...

Robert Susmaga

Instytut Informatyki

ul. Piotrowo 2

Poznań

kontakt mail'owy

Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL

kontakt osobisty

Centrum Wykładowe, „blok informatyki”, pok. 7

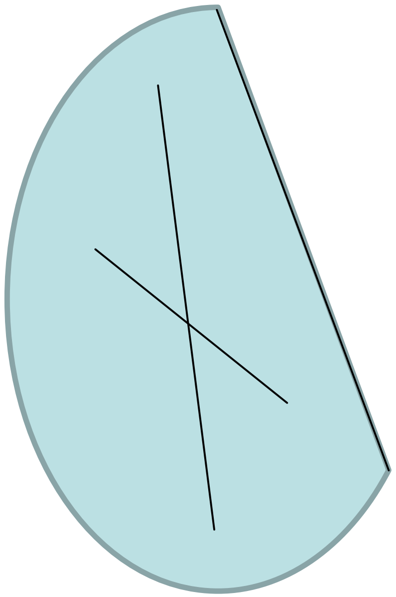
Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

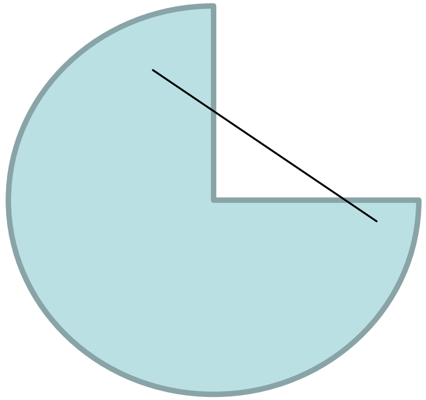
Autor

…

Figura wypukła



tak



nie

…

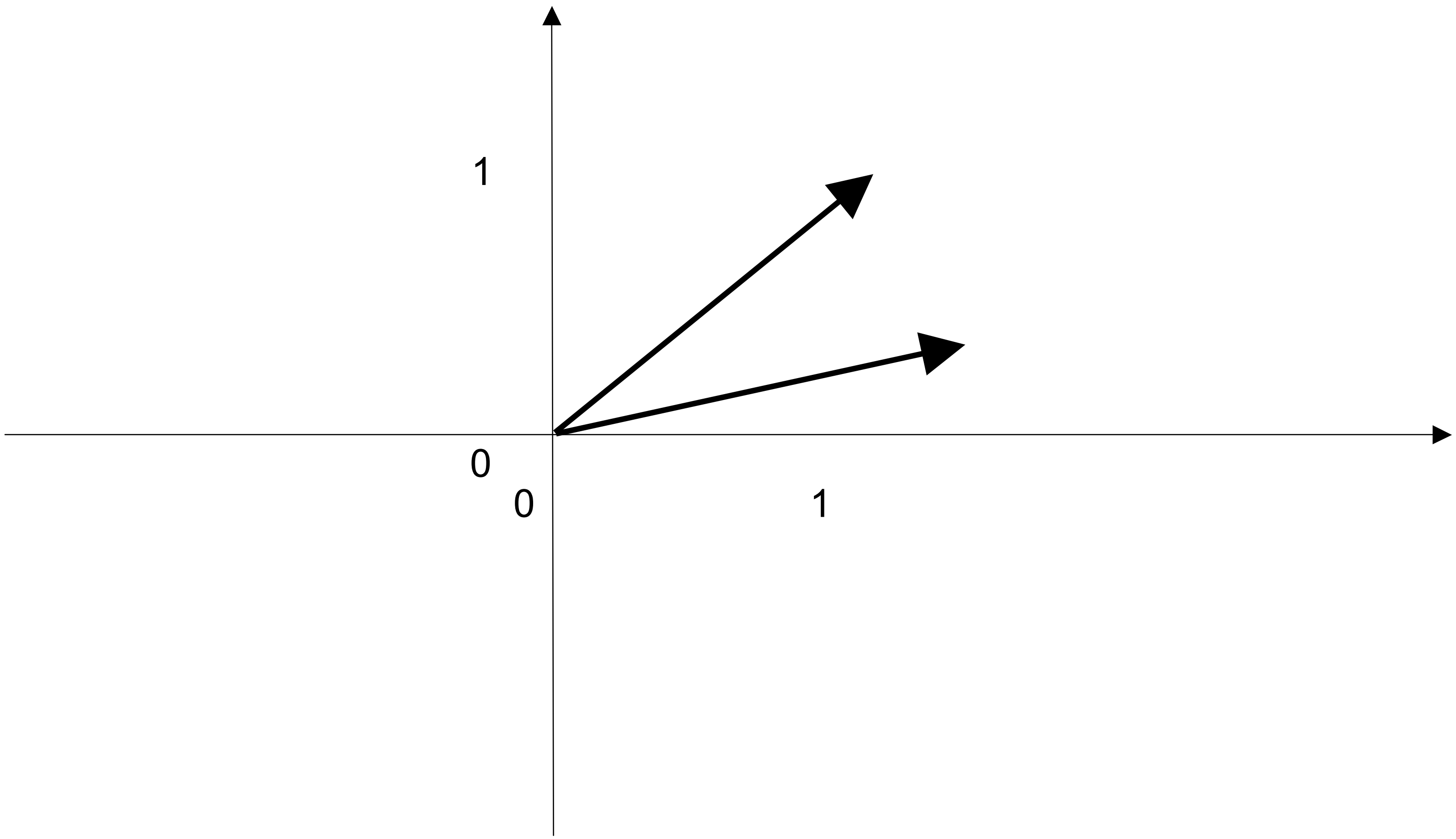
Kombinacja liniowa wektorów

- Dane są
  - wektory $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$
  - skalary $\lambda_1 , ..., \lambda_m$
- Kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_i$ o współczynnikach λ_i nazywamy wektor $\mathbf{y} = \Sigma_{i=1..m}\lambda_i\mathbf{x}_i$

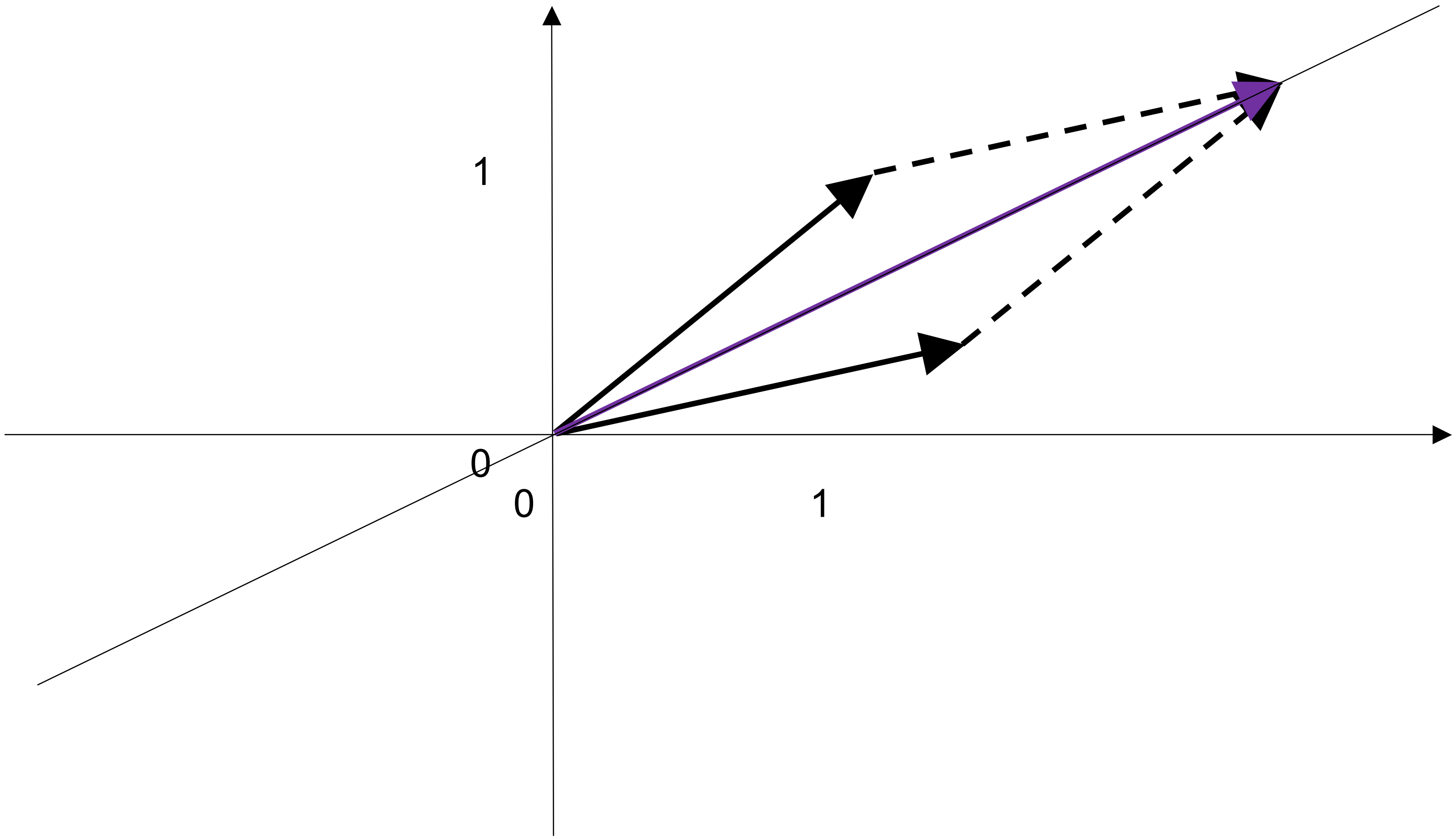
Kombinacja liniowa wektorów

- Szczególne przypadki kombinacji liniowych
  - gdy współczynniki λ_j kombinacji liniowej spełniają warunek $\Sigma\lambda_j=1$, to kombinację nazywamy afiniczną
  - gdy współczynniki λ_j kombinacji afinicznej spełniają warunek $\lambda_j \geq 0$, to kombinację nazywamy wypukłą
  - i inne
    - gdy współczynniki λ_j kombinacji liniowej spełniają $\lambda_j = 0$, to kombinację nazywamy kombinacją o zerowych współczynnikach
    - gdy współczynniki λ_j kombinacji liniowej spełniają $\lambda_j \geq 0$, to kombinację nazywamy kombinacją o nieujemnych współczynnikach

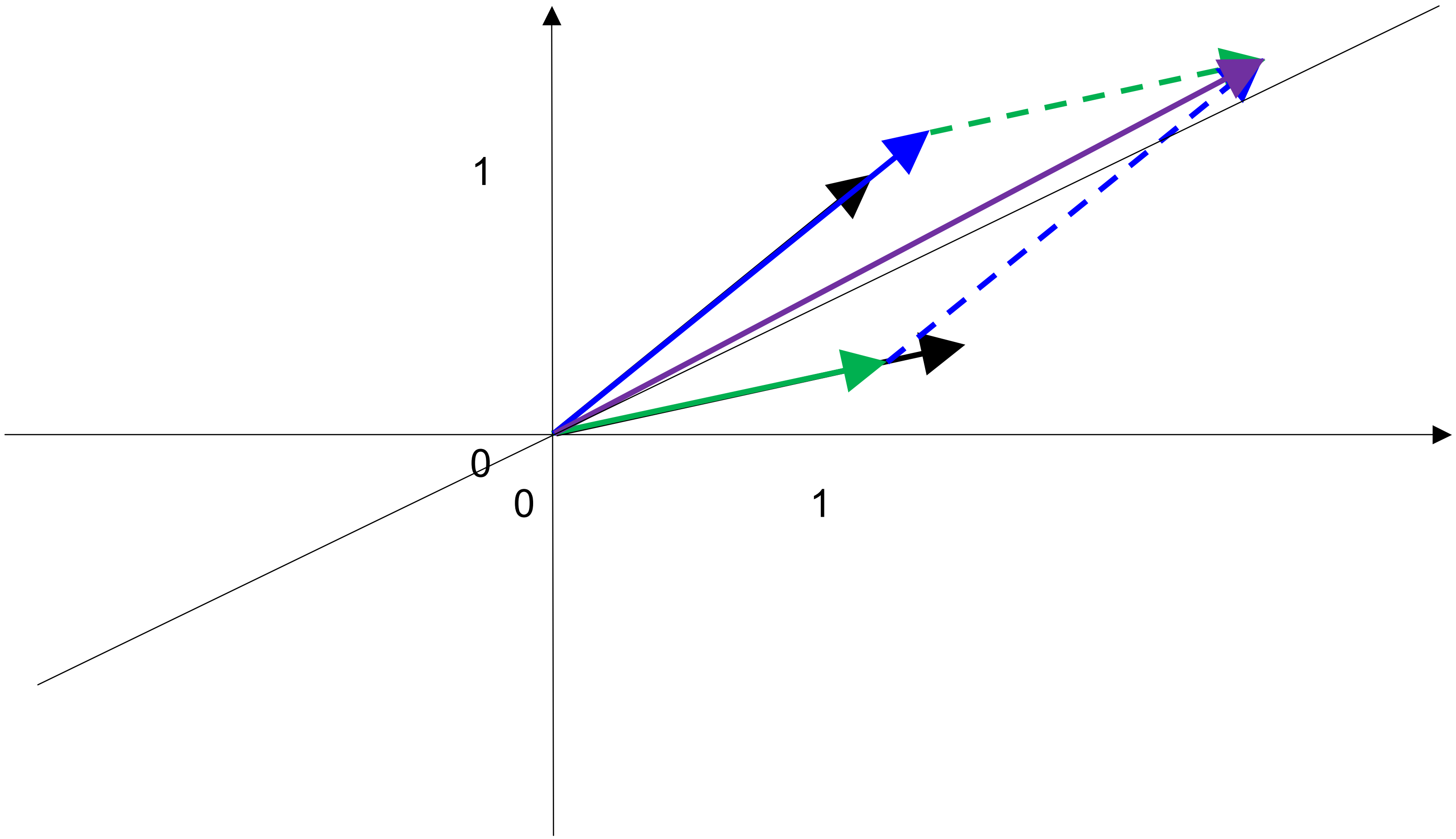
Kombinacja liniowa wektorów



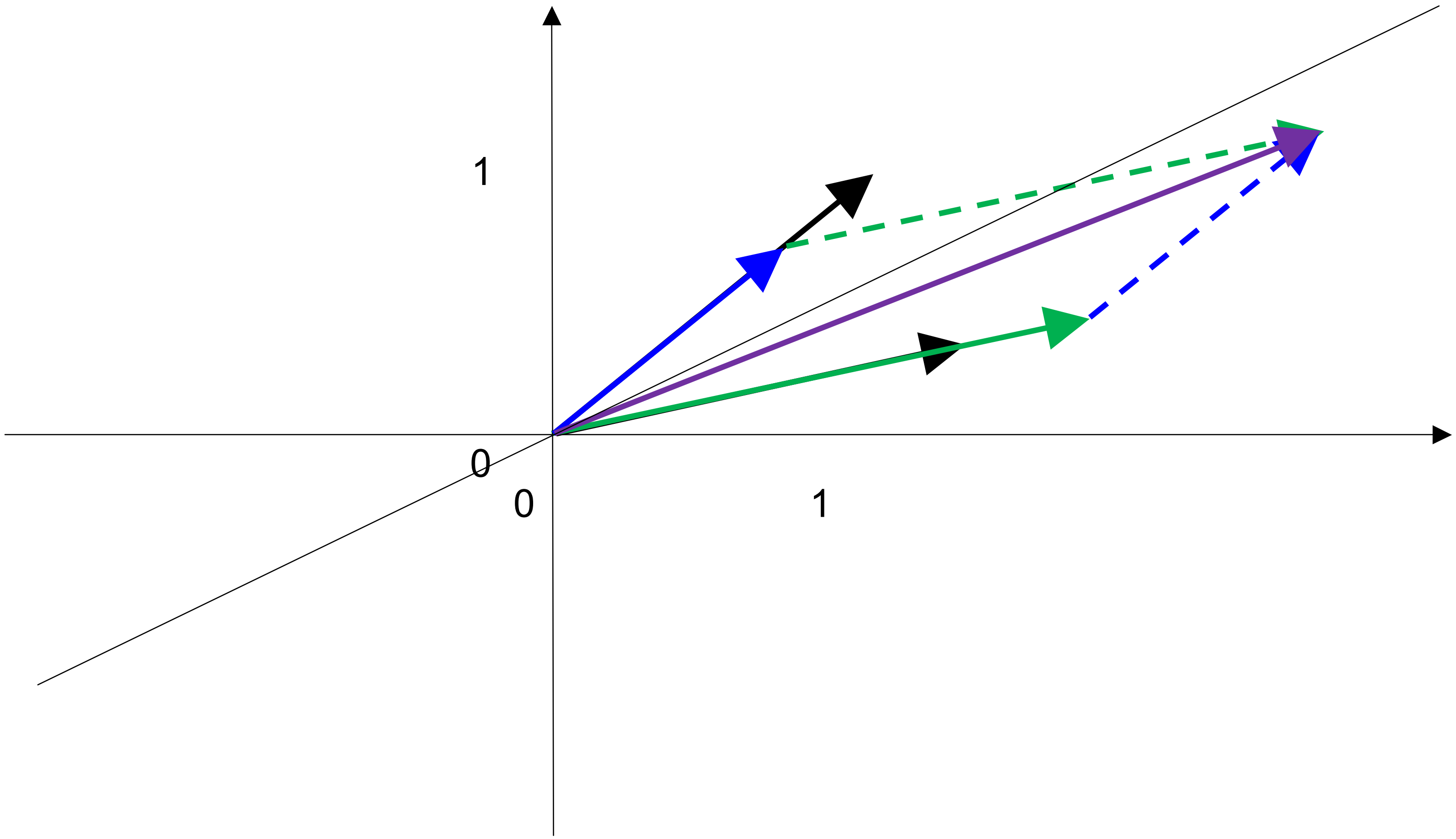
Kombinacja liniowa wektorów



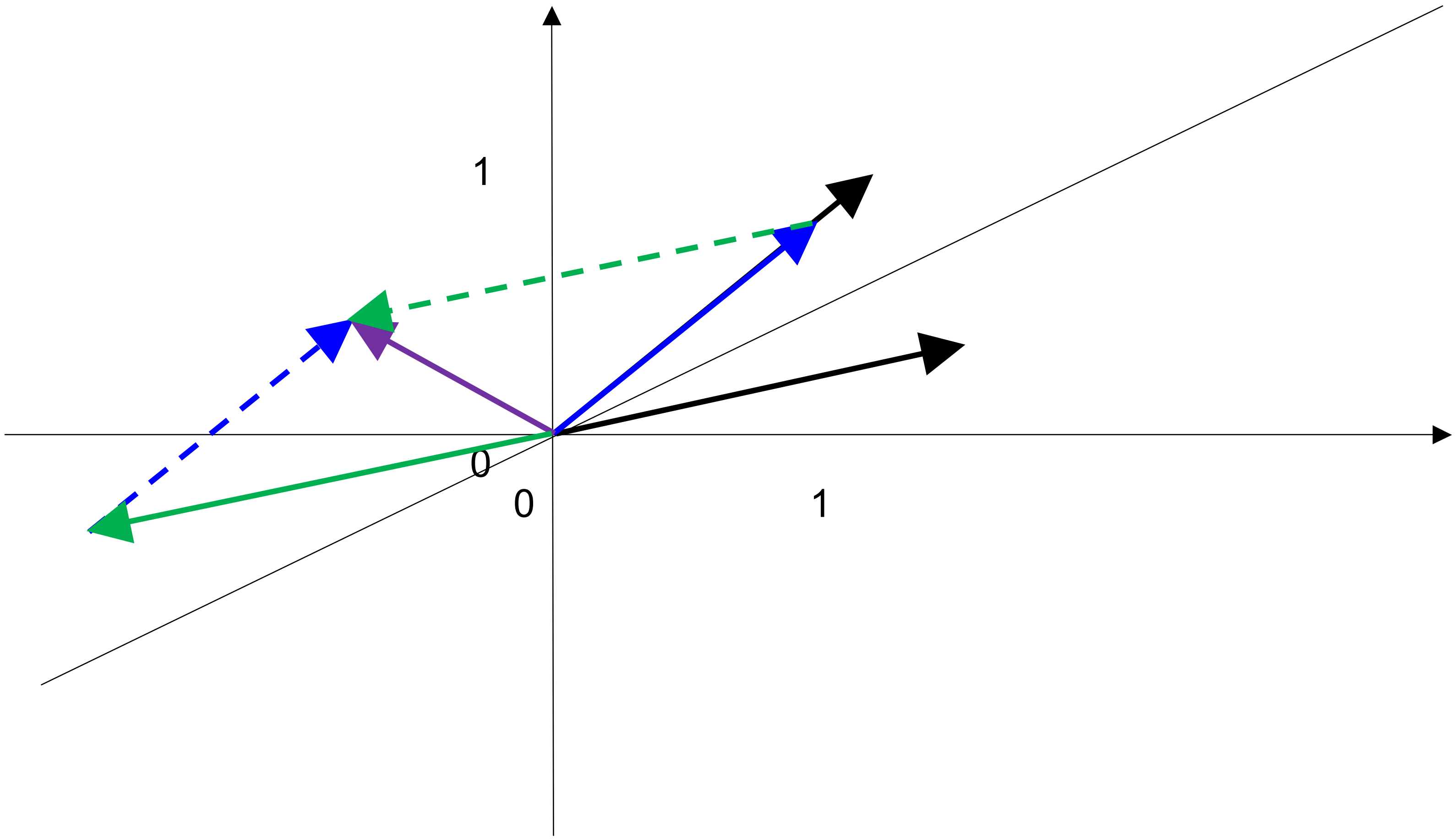
Kombinacja liniowa wektorów



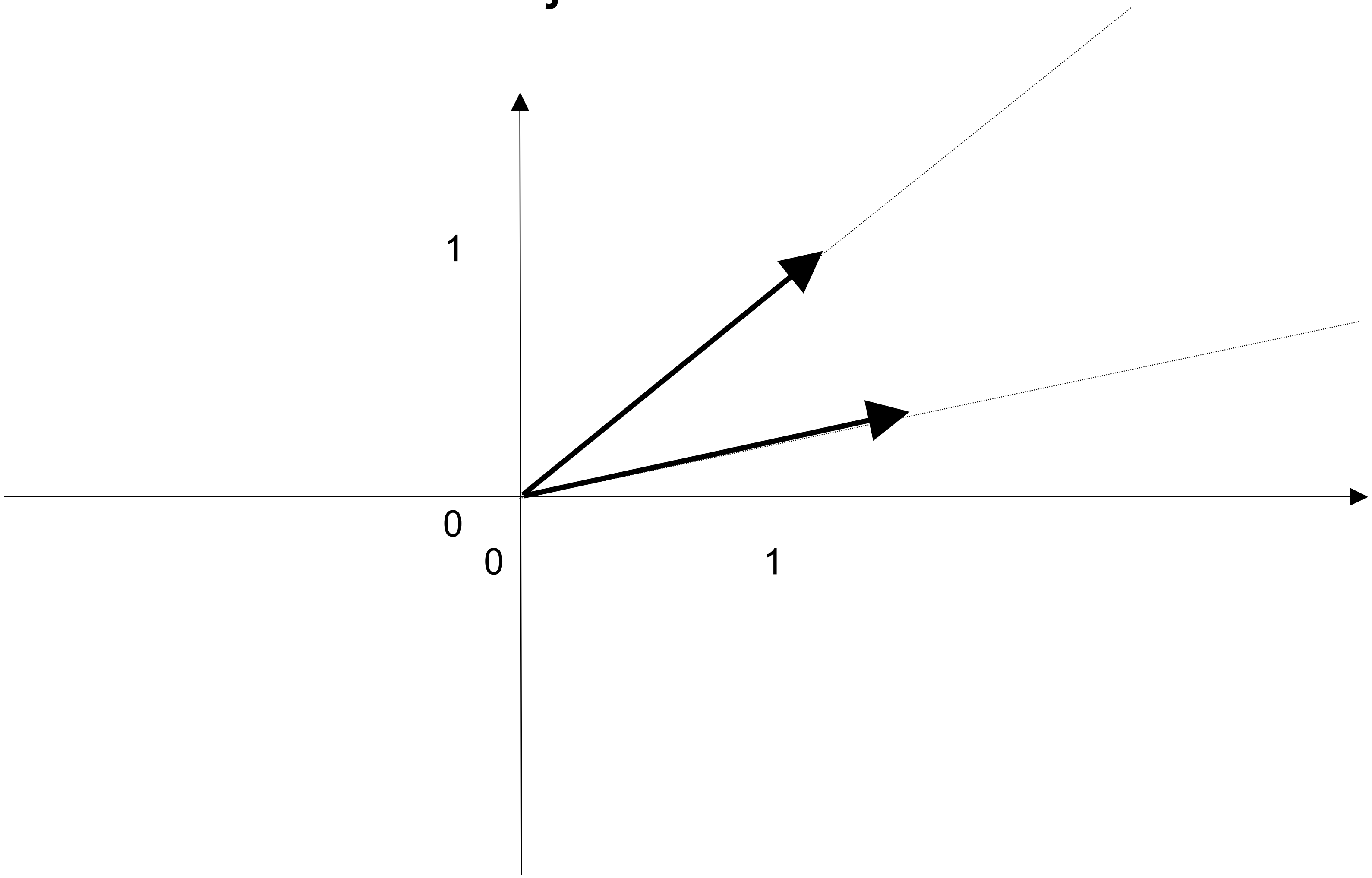
Kombinacja liniowa wektorów



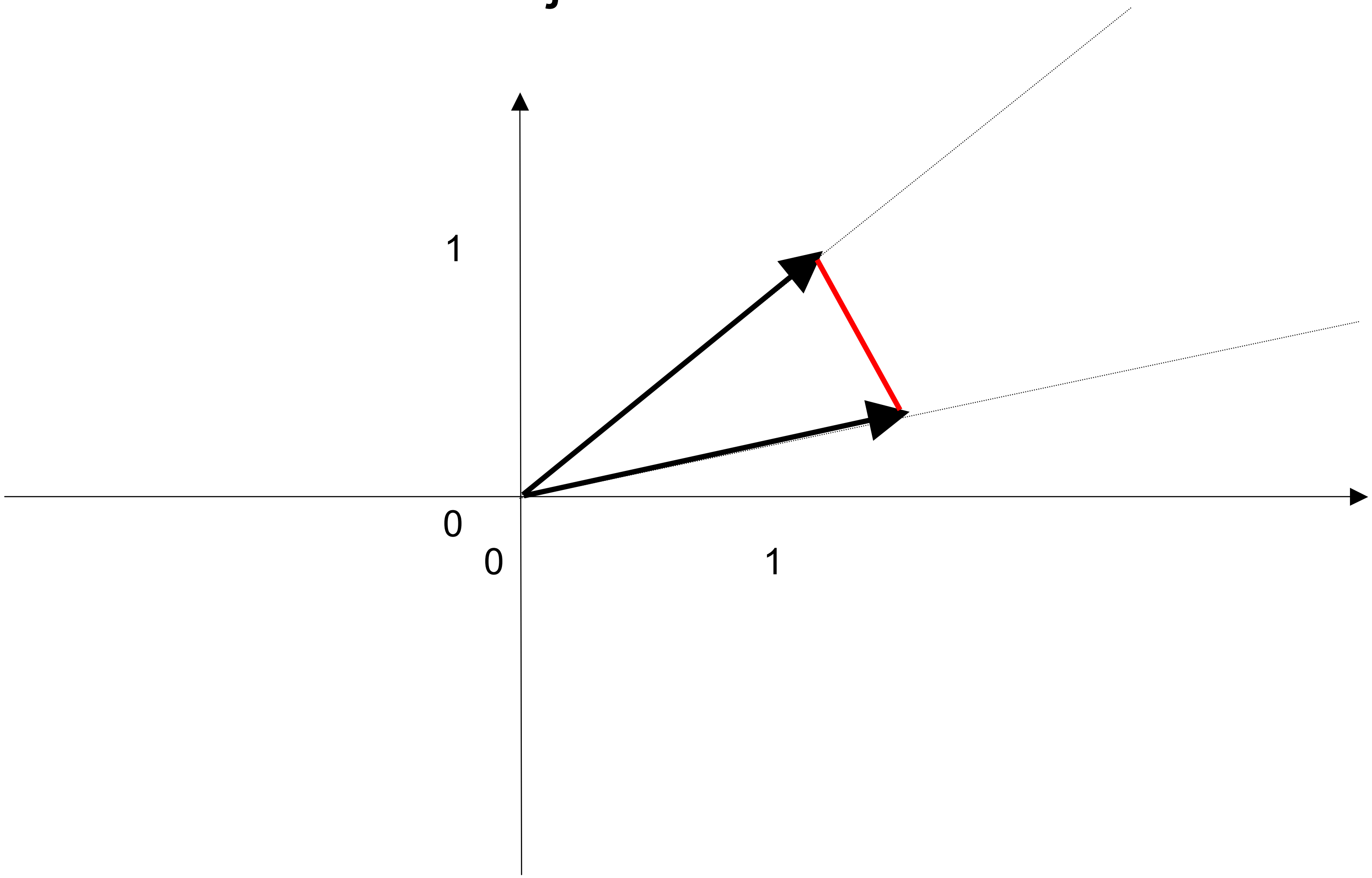
Kombinacja liniowa wektorów



Kombinacja liniowa wektorów



Kombinacja liniowa wektorów



…

…

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zbiory a figury
  - w geometrii klasycznej stosuje się aksjomatyczne definicje figur (np. okrąg)
- W algebrze liniowej zbiory reprezentuje się za pomocą warunków numerycznych (wzorów), mających postać równań i/lub nierówności (pojedynczych, lub układów)

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Przykładowe definicje algebry liniowej:
  - zbiór wszystkich punktów x_1, x_2 płaszczyzny spełniających równanie: $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$ stanowi okrąg o promieniu równym r i środku w punkcie o współrzędnych (a, b)
  - zbiór wszystkich punktów x_1, x_2 płaszczyzny spełniających równanie: $2x_1 - x_2 = 0$ stanowi prostą przechodzącą przez punkty o współrzędnych (0,0) oraz (1,2)
  - zbiór wszystkich punktów x_1, x_2 płaszczyzny spełniających układ równań: $2x_1 + x_2 = 4$, $x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 2$ stanowi odcinek, którego końcami są punkty o współrzędnych (0,4) oraz (2,0)

Parametryczna reprezentacja zbiorów

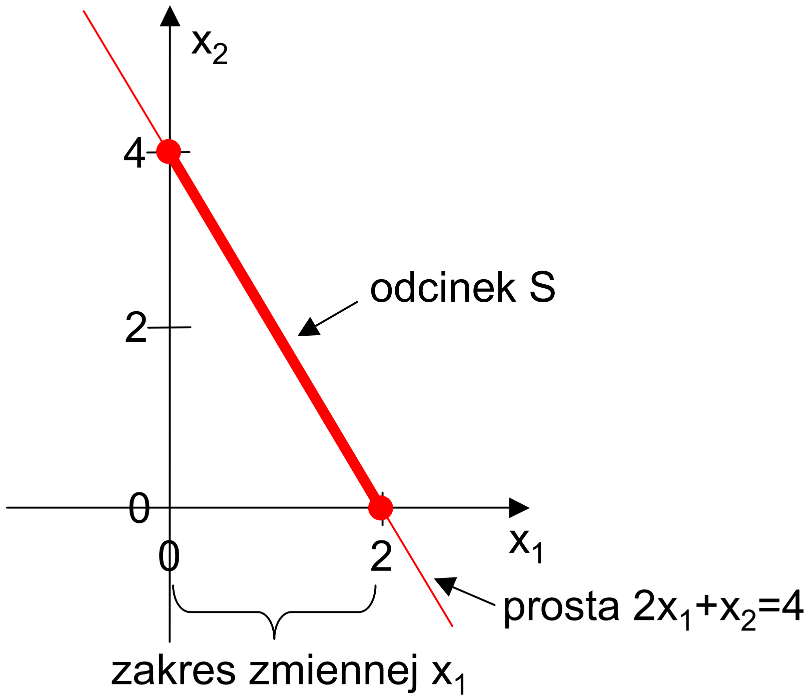
- W przypadku niektórych zbiorów/figur reprezentacja figur w postaci układów równań i/lub nierówności jest mało intuicyjna (z zapisu warunku spełnianego przez punkty figury trudno wywnioskować, jaka jest rola punktów, które do niej należą)
  - Podstawowy problem: czy prosta zdefiniowana warunkiem: $2x_1 – x_2=0$ zawiera punkt o współrzędnych (35,70)?
    - oczywiście na tak podstawione pytanie łatwo jest odpowiedzieć podstawiając liczby 35 i 70 pod zmienne x_1 i x_2 w równaniu i sprawdzając, czy jest ono spełnione
  - Trudniejszy problem: czy punkt (1,2) jest końcem odcinka zdefiniowanego poprzez zbiór warunków: $2x_1+x_2=4$, $x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 2$
    - metoda podstawienia ujawnia jedynie, że punkt (1,2) należy do odcinka, ale nie odpowiada na pytanie, czy punkt ten jest jego końcem

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Dlatego w takich sytuacjach warto używać zapisu parametrycznego, który jest także wzorem numerycznym charakteryzującym (wszystkie) punkty danego zbioru
- Uwagi:
  - zapis parametryczny nie ma postaci układu równań/nierówności, w których zmiennymi były współrzędne punktów
    - do tak sformułowanych równań/nierówności można podstawić współrzędne dowolnego punktu, uzyskując odpowiedź na pytanie, czy dany punkt należy do figury
  - zapis parametryczny ma postać kombinacji liniowej pewnych wektorów, w której zmiennymi są współczynniki kombinacji
    - do tak sformułowanej kombinacji podstawia się wartości współczynników kombinacji, co (przy odpowiednim dobraniu ich wartości) pozwala na wyznaczenie wszystkich punktów figury

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Przykład: dany jest odcinek S zadany w postaci układu warunków: $2x_1+x_2=4$, $x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 2$
  - jak można wyrazić S w postaci parametrycznej?



Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Rozwiązanie wykorzystuje fakty, że:
  - odcinek jest zbiorem wypukłym
    (o dwóch wierzchołkach, stanowiących końce odcinka)
  - końcami danego odcinka są punkty o współrzędnych:
    (0,4) oraz (2,0)

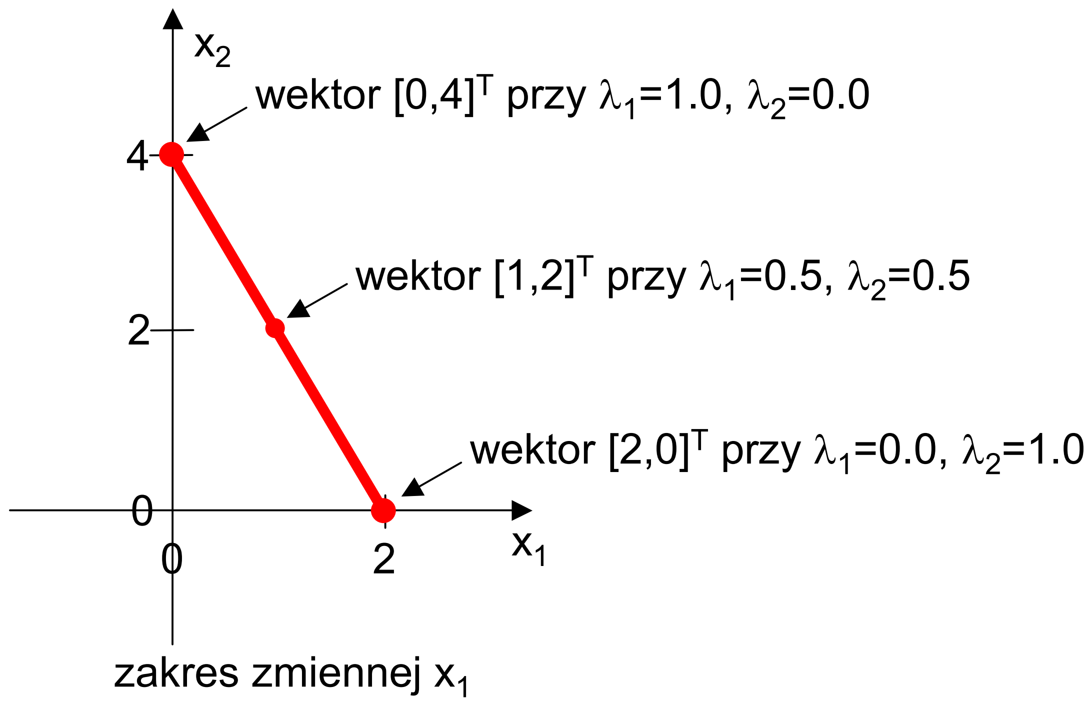
Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zapis parametryczny (kombinacja wypukła):

  $S = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[0,4]^T+\lambda_2[2,0]^T, \lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0, \lambda_1+\lambda_2=1 \}$
- Zapis ten jednoznacznie charakteryzuje odcinek jako konkretnie taki odcinek, którego końcami są punkty o współrzędnych (0,4) oraz (2,0)
- Zapis parametryczny pozwala to na łatwe wygenerowanie charakterystycznych punktów odcinka
  - po wstawieniu $\lambda_1=1.0$, $\lambda_2=0.0$ otrzymujemy koniec: $[0,4]^T$ (ponieważ $1.0[0,4]^T+0.0[2,0]^T = [0,4]^T$)
  - po wstawieniu $\lambda_1=0.0$, $\lambda_2=1.0$ otrzymujemy koniec: $[2,0]^T$ (ponieważ $0.0[0,4]^T+1.0[2,0]^T = [2,0]^T$)
  - po wstawieniu $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=0.5$ otrzymujemy środek: $[1,2]^T$ (ponieważ $0.5[0,4]^T+0.5[2,0]^T = [1,2]^T$)

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Odcinek S postaci $\lambda_1[0,4]^T+\lambda_2[2,0]^T$ z zaznaczonymi punktami charakterystycznymi

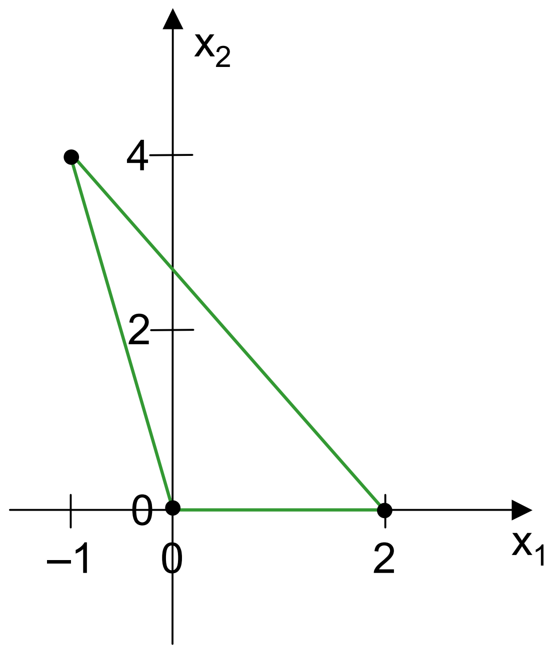


Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Wniosek:
  - zapis parametryczny przydaje się do przedstawiania tylko specyficznych figur, a mianowicie wielościennych zbiorów wypukłych
    - tak się jednak składa, że w algebrze liniowej zbiory te odgrywają szczególną rolę, ponieważ można je definiować za pomocą równań/nierówności liniowych
  - zapis parametryczny jest metodą bardzo intuicyjną ze względu na fakt, że wiele figur definiuje się poprzez podanie ich punktów charakterystycznych, np.:
    - końców odcinka
    - wierzchołków trójkąta
    - itp.

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Inny przykład: trójkąt o wierzchołkach w punktach $[-1,4]^T$, $[2,0]^T$ oraz $[0,0]^T$

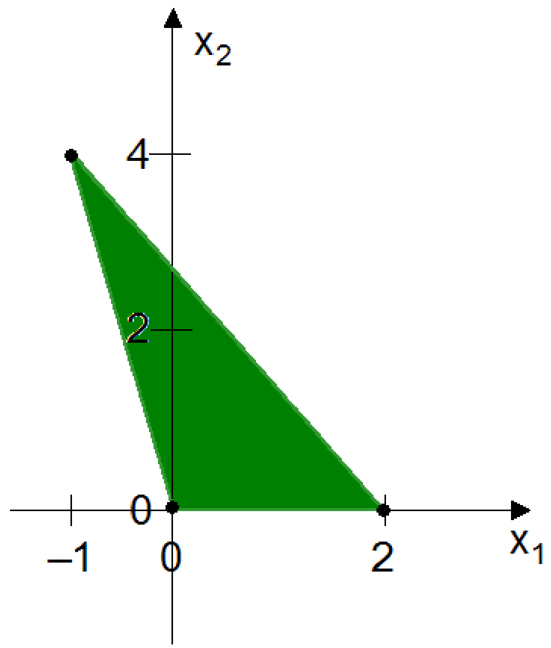


Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zapis parametryczny

  $T = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[-1,4]^T+\lambda_2[2,0]^T +\lambda_3[0,0]^T, \lambda_j\geq 0, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \}$

  – w tym przypadku wymagane są oczywiście trzy parametry



Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Powłoka wypukła
  - dane są pewne wektory $\mathbf{x}_i$ (i=1..n)
  - dowolny wektor $\mathbf{y}$ będący kombinacją wypukłą wektorów $\mathbf{x}_i$ jest elementem tzw. powłoki wypukłej tych wektorów
    - dla $\lambda_j \geq 0$ i $\Sigma\lambda_i = 1$ wektor $\mathbf{y} = \Sigma\lambda_i\mathbf{x}_i$ leży „pomiędzy" wektorami $\mathbf{x}_i$
  - zbiór wszystkich możliwych kombinacji wypukłych wektorów $\mathbf{x}_i$ nazywamy ich powłoką wypukłą
    - powłoka wypukła jest zawsze figurą wypukłą

Parametryczna reprezentacja zbiorów

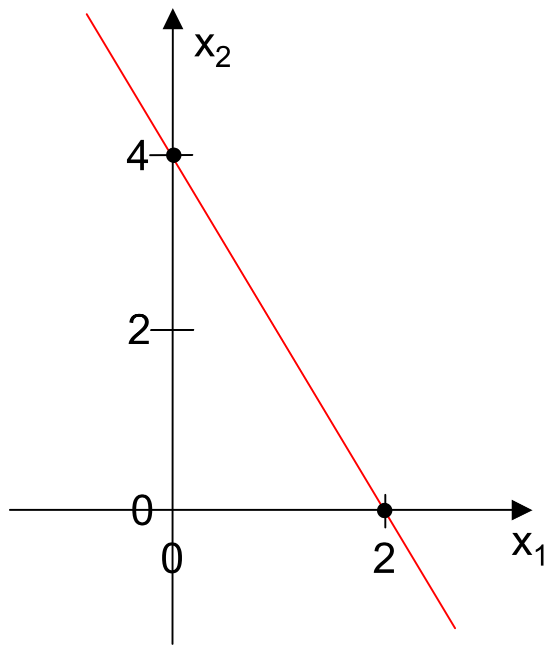
- Wybrane punkty charakterystyczne trójkąta postaci
  $T = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[-1,4]^T+\lambda_2[2,0]^T+\lambda_3[0,0]^T,\ \lambda_j \geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \}$
  - $\lambda_1=1.0$, $\lambda_2=0.0$, $\lambda_3=0.0$ — wierzchołek (wektor $[-1,4]^T$)
  - $\lambda_1=0.0$, $\lambda_2=1.0$, $\lambda_3=0.0$ — wierzchołek (wektor $[2,0]^T$)
  - $\lambda_1=0.0$, $\lambda_2=0.0$, $\lambda_3=1.0$ — wierzchołek (wektor $[0,0]^T$)
  - $\lambda_1=1/3$, $\lambda_2=1/3$, $\lambda_3=1/3$ — środek trójkąta (wektor $[1/3,4/3]^T$)
  - $\lambda_1=0.0$, $\lambda_2=0.5$, $\lambda_3=0.5$ — środek krawędzi łączącej wierzchołki $[2,0]^T$ oraz $[0,0]^T$ (wektor $[1,0]^T$)
  - $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=0.5$, $\lambda_3=0.0$ — środek krawędzi łączącej wierzchołki $[-1,4]^T$ oraz $[2,0]^T$ (wektor $[1/2,2]^T$)
  - itp.

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Definicje parametryczne nie dotyczą jedynie figur ograniczonych
  - możliwe jest także parametryczne definiowanie prostych, półprostych, płaszczyzn, półpłaszczyzn, itp.
  - podobnie jak w przypadku figur ograniczonych, zapis ten jest szczególnie przydatny wtedy, gdy definiuje się figury za pomocą pewnych punktów charakterystycznych
    - np.: proste za pomocą punktów, przez które one przechodzą

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Przykład: znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych (0,4) oraz (2,0)



Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Rozwiązanie klasyczne:
  - znalezienie równania prostej
    - równanie prostej jest postaci: $x_2=ax_1+b$
      - wykorzystanie punktu (0,4): 4=a0+b
      - wykorzystanie punktu (2,0): 0=a2+b
    - powstaje układ równań (w którym zmiennymi są a i b)

      0a+1b=4

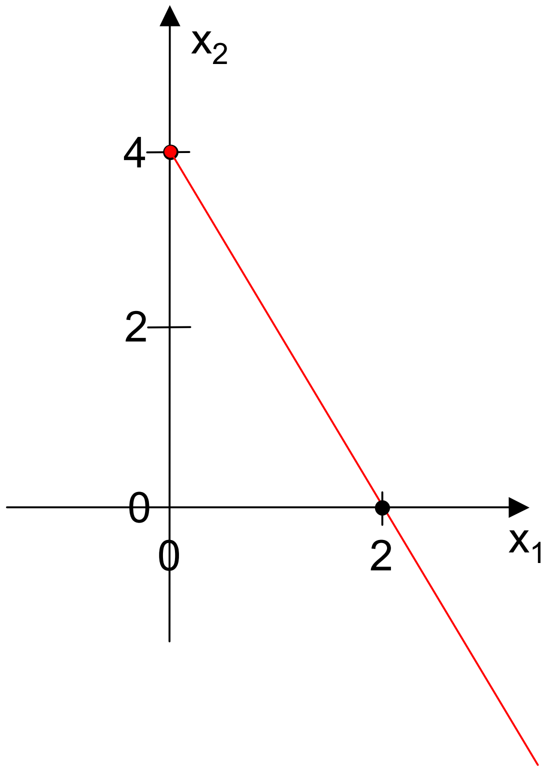
      2a+1b=0
    - rozwiązaniem jest para liczb: a=–2, b=4, z czego wynika, że prosta ma postać: $x_2=-2x_1+4$ (inaczej: $2x_1+x_2-4=0$)
  - powstałe równanie prostej: $2x_1+x_2-4=0$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zapis parametryczny (kombinacja afiniczna):
  - $P = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[0,4]^T+\lambda_2[2,0]^T,\ \lambda_1+\lambda_2=1 \}$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Inny przykład: znaleźć równanie półprostej zaczepionej w punkcie (0,4) i przechodzącej przez punkt (2,0)



Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Rozwiązanie klasyczne:
  - znalezienie równania prostej
    - jak wiadomo równaniem prostej jest $2x_1+x_2-4=0$
  - utworzenie ograniczenia na zakres zmiennej:
    - $x_1 \geq 0$ (innym możliwym ograniczeniem jest $x_2 \leq 4$)
  - ostatecznie, półprosta zdefiniowana jest poprzez układ warunków: $\{ 2x_1+x_2-4=0,\ x_1 \geq 0 \}$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Zapis parametryczny (kombinacja afiniczna z dodatkowym ograniczeniem):
  - $P = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1[0,4]^T+\lambda_2[2,0]^T, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1+\lambda_2=1 \}$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Ogólna zasada tworzenia półprostych:
  - jeżeli $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są dwoma różnymi punktami, to
    - $\{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{w}_1+\lambda_2\mathbf{w}_2,\ \lambda_1\geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1 \}$ definiuje półprostą zaczepioną w punkcie $\mathbf{w}_2$ i przechodzącą przez punkt $\mathbf{w}_1$
    - $\{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{w}_1+\lambda_2\mathbf{w}_2,\ \lambda_2\geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1 \}$ definiuje półprostą zaczepioną w punkcie $\mathbf{w}_1$ i przechodzącą przez punkt $\mathbf{w}_2$
  - a dodatkowo
    - $\{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{w}_1+\lambda_2\mathbf{w}_2,\ \lambda_1+\lambda_2=1 \}$ definiuje prostą przechodzącą przez te punkty
    - $\{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{w}_1+\lambda_2\mathbf{w}_2,\ \lambda_1\geq 0,\ \lambda_2\geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1 \}$ definiuje odcinek o końcach w punktach $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$

Parametryczna reprezentacja zbiorów

- Inne przykłady figur wielościennych w zapisie parametrycznym
  - jeżeli $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$ są trzema niewspółliniowymi punktami, to $\{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{w}_1+\lambda_2\mathbf{w}_2+\lambda_3\mathbf{w}_3,\ \lambda_3\geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \}$ definiuje półpłaszczyznę zaczepioną na prostej przechodzącej przez punkty $\mathbf{w}_1$ oraz $\mathbf{w}_2$ i przechodzącą przez punkt $\mathbf{w}_3$
  - jeżeli $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_4$ są czterema różnymi punktami, z których żadne trzy nie są współliniowe, to $\{ \mathbf{x}: \mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{w}_1+\lambda_2\mathbf{w}_2+\lambda_3\mathbf{w}_3+\lambda_4\mathbf{w}_4,\ \lambda_j\geq 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 =1 \}$ definiuje czworościan o wierzchołkach w punktach $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ i $\mathbf{w}_4$

…

Rozwiązania układów równań liniowych

- Czy istnieją rozwiązania układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$?
  - oczywiście jest to układ równań liniowych
  - nazwa tego układu: jednorodny
- A jeżeli tak, to jakie?
  - rozwiązaniem jest na pewno wektor (obliczenia w pamięci ☺):

    $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
  - inne rozwiązania?

…

Podstawowe charakterystyki macierzy nxn

- Co najlepiej charakteryzuje właściwości macierzy?
  - (różne) charakterystyki macierzy ☺
  - choć macierz nxn jest w pełni charakteryzowana przez n^2 liczb (odpowiednio rozmieszczonych, stanowiących jej elementy), można (wręcz trzeba!) generować jej różne charakterystyki
  - charakterystyki macierzy otrzymuje się więc wyliczając na podstawie tych n^2 liczb jeszcze inne liczby (lub ich zestawy)
    - liczby te charakteryzują całą macierz (bez względu na jej rozmiary) pod <u>wybranymi</u> względami

Podstawowe charakterystyki macierzy nxn

- Charakterystyki macierzy mogą być różnorodnego typu:
  - skalarne
    - charakterystyką jest skalar
    - przykład: wyznacznik
  - wektorowe
    - charakterystyką jest wektor
    - przykład: wektor wartości własnych
  - przestrzeniowe
    - charakterystyką jest pewna przestrzeń (wyznaczona przez zbiór wektorów)
    - przykład: przestrzeń niezmiennicza

Podstawowe charakterystyki macierzy nxn

- Wyznacznik
  - definicja permutacyjna (przez rozwinięcie)
  - pojęcie macierzy osobliwej **A**: istnieje $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dla którego $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$
  - interpretacja geometryczna/fizyczna
  - zastosowanie (macierz przekształcająca):
    - jednoznaczność przekształcenia (znaczenie teoretyczne)
- Rząd
  - definicja oparta na wyznaczniku
  - algorytm obliczania oparty na wyznaczniku
  - zastosowanie (macierz danych):
    - określanie wymiarowości danych (znaczenie teoretyczne)

Podstawowe charakterystyki macierzy nxn

- Promień spektralny
  - definicja r = max $|\lambda_i|$ (gdzie $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N\}$ jest widmem macierzy)
  - potęga macierzy
  - interpretacja
- Ślad
  - definicja
  - operacje macierzowe
  - interpretacja

Podstawowe charakterystyki macierzy nxn

- Nieco inną charakterystyką macierzy jest jej tzw. widmo
  - definicja: zbiór wartości skalarnych
  - interpretacja

Podstawowe charakterystyki macierzy nxn

- Jeszcze innymi charakterystykami macierzy są jej charakterystyki przestrzeniowe
  - definicje
  - interpretacje

…

Wyznacznik macierzy

Uwaga!
W tej części: kilka niekonwencjonalnych oznaczeń!

Wyznacznik macierzy

- Permutacyjna definicja wyznacznika macierzy
  - permutacje, transpozycje, inwersje i ich właściwości

Wyznacznik macierzy

- Niech dane będą:
  - macierz **A** o rozmiarze *N*x*N*
  - zbiór bazowy $B = \{1, 2, ..., N\}$ oraz zbiór jego wszystkich permutacji $PP = \{P_1, P_2, ..., P_M\}$, gdzie $M=N!$
- Wyznacznikiem macierzy **A** nazywamy wartość wyrażenia

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(P_i)} \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot ... a_{Np_N}$$

gdzie:

  - wyrażenie $inv(P_i)$ dla $P_i \in PP$ oznacza liczbę inwersji permutacji P_i
  - $p_1, p_2, ..., p_N$ są kolejnymi elementami permutacji P_i
- Wzór ten ma (prawie) wyłącznie znaczenie teoretyczne

Wyznacznik macierzy

- Ciekawostka dotycząca definicji permutacyjnej
  - obliczenie wyznacznika macierzy nxn metodą permutacyjną wymaga utworzenia n! składników sumy, z których każdy jest iloczynem n czynników
  - oznacza to, że wykonujemy: $n!\cdot(n-1)$ mnożeń oraz $n! - 1$ sumowań
    - po zapisaniu: najdłuższy wzór na świecie ☺
  - np.
    - dla n = 2 to 2 mnożenia i 1 sumowanie
    - dla n = 3 to 12 mnożeń i 5 sumowań
    - ...
    - dla n = 20 to ok. $4{,}6\cdot10^{19}$ mnożeń i ok. $2{,}4\cdot10^{18}$ sumowań
  - praktyczny czas obliczeń w Matlabie (inną metodą): ok. 0,0000196 s

Wyznacznik macierzy

- Popularne aspekty wyznaczników
  - wyznacznik macierzy 2x2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$

Wyznacznik macierzy

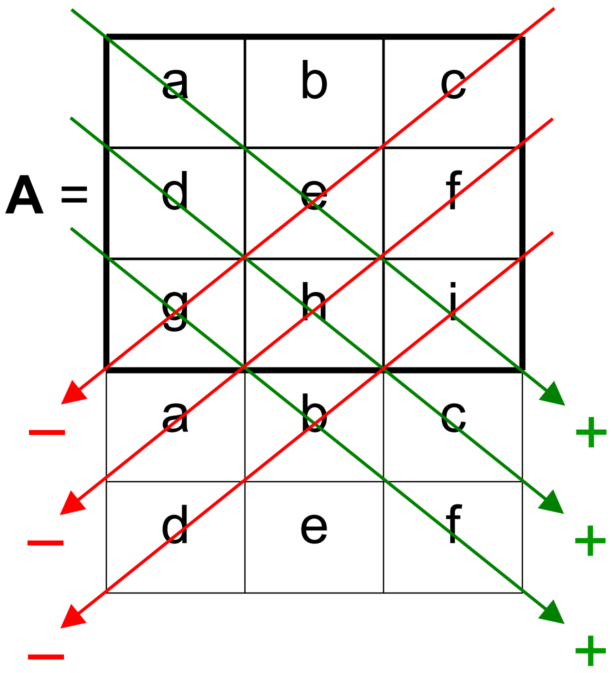
- Popularne aspekty wyznaczników
  - wyznacznik macierzy 3x3

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

det(**A**) = aei + dhc + gbf – ceg – fha – ibd

Wyznacznik macierzy

- Popularne aspekty wyznaczników
  - wyznacznik macierzy 3x3
  - reguła Sarrusa



Wyznacznik macierzy

- Popularne aspekty wyznaczników
  - minory
  - dopełnienia algebraiczne

Wyznacznik macierzy

- Popularne aspekty wyznaczników
  - rozwinięcie Laplace'a (traktowane nieraz jako definicja)
  - jeżeli $\mathbf{A}_{nxn} = [a_{ij}]$ jest macierzą kwadratową i $k \in L = \{1, ..., n\}$, to $\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1..n}(-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(\mathbf{A}_{L\backslash\{k\},L\backslash\{j\}})$
  - wzór ten ma (prawie) wyłącznie znaczenie teoretyczne

Wyznacznik macierzy

- Ciekawostka dotycząca rozwinięcia Laplace'a

  (Michał Góra, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, http://home.agh.edu.pl/~gora/algebra/Wyklad06.pdf)

  ==

  – obliczając wyznacznik macierzy nxn, musimy obliczyć n wyznaczników macierzy (n−1)x(n−1)
    - każdy z nich wymaga obliczenia n−1 wyznaczników macierzy (n−2)x(n−2)
      – każdy z nich wymaga obliczenia n−2 wyznaczników macierzy (n−3)x(n−3)
        » itd.

  – obliczenie wyznacznika macierzy nxn wymaga więc obliczenia n!/2 wyznaczników macierzy 2x2

  – dla n = 20 to ponad 10^{18} wyznaczników macierzy 2x2

  – najszybszy obecnie komputer w Polsce*, wykonujący prawie $4 \cdot 10^{13}$ operacji na sekundę, potrzebowałby na to ponad 126 dni!

  ==

  (*nie wiadomo, o jakim komputerze mowa)

  – praktyczny czas obliczeń w Matlabie (na komputerze wolniejszym od najszybszego w Polsce ☺, ale inną metodą): ok. 0,0000196 s

Wyznacznik macierzy

- Popularne aspekty wyznaczników
  - sformułowanie aksomatyczne (traktowane nieraz jako definicja)
  - wyznacznikiem nazywamy dowolną funkcję fun(**A**) spełniającą:

1) $\mathrm{fun}([\mathbf{a}_1,...,s\cdot\mathbf{x}+z\cdot\mathbf{y},...,\mathbf{a}_N]) = s\cdot\mathrm{fun}([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{x},...,\mathbf{a}_N])+z\cdot\mathrm{fun}([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{y},...,\mathbf{a}_N])$

2) $\mathrm{fun}([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{x},...,\mathbf{x},...,\mathbf{a}_N]) = 0$

3) $\mathrm{fun}(\mathbf{I}) = 1$

(jak się okazuje: istnieje jedna taka funkcja, jest nią det(**A**))

Wyznacznik macierzy

- Wyznaczniki macierzy specjalnych
  - macierzy zerowej:
    - det(**O**) = 0
  - wyznacznik macierzy stałych (np. jedynkowej):
    - det(**E**) = 0
  - wyznacznik macierzy diagonalnej:
    - $\det(\mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, \ldots, s_{nn})) = s_{11} \cdot s_{22} \cdot \ldots \cdot s_{nn}$
  - wyznacznik macierzy jednostkowej:
    - det(**I**) = 1

Wyznacznik macierzy

- Wyznaczniki macierzy specjalnych c.d.:
  - wyznacznik macierzy trójkątnej:
    - $\det(\mathbf{T}) = s_{11} \cdot s_{22} \cdot \ldots \cdot s_{nn}$ (iloczyn elementów głównej przekątnej)
  - wyznacznik macierzy ortogonalnej:
    - $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$
    - uzasadnienie:
      - macierz ortogonalna spełnia zależność $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$, więc $\det(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})=\det(\mathbf{I})=1$
      - jednocześnie $\det(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})=\det(\mathbf{Q}^T)\cdot\det(\mathbf{Q})=\det(\mathbf{Q})\cdot\det(\mathbf{Q})=(\det(\mathbf{Q}))^2$, ponieważ dla każdej macierzy kwadratowej $\det(\mathbf{A}^T)=\det(\mathbf{A})$
      - czyli $(\det(\mathbf{Q}))^2=1$, a z tego wynika, że $\det(\mathbf{Q})=\pm 1$

…

Wyznacznik macierzy

- Wyznacznik jako funkcja macierzy
  - wyznacznik jest funkcją (całej) macierzy
    - tak traktowany wyznacznik jest funkcją postaci:

$$\mathbf{A}_{N\times N} \to R$$

gdzie $\mathbf{A}_{N\times N}$ to zbiór wszystkich macierzy o rozmiarach $N \times N$

Wyznacznik macierzy

- Wyznacznik jako funkcja wszystkich wartości macierzy
  - z innej strony wartość wyznacznika macierzy o rozmiarach *N*x*N* zależy od N^2 różnych wartości (elementów macierzy), może więc być traktowany jako funkcja wszystkich elementów macierzy
    - tak traktowany wyznacznik jest funkcją postaci:

$$\overbrace{R \times R \times R \times R \times \ldots \times R}^{N^2\ razy} \to R$$

gdzie R – zbiór liczb rzeczywistych

Wyznacznik macierzy

- Wyznacznik jako funkcja linii (kolumn lub wierszy) macierzy
  - z pewnych względów możliwe jest jednak podejście pośrednie: traktowanie wyznacznika jako funkcji kolumn macierzy
    - analogicznie: jako funkcję wierszy macierzy
    - tak traktowany wyznacznik jest funkcją postaci:

$$\overbrace{\mathbf{W}_N \times \mathbf{W}_N \times \ldots \times \mathbf{W}_N}^{N\ razy} \to R$$

gdzie $\mathbf{W}_N$ to zbiór wszystkich wektorów o rozmiarze N

- Taka interpretacja pozwala na wyjaśnienie najważniejszych właściwości wyznacznika

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #1

  det([$\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{a}_i$,...,$\mathbf{a}_j$,...,$\mathbf{a}_N$]) = –det([$\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{a}_j$,...,$\mathbf{a}_i$,...,$\mathbf{a}_N$])

  – zamiana miejscami dowolnych kolumn $\mathbf{a}_i$ oraz $\mathbf{a}_j$ powoduje zmianę znaku wyznacznika na przeciwny

  - uzasadnienie:

    – wyznacznik macierzy [$\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{a}_i$,...,$\mathbf{a}_j$,...,$\mathbf{a}_N$]:

$$\sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot a_{ip_i} \cdot \ldots \cdot a_{jp_j} \cdot \ldots a_{Np_N}$$

    – wyznacznik macierzy [$\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{a}_j$,...,$\mathbf{a}_i$,...,$\mathbf{a}_N$]:

$$\sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,\dots,p_j,\dots,p_i,\dots,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot a_{ip_j} \cdot \ldots \cdot a_{jp_i} \cdot \ldots a_{Np_N}$$

    – wszystkie elementy sumy różnią się:

      » kolejnością mnożonych elementów a_{kl} (co nie wpływa na wartość iloczynu)

      » kolejnością elementów p_i i p_j w permutacji, co skutkuje zmianą znaku wyrażenia określającego znak iloczynu na przeciwny

    – wniosek: znak wszystkich elementów sumy jest przeciwny

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #1a

  jeżeli $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_j$

  to $\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_j,...,\mathbf{a}_N]) = 0$

  – wyznacznik macierzy, w której dwie kolumny są sobie równe wynosi zero

    - uzasadnienie: niech

      $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_j$

      oraz

      $d_1:=\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_j,...,\mathbf{a}_N])$

      $d_2:=\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_j,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_N])$

      – wtedy $d_1=d_2$ (bo $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_j$) i jednocześnie $d_1=-d_2$ (właściwość #1)

      – oznacza to, że $d_1=-d_1$ a więc musi być $d_1=0$ (czyli także $d_2=0$)

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #2

  det([$\mathbf{a}_1$,...,s·$\mathbf{a}_i$,...,$\mathbf{a}_N$]) = s·det([$\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{a}_i$,...,$\mathbf{a}_N$])

  – wyznacznik macierzy, w której kolumnę $\mathbf{a}_i$ przemnożono przez skalar s jest równy wyznacznikowi oryginalnej macierzy przemnożonemu przez s

    - uzasadnienie:

      – wyznacznik macierzy [$\mathbf{a}_1$,...,s·$\mathbf{a}_i$,...,$\mathbf{a}_N$]:

$$\sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,...,p_i,...,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot ... \cdot s \cdot a_{ip_i} \cdot ... a_{Np_N} =$$

$$= s \cdot \sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,...,p_i,...,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot ... \cdot a_{ip_i} \cdot ... a_{Np_N}$$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #2a

  jeżeli $\mathbf{a}_i = s \cdot \mathbf{a}_j$
  to $\det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N]) = 0$

  – wyznacznik macierzy, w której kolumna $\mathbf{a}_i$ jest proporcjonalna do kolumny $\mathbf{a}_j$ (tzn. $\mathbf{a}_i = s \cdot \mathbf{a}_j$) wynosi 0

    - uzasadnienie: niech

      $\mathbf{a}_i = s \cdot \mathbf{a}_j$

      oraz

      $d := \det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N])$

      – wtedy $d = s \cdot \det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N])$, ale $\det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N]) = 0$ na mocy właściwości #1a

      – w rezultacie $d = s \cdot 0 = 0$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #3

  jeżeli $\mathbf{a}_i = \mathbf{x} + \mathbf{y}$

  to $\det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_N]) = \det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_N]) + \det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{a}_N])$

  – wyznacznik macierzy, w której kolumna $\mathbf{a}_i$ jest sumą wektorów **x** i **y** jest równy sumie wyznaczników powstałych z macierzy oryginalnej przez zastąpienie kolumny $\mathbf{a}_i$ wektorem **x** (w jednym) i **y** (w drugim)

    - uzasadnienie

      – wyznacznik macierzy $[\mathbf{a}_1, \ldots, (\mathbf{x}+\mathbf{y})_i, \ldots, \mathbf{a}_N]$:

$$\sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot (x_{ip_i} + y_{ip_i}) \cdot \ldots a_{Np_N} =$$

$$= \sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot x_{ip_i} \cdot \ldots a_{Np_N} +$$

$$+ \sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot \ldots \cdot y_{ip_i} \cdot \ldots a_{Np_N}$$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #4

  det([$\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{0}$,...,$\mathbf{a}_N$]) = 0

  – wyznacznik macierzy, w której kolumna $\mathbf{a}_i$ jest wektorem zerowym wynosi 0

    - uzasadnienie:

      – wyznacznik macierzy [$\mathbf{a}_1$,...,$\mathbf{0}$,...,$\mathbf{a}_N$]:

$$\sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,...,p_i,...,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot ... \cdot 0 \cdot ... a_{Np_N} = 0$$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #5

  jeżeli $\mathbf{a}_i=\mathbf{x}+s\cdot\mathbf{a}_j$

  to $\det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N]) = \det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{x},\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N])$

  – wyznacznik macierzy, w której do kolumny $\mathbf{a}_i$ dodano pomnożoną przez dowolny skalar s kolumnę $\mathbf{a}_j$ jest równy wyznacznikowi macierzy oryginalnej

    - uzasadnienie: niech

      $\mathbf{a}_i=\mathbf{x}+s\cdot\mathbf{a}_j$

      oraz

      $d:=\det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N])$

      – wtedy

$$
\begin{aligned}
d &= \det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{x}+s\cdot\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N]) = \\
&= \det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{x},\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N])+\det([\mathbf{a}_1,\dots,s\cdot\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N]) = \\
&= \det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{x},\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N])+s\cdot\det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N]) = \\
&= \det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{x},\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N])+s\cdot 0 = \\
&= \det([\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{x},\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_N])
\end{aligned}
$$

      (na mocy właściwości #3 i #2 i #1a)

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #5a

  jeżeli $\mathbf{a}_i=\mathbf{x}+s_k\cdot\mathbf{a}_k+s_l\cdot\mathbf{a}_l+...+s_p\cdot\mathbf{a}_p$
  to $\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_N]) = \det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{x},...,\mathbf{a}_N])$

  – wyznacznik macierzy, w której do kolumny $\mathbf{a}_i$ dodano kombinację liniową kolumn $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_l$, ..., $\mathbf{a}_p$ jest równy wyznacznikowi macierzy oryginalnej

  - uzasadnienie: niech

    $\mathbf{a}_i=\mathbf{x}+s_k\cdot\mathbf{a}_k+s_l\cdot\mathbf{a}_l+...+s_p\cdot\mathbf{a}_p$

    oraz

    $d:=\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_N])$

    – wtedy $d = \det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{x}+s_k\cdot\mathbf{a}_k+s_l\cdot\mathbf{a}_l+...+s_p\cdot\mathbf{a}_p,...,\mathbf{a}_j,...,\mathbf{a}_N]) =$
    $= \det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{x},...,,\mathbf{a}_N])+s_k\cdot\det([\mathbf{a}_1,...,s\cdot\mathbf{a}_k,...,\mathbf{a}_k,...,\mathbf{a}_N])+$
    $+s_l\cdot\det([\mathbf{a}_1,...,s\cdot\mathbf{a}_l,...,\mathbf{a}_l,...,\mathbf{a}_N])+...+s_p\cdot\det([\mathbf{a}_1,...,s\cdot\mathbf{a}_p,...,\mathbf{a}_p,...,\mathbf{a}_N]) =$
    $= \det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{x},...,,\mathbf{a}_N])+s_k\cdot 0+s_l\cdot 0+...+s_p\cdot 0 =$
    $= \det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{x},...,,\mathbf{a}_N])$

    (na mocy właściwości #5)

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #6

  jeżeli $\mathbf{a}_i = s_k \cdot \mathbf{a}_k + s_l \cdot \mathbf{a}_l + \ldots + s_p \cdot \mathbf{a}_p$
  to $\det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_N]) = 0$

  – wyznacznik macierzy, w której do kolumna $\mathbf{a}_i$ jest kombinacją liniową kolumn $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_l$, ..., $\mathbf{a}_p$ jest równy 0

    - uzasadnienie: niech

      $\mathbf{a}_i = s_k \cdot \mathbf{a}_k + s_l \cdot \mathbf{a}_l + \ldots + s_p \cdot \mathbf{a}_p$

      oraz

      $d := \det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_N])$

      – wtedy $d = \det([\mathbf{a}_1, \ldots, s_k \cdot \mathbf{a}_k + s_l \cdot \mathbf{a}_l + \ldots + s_p \cdot \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N]) =$
      $\det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{0} + s_k \cdot \mathbf{a}_k + s_l \cdot \mathbf{a}_l + \ldots + s_p \cdot \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N]) =$
      $= \det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{0}, \ldots, , \mathbf{a}_N]) + s_k \cdot \det([\mathbf{a}_1, \ldots, s \cdot \mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_N]) +$
      $+ s_l \cdot \det([\mathbf{a}_1, \ldots, s \cdot \mathbf{a}_l, \ldots, \mathbf{a}_l, \ldots, \mathbf{a}_N]) + \ldots + s_p \cdot \det([\mathbf{a}_1, \ldots, s \cdot \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_p, \ldots, \mathbf{a}_N]) =$
      $= 0 + s_k \cdot 0 + s_l \cdot 0 + \ldots + s_p \cdot 0 =$
      $= 0$

      (na mocy właściwości #5a i #4)

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #7

  det(**A**) = det(**A**^{T})

  – wyznacznik macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi macierzy oryginalnej

  - uzasadnienie:

    – wyznacznik macierzy **A**

$$\sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<p_1,...,p_i,...,p_j,...,p_N>)} \cdot a_{1p_1} \cdot ... \cdot a_{ip_i} \cdot ... \cdot a_{jp_j} \cdot ... a_{Np_N}$$

    – wyznacznik macierzy **A**^{T}

$$\sum_{P_i \in PP} (-1)^{inv(<q_1,...,q_j,...,q_i,...,q_N>)} \cdot a_{q_1 1} \cdot ... \cdot a_{q_j i} \cdot ... \cdot a_{q_i j} \cdot ... a_{q_N N}$$

    – drugie wyrażenia tworzy się z pierwszych dokonując transpozycji elementów a_{ij} w taki sposób, aby drugie wskaźniki utworzyły permutację <1, 2, ..., N>, wtedy wskaźniki pierwsze utworzą permutację odwrotną do początkowej permutacji wskaźników pierwszych

      » ponieważ wskaźniki drugie ulegają przekształceniu z permutacji f na permutację P_0, to jednocześnie permutacja P_0 ulega przekształceniu na f^{-1}

    – ponieważ dla każdej permutacji f zachodzi inv(f)=inv(f^{-1}) to wartości wyrażeń definiujących znaki składników sumy pozostaną takie same

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #1 – przykład

  $\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_j,...,\mathbf{a}_N]) = -\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_j,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_N])$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$ $\det(\mathbf{B}) = bc - ad = -(ad - bc) = -\det(\mathbf{A})$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #1a – przykład

  jeżeli $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_j$
  to $\det([\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_j,\ldots,\mathbf{a}_N])=0$

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

  $\det(\mathbf{A}) = ab - ab = 0$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #2 – przykład

  $\det([\mathbf{a}_1,...,s\cdot\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_N])=s\cdot\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_i,...,\mathbf{a}_N])$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} s\cdot a & c \\ s\cdot b & d \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = ad\text{–}bc$

$\det(\mathbf{B}) = sad\text{–}sbc = s(ad\text{–}bc) = s\cdot\det(\mathbf{A})$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #2a/#6 – przykład

  jeżeli $\mathbf{a}_i = s \cdot \mathbf{a}_j$

  to $\det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N]) = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s \cdot a & a \\ s \cdot b & b \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = sab - sba = 0$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #3 – przykład

  jeżeli $\mathbf{a}_i=\mathbf{x}+\mathbf{y}$

  to $\det([\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_N])=\det([\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{x},\ldots,\mathbf{a}_N])+\det([\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{y},\ldots,\mathbf{a}_N])$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} u & c \\ w & d \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a+u & c \\ b+w & d \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = ad-cb \quad \det(\mathbf{B}) = ud-cw$

$$\det(\mathbf{C}) = (a+u)d-c(b+w) = ad+ud-cb-cw = ad-cb+ud-cw = \\ = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #4 – przykład

  $\det([\mathbf{a}_1,...,\mathbf{0},...,\mathbf{a}_N])=0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = a \cdot 0 - 0 \cdot b = 0$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #5 – przykład

  jeżeli $\mathbf{a}_i = \mathbf{x} + s \cdot \mathbf{a}_j$

  to $\det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N]) = \det([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_N])$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$

$\det(\mathbf{B}) = ad - cb = ad - bc = \det(\mathbf{A})$

Wyznacznik macierzy

- Właściwość #7 – przykład

  jeżeli $\mathbf{a}_i = s_k \cdot \mathbf{a}_k + s_l \cdot \mathbf{a}_l + \ldots + s_p \cdot \mathbf{a}_p$
  to $\det([\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i,\ldots,\mathbf{a}_N]) = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a+s\cdot c & c \\ b+s\cdot d & d \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$

$\det(\mathbf{B}) = (a+sc)d - c(b+sd) = ad + scd - cb - csd = ad - cb + scd - csd =$

$= ad - cb = \det(\mathbf{A})$

…

Wyznacznik macierzy

- Pytanie (iloczyn macierzy i skalara):
  - ile wynosi det(s·**A**)?
  - ile wynosi det(**A**·s)?
- Odpowiedź:

  s^n·det(**A**)?

  (w obu przypadkach)

Wyznacznik macierzy

- Wyznacznik iloczynu macierzy i skalara
  - uzasadnienie
  - niech $\mathbf{A}_{NxN}=[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_N]$, wtedy:

$$\begin{aligned}
\det(s\cdot\mathbf{A}) &= \det(s\cdot[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_N]) = \det([s\cdot\mathbf{k}_1, s\cdot\mathbf{k}_2, ..., s\cdot\mathbf{k}_N]) = \\
&= s\cdot\det([\mathbf{k}_1, s\cdot\mathbf{k}_2, ..., s\cdot\mathbf{k}_N]) = s\cdot s\cdot\det([\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., s\cdot\mathbf{k}_N]) = \\
&= s\cdot s\cdot ...\cdot s\cdot\det([\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_N]) = s^n\cdot\det([\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_N]) = \\
&= s^n\cdot\det(\mathbf{A})
\end{aligned}$$

  - analogicznie dla $\det(\mathbf{A}\cdot s)$

Wyznacznik macierzy

- Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych (tych samych rozmiarów)

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

Wyznacznik macierzy

- Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, to $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2 = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$
  - uzasadnienie
  - *jeżeli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są dowolnymi macierzami kwadratowymi, to $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ [ref]*
  - *jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, to $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$ [ref]*
  - a więc

    $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2$

    $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2$
  - wniosek: $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2 = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$

…

Wyznacznik macierzy

- Wyznacznik w rozwiązywaniu równań
  - twierdzenie Kronecker’a-Capelli’ego
  - twierdzenie (wzór) Cramera

Wzory Cramera

- Jeżeli $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n]$ jest macierzą o wyznaczniku niezerowym a $\mathbf{b}$ jest dowolnym wektorem, to wektor $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^T$, gdzie $x_i = \det(\mathbf{A}_{[i]})/\det(\mathbf{A})$ oraz $\mathbf{A}_{[i]} = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]$, jest rozwiązaniem układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
  - uwagi
  - wzór Cramera
  - macierz $\mathbf{A}_{[i]}$ powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ poprzez zastapienie kolumny i-tej wektorem $\mathbf{b}$

Wzory Cramera

- Co wzór Cramera „mówi” o rozwiązaniu układu jednorodnego?
  - czyli: dla jakich $\mathbf{x}$ zachodzi $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$?

Wzory Cramera

- Rozwiązanie
  - zakładamy, że $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
  - obliczamy

  $x_1 = \det([\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) = \det([\mathbf{0}, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) = 0$

  $x_2 = \det([\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) = \det([\mathbf{a}_2, \mathbf{0}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) = 0$

  …
  - ogólnie

  $x_i = \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$

  $= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{0}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$

  $= 0$
- Wniosek: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Wzory Cramera

- Co wzór Cramera „mówi” o prawostronnym „wycinaniu” kolumn z macierzy?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Wzory Cramera

- Co wzór Cramera „mówi” o prawostronnym „wycinaniu” kolumn z macierzy?
  - czyli: dla jakich **x** zachodzi $[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$?

Wzory Cramera

- Rozwiązanie
  - zakładamy, że $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
  - obliczamy

  $x_1 = \det([\mathbf{b}, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$
  $= \det([\mathbf{a}_i, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$
  $= 0$

  $x_2 = ... = 0$

  …
  - ale

  $x_i = \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$
  $= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$
  $= \det(\mathbf{A})/\det(\mathbf{A}) =$
  $= 1$
  - podsumowując: wszędzie zera, ale przy i jedynka
- Wniosek: $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$

Wzory Cramera

- Co wzór Cramera „mówi" o sumowaniu dwóch kolumn?
  - czyli: dla jakich **x** zachodzi
    $[\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., , \mathbf{a}_{i-j}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_n]\mathbf{x} = \mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j$?

Wzory Cramera

- Rozwiązanie
  - zakładamy, że det(**A**) $\neq 0$
  - obliczamy

  x_1 = ... = 0

  x_2 = ... = 0

  …

Wzory Cramera

- Rozwiązanie
  - zakładamy, że $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

    …
  - oraz

x_i = $\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., , \mathbf{a}_{i-j}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$

$= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, ..., , \mathbf{a}_{i-j}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$

$= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., , \mathbf{a}_{i-j}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) +$

$+ \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, ..., , \mathbf{a}_{i-j}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$

$= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) +$
$+ 0 =$
$= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n])/\det(\mathbf{A}) =$
$= \det(\mathbf{A})/\det(\mathbf{A}) =$

$= 1$

  - podsumowując: wszędzie zera, ale przy i oraz j jedynki
- Wniosek: $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j$

Wzory Cramera

- Jeżeli $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n]$ jest macierzą o wyznaczniku niezerowym...
  - ale dlaczego działa cały ten wzór?

Wzory Cramera

- Jeżeli $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n]$ jest macierzą o wyznaczniku niezerowym...
  - weryfikacja

  zał.: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Wzory Cramera

- Jeżeli $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n]$ jest macierzą o wyznaczniku niezerowym...
  - weryfikacja

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}_{[i]}) &= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) = \\
&= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{Ax}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) = \\
&= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_1 x_1 + ... + \mathbf{a}_i x_i + ... + \mathbf{a}_n x_n, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) = \\
&= \quad \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_1 x_1, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) + \\
&+ ... + \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i x_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) + ... + \\
&+ \quad \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_n x_n, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) = \\
&= \quad 0 + \\
&+ ... + \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i x_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) + ... + \\
&+ \quad 0 = \\
&= \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i x_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) = \\
&= x_i \det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_n]) = \\
&= x_i \det(\mathbf{A})
\end{aligned}
$$

  - czyli: $\det(\mathbf{A}_{[i]})/\det(\mathbf{A}) = x_i$
  - działa, gdy $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

…