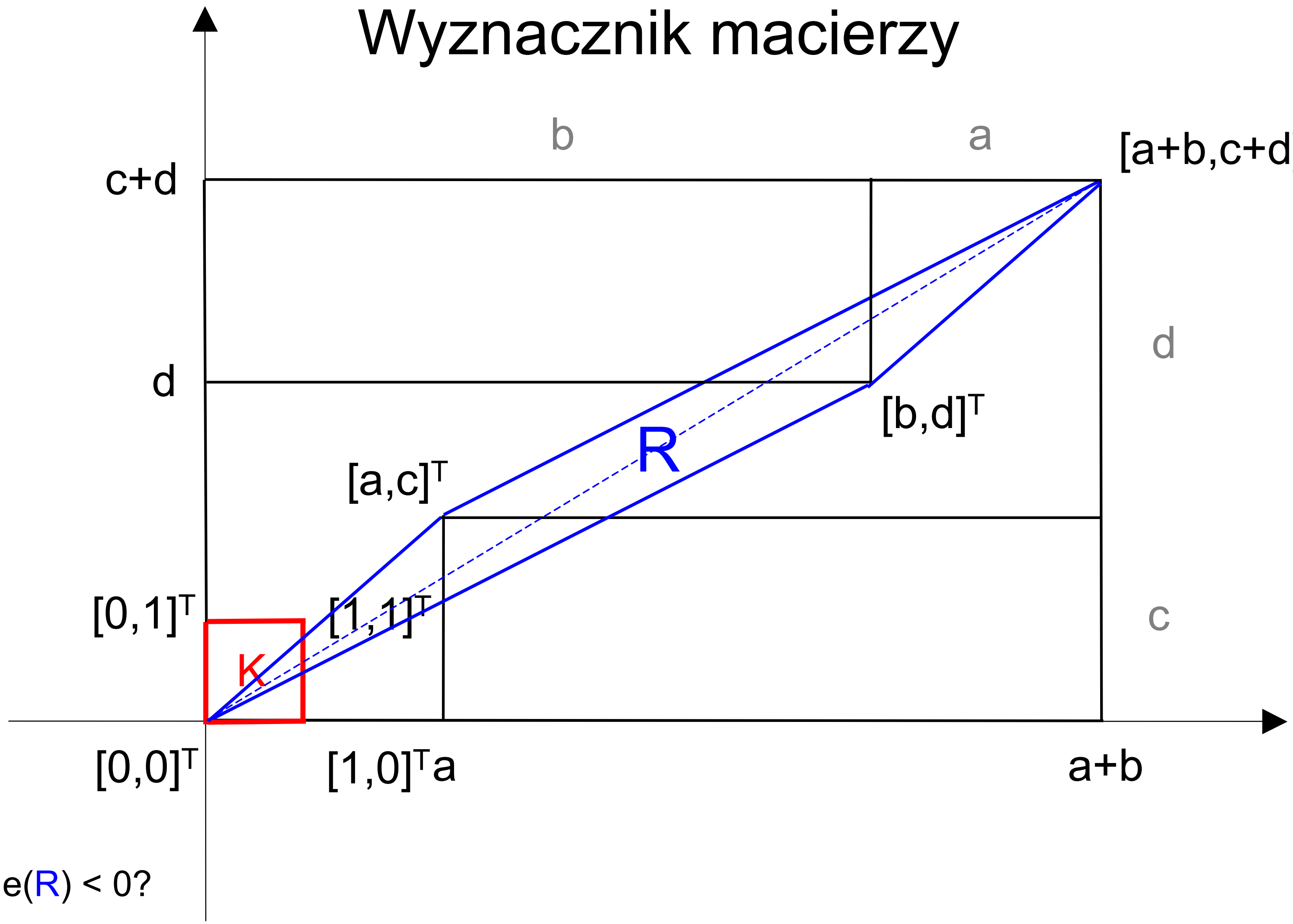
  i w rezultacie
  – przestaje być funkcją różnowartościową,
  a więc nie istnieje operacja do niej odwrotna!

Wyznacznik macierzy



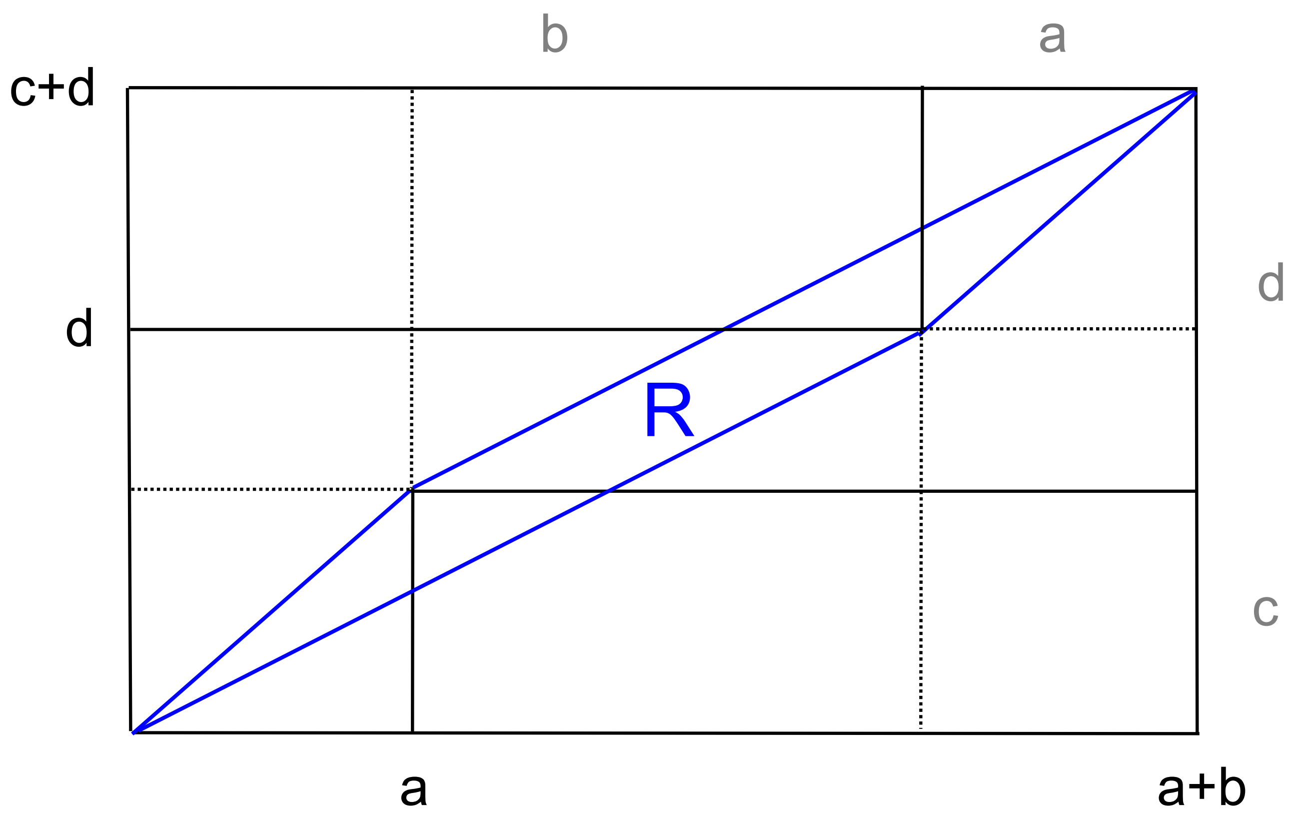
Pytanie: a co będzie, gdy
$ad - bc < 0$?

Wyznacznik macierzy



Pole(R) < 0?

Wyznacznik macierzy



Pole(R) = bc – ad = –(ad – bc)

Wyznacznik macierzy

- Zależność ta uogólnia się na większe liczby wymiarów

  n = 3

  n = 4

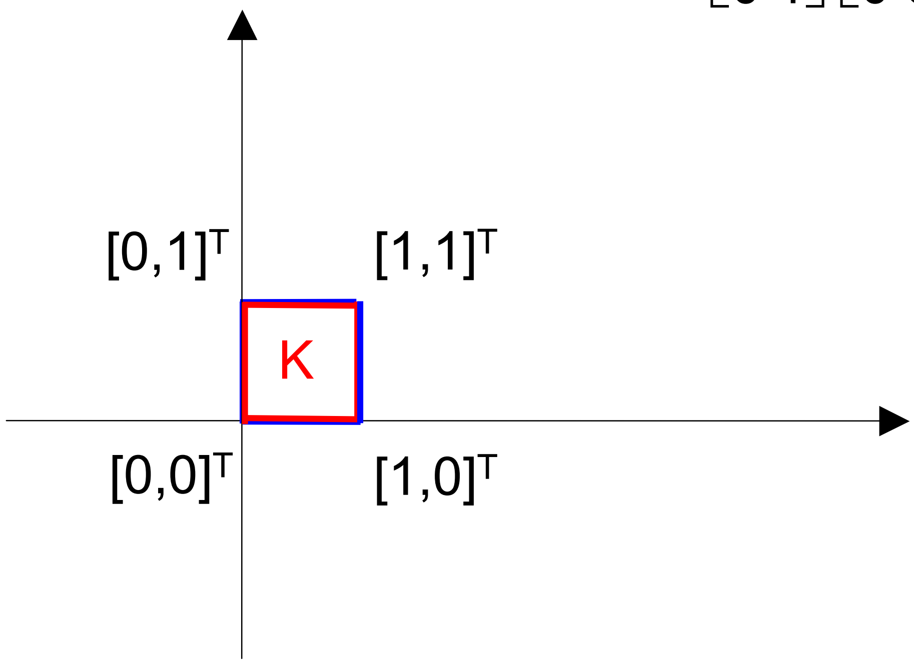
  ...

…

Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a = 1, d = 1

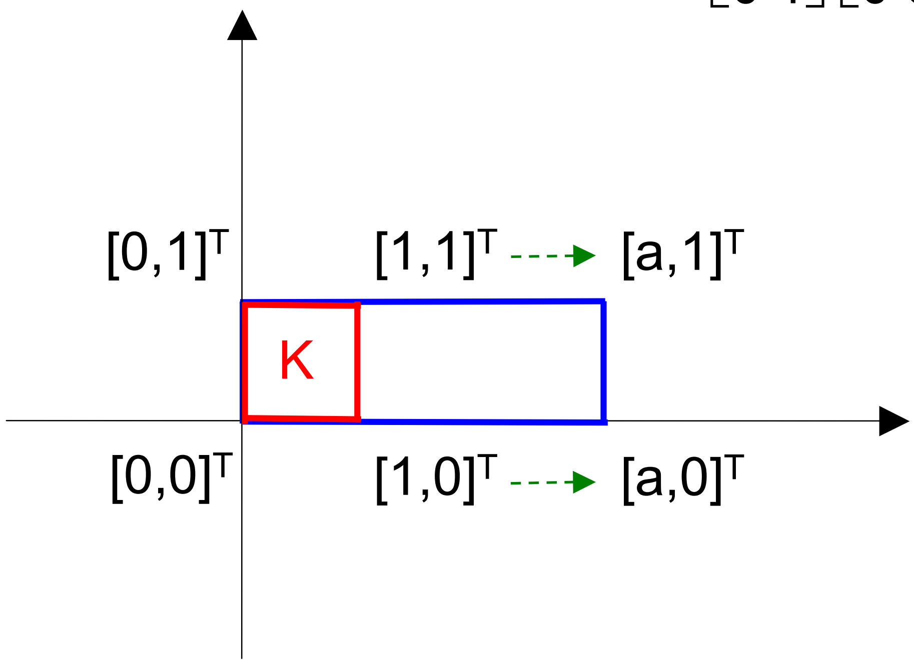
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a > 1, d = 1

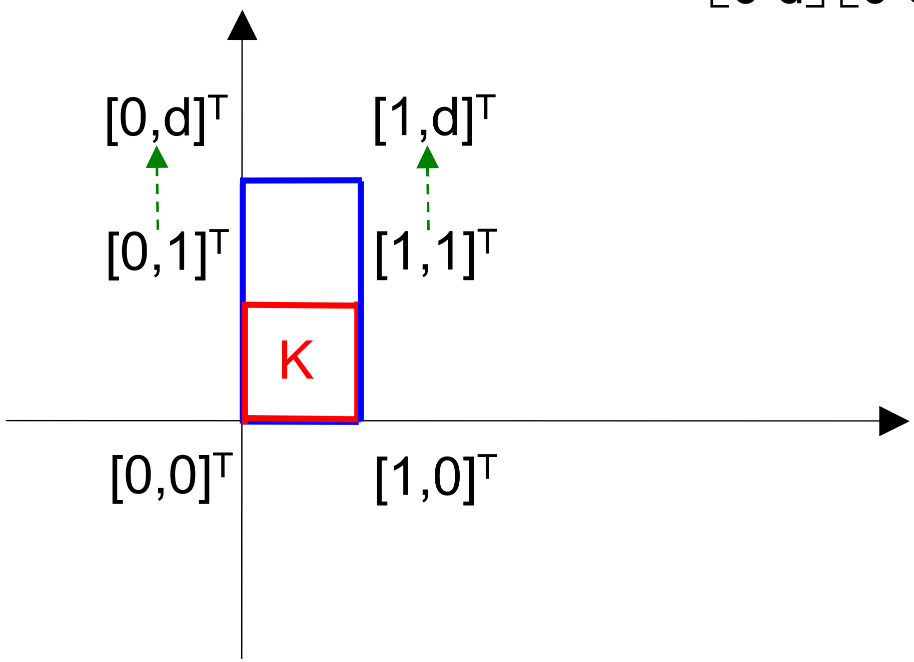
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a = 1, d > 1

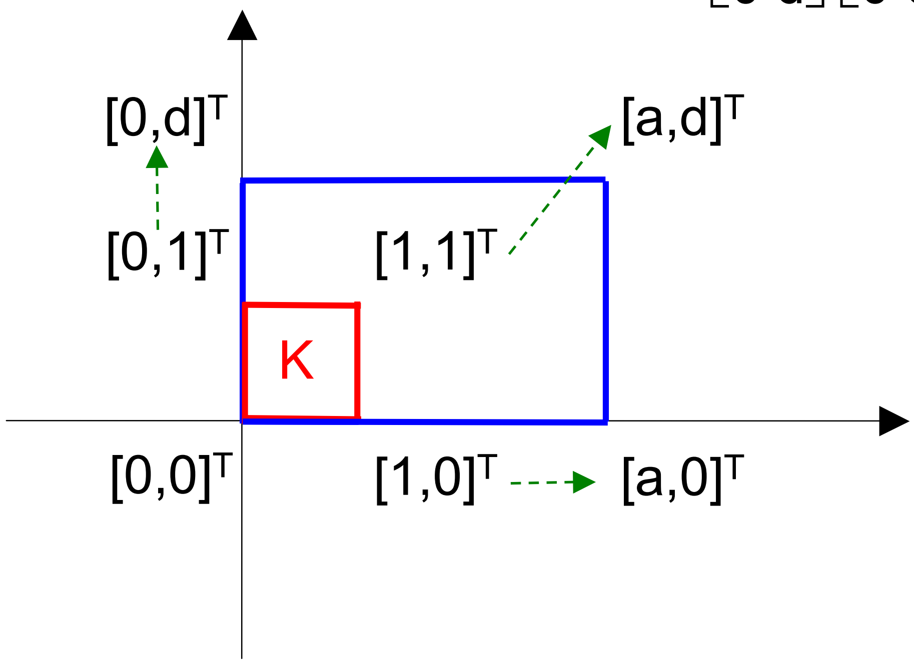
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d & d \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a > 1, d > 1

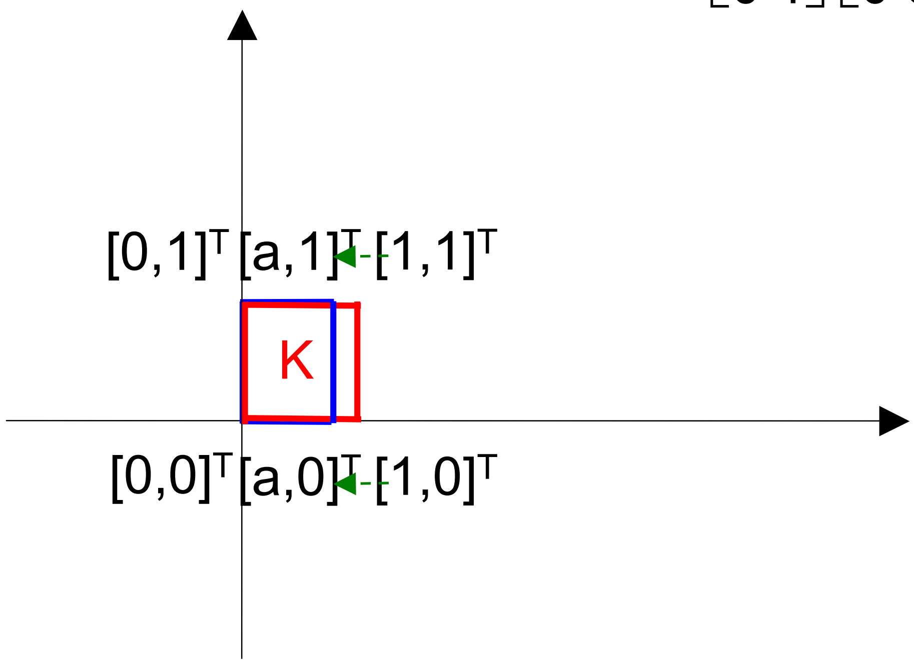
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & d & d \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a < 1, d = 1

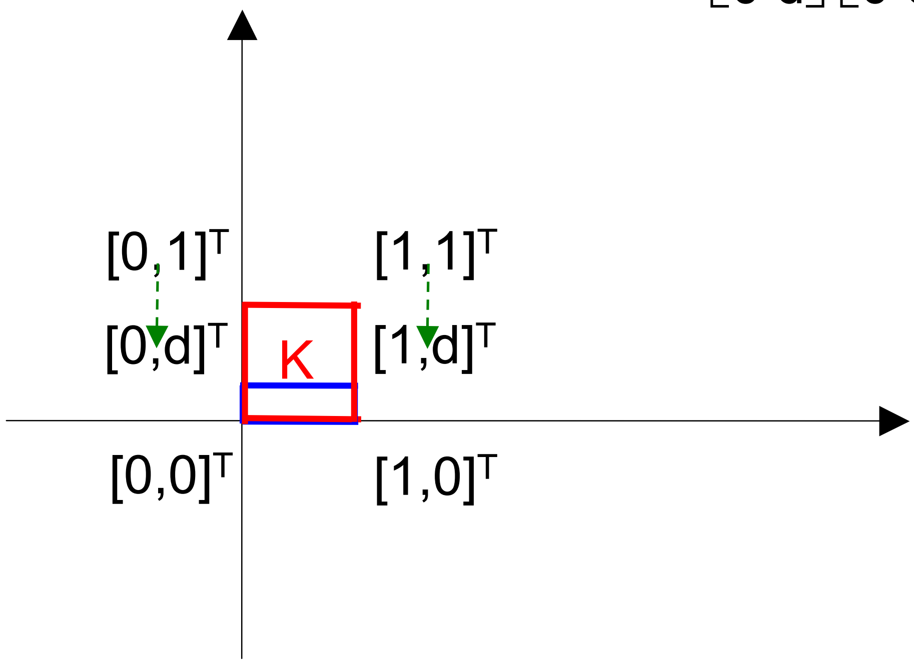
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a = 1, d < 1

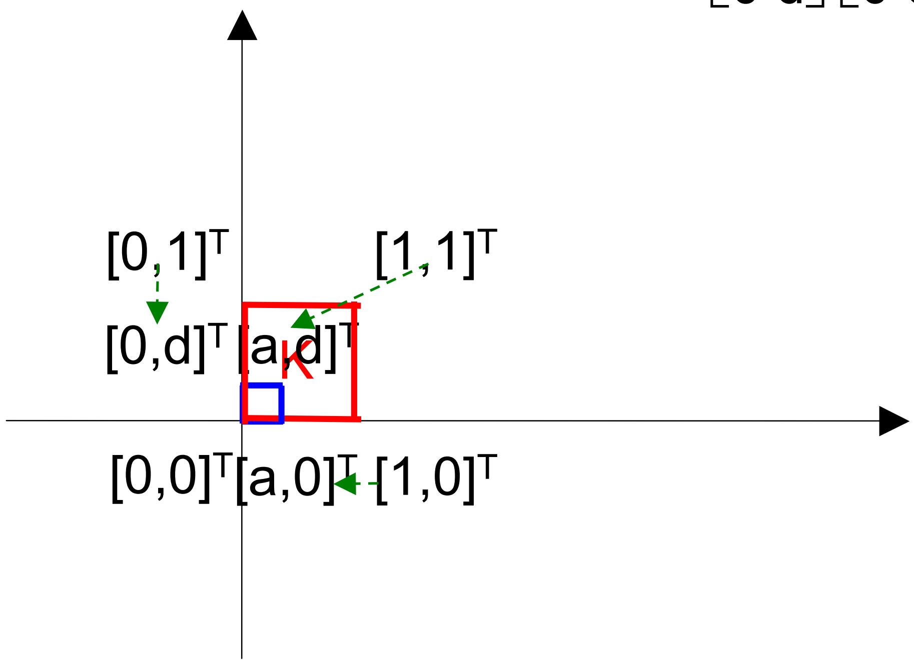
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d & d \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  – przypadek: $a < 1$, $d < 1$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & d & d \end{bmatrix}$$



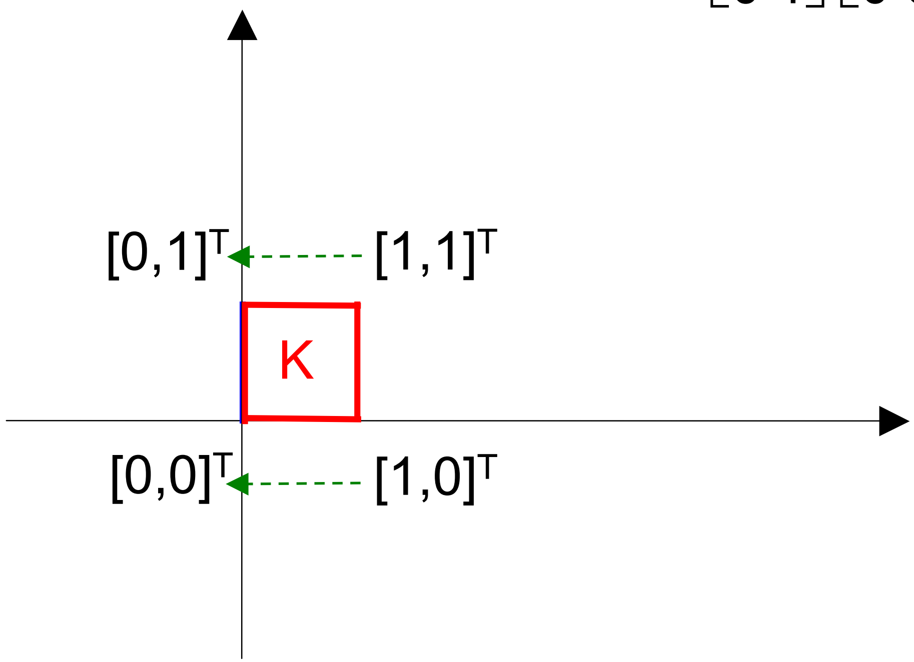
Wyznacznik macierzy

- Interesujące przypadki (degeneracja kwadratu)

Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a = 0, d = 1

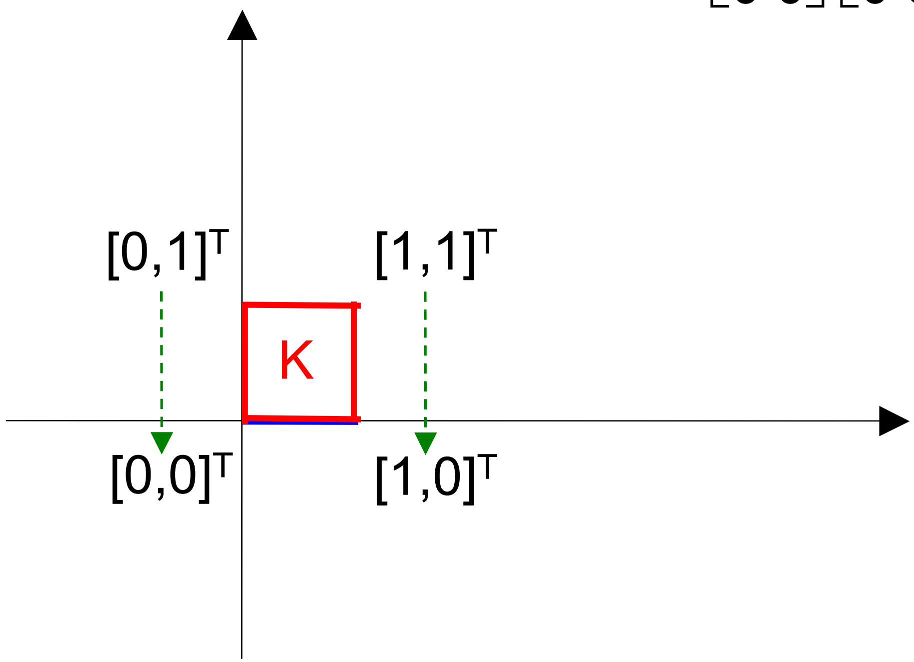
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a = 1, d = 0

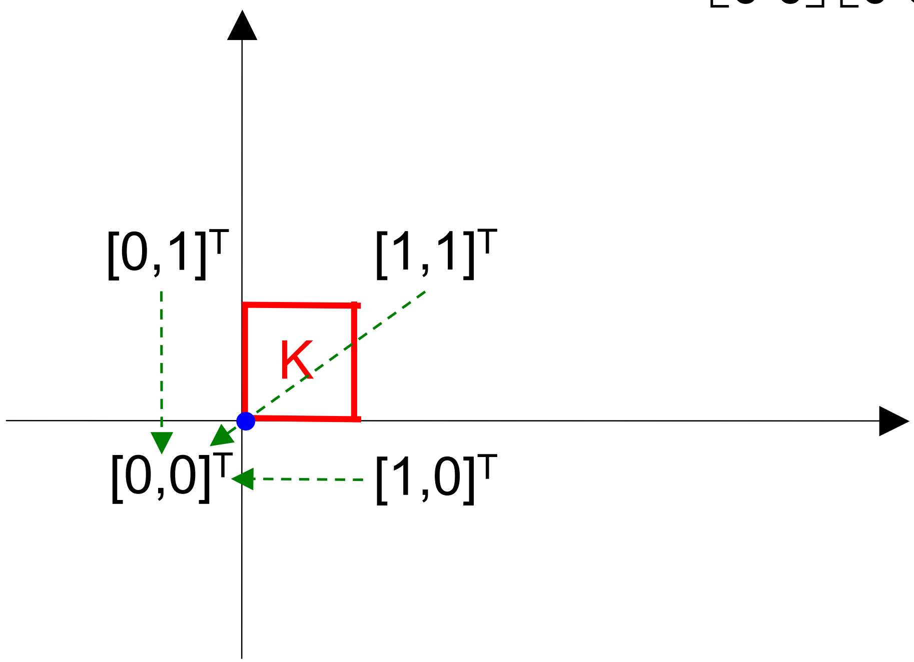
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Działanie (przekształcającej) macierzy diagonalnej [a 0 ; 0 d] na wektory $[0, 0]^T$, $[1, 0]^T$, $[0, 1]^T$, $[1, 1]^T$
  - przypadek: a = 0, d = 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, gdzie a > 0 i d > 0 (w ogólności: $a \neq 0$ i $d \neq 0$)
  - przekształca kwadrat w prostokąt
  - $\det(\mathbf{A}_3) = ad - 0 \cdot 0 = ad > 0$ (w ogólności: $ad \neq 0$)

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie a > 0 (w ogólności: $a \neq 0$)

  – redukuje kwadrat do odcinka

  – $\det(\mathbf{A}_2) = a \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, gdzie d > 0 (w ogólności: $d \neq 0$)

  – redukuje kwadrat do odcinka

  – $\det(\mathbf{A}_1) = 0 \cdot d - 0 \cdot 0 = 0$

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  – redukuje kwadrat do punktu

  – $\det(\mathbf{A}_0) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Wyznacznik macierzy

- Ewidentna zależność:
  - niezerowy wyznacznik $\Leftrightarrow$ zachowany wymiar figury

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, gdzie $a > 0$ i $d > 0$ (w ogólności: $a \neq 0$ i $d \neq 0$)

  – „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 2 wymiary

  – $\det(\mathbf{A}_3) = ad - 0 \cdot 0 = ad > 0$ (w ogólności: $ad \neq 0$)

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie a > 0 (w ogólności: $a \neq 0$)

  - „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 1 wymiar
  - $\det(\mathbf{A}_2) = a \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, gdzie $d > 0$ (w ogólności: $d \neq 0$)

  – „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 1 wymiar
  – $\det(\mathbf{A}_1) = 0 \cdot d - 0 \cdot 0 = 0$

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 0 wymiarów
  - $\det(\mathbf{A}_0) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Wyznacznik macierzy

- Brak zależności pomiędzy wyznacznikiem a liczbą wymiarów powstałej figury
  - istnieje jednak charakterystyka, która odzwieciedla tę liczbę

Wyznacznik macierzy

- Brak zależności pomiędzy wyznacznikiem a liczbą wymiarów powstałej figury
  - istnieje jednak charakterystyka, która odzwieciedla tę liczbę
    - jest to tzw. rząd macierzy (rozmiar największej podmacierzy o wyznaczniku niezerowym)
  - więcej o rzędzie macierzy: przy okazji :-)

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, gdzie $a > 0$ i $d > 0$ (w ogólności: $a \neq 0$ i $d \neq 0$)

  – „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 2 wymiary
  – $\text{rank}(\mathbf{A}_3) = 2$

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie $a > 0$ (w ogólności: $a \neq 0$)

  - „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 1 wymiar
  - $\text{rank}(\mathbf{A}_2) = 1$

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, gdzie d > 0 (w ogólności: $d \neq 0$)

  - „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 1 wymiar
  - rank($\mathbf{A}_1$) = 1

Wyznacznik macierzy

- Wybrane macierze i ich charakterystyki

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - „konwersja”: 2 wymiary $\rightarrow$ 0 wymiarów
  - rank($\mathbf{A}_0$) = 0

Wyznacznik macierzy

- A więc pod tym względem wyznacznik ustępuje rzędowi
  - w ogólnym przypadku **A** = diag(a,d)
    - wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych: det(**A**) = det(diag(a,d)) = a·d
    - rząd macierzy diagonalnej jest liczbą jej niezerowych elementów diagonalnych: rank(**A**) = det(diag(a,d)) = (a≠0?1:0)+(d≠0?1:0)
  - rząd specyfikuje jednoznacznie rozmiar generowanej figury
  - wyznacznik przekazuje w tym przypadku mniej informacji, ponieważ wiadomo jedynie, że
    - gdy rank(**A**) = 2, to det(**A**) ≠ 0
    - gdy rank(**A**) < 2, to det(**A**) = 0
      - bo w iloczynie występuje przynajmniej jedno zero

Wyznacznik macierzy

- Ale w tej sytuacji występują jeszcze lepsze charakterystyki macierzy diagonalnej
  - są nimi poszczególne wartości jej przekątnej
    - nie tylko liczba wymiarów, ale także które wymiary
    - jeżeli a $\neq$ 0, to pierwszy wymiar jest zachowany
    - jeżeli d $\neq$ 0, to drugi wymiar jest zachowany

Wyznacznik macierzy

- W ogólnym przypadku (macierz diagonalna nxn)
  - **A** = diag(a_1, a_2, ..., a_n)
    - wyznacznik macierzy diagonalnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych: det(**A**) = det(diag(a_1, a_2, ..., a_n)) = $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$
    - rząd macierzy diagonalnej jest liczbą jej niezerowych elementów diagonalnych: rank(**A**) = det(diag(a_1, a_2, ..., a_n)) = $\sum(a_i \neq 0 ? 1 : 0)$
  - jednocześnie:
    - gdy rank(**A**) = n, to det(**A**) $\neq$ 0
    - gdy rank(**A**) < n, to det(**A**) = 0
      - bo w iloczynie występuje przynajmniej jedno zero
  - jeżeli $a_i \neq 0$, to i-ty wymiar jest zachowany

Wyznacznik macierzy

- W ogólnym przypadku (macierz diagonalna nxn)
  - ujemne wartości przekształcającej macierzy diagonalnej **A** = diag(a_1, a_2, ..., a_n) są także dopuszczalne
    - wartość a_i < 0 powoduje, że przekształcona figura będzie odbiciem lustrzanym (względem i-tej osi współrzędnych) figury oryginalnej (ale jej rozmiary zostają zachowane)
    - o deformacji przekształcanych figur decydują więc wartości $|a_i|$

Wyznacznik macierzy

- Ostatnia uwaga
  - jeżeli elementy macierzy diagonalnej **A** = diag(a_1, a_2, ..., a_n) spełniają

    $|a_1| = |a_2| = ... = |a_n|$ (równe)

    - to przekształcenie reprezentowane przez tę macierz nie deformuje przekształcanych figur (nie zmienia ich proporcji)

    $|a_1| \approx |a_2| \approx ... \approx |a_n|$ (w przybliżeniu równe)

    - to przekształcenie reprezentowane przez tę macierz lekko deformuje przekształcane figury

    $|a_1| <> |a_2| <> ... <> |a_n|$ (różne)

    - to przekształcenie reprezentowane przez tę macierz mocno deformuje przekształcane figury

Wyznacznik macierzy

- Ostatnia uwaga
  - im wieksze nierówności wśród wartości $|a_i|$
    - im większa największa wartość $|a_i|$
      a im mniejsza najmniejsza wartość $|a_i|$

    tym większa deformacja przekształcanych figur
  - miarą deformacji mogłoby być więc np. $c = \max_i(|a_i|)/\min_i(|a_i|)$
    - w ogólności $c \geq 1$
    - gdy $c = 1$, to żadna deformacja nie zachodzi
    - gdy $c = \infty$ lub $c = \mathrm{NaN}$, to figura traci przynajmniej jeden wymiar

…

Wielomiany

- Pojęcia analizy wielomianowej
  - postaci wielomianów
  - metody interpolacyjne
  - miejsca zerowe

…

Elementy analizy spektralnej

- Z pewnych względów wyznacznik ma znaczenie kluczowe, szczególnie gdy dotyczy macierzy przekształcających
  - powód: można na jego podstawie wywnioskować, czy przekształcenie jest odwracalne (tak, gdy det(**A**) $\neq$ 0)
    - łatwa interpretacja geometryczna (pole figury przekształconej)
  - teoretycznie odpowiedź na to pytanie jest prosta: albo det(**A**) = 0 albo det(**A**) $\neq$ 0
  - w praktyce jednak problem ten jest bardziej złożony (ze względu na niedokładności numeryczne)
  - dodatkowo jednak:
    - istnieją macierze nieosobliwe, które posiadają dowolnie małe wyznaczniki, np. macierz $\varepsilon \cdot \mathbf{I}$, gdzie ε jest małą liczbą
    - do określenia praktycznej możliwości znalezienia macierzy odwrotnej do **A** stosuje się inne współczynniki charakteryzujące macierz **A** (np. cond(**A**))

Elementy analizy spektralnej

- W wyidealizowanym przypadku do ustalania, czy macierz posiada odwrotność można posługiwać się wyznacznikiem tej macierzy
- Gdy det(**A**) $\neq$ 0 to operacja **Ax** jest odwracalna, co oznacza, że na podstawie **y** można odtworzyć takie **x**, że **y** = **Ax**
  - metoda: rozwiązanie układu równań

Elementy analizy spektralnej

- Załóżmy, że wyznacznik pewnej macierzy jest różny od zera, ale bliski zeru (i wynosi np. 0.00001)
  - jakie cechy elementów tej macierzy decydują o tym, że tak jest?
  - jak krótko scharakteryzować wartość wyznacznika macierzy w kategoriach wartości jej elementów?
    - co łączy elementy macierzy oraz wartość jej wyznacznika (oprócz definicji, która jednak jest na tyle skomplikowana, że trudno o jej interpretację w tych kategoriach)?
    - jakie przekształcenie elementów macierzy doprowadzi jej wyznacznik do wartości zero (oprócz trywialnego przemnożenia przez zero)?
- Powstaje pytanie: jak skutecznie kontrolować wartość wyznacznika macierzy?

Elementy analizy spektralnej

- Analiza wyznacznika
  - zerowa wartość
    - metody prostsze
      - odkrycie zerowej linii macierzy
      - odkrycie zduplikowanej linii macierzy
    - metody bardziej skomplikowane (ale ogólniejsze)
      - odkrycie przekształcenia, które przekształci i-tą linię macierzy w j-tą linię tej macierzy
  - dzięki takim odkryciom otrzymujemy wnioski stwierdzające, czy wyznacznik jest zerowy, a jeżeli nie, co by trzeba zrobić aby był zerowy – odkryte przekształcenia można poddawać dalszym, systematycznym badaniom

Elementy analizy spektralnej

- Problem kontroli linii macierzy ma pewne rozwiązanie szczególne, które zostało wybrane z wielu potencjalnie możliwych i leży u podstaw tzw. analizy spektralnej macierzy:
  - pytanie: jakie linie kontrolować? (wiersze/kolumny?)
    - odpowiedź: zarówno wiersze, jak i kolumny
  - pytanie: które wiersze/kolumny poddawać przekształceniom?
    - odpowiedź: wszystkie

Elementy analizy spektralnej

- Dalsze pytania i odpowiedzi przedstawiają się następująco:
  - pytanie: jak kontrolować elementy macierzy? mnożyć/dzielić przez pewien parametr? dodawać/odejmować parametr?
    - odpowiedź: przez odjęcie parametru od wartości elementu
  - pytanie: ile parametrów zastosować do kontrolowania macierzy o rozmiarach nxn? (min: 1 parametr, max: n^2 parametrów)
    - odpowiedź: zastosować minimalną liczbę parametrów, która umożliwia kontrolowanie każdego wiersza i każdej kolumny
  - pytanie: od których elementów macierzy odjąć parametr?
    - odpowiedź: od wszystkich elementów głównej przekątnej macierzy (pozwala to na kontrolowanie (jednego) elementu w każdym wierszu i każdej kolumnie)

Elementy analizy spektralnej

- Ilustracja parametryzacji macierzy **A** = $[a_{ij}]$, i=1..4, j=1..4

$a_{11}-\lambda$	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	$a_{22}-\lambda$	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	$a_{33}-\lambda$	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	$a_{44}-\lambda$

Elementy analizy spektralnej

- Sparametryzowaną wersję macierzy **A** można zapisać w postaci wyrażenia macierzowego: **A**–**I**λ
- Macierz **A**–**I**λ ta nosi nazwę macierzy charakterystycznej macierzy **A**
- Macierz charakterystyczna jest także macierzą kwadratową, możliwe jest więc zdefiniowanie wyznacznika tej macierzy: det(**A**–**I**λ)
  – ponieważ macierz charakterystyczna jest zależna od parametru λ, sprawdzenie, czy jej wyznacznik jest równy zero jest możliwe dopiero po przypisaniu konkretnej wartości parametrowi λ
  – inna, ciekawa możliwość: ustalenie takiej wartości parametru λ, dla której wyznacznik macierzy jest równy zero

Elementy analizy spektralnej

- Zależne od λ równanie $\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}\lambda) = 0$ nazywa się równaniem charakterystycznym macierzy **A**
- Dla macierzy o rozmiarach nxn lewa strona tego równania jest wielomianem stopnia n (co wynika z metody obliczania wyznacznika macierzy)
- Rozwiązaniem tego równania jest n (niekoniecznie różnych od siebie) wartości (w ogólności) zespolonych

Elementy analizy spektralnej

- Rozwiązania równania charakterystycznego macierzy nazywane są wartościami własnymi tej macierzy
  - niem. eigenwert (wartość charakterystyczna, dosł. własna)
  - ang. eigenvalue (z niem.)
- Zbiór wartości własnych macierzy nazywa się widmem tej macierzy (inna nazwa: spektrum macierzy)
- Wartości własne informują jednoznacznie o tym, co należy odjąć od przekątnej macierzy, aby doprowadzić jej wyznacznik do zera

Elementy analizy spektralnej

- Ponieważ widmem (zbiorem wartości własnych) macierzy jest zbiór zer pewnego wielomianu, wartości te mogą w ogólności być:
  - zespolone
  - wielokrotne

Elementy analizy spektralnej

- W niektórych sytuacjach wiadomo więcej
  - jeżeli macierz zawiera jedynie wartości rzeczywiste, a wartości własne są zespolone, to występują one w sprzężonych ze sobą parach
  - jeżeli macierz jest symetryczna to wszystkie jej wartości własne są liczbami rzeczywistymi
  - jeżeli macierz jest macierzą o dominującej przekątnej to wartości własne są niezerowe
  - jeżeli macierz jest macierzą Grama to wartości własne są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi
  - itp.

Elementy analizy spektralnej

- Obliczyć wartości własne następującej macierzy **A** = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
- Macierz charakterystyczna **A**–**I**λ = $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$
- Wielomian charakterystyczny (po zastosowaniu wzoru na wyznacznik macierzy o rozmiarach 2x2):

  det(**A**–**I**λ) = (3–λ)·(2–λ) – 2·1 = 6 – 3·λ – 2·λ + λ^2 – 2·1 = λ^2 – 5λ + 4
- Równanie charakterystyczne (w tym przypadku kwadratowe):

  $\lambda^2 - 5\lambda^1 + 4\lambda^0 = 0$
- Rozwiązanie powyższego równania kwadratowego:

  Wyróżnik równania: (–5)·(–5) – 4·1·4 = 25 – 16 = 9

$$\lambda_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Elementy analizy spektralnej

- Zbiorem wartości własnych macierzy **A** jest {1, 4}

Elementy analizy spektralnej

- Co się dzieje po zastosowaniu każdej z tych wartości (czyli odjęciu jej od elementów głównej przekątnej)?

λ_1=1:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-1 & 1 \\ 2 & 2-1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

λ_2=4:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Elementy analizy spektralnej

- Obliczyć wartości własne następującej macierzy **A** = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- Macierz charakterystyczna **A**–**I**λ = $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$
- Wielomian charakterystyczny (po zastosowaniu wzoru na wyznacznik macierzy o rozmiarach 2x2):

  det(**A**–**I**λ) = $(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)$
- Równanie charakterystyczne (w tym przypadku kwadratowe):

  $(3-\lambda)\cdot(2-\lambda) = 0$
- Rozwiązanie powyższego równania kwadratowego:

  $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$

Elementy analizy spektralnej

- Co się dzieje po zastosowaniu każdej z tych wartości (czyli odjęciu jej od elementów głównej przekątnej)?

λ_1=3:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

λ_2=2:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Elementy analizy spektralnej

- Wartości własne macierzy charakteryzują się wielką liczbą właściwości
  - trywialnych, m.in.:
    - jeżeli jakaś wartość własna jest równa zero to wyznacznik macierzy jest także równy zero
    - ...
  - oraz nietrywialnych, m.in.:
    - suma wszystkich wartości własnych jest równa śladowi macierzy
    - iloczyn wszystkich wartości własnych jest równy wyznacznikowi macierzy
    - wszystkie minory główne dają się wyrazić jako odpowiednie sumy iloczynów wartości własnych
    - jeżeli maksymalna wartość bezwzględna z wartości własnych jest mniejsza od jeden, to nieskończona potęga macierzy nie rośnie nieograniczenie
    - jeżeli wszystkie wartości własne są równe zero, to pewna potęga macierzy jest macierzą zerową
    - ...

…

Elementy analizy spektralnej

- Macierz i jej równanie charakterystyczne
  - okazuje się, że równanie charakterystyczne każdej macierzy posiada pewne dość specyficzne rozwiązanie: jest nim mianowicie sama macierz!
    - innymi słowy: każda macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne (jest to tzw. twierdzenie Cayleya-Hamiltona)
- Gdy **A** = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, to **A** spełnia $\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A}^1 + 4\mathbf{A}^0 = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

…