…

Robert Susmaga

Instytut Informatyki

ul. Piotrowo 2

Poznań

<u>kontakt mail'owy</u>

Robert.Susmaga@CS.PUT.Poznan.PL

<u>kontakt osobisty</u>

Centrum Wykładowe, „blok informatyki", pok. 7

Wyłączenie odpowiedzialności

Prezentowane materiały, będące dodatkiem pomocniczym do wykładów, z konieczności fragmentarycznym i niedopracowanym, należy wykorzystywać z pełną świadomością faktu, że mogą nie być pozbawione przypadkowych błędów, braków, wypaczeń i przeinaczeń :-)

Autor

...

Macierz -- definicja

- Definicja macierzy:
  - teoretycznie: macierz to funkcja rzeczywista (lub zespolona) dwóch zmiennych całkowitych, i oraz j:
    X:=[x_{ij}], i=1..m, j=1..n
  - praktycznie: dwuwymiarowa tablica liczb rzeczywistych (lub zespolonych) o rozmiarach mxn

Macierz -- definicja

- Macierz a skalar
  - w pewnych kontekstach macierz przeciwstawia się skalarowi, czyli pojedynczej liczbie (rzeczywistej lub zespolonej)
  - nie przeczy to faktowi, że skalar można traktować jako szczególny przypadek macierzy (o rozmiarach 1x1)
  - przekształcenie danych/wyników z postaci macierzowej do skalarnej jest jednak często bardzo pożądane (z względu na ułatwioną interpretację wyników skalarnych)

Macierz w języku

- „Słownik wyrazów obcych PWN”

  macierz
  1. podn. «ojczyzna»
  2. «zespół elementów, np. liczb lub funkcji, ustawionych w prostokątną tablicę o m wierszach i n kolumnach»
  3. «słowo występujące w nazwach dawnych polskich stowarzyszeń oświatowych»
  4. daw. «matka»

Macierz w Polsce

- „Wikipedia”

  Macierz – wieś w Polsce położona w województwie zachodniopomorskim, w powiecie gryfińskim, w gminie Moryń. W latach 1975-1998 miejscowość administracyjnie należała do województwa szczecińskiego.

…

Macierz w zapisie zadań

- W algebrze macierze są często stosowane w zapisie różnorakich układów równań/nierówności
- Np. układ nierówności zapisany skalarnie:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 4$$
$$3x_1 + 2x_2 - 1x_3 \leq 2$$

może być wyrażony w postaci macierzowej:

  - $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

- W zapisie macierzowym wykorzystano macierz **A** oraz wektory (szczególne przypadki macierzy) **x** i **b**

Macierz w zapisie zadań

- Zapis macierzowy (zasadniczo równoważny zapisowi skalarnemu) pozwala skupić uwagę na postaci samej zależności (a nie rozlicznych wartościach w niej występujących)
- Zapis macierzowy jest szczególnie przydatny do zapisywania bardzo ogólnych praw i zależności oraz przeprowadzania ogólnych przekształceń danych
- W praktyce – najczęstsze wykorzystanie: wyprowadzanie wzorów

Macierz w zapisie zadań

- Np. w teorii programowania liniowego (PL) dla pewnych zadań PL (zwanych prymalnymi) definiuje się pewne inne zadania PL, tzw. symetryczne zadania dualne
  - Zadanie dualne definiuje się zawsze w oparciu o te same dane, które jednakże zmieniają swoje role:
    - współczynniki funkcji celu zadania prymalnego stają się prawymi stronami ograniczeń zadania dualnego a współczynniki funkcji celu zadania dualnego stają się prawymi stronami ograniczeń zadania prymalnego, itd.
  - Najlepsza metoda opisu – zapis macierzowy:

prymalny:	dualny:
max $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$	min $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$
p.o. $\mathbf{Ax}\le\mathbf{b}$	p.o. $\mathbf{A}^T\mathbf{y}\ge\mathbf{c}$
$\mathbf{x}\ge\mathbf{0}$	$\mathbf{y}\ge\mathbf{0}$

Macierz w zapisie zadań

- Rozważmy przykładowy układ równań:

  $2x_1 – 2x_2 = b_1$

  $2x_1 \qquad = b_2$

  – w którym b_1 i b_2 są dowolnymi parametrami
- Układ ten ma rozwiązanie skalarne:

  $x_1 = 0.5b_2$

  $x_2 = –0.5b_1 + 0.5b_2$
- Rozwiązanie to może być:
  – łatwo sprawdzone (przez podstawienie):

  $2(0.5b_2) – 2(–0.5b_1 + 0.5b_2) = b_2 + b_1 – b_2 = b_1$

  $2(0.5b_2) = b_2$

  – (trochę mniej) łatwo znalezione (wyprowadzone)

Macierz w zapisie zadań

- W jeszcze ogólniejszym przypadku można rozważyć układ:

  (1) $a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$

  (2) $a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$

  – w którym a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 i b_2 są dowolnymi parametrami

- Jego rozwiązanie skalarne można wyprowadzić następująco:

  (1) $a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$

  (1) $a_{11}x_1=b_1–a_{12}x_2$

  (1) $x_1=(b_1–a_{12}x_2)/a_{11}=b_1/a_{11}–a_{12}/a_{11}x_2$

Macierz w zapisie zadań

- Rozwiązanie ogólne c.d.
  – wyliczone z (1) x_1 można zastosować w (2):

    (2) $a_{21}(b_1/a_{11}–a_{12}/a_{11}x_2)+a_{22}x_2=b_2$

    (2) $a_{21}b_1/a_{11}–a_{21}a_{12}/a_{11}x_2+a_{22}x_2=b_2$

    (2) $(a_{22}–a_{21}a_{12}/a_{11})x_2=b_2–a_{21}b_1/a_{11}$

    (2) $x_2=(b_2–a_{21}b_1/a_{11})/(a_{22}–a_{21}a_{12}/a_{11})=(a_{11}b_2–a_{21}b_1)/(a_{11}a_{22}–a_{21}a_{12})$

  – co pozwala na ostateczne ustalenie wartości x_1:

    (1) $x_1= (b_1–a_{12}x_2)/a_{11}=b_1/a_{11}–a_{12}/a_{11}x_2 =$

    $= b_1/a_{11}–a_{12}/a_{11}(a_{11}b_2–a_{21}b_1)/(a_{11}a_{22}–a_{21}a_{12}) =$

    $= [(a_{11}a_{22}b_1–a_{21}a_{12}b_1)–(a_{12}a_{11}b_2–a_{12}a_{21}b_1)]/[(a_{11}a_{22}–a_{21}a_{12})a_{11}]=$

    $= (a_{11}a_{22}b_1–a_{12}a_{11}b_2)/[(a_{11}a_{22}–a_{21}a_{12})a_{11}] =$

    $= (a_{22}b_1–a_{12}b_2)/(a_{11}a_{22}–a_{21}a_{12})$

Macierz w zapisie zadań

- Rozwiązanie ogólne c.d.
  - ostateczne rozwiązanie

    $x_1 = (a_{22}b_1 – a_{12}b_2)/(a_{11}a_{22} – a_{21}a_{12})$

    $x_2 = (a_{11}b_2 – a_{21}b_1)/(a_{11}a_{22} – a_{21}a_{12})$

    (założenie: $(a_{11}a_{22} – a_{21}a_{12}) \neq 0$)
- Można się domyślać, że w przypadku układu z większą liczbą równań/zmiennych rozwiązanie ogólne byłoby jeszcze bardziej zawiłe
- Wniosek:
  - postaci skalarne nie nadają się do przedstawiania ogólnych rozwiązań układów równań
  - właściwa droga: rozwiązania macierzowe

Macierz w zapisie zadań

- Poprzedni przykład w zapisie macierzowym:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

- Na poziomie macierzowym układ ten może być łatwo przekształcony do postaci ujawniającej jego rozwiązanie

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ // $\mathbf{A}^{-1}$ (zał.: $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa)

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ ($\mathbf{I}$: macierz jednostkowa)

$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Macierz w zapisie zadań

- W szczególnym przypadku:
  - układ równań:

    $2x_1 - 2x_2 = b_1$

    $2x_1 \qquad\quad = b_2$
  - można zapisać jako:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ gdzie } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

  - a jego rozwiązanie jako:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5b_2 \\ -0.5b_1 + 0.5b_2 \end{bmatrix}$$

…

Macierz -- transponowanie

- Ze względu na wymienne traktowanie wierszy i kolumn macierzy jedną z podstawowych (nienumerycznych) operacji macierzowych jest tzw. transponowanie (transpozycja) macierzy
- Oznaczenie:
  - **X** – macierz oryginalna
  - $\mathbf{X}^T$ – macierz transponowana
- Definicja macierzy transponowanej:
  - teoretycznie: gdy $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, i=1..m, j=1..n, to $\mathbf{X}^T = [x_{ji}]$
  - praktycznie: zamiana rolami kolumn i wierszy (zapisanie wierszy w kolumnach a kolumn w wierszach)

Macierz -- transponowanie

- Macierz o wymiarach 3x4:

X

7	4	–2	4
4	5	5	1
–1	3	2	0

(**X** transponowana)

$\mathbf{X}^T$

7	4	–1
4	5	3
–2	5	2
4	1	0

($\mathbf{X}^T$ transponowana)

$(\mathbf{X}^T)^T = \mathbf{X}$

7	4	–2	4
4	5	5	1
–1	3	2	0

Macierz -- transponowanie

- Transponowanie nie powinno być mylone z obrotem!
  (nieco podobnym lecz rzadko wykorzystywanym przekształceniem)

Macierz -- transponowanie

- Macierz o wymiarach 3x2 i jej obroty (w prawo!)

X (obrócona o 0°**)**

7	1
–2	5
4	5

X obrócona o 90°

4	–2	7
5	5	1

X obrócona o 180°

5	4
5	–2
1	7

X obrócona o 270°

1	5	5
7	–2	4

X obrócona o 360° = **X**

7	1
–2	5
4	5

Macierz -- transponowanie

- Macierz o wymiarach 3x2: obroty a transpozycja

X

7	1
–2	5
4	5

$\mathbf{X}^T$ (transponowana)

7	–2	4
1	5	5

X obrócona o 90°

4	–2	7
5	5	1

X obrócona o 270°

1	5	5
7	–2	4

Macierz -- transponowanie

- Oczywiście dla każdej macierzy $\mathbf{X}$ zachodzi: $(\mathbf{X}^T)^T = \mathbf{X}$, natomiast niekoniecznie $\mathbf{X}^T = \mathbf{X}$
- Macierze spełniające warunek $\mathbf{X}^T = \mathbf{X}$ będą nazywane symetrycznymi
- Warunek $\mathbf{X}^T = \mathbf{X}$
  - implikuje jednoczesną równość rozmiarów (kwadratowość) oraz symetryczność elementów (względem przekątnej)

Macierz -- transponowanie

- Przekątna (pełna nazwa: główna przekątna, rzadziej: /główna/ diagonala) macierzy $\mathbf{A}_{mxn}$
  - „zaczyna się” w lewym górnym narożniku
  - „kończy się”
    - przy dolnej krawędzi, gdy $m < n$
    - w prawym dolnym narożniku, gdy $m = n$
    - przy prawej krawędzi, gdy $m > n$

Macierz -- transponowanie

- Przekątne macierzy o różnych wymiarach

$\mathbf{X}_{3x4}$

7	4	-2	4
4	5	5	1
–1	3	2	0

$\mathbf{X}_{3x3}$

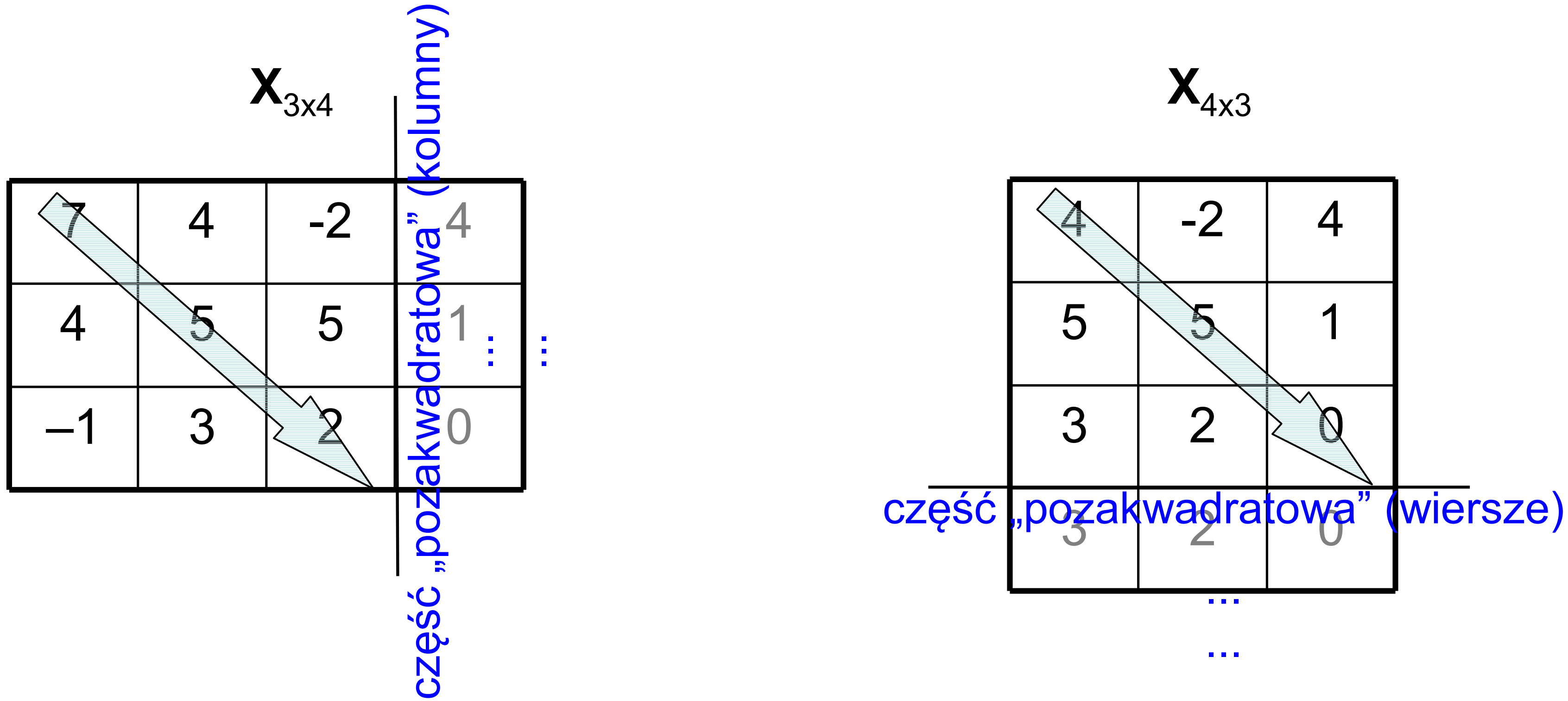
2	4	1
–4	0	–3
9	5	2

$\mathbf{X}_{4x3}$

4	-2	4
5	5	1
3	2	0
3	2	0

Macierz -- transponowanie

- Przekątne macierzy o różnych wymiarach



Macierz -- transponowanie

- Przeciwprzekątna (inna nazwa: druga przekątna, rzadziej: przeciwdiagonala) macierzy kwadratowej łączy
  - prawy górny narożnik
  - lewy dolny narożnik

Macierz -- transponowanie

- Przeciwprzekątna macierzy kwadratowej

$\mathbf{X}_{3x3}$

2	4	1
–4	0	–3
9	5	2

…

Wektor

- Szczególnymi przypadkami macierzy są wektory
  - wektor kolumnowy (krótko: wektor), np.:
    - $\mathbf{x}=\begin{array}{|c|}\hline 21 \\ \hline -3 \\ \hline 12 \\ \hline \end{array}$
  - wektor wierszowy (powstały wskutek transponowanie wektora kolumnowego), np.:
    - $\mathbf{x}^T=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 21 & -3 & 12 \\ \hline \end{array}$

Wektor

- Rozmiar wektora: liczba jego elementów (np. n)
  - w zapisie macierzowym:
    - kolumnowego: nx1
    - wierszowego: 1xn
- Uwaga:
  w przypadku wektorów transponowanie
  jeszcze bardziej przypomina obrót!

Macierz

- (Wzorowany na systemie Matlab) (jedno-)wierszowy zapis macierzy (pozwalający na zapisywanie macierzy w jednym wierszu tekstu)
  - ograniczniki: nawiasy kwadratowe
  - separatory elementów wiersza: spacje/przecinki
  - separatory wierszy: średniki

Macierz

- Macierz o wymiarach 3x2: zapis wierszowy

X

7	1
–2	5
4	5

X = [7 1 ; –2   5 ; 4   5]

Y

2	–1	7
0	5	1

Y = [2 –1   7 ; 0   5   1]

Podmacierze/wektory jako składowe macierzy

- Dowolną macierz można rozłożyć na elementy także będące macierzami (tzw. podmacierze)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{a}_{12}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{11} = [\ 1\ \ 2\ ;\ 4\ \ 5\ ]$ (macierz 2x2)

$\mathbf{a}_{12} = [\ 3\ ;\ 6\ ]$ (wektor 2x1, kolumnowy)

$(\mathbf{a}_{21})^T = [\ 7\ \ 8\ ]$ (wektor 1x2, wierszowy)

$\mathbf{a}_{22} = [\ 9\ ]$ (macierz 1x1)

Podmacierze/wektory jako składowe macierzy

- W szczególności, dowolną macierz można wyrazić w postaci zestawu kolumn względnie wierszy
  - np. dla macierzy $\mathbf{A}_{3\times 4}$:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_3 & \mathbf{k}_4 \end{array}\right] \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}=\left[\begin{array}{c} (\mathbf{w}_1)^T \\ \hline (\mathbf{w}_2)^T \\ \hline (\mathbf{w}_3)^T \end{array}\right]$$

  - w zapisie uproszczonym:

    $\mathbf{A} = [\ \mathbf{k}_1\ ,\ \mathbf{k}_2\ ,\ \mathbf{k}_3\ ,\ \mathbf{k}_4\ ]$ (przecinek dzieli na wektory kolumnowe)

    względnie

    $\mathbf{A} = [\ (\mathbf{w}_1)^T\ ;\ (\mathbf{w}_2)^T\ ;\ (\mathbf{w}_3)^T\ ]$ (średnik dzieli na wektory wierszowe)
- Kolumny/wiersze macierzy są ogólnie nazywane liniami, macierze można więc przedstawiać jako zestawy linii

Podmacierze/wektory jako składowe macierzy

- Z dowolnej macierzy można utworzyć podmacierze złożone z niekoniecznie kolejnych linii (czyli wierszy lub kolumn) tej macierzy
- W szczególności z macierzy można utworzyć podmacierz złożoną ze:
  - wszystkich elementów macierzy oprócz pewnego wiersza
  - wszystkich elementów macierzy oprócz pewnej kolumny
  - wszystkich elementów macierzy oprócz pewnego wiersza i pewnej kolumny

Podmacierze/wektory jako składowe macierzy

- I podobnie można tworzyć podmacierze
  - składające się jedynie z elementów leżących na przecięciu wybranych wierszy i kolumn
  - składające się jedynie z elementów nie leżących w wybranych wierszach i kolumnach

…

Podstawowe operacje wektorowo-macierzowe

- Dodawanie macierzy/wektorów

  (skalowanie w znaczeniu: mnożenie przez skalar)

  – jeżeli $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxn}$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{rxs}$, przy czym m = r i n = s, to suma $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jest macierzą $\mathbf{C}_{mxs} = [c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$

    (analogicznie dla $\mathbf{B}+\mathbf{A}$)

  – operacja ma charakter „poelementowy”

Podstawowe operacje wektorowo-macierzowe

- Skalowanie macierzy/wektorów

  (skalowanie w znaczeniu: mnożenie przez skalar)

  – jeżeli $\mathbf{A}_{\mathbf{mxn}} = [a_{ij}]$, to $s \cdot \mathbf{A}$ jest macierzą $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, gdzie $c_{ij} = s \cdot a_{ij}$ (analogicznie dla $\mathbf{A} \cdot s$)

    – (w obu przypadkach):
    macierz **A** zostaje przeskalowana przez skalar s

  – operacja ma charakter „poelementowy”

Podstawowe operacje wektorowo-macierzowe

- Łączne zastosowanie dodawania i skalowania umożliwia odejmowanie macierzy/wektorów (bez podawania osobnej definicji dla tej operacji)

  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$

  – operacja ma charakter „poelementowy”
- Odejmowanie nie jest przemienne

  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \neq \mathbf{B} - \mathbf{A}$

  – zachodzi jednak:
    - $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -\mathbf{B} + \mathbf{A}$
    - $\mathbf{B} - \mathbf{A} = -\mathbf{A} + \mathbf{B}$

Podstawowe operacje wektorowo-macierzowe

- Mnożenie macierzy/wektorów

  (skalowanie w znaczeniu: mnożenie przez skalar)

  – jeżeli $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxn}$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{rxs}$, przy czym $n = r$,
  to iloczyn **AB** macierzy **A** i **B** jest macierzą $\mathbf{C}_{mxs} = [c_{ij}]$,
  gdzie $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{rj}$

  (analogicznie dla **BA**)

- Mnożenie jest łączne

  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

- Mnożenie nie jest przemienne

  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

  (istnieją jednak macierze, dla których **AB** = **BA**)

Podstawowe operacje wektorowo-macierzowe

- Element neutralny mnożenia **I** i jego właściwości
  - przemienność mnożenia przez **I**

    AI = **A** = **IA**

    ABI = **AIB** = **IAB**
  - macierz **I** służy do znajdowania macierzy odwrotnej do danej (która może istnieć lub nie!)

Podstawowe operacje wektorowo-macierzowe

- Odwrotność iloczynu* a iloczyn odwrotności*

  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

  $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

  - uzasadnienie:
    $(\mathbf{ABC})^{-1} = ((\mathbf{AB})\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

  …

  $(\mathbf{AB}\ldots\mathbf{Z})^{-1} = \mathbf{Z}^{-1}\ldots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

  – odwrotna kolejność czynników

  * o ile istnieją

Podstawowe operacje wektorowo-macierzowe

- „Dzielenie" macierzy: kombinacja mnożenia i odwracania

  $\mathbf{A} / \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ (prawostronne)

  $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ (lewostronne)

  – wymagane jest znalezienie macierzy odwrotnej ($\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$)
    - czyli można „dzielić" tylko przez macierze posiadające odwrotność!

  – jednocześnie powyższe „dzielenia" generują (w ogólności) inne wyniki, co nie pozwala na zdefiniowanie jednego, uniwersalnego dzielenia macierzy

- „Dzielenia" lewo- i prawo-stronne nie są przemienne

  $\mathbf{A} / \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$

  $\mathbf{B} / \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \equiv \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$

…

Kombinacja liniowa wektorów

- Dane są
  - wektory $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$
  - skalary $\lambda_1 , ..., \lambda_m$
- Kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_i$ o współczynnikach λ_i nazywamy wektor $\mathbf{y} = \Sigma_{i=1..m}\lambda_i\mathbf{x}_i$

…

Przekształcenie liniowe

Przekształcenie liniowe

- Przekształcenie $p(x)$ argumentu x jest liniowe, gdy spełnia dwa warunki:

  $p(c \cdot x) = c \cdot p(x)$ /jednorodność/
  - gdzie
    – c jest stałą skalarną
    – x jest argumentem

  $p(x + y) = p(x) + p(y)$ /addytywność/
  - gdzie
    – x jest argumentem
    – y jest argumentem

Przekształcenie liniowe

- Fundamentalna właściwość przekształceń liniowych
  - złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym

Przekształcenie liniowe

- Przykład:
  - niech dana będzie funkcja liniowa $f(x) = 2x + 3$
  - czy funkcja ta jest przekształceniem liniowym?

Przekształcenie liniowe

- Przykład:
  - niech dana będzie funkcja liniowa $f(x) = 2x + 3$
  - kontrola jednorodności
    - $a = f(c \cdot x) = 2cx + 3$
    - $b = c \cdot f(x) = c(2x + 3) = 2cx + 3c$
  - czyli: funkcja liniowa nie jest jednorodna! (ponieważ $a \neq b$)

Przekształcenie liniowe

- Przykład:
  - niech dana będzie funkcja liniowa $f(x) = 2x + 3$
  - kontrola addytywności
    - $a = f(x + y) = 2(x + y) + 3 = 2x + 2y + 3$
    - $b = f(x) + f(y) = (2x + 3) + (2y + 3) = 2x + 2y + 6$
  - czyli: funkcja liniowa nie jest addytywna! (ponieważ $a \neq b$)

Przekształcenie liniowe

- Przykład:
  - niech dana będzie funkcja liniowa $f(x) = 2x + 3$
    - nie jest jednorodna
    - nie jest addytywna
  - wniosek: ta nie jest przekształceniem liniowym!

Przekształcenie liniowe

- Pytanie:
  - jaka funkcja jest przekształceniem liniowym?
    - czy jest to funkcja liniowa?
- Odpowiedź:
  - funkcja postaci $f(x) = a \cdot x$

…

„Logika" mnożenia macierzy (i wektorów)

- Przekształcenie liniowe f wektora **x** to przekształcenie, w którym każdy element wektora wynikowego **y** = f(**x**) zależy liniowo od wszystkich elementów wektora **x**
  - „zależy liniowo" : stanowi kombinację liniową
- Ogólną postacią przekształconego (w podany sposób) wektora $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ jest wektor $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = [ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2]^T$
  - wektor ten zależy więc od (charakterystycznych dla danego przekształcenia liniowego) współczynników a, b, c i d

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Wynik

  $f(\mathbf{x}) = [ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2]^T$

- Układ współczynników a, b, c i d
  - wierszowy

    (a, b, c, d) przy $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$
  - macierzowo/wektorowy

    $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ przy $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

    albo

    $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Posługując się iloczynem macierzowym

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Posługując się iloczynem macierzowym

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Niech dane będą dwa przekształcenia liniowe wektora $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

  $f_1(\mathbf{x}) = [ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2]^T$

  $f_2(\mathbf{x}) = [px_1 + qx_2, rx_1 + sx_2]^T$

  i niech

  $\mathbf{y} = f_1(\mathbf{x})$

- Stosując przekształcenie $f_2(\mathbf{x})$ do wektora $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ otrzymujemy

  $\mathbf{z} = f_2(\mathbf{y}) =$

  $= [py_1 + qy_2, ry_1 + sy_2]^T =$

  $= [p(ax_1 + bx_2) + q(cx_1 + dx_2), r(ax_1 + bx_2) + s(cx_1 + dx_2)]^T =$

  $= [(pa+qc)x_1 + (pb+qd)x_2, (ra+sc)x_1 + (rb+sd)x_2]^T$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Wynikiem jest złożenie przekształceń f_1 i f_2
  - ponieważ f_1 i f_2 są przekształceniami liniowymi, ich złożenie jest także przeształceniem liniowym
    - współczynnikami tego przekształcenia są wartości pa+qc, pb+qd, ra+sc i rb+sd
- Uwaga: „złożenie przekształceń f_1 i f_2” oznacza, że
  - f_2 następuje po f_1, czyli $\mathbf{x} \rightarrow f_1 \rightarrow f_2$
  - stawiając (zwyczajowo) **x** z prawej strony, mamy $f_2 \leftarrow f_1 \leftarrow \mathbf{x}$

„Logika" mnożenia macierzy (i wektorów)

- Wynik

  $\mathbf{z} = f_2(f_1(\mathbf{x})) = [(pa+qc)x_1 + (pb+qd)x_2, (ra+sc)x_1 + (rb+sd)x_2]^T$
- Układ współczynników
  - wierszowy

    (p, q, r, s, a, b, c, d) przy $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$
  - macierzowo/wektorowy

    $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ przy $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

    albo

    $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- W zapisie macierzowym (łączność prawostronna)

$$
\begin{aligned}
f_2(f_1(\mathbf{x})) &= \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (pa+qc)x_1 + (pb+qd)x_2 \\ (ra+sc)x_1 + (rb+sd)x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- W zapisie macierzowym (łączność lewostronna)

$$f_2(f_1(\mathbf{x})) = \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ?+? & ?+? \\ ?+? & ?+? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (pa+qc)x_1 + (pb+qd)x_2 \\ (ra+sc)x_1 + (rb+sd)x_2 \end{bmatrix}$$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- W zapisie macierzowym (łączność lewostronna)

$$f_2(f_1(\mathbf{x})) = \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ?+? & ?+? \\ ?+? & ?+? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (pa+qc)x_1 + (pb+qd)x_2 \\ (ra+sc)x_1 + (rb+sd)x_2 \end{bmatrix}$$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- W ogólności
  - jeżeli **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$ i **B** = $[b_{ij}]_{rxs}$, przy czym n = r,
    to iloczyn **AB** macierzy **A** i **B** jest macierzą $\mathbf{C}_{mxs} = [c_{ij}]$,
    gdzie $c_{ij} = \sum_{k=1..n} a_{ik} b_{kj}$
    - wartość c_{ij} stanowi iloczyn skalarny
      - wiersza i-tego macierzy **A**

      oraz
      - kolumny j-tej macierzy **B**
  - operacja nie ma charakteru „poelementowego”

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Podsumowując
  - operacja „mnożenie macierzy” jest zgodna z operacją złożenia przekształceń liniowych, tzn. jeżeli
    - macierz **A** zawiera współczynniki przekształcenia f_1
    - macierz **B** zawiera współczynniki przekształcenia f_2

    to
    - macierz **BA** zawiera współczynniki przekształcenia $f_2(f_1)$
    - macierz **AB** zawiera współczynniki przekształcenia $f_1(f_2)$

    (istotna kolejność działań!)

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Tak zdefiniowane mnożenie macierzy jest zgodne ze składaniem przekształceń także wtedy, gdy wektor **x** występuje po lewej stronie (łączność prawostronna)

  $\mathbf{x}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{AB}$

  – przy czym oczywiście $(\mathbf{x}^T\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{x}^T\mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$

    - ponieważ $(\mathbf{x}^T\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{x}^T(\mathbf{AB})$

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- W ogólności zachodzi $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- Aby „uchwytywać” różnicę miedzy **AB** a **BA**, (np. w teorii operatorów) definiuje się tzw. komutator

  $$\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$$

- Macierze **A** i **B** spełniające **AB** = **BA** nazywamy komutującymi
- Macierze komutujące
  - ich komutator jest macierzą zerową
  - występują (niejawnie) w kilku definicjach macierzowych
  - możliwe jest ich wspólne zdiagonalizowanie

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Podsumowanie (wybranych) właściwości mnożenia macierzy
  - łączność: (**AB**)**C** = **A**(**BC**)
  - brak przemienności: **AB** ≠ **BA**
    - oczywiście istnieją (szczególne) **A** i **B**, dla których zachodzi **AB** = **BA**

„Logika” mnożenia macierzy (i wektorów)

- Inne pomysły na „mnożenie” tabelek liczbowych?
  - tak

…

Przekształcenia wektorowe

- Mnożenie wektora przez wektor
  - mnożenie wektora przez wektor należy do najprostszych multiplikatywnych operacji macierzowych (jako, że wektory są szczególnymi przypadkami macierzy)
  - istnieją dwie (różne od siebie) wersje takiego przekształcenia
    - tzw. iloczyn skalarny wektorów
    - tzw. iloczyn macierzowy wektorów

    (poniżej -- iloczyn skalarny)

Przekształcenia wektorowe

- Iloczyn skalarny wektorów: (oznaczenie: $\langle \mathbf{a},\mathbf{x} \rangle$)
  - dopuszczalne jest jedynie mnożenie wektorów o tej samej liczbie elementów
  - bez względu na ich rozmiar wynik mnożenia wektora przez wektor jest pojedynczą liczbą (skalarem)
  - formalnie, iloczyn skalarny s może powstać tylko z przemnożenia wektora wierszowego przez kolumnowy:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3} = \boxed{s}$$

Przekształcenia wektorowe

- Iloczyn skalarny wektorów: (oznaczenie: $\langle \mathbf{a},\mathbf{x} \rangle$)
  - oczywiście zachodzi: $\langle \mathbf{a},\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{a} \rangle$
    - ponieważ $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{a}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \end{bmatrix}$$

Przekształcenia macierzowe

- Mnożenie macierzy przez wektor jako złożenie iloczynów skalarnych
  - jednym z najczęściej rozważanych przekształceń macierzowych w algebrze jest mnożenie macierzy przez wektor
    - macierz -- element przekształcający
    - wektor -- element danych
  - aby operacja ta była dopuszczalna, macierz **A** traktuje się jako zbiór wektorów wierszowych $\mathbf{a}_i^T$, które mnoży się przez dany wektor (kolumnowy) **x**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \hline \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \\ \hline \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

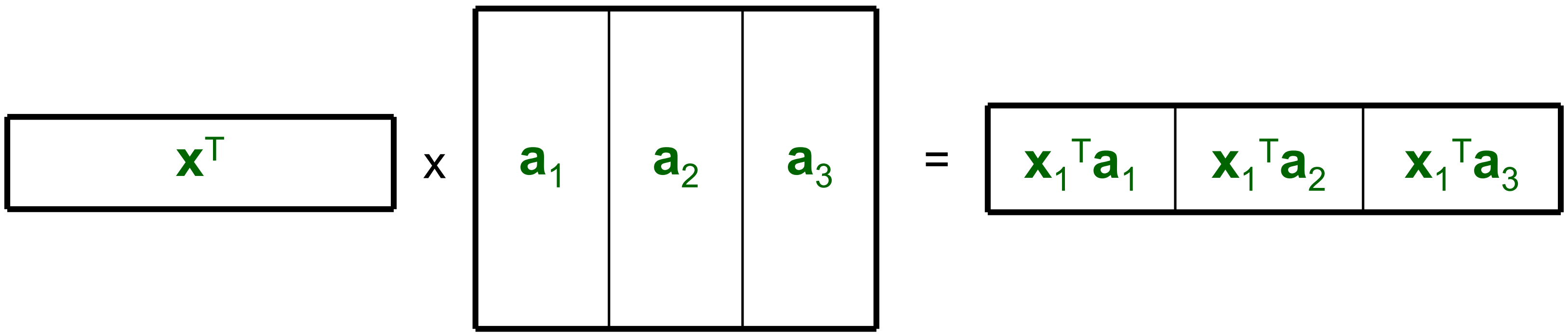
Przekształcenia macierzowe

- Gdy dane podlegające przekształcaniu zebrane są w macierzy, to mnożeniu podlegają całe macierze
  - operacja mnożenia macierzy przez macierz odzwierciedla jednak sytuację, w której zarówno macierz danych jak i macierz przekształcającą traktuje się jak zbiór wektorów (kolumnowych względnie wierszowych)
  - wynikiem takiej operacji jest macierz odpowiednich iloczynów skalarnych

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{x}_2 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{x}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{x}_2 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia macierzowe

- Problem kolejności argumentów
  - ten sam „mechanizm” działa także w sytuacji, gdy mnożymy wektor (pierwszy argument) przez macierz (drugi argument)
    - wymagana postać wektora: wierszowa
    - postać iloczynu wynikowego: wektor wierszowy



Przekształcenia macierzowe

- Problem kolejności argumentów
  - oczywiście zachodzi: $(\mathbf{Ax})^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T$
    (i uogólnia się na mnożenie macierzy przez macierze)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{x}_1^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{x}_1^T\mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia macierzowe

- Podsumowanie właściwości mnożenia macierzy względem transponowania
  - dla dowolnych macierzy **A** i **B** zachodzi

    $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

    $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

    itd.

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie wektorów przez macierze może powodować, że wektor wynikowy ma inny rozmiar niż wektor przemnażany (gdy macierz nie jest kwadratowa)
- Niech $\mathbf{A}_{mxn}$ będzie dowolną macierzą
  - mnożenie (lewostronne) wektora $\mathbf{x}_{nx1}$ przez $\mathbf{A}$ „zmienia” jego rozmiar z n na m

    $\mathbf{y}_{mx1} = \mathbf{A}_{mxn}\mathbf{x}_{nx1}$
  - mnożenie (prawostronne) wektora $(\mathbf{x}^T)_{1xm}$ przez $\mathbf{A}$ „zmienia” jego rozmiar z m na n

    $(\mathbf{y}^T)_{nx1} = (\mathbf{x}^T)_{1xm}\,\mathbf{A}_{mxn}$

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie macierzy/wektorów jest szczególnie proste w przypadku wektorów szczególnych
  - wycinanie wierszy/kolumn
  - sumowanie wierszy/kolumn
  - macierze permutacji

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie dowolnej macierzy przez wektor szczególny
  - prawostronne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  - lewostronne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie dowolnej macierzy przez wektor szczególny

  – prawostronne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  – lewostronne:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie dowolnej macierzy przez wektor szczególny

  - prawostronne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

  - lewostronne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie dowolnej macierzy przez dowolny wektor można naturalnie interpretować jako kombinację liniową
  - prawostronne: kolumn

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  - lewostronne: wierszy

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \lambda_1 \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \\ + \\ \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie macierzy (nie będących wektorami) jest natomiast szczególnie proste w przypadku tzw. macierzy diagonalnych

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Macierz **D** = $[d_{ij}]$ nazywamy diagonalną, gdy $d_{ij} = 0$ przy $i \neq j$
  - macierz diagonalna posiada poza przekątną wyłącznie wartości zerowe
  - oznaczenie
    - $\mathrm{diag}(a, b, c, ...)_{mxn}$ lub $\mathrm{diag}(a, b, c, ...)$ (dla kwadratowych)
      - gdzie a, b, c, … są elementami przekątnej

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie dowolnej macierzy przez macierz diagonalną
  - lewostronne: przemnaża wiersze

$$\begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{3}} & 0 \\ 0 & \color{blue}{\mathbf{2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{3}}\cdot 1+0\cdot 3 & \color{red}{\mathbf{3}}\cdot 2+0\cdot 4 \\ 0\cdot 1+\color{blue}{\mathbf{2}}\cdot 3 & 0\cdot 2+\color{blue}{\mathbf{2}}\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{3}}\cdot 1 & \color{red}{\mathbf{3}}\cdot 2 \\ \color{blue}{\mathbf{2}}\cdot 3 & \color{blue}{\mathbf{2}}\cdot 4 \end{bmatrix}$$

  - prawostronne: przemnaża kolumny

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{3}} & 0 \\ 0 & \color{blue}{\mathbf{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot\color{red}{\mathbf{3}}+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot\color{blue}{\mathbf{2}} \\ 3\cdot\color{red}{\mathbf{3}}+4\cdot 0 & 3\cdot 0+4\cdot\color{blue}{\mathbf{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot\color{red}{\mathbf{3}} & 2\cdot\color{blue}{\mathbf{2}} \\ 3\cdot\color{red}{\mathbf{3}} & 4\cdot\color{blue}{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$

Lewostronne i prawostronne mnożenie macierzy

- Mnożenie macierzy $\mathbf{A}_{mxn}$ przez macierz diagonalną
  - lewostronne: wymaga macierzy diag(s_{11}, s_{22}, ..., s_{mm})
    - rozmiar diagonalnej zgodny z liczbą wierszy macierzy **A**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 \\ 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

  - prawostronne: wymaga macierzy diag(s_{11}, s_{22}, ..., s_{nn})
    - rozmiar diagonalnej zgodny z liczbą kolumn macierzy **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Przekształcenia macierzami diagonalnymi

- Lewo- i prawostronne mnożenie przez diag(s, s, ..., s) (odpowiednich rozmiarów) ma taki sam rezultat jak mnożenie przez skalar s

$$\mathrm{diag}(s, s, ..., s)\cdot\mathbf{A} = s\cdot\mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot4 \\ 0\cdot1+3\cdot3 & 0\cdot2+3\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot2 \\ 3\cdot3 & 3\cdot4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathrm{diag}(s, s, ..., s) = \mathbf{A}\cdot s$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot3+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot3 \\ 3\cdot3+4\cdot0 & 3\cdot0+4\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot3 & 2\cdot3 \\ 3\cdot3 & 4\cdot3 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia macierzami diagonalnymi

- Lewo- i prawostronne mnożenie przez **I** = diag(1, ..., 1) (odpowiednich rozmiarów) ma taki sam rezultat jak mnożenie przez skalar 1

  diag(1, 1, ..., 1)·**A** = 1·**A** = **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 2+0\cdot 4 \\ 0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 \\ 1\cdot 3 & 1\cdot 4 \end{bmatrix}$$

  A·diag(1, 1, ..., 1) = **A**·1 = **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot 0 & 3\cdot 0+4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 & 4\cdot 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia macierzami diagonalnymi

- Mnożenie macierzy diagonalnych sprowadza się do przemnożenia przez siebie elementów diagonalnych

$$\mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, ..., s_{nn})\mathrm{diag}(z_{11}, z_{22}, ..., z_{nn}) =$$
$$= \mathrm{diag}(s_{11}z_{11}, s_{22}z_{22},..., s_{nn}z_{nn})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot5+0\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot7 \\ 0\cdot5+3\cdot0 & 0\cdot0+3\cdot7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia macierzami diagonalnymi

- W szczególności, przy $s_{ii} \neq 0$ dla każdego i:

$$\mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, ..., s_{nn})\mathrm{diag}(1/s_{11}, 1/s_{22}, ..., 1/s_{nn}) = \mathbf{I}_{nxn}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 1/3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2\cdot 1/2+0\cdot 0 & 2\cdot 0+0\cdot 1/3 \\ \hline 0\cdot 1/2+3\cdot 0 & 0\cdot 0+3\cdot 1/3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

  – wniosek (na przyszłość):
  przy (wszystkich) $s_{ii} \neq 0$ macierze
    - $\mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, ..., s_{nn})$

    oraz
    - $\mathrm{diag}(1/s_{11}, 1/s_{22}, ..., 1/s_{nn})$

  są swoimi wzajemnymi odwrotnościami

Przekształcenia macierzami diagonalnymi

- Podnoszenie macierzy diagonalnej do potęgi sprowadza się do podnoszenia do potęgi elementów diagonalnych

$$(\mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, \ldots, s_{NN}))^2 = \mathrm{diag}((s_{11})^2, (s_{22})^2, \ldots, (s_{NN})^2)$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2\cdot2+0\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot3 \\ \hline 0\cdot2+3\cdot0 & 0\cdot0+3\cdot3 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 0 \\ \hline 0 & 9 \\ \hline\end{array}$$

  – a w ogólności

$$(\mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, \ldots, s_{NN}))^p = \mathrm{diag}((s_{11})^p, (s_{22})^p, \ldots, (s_{NN})^p)$$

…

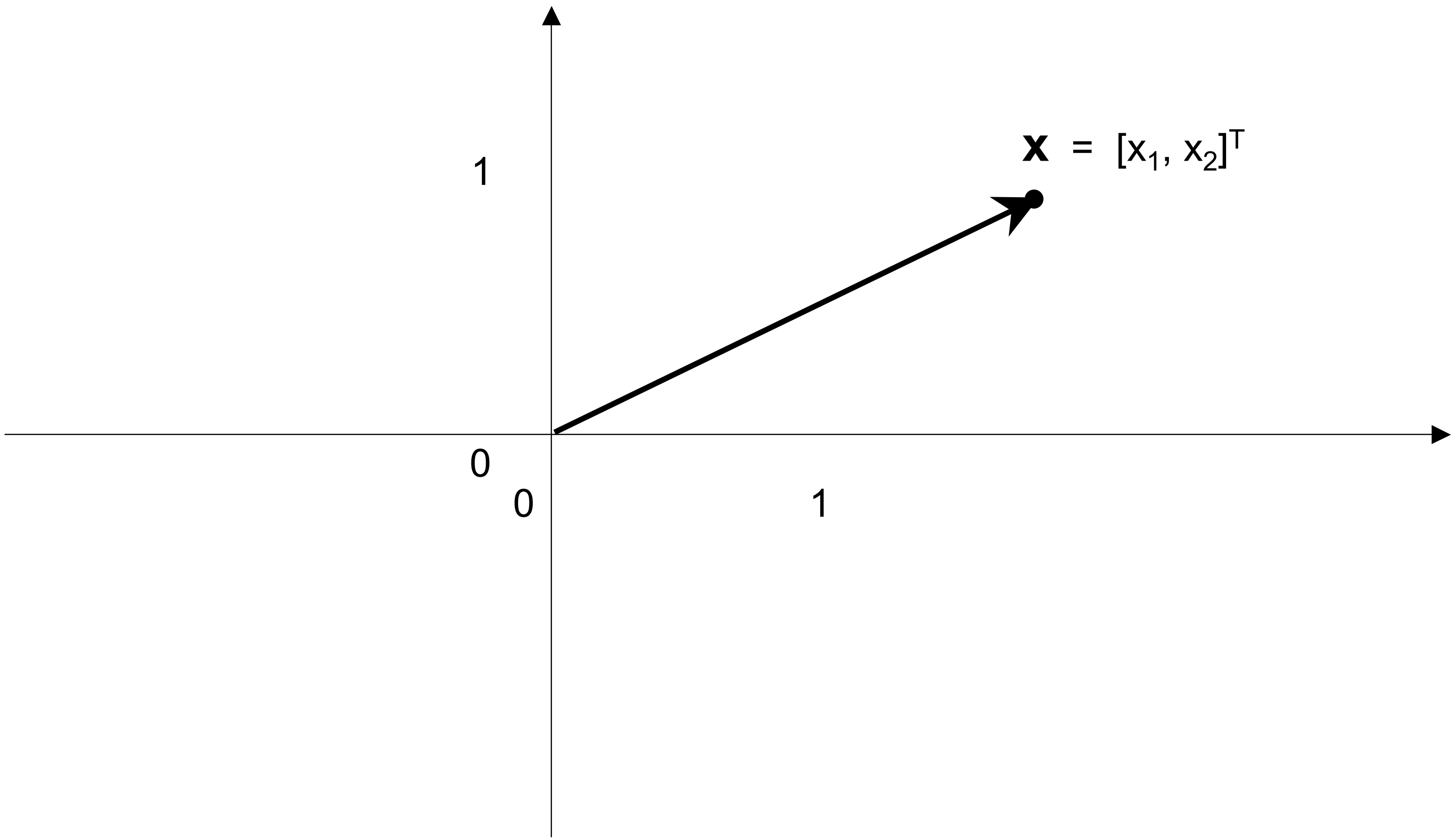
Macierz – interpretacje

- Różne podejścia do interpretacji macierzy pozwalają na różne sposoby ich klasyfikowania
  - 1
    - tabelki liczbowe
    - elementy algebraiczne
  - 2
    - macierze danych
    - macierze przekształcajace
  - …

Wektor – interpretacje

- Różne podejścia do interpretacji wektorów pozwalają na różne sposoby ich klasyfikowania
  - 1
    - macierze
    - nie-macierze
  - 2
    - tabelki liczbowe
      - kolumnowe
      - wierszowe
    - elementy przestrzeni liniowych/afinicznych
      - zaczepione
      - swobodne
  - …

Wektor -- element danych



…

Macierz -- element przekształcający

- Jeżeli pewien wektor o rozmiarze n reprezentuje punkt/obserwację przestrzeni n-wymiarowej, to wiele różnych operacji przekształcających ten punkt w tej przestrzeni można przedstawić w postaci mnożenia przez pewną macierz kwadratową
- Przykłady:
  - przemnożenie dowolnego wektora o rozmiarze 2x1 przez poniższą $\mathbf{A}_{2x2}$ realizuje symetrię punktową (względem punktu **0**)
  - przemnożenie dowolnego wektora o rozmiarze 2x1 przez poniższą $\mathbf{B}_{2x2}$ realizuje obrót o kąt α (względem punktu **0**)

$$\mathbf{A}=\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline\end{array} \qquad \mathbf{B}=\begin{array}{|c|c|}\hline \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \hline \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \hline\end{array}$$

Macierz -- element przekształcający

- Z tego punktu widzenia macierz jest elementem przekształcającym
  - w algebrze właściwości macierzy przekształcających są badane, ponieważ pozwalają na ujawnienie właściwości samego przekształcenia
    - np. dopóki wyznacznik macierzy kwadratowej **A** jest różny od zera, to przekształcenie polegające na przemnożeniu wektora **x** przez macierz **A** jest jednoznaczne (a więc: odwracalne)
- Mnożenie wektorów n-wymiarowych przez macierze niekwadratowe “przenosi” je do przestrzeni o innych wymiarach
  - wskutek (lewostronnego) przemnożenia wektora n-elementowego $\mathbf{x}_{nx1}$ przez macierz $\mathbf{A}_{mxn}$ powstaje wektor n-elementowy $\mathbf{y}_{mx1}=\mathbf{A}_{mxn}\mathbf{x}_{nx1}$

Macierz -- nośnik danych

- W innych sytuacjach macierz jest nośnikiem danych (czyli wektorów, które stanowią jej wiersze lub kolumny)
  - najbardziej typowe standardy
    - statystyczna analiza danych:
      dane (tzw. obiekty, obserwacje) w wierszach
    - teoria sygnałów:
      dane (tzw. obiekty, obserwacje) w kolumnach

statystyka:

7	4	–1
4	5	3
–2	5	2
4	1	0

teoria sygnałów:

0.7	0.4	0.2	0.4
0.4	0.5	0.5	0.1
0.1	0.3	0.2	0.0

Macierz -- nośnik danych

- Rozróżnienie
  „macierz przekształcająca a nośnik danych”
  ma oczywiste konsekwencje przy wykonywaniu
  operacji na tych tych macierzach, np.:
  - obiekty w wierszach przetwarzamy wykonując lewostronne przemnożenie przez macierz przekształcającą
  - obiekty w kolumnach przetwarzamy wykonując prawostronne przemnożenie przez macierz przekształcającą

…