# Systemy wbudowane

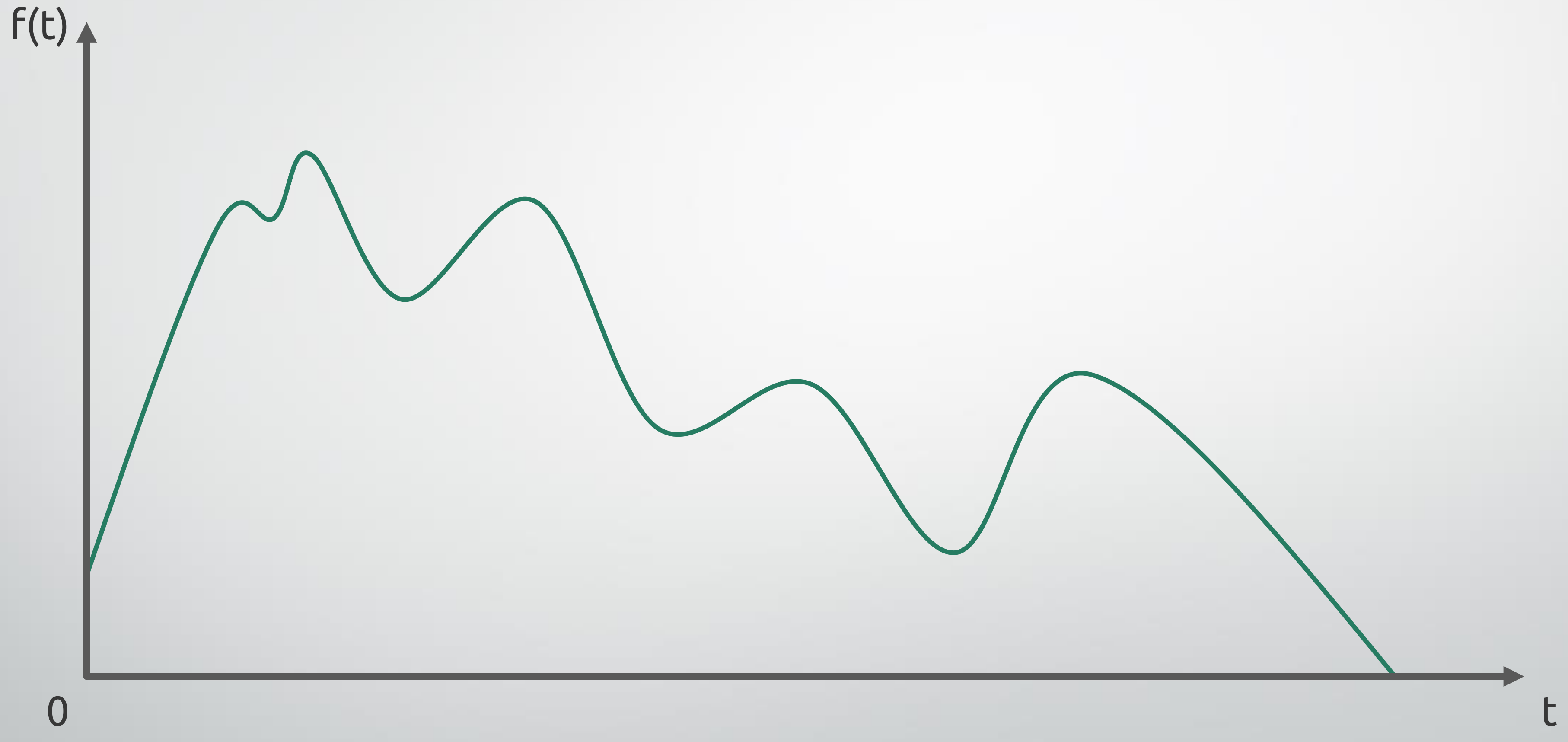
## **Wykład 4:** algorytmy sterowania

dr inż. Przemysław Zakrzewski
Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska
przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl

# Plan wykładu

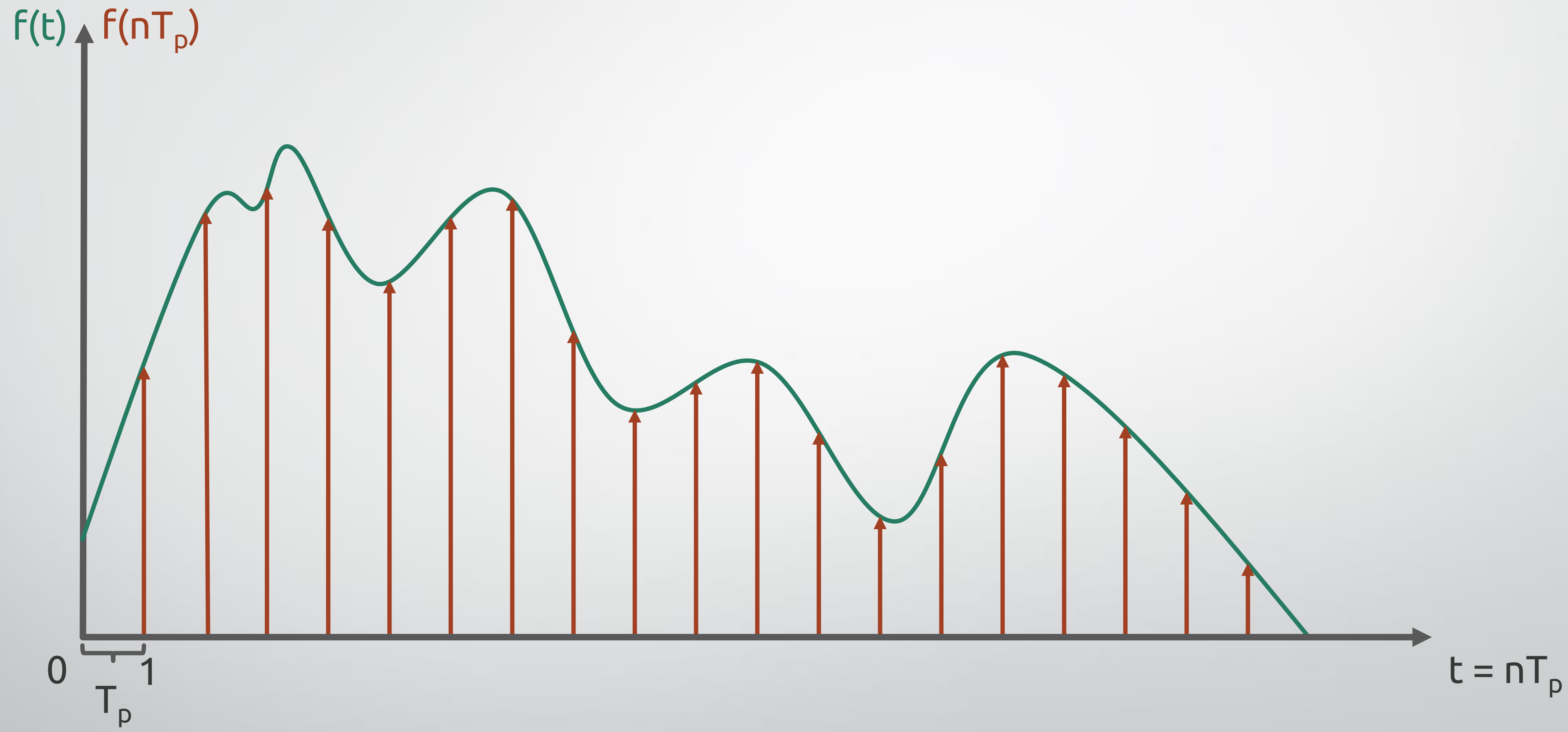
- Sterowanie:
  - ✓ sygnał analogowy (ciągły), dyskretny i cyfrowy,
  - ✓ obiekt sterowania,
  - ✓ układ otwarty,
  - ✓ układ zamknięty – układ automatycznej regulacji UAR.
- Opis dynamiki układów:
  - ✓ równania różniczkowe,
  - ✓ równania różnicowe.
- Algorytmy sterowania:
  - ✓ regulatory klasyczne typu: P, I, PI, PD, PID,
  - ✓ wskaźniki jakości.
- Implementacja UAR.

# **Sterowanie:** sygnał analogowy (ciągły)



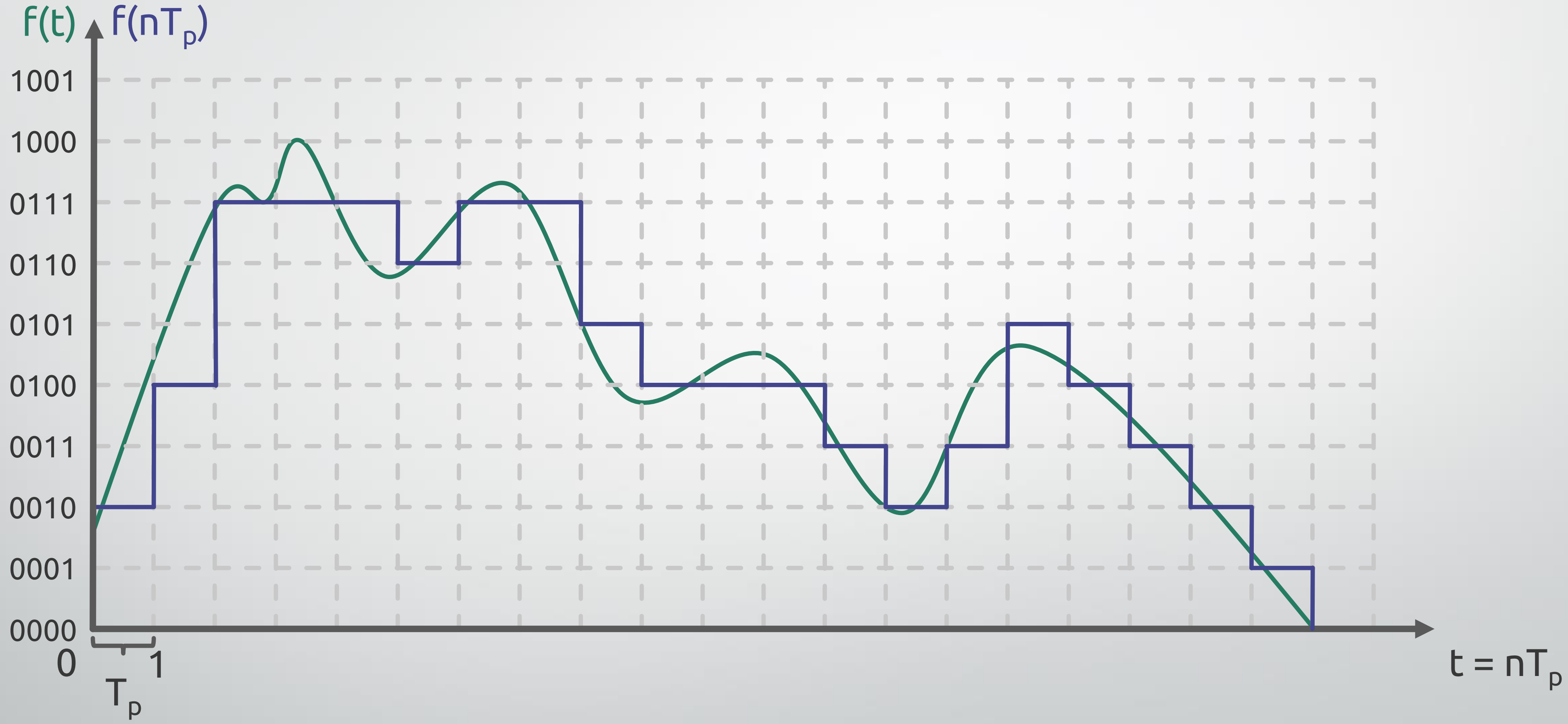

**Oznaczenia:**
f(t) – sygnał analogowy (ciągły), t – czas [s].

# **Sterowanie:** sygnał dyskretny



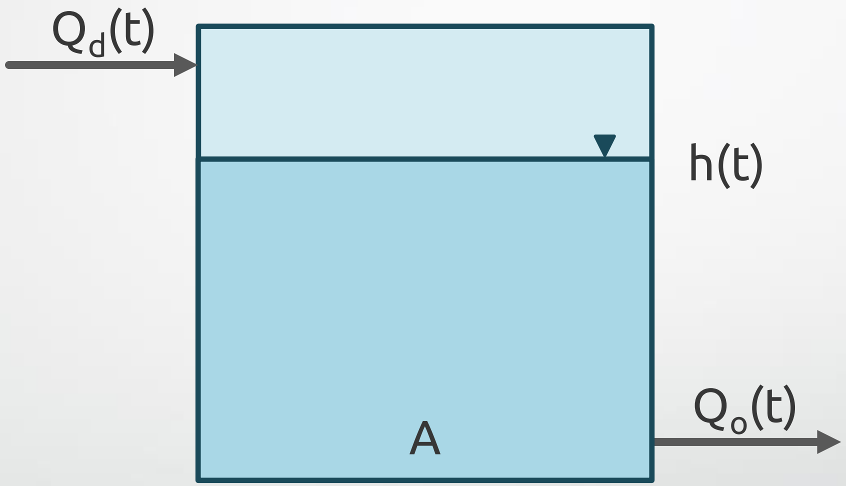

**Oznaczenia:**
$f(t)$ – sygnał analogowy (ciągły), $f(nT_p)$ – sygnał dyskretny, $t$ – czas [s], $n$ – chwila próbkowania, $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Sterowanie:** sygnał cyfrowy




**Oznaczenia:**
$f(t)$ – sygnał analogowy (ciągły), $f(nT_p)$ – sygnał cyfrowy, $t$ – czas [s], $n$ – chwila próbkowania, $T_p$ – okres próbkowania [s].

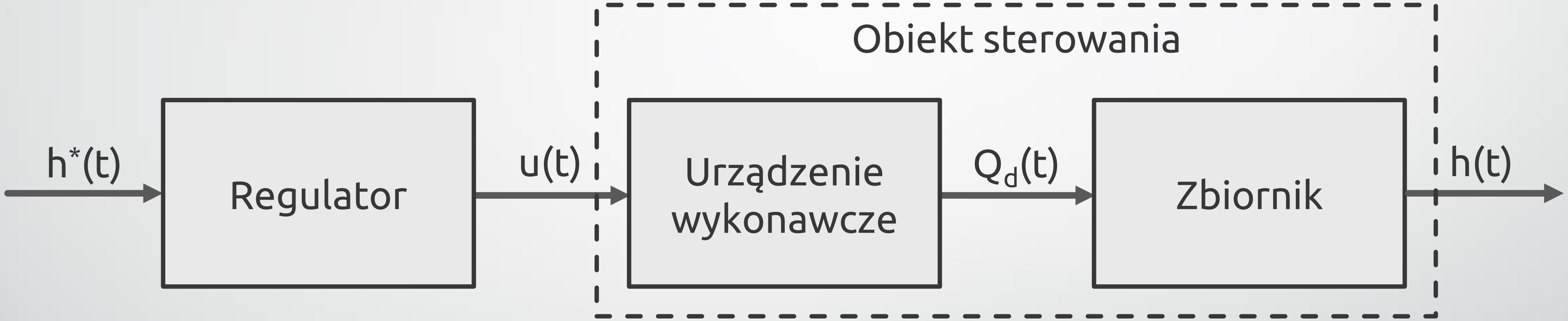
# **Sterowanie:** obiekt sterowania




**Zmienne procesowe:**
h(t) – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [$m^3/s$], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [$m^3/s$].

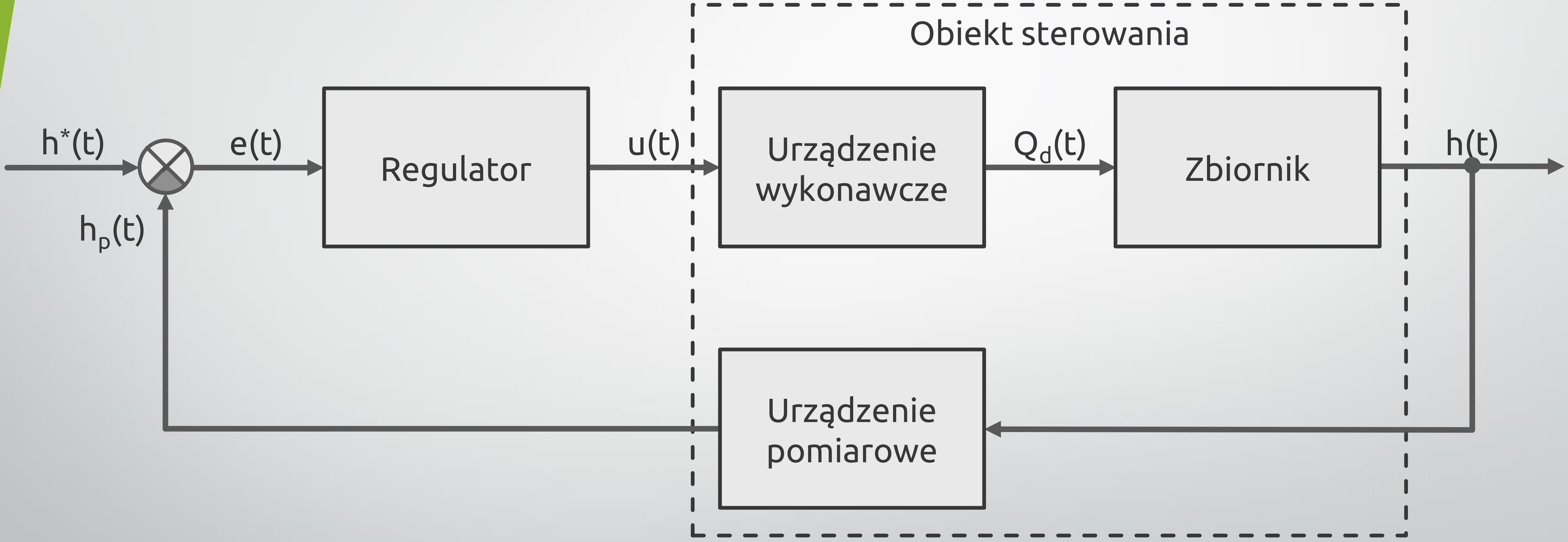
**Parametry:**
A – pole powierzchni przekroju porzecznego zbiornika [$m^2$].

# **Sterowanie:** układ otwarty



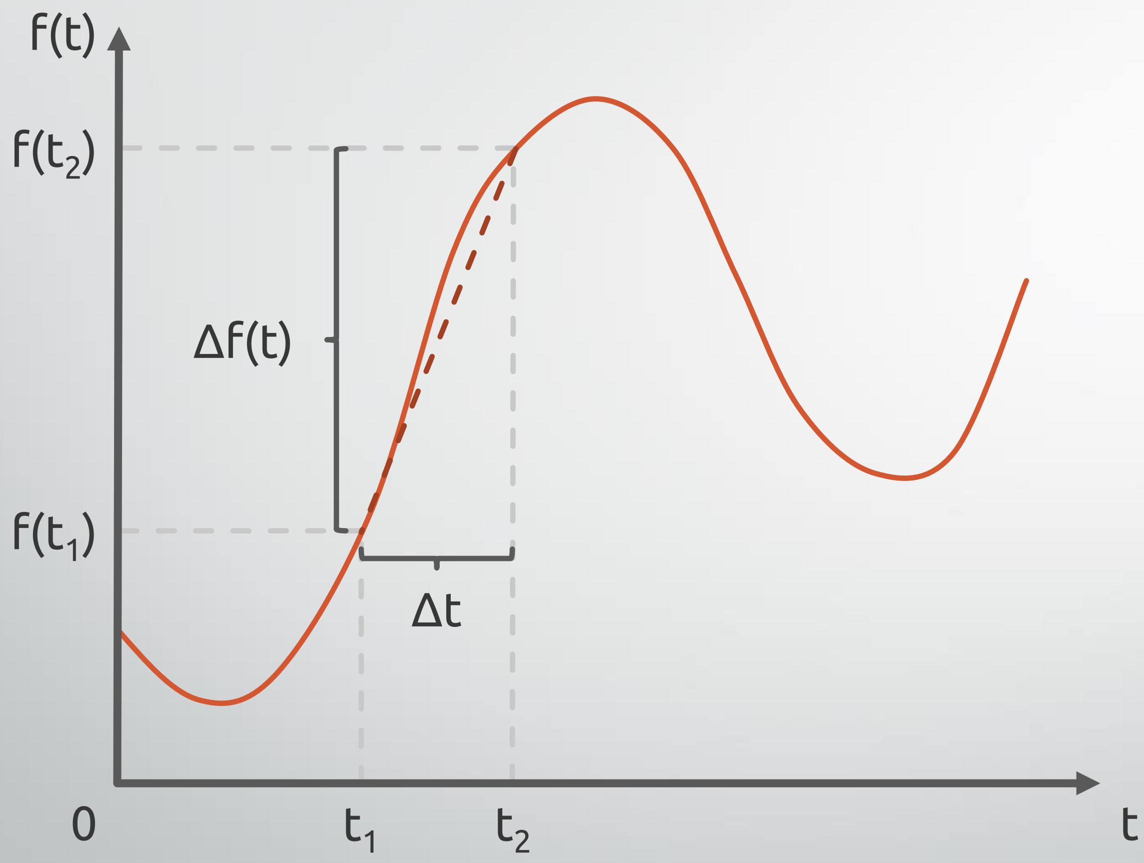

**Zmienne procesowe:**
h(t) – poziom substancji w zbiorniku [m], h*(t) – wartość zadana poziomu substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [$m^3/s$],
u(t) – wielkość sterująca (np. natężenie prądu, napięcie).

# **Sterowanie:** układ zamknięty – UAR




**Zmienne procesowe:**
e(t) – uchyb regulacji [m], h(t) – poziom substancji w zbiorniku [m], $h^*(t)$ – wartość zadana poziomu substancji w zbiorniku [m], $h_p(t)$ – wartość zmierzona poziomu substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [$m^3/s$], u(t) – wielkość sterująca (np. natężenie prądu, napięcie).

# **Opis dynamiki układów:** równania różniczkowe




**Iloraz różnicowy:**

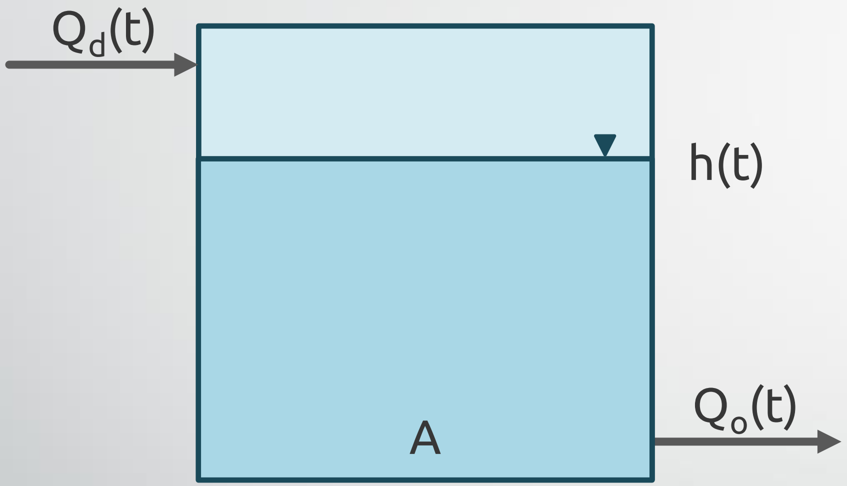
$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

**Pochodna funkcji:**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

# **Opis dynamiki układów:** równania różniczkowe




**Bilans masy całkowitej:**

$$A\frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

**Odpływ swobodny:**

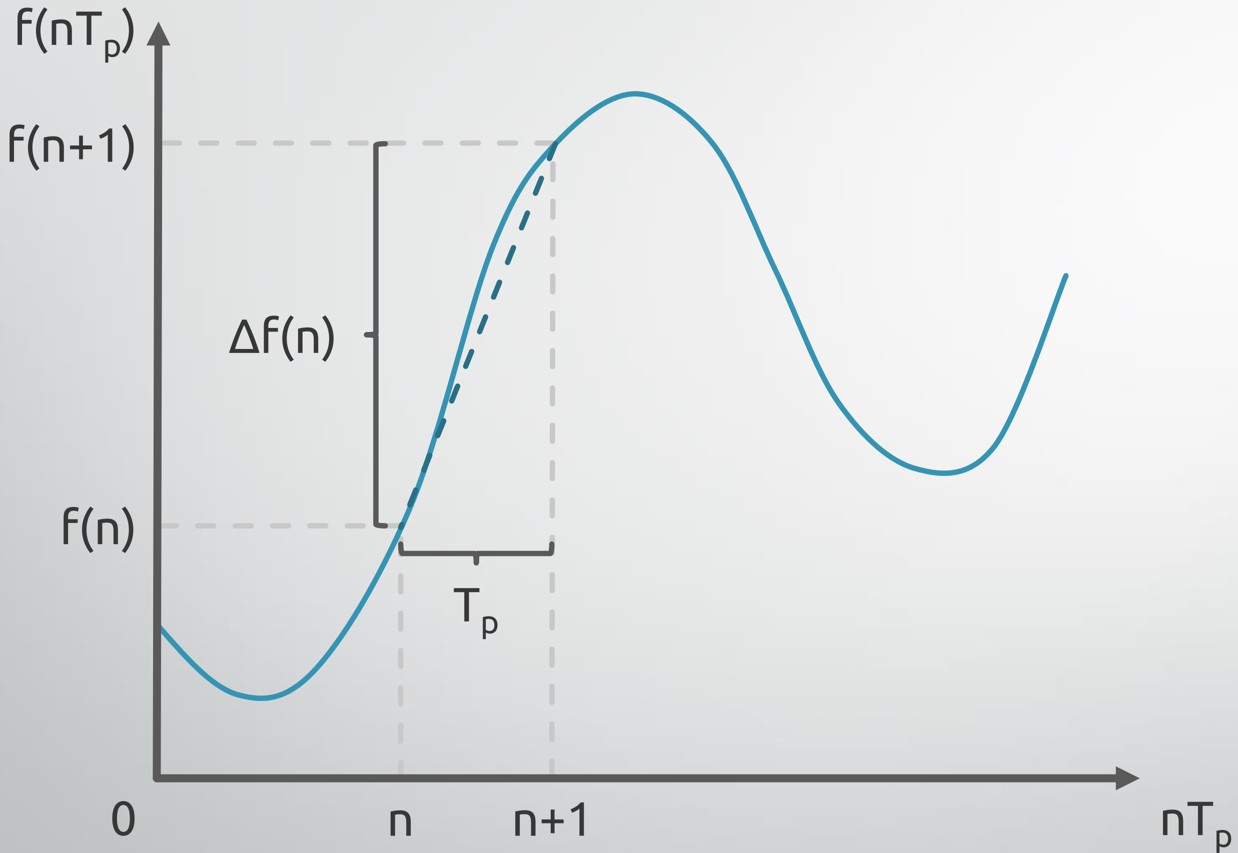
$$Q_o(t) = \beta\sqrt{h(t)}$$

$$A\frac{dh(t)}{dt} + \beta\sqrt{h(t)} = Q_d(t)$$

**Zmienne procesowe:**
$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [$m^3/s$], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [$m^3/s$].

**Parametry:**
$A$ – pole powierzchni przekroju porzecznego zbiornika [$m^2$], $\beta$ – współczynnik wypływu [$m^{5/2}/s$].

# **Opis dynamiki układów:** równania różnicowe




**Iloraz różnicowy:**

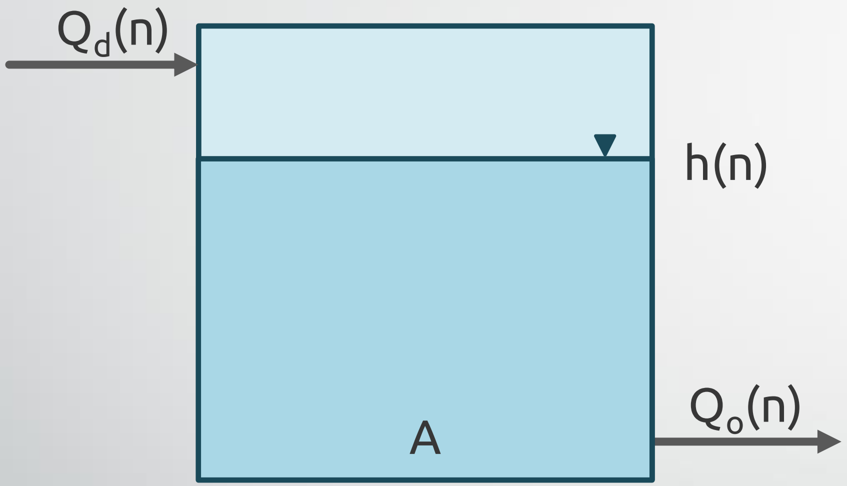
$$\frac{\Delta f(n)}{T_p} = \frac{f(n+1) - f(n)}{T_p}$$

**Pochodna funkcji:**

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \frac{\Delta f(n)}{T_p}$$

**Parametry:**
$T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Opis dynamiki układów:** równania różnicowe




**Bilans masy całkowitej:**

$$A\frac{\Delta h(n)}{T_p} = Q_d(n) - Q_o(n)$$

**Odpływ swobodny:**

$$Q_o(n) = \beta\sqrt{h(n)}$$

$$A\frac{\Delta h(n)}{T_p} + \beta\sqrt{h(n)} = Q_d(n)$$

**Zmienne procesowe:**
$h(n)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(n)$ – natężenie dopływu [$m^3/s$], $Q_o(n)$ – natężenie odpływu [$m^3/s$].

**Parametry:**
$A$ – pole powierzchni przekroju porzecznego zbiornika [$m^2$], $\beta$ – współczynnik wypływu [$m^{5/2}/s$].

# **Opis dynamiki układów:** równania różnicowe

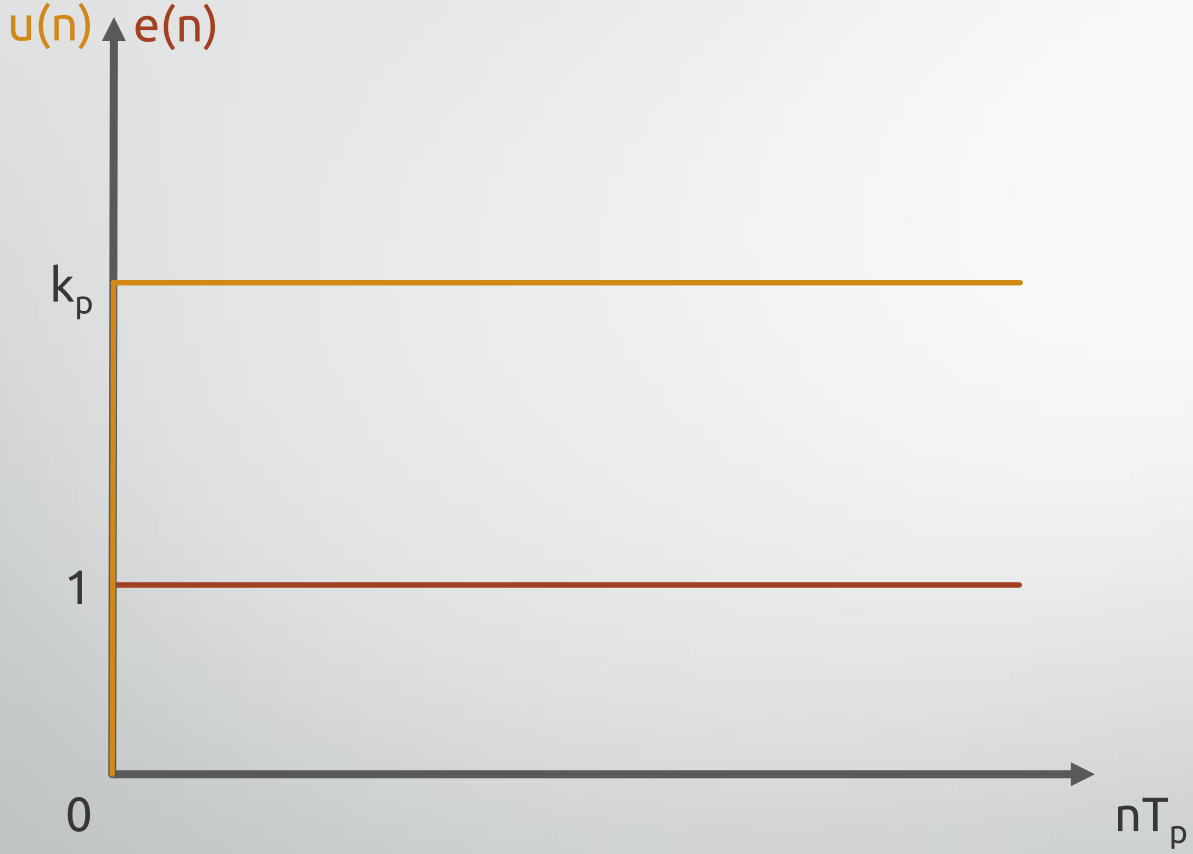
- Równanie różnicowe:

$$A\frac{\Delta h(n)}{T_p} + \beta\sqrt{h(n)} = Q_d(n)$$

- Rozwiązanie równania różnicowego – rekurencja:

$$\begin{cases} h(0) = h_0 \\ h(n+1) = \frac{1}{A}\left(-\beta\sqrt{h(n)} + Q_d(n)\right)T_p + h(n) \end{cases}$$

# **Algorytmy sterowania:** regulator typu P




**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p e(n)$$

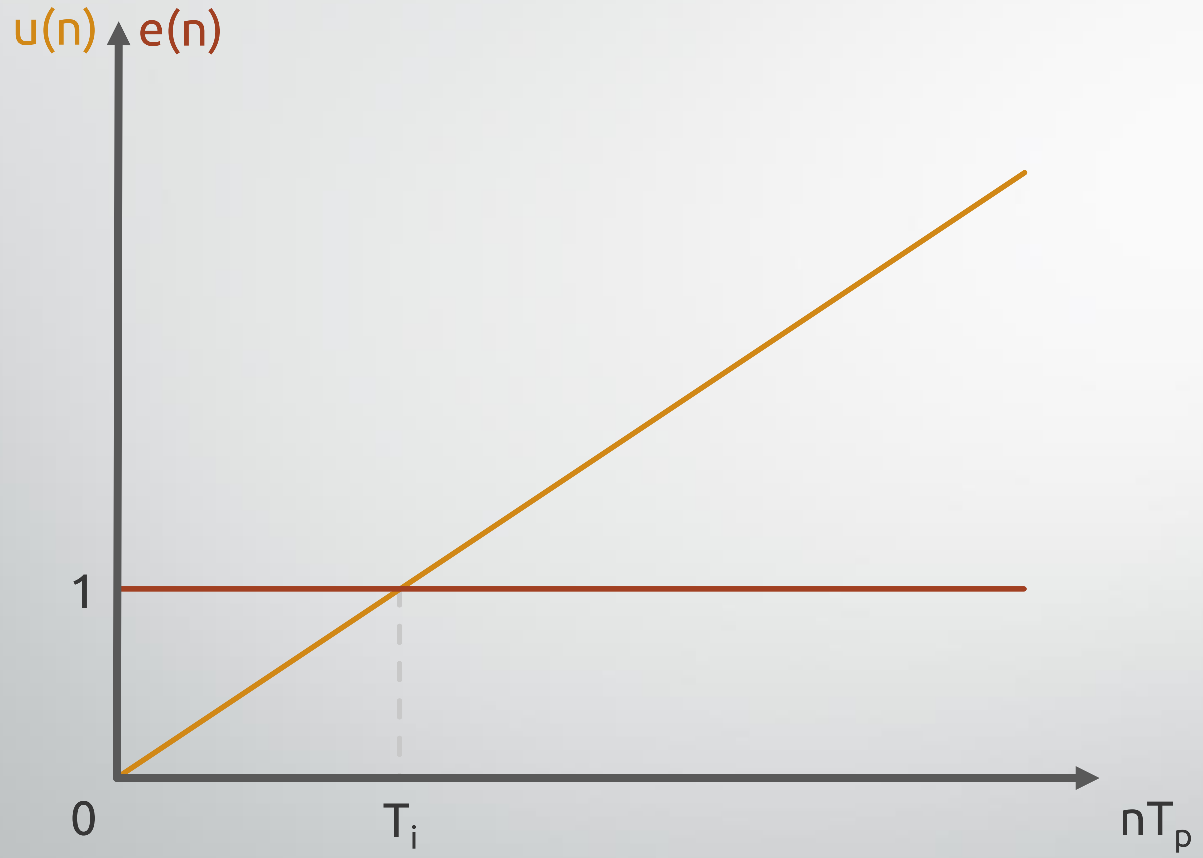
**Algorytm przyrostowy:**

$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \Delta e(n)$$

**Nastawy regulatora:**
$k_p$ – wzmocnienie regulatora [-], $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Algorytmy sterowania:** regulator typu I




**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^{n} e(k)$$

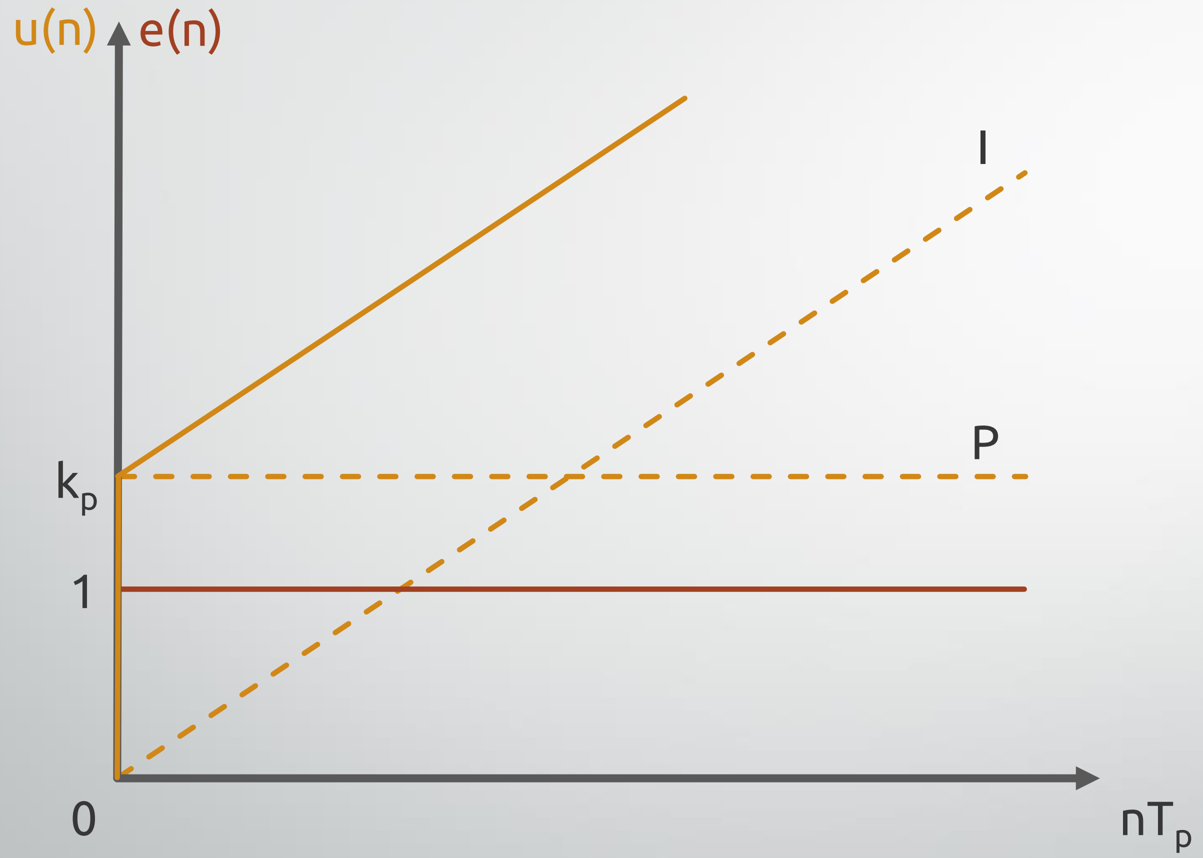
**Algorytm przyrostowy:**

$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = \frac{T_p}{T_i} e(n)$$

**Nastawy regulatora:**
$T_i$ – stała całkowania [s], $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Algorytmy sterowania:** regulator typu PI




**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p \left[ e(n) + \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^{n} e(k) \right]$$

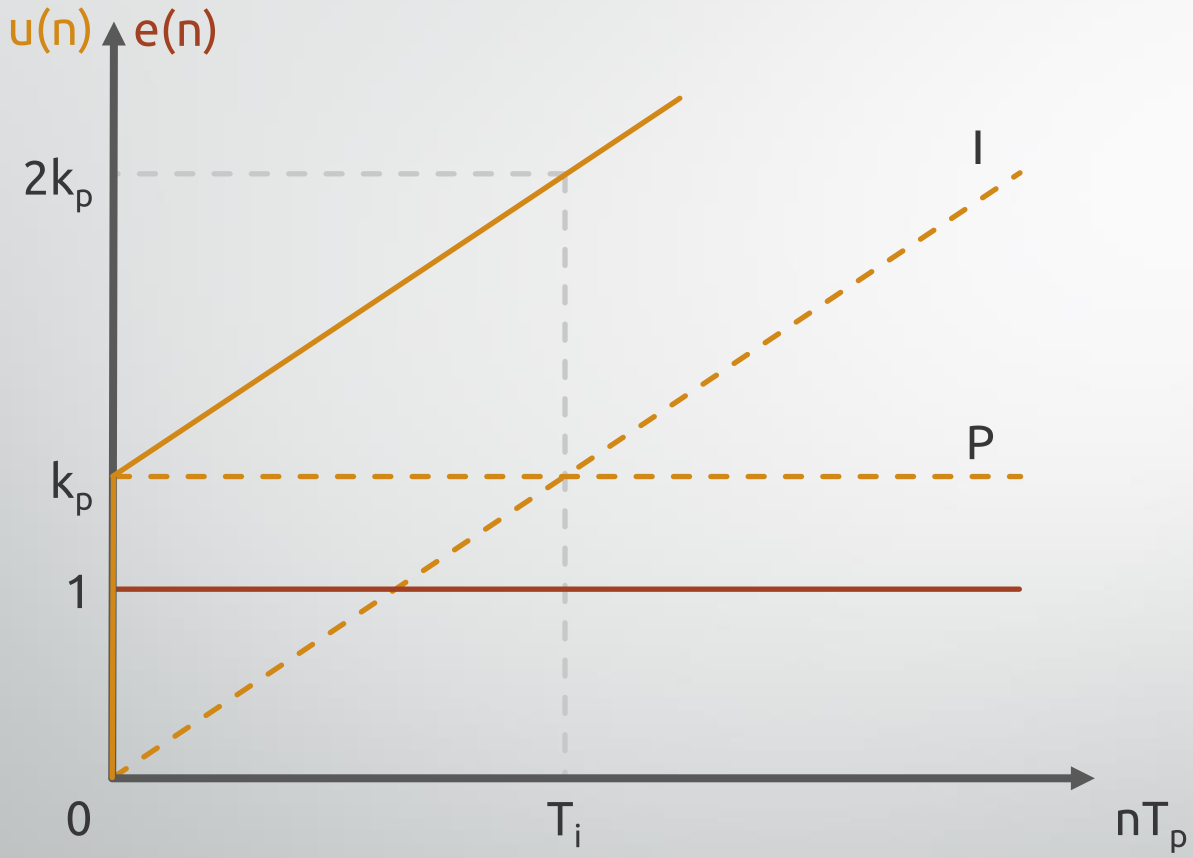
**Algorytm przyrostowy:**

$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[ \Delta e(n) + \frac{T_p}{T_i} e(n) \right]$$

**Nastawy regulatora:**
$k_p$ – wzmocnienie regulatora [-], $T_i$ – czas zdwojenia [s], $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Algorytmy sterowania:** regulator typu PI




**Czas zdwojenia:**

$$T_i = n_i T_p$$

takie, że:

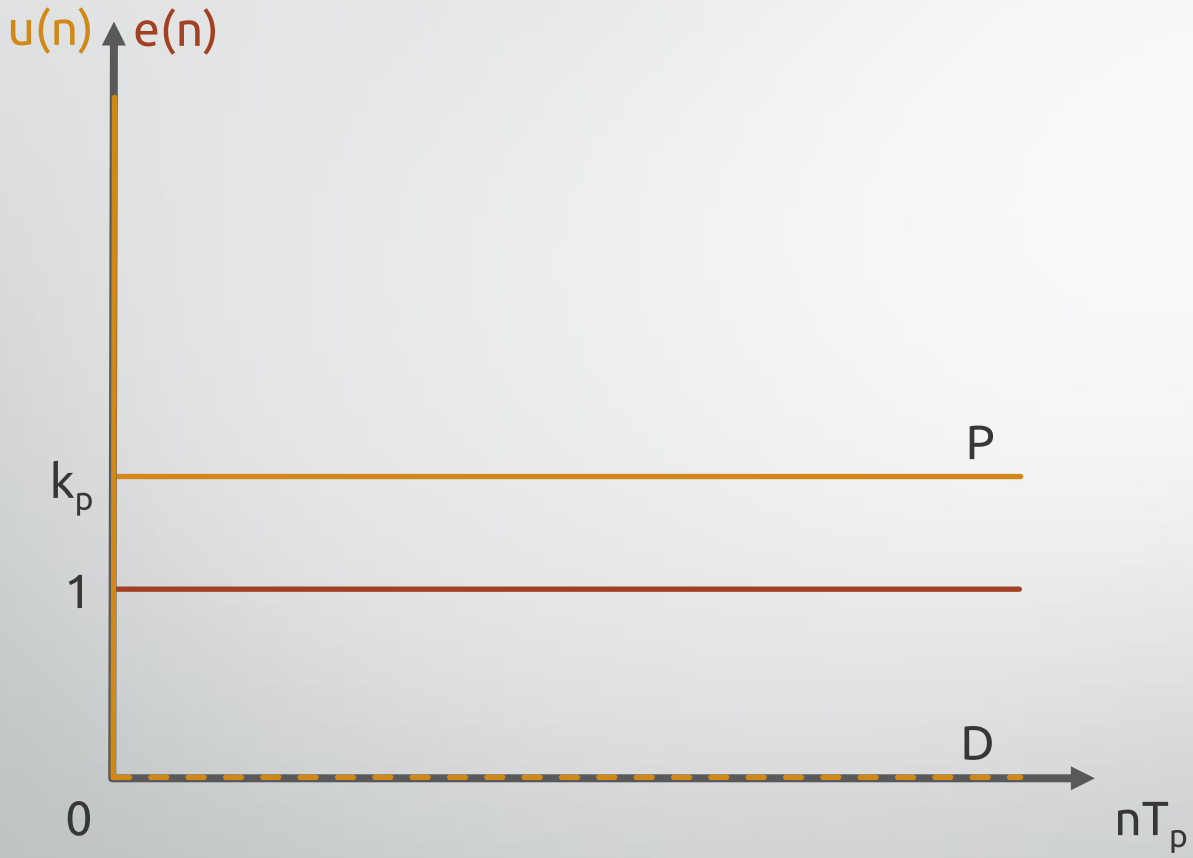
$$u_I(n_i) = u_P(n_i)$$

dla:

$$e(n) = \mathbf{1}(n)$$

**Nastawy regulatora:**
$k_p$ – wzmocnienie regulatora [-], $T_i$ – czas zdwojenia [s], $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Algorytmy sterowania:** regulator typu PD




**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p \left[ e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

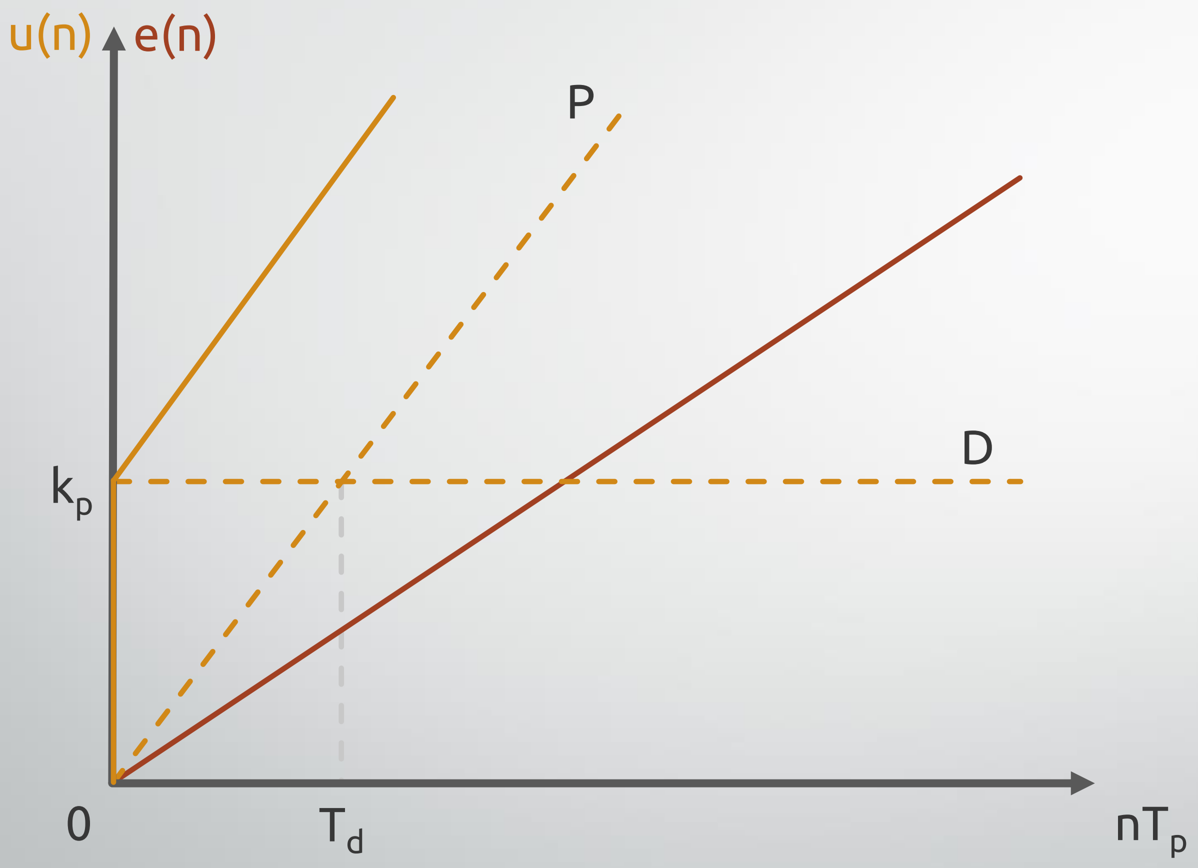
**Algorytm przyrostowy:**

$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[ \Delta e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta^2 e(n) \right]$$

**Nastawy regulatora:**
$k_p$ – wzmocnienie regulatora [-], $T_d$ – czas wyprzedzenia [s], $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Algorytmy sterowania:** regulator typu PD




**Czas wyprzedzenia:**

$$T_d = n_d T_p$$

takie, że:

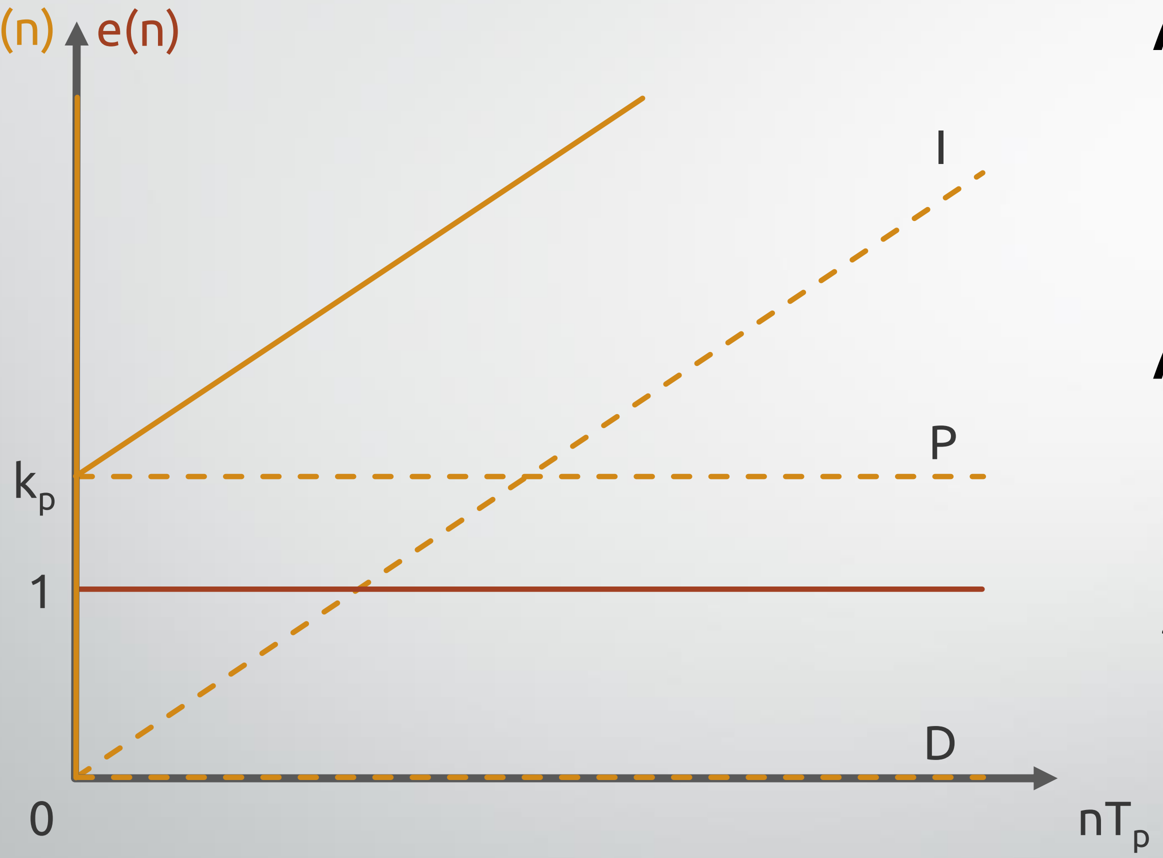
$$u_D(n_d) = u_P(n_d)$$

dla:

$$e(n) = t \cdot \mathbf{1}(n)$$

**Nastawy regulatora:**
$k_p$ – wzmocnienie regulatora [-], $T_d$ – czas wyprzedzenia [s], $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Algorytmy sterowania:** regulator typu PID




**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p \left[ e(n) + \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^{n} e(k) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

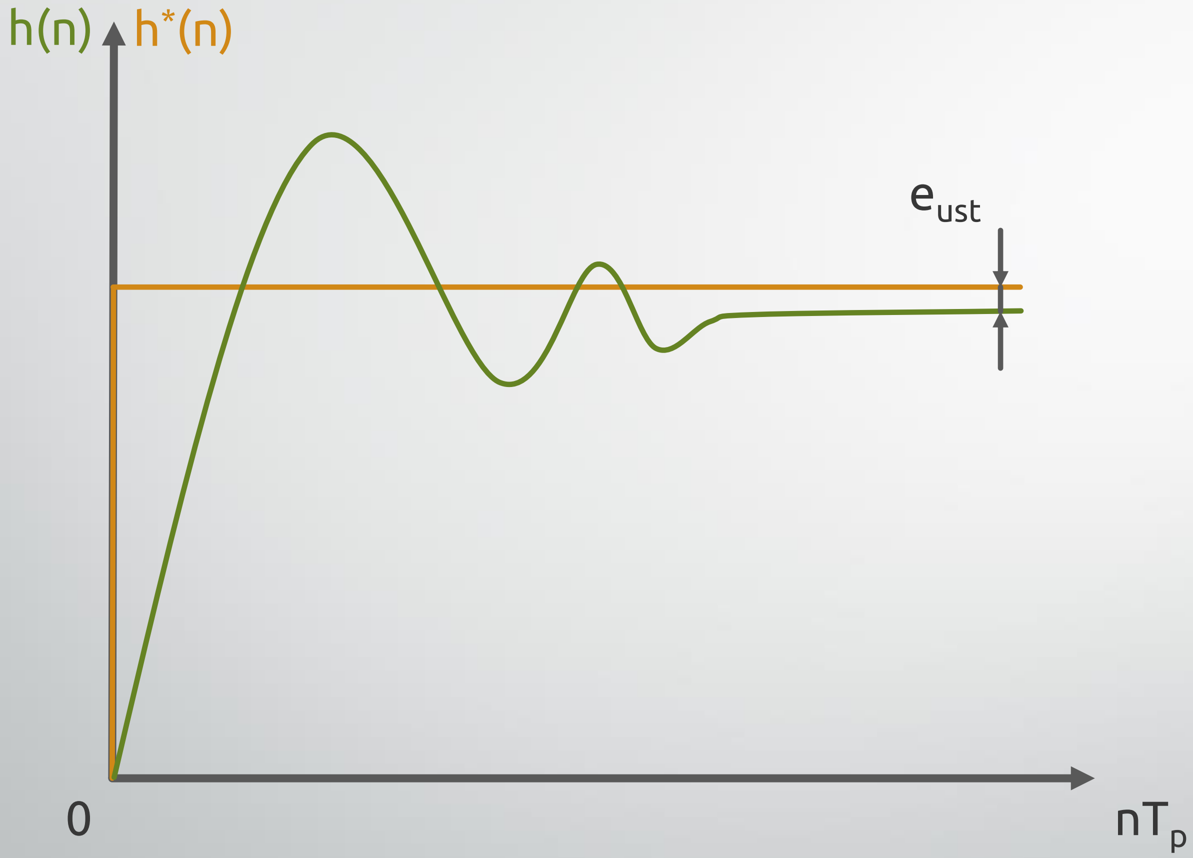
**Algorytm przyrostowy:**

$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[ \Delta e(n) + \frac{T_p}{T_i} e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta^2 e(n) \right]$$

**Nastawy regulatora:**
$k_p$ – wzmocnienie regulatora [-], $T_d$ – czas wyprzedzenia [s], $T_i$ – czas zdwojenia [s], $T_p$ – okres próbkowania [s].

# **Algorytmy sterowania:** wskaźniki jakości



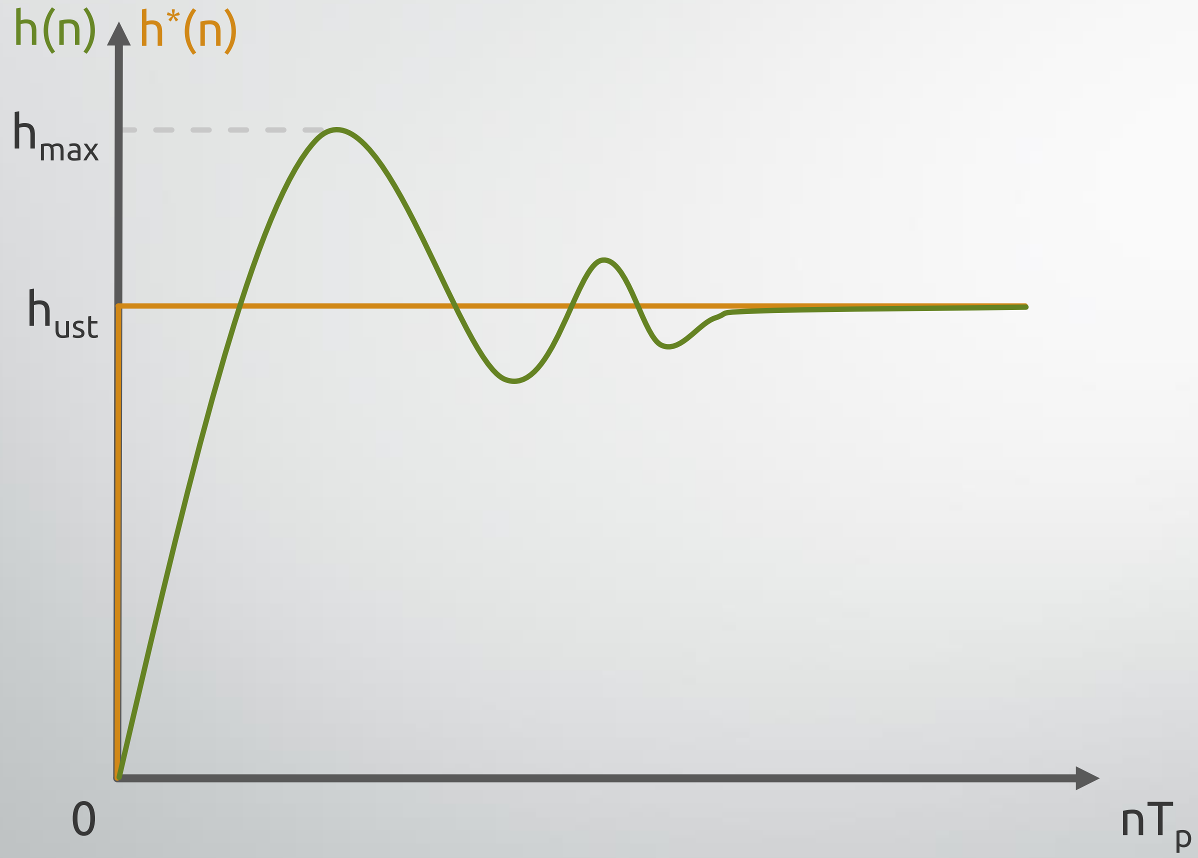

**Uchyb ustalony:**

$$e_{ust} = \lim_{n \to \infty} e(n)$$

lub:

$$e_{ust} = \lim_{n \to \infty} \left( h^*(n) - h(n) \right)$$

# **Algorytmy sterowania:** wskaźniki jakości

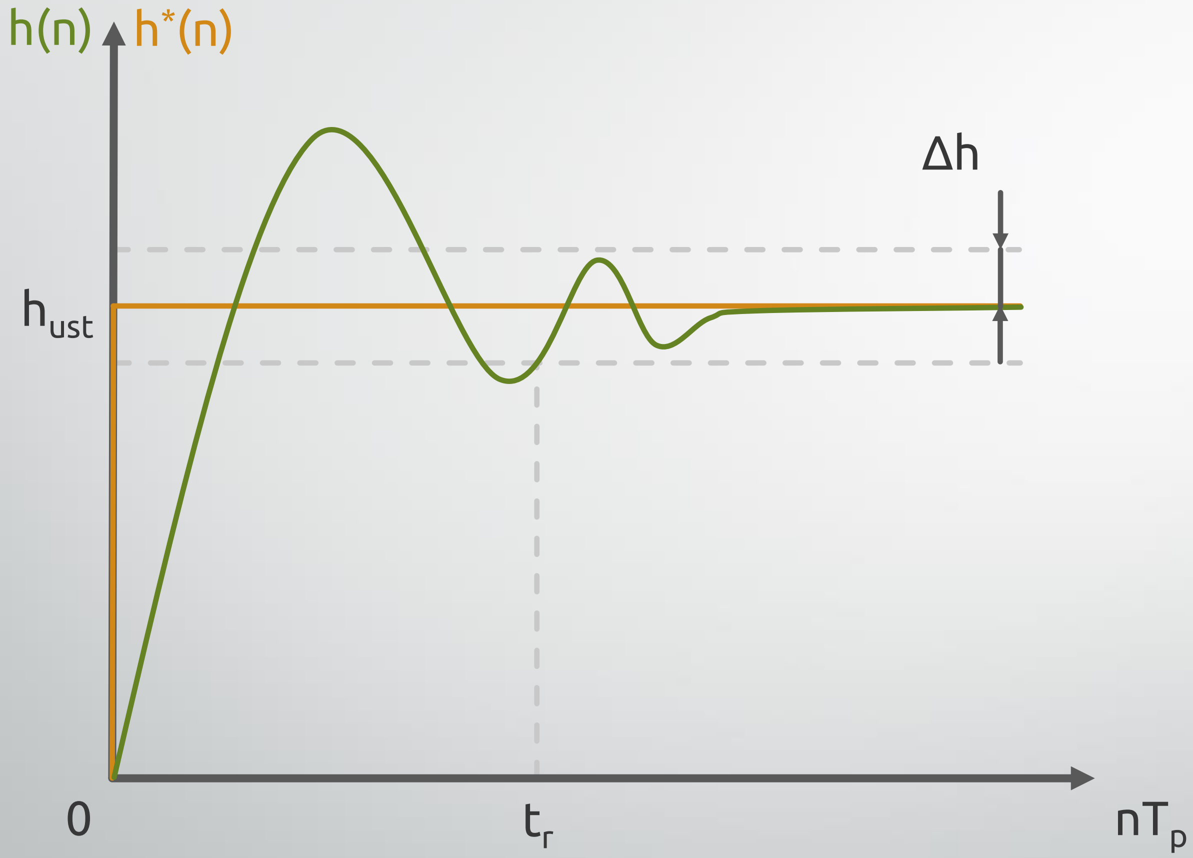



**Przeregulowanie:**

$$h_{ust} = \lim_{n \to \infty} h(n)$$

$$\kappa = \frac{h_{max} - h_{ust}}{h_{ust}} \cdot 100\%$$

# **Algorytmy sterowania:** wskaźniki jakości




**Czas regulacji:**

$$t_r = n_r T_p$$

gdzie:

$$\bigwedge_{n>n_r} h_{ust} - \Delta h \leq h(n) \leq h_{ust} + \Delta h$$

$$\Delta h = (0{,}01 \div 0{,}05) \cdot h_{ust}$$

# **Algorytmy sterowania:** wskaźniki jakości

- Całkowe wskaźniki dokładności regulacji:
  - ✓ układy ciągłe:

$$I_{|e|} = \int_0^t |e(t)|dt \qquad I_{e^2} = \int_0^t e^2(t)dt$$

  - ✓ układy cyfrowe:

$$I_{|e|} = T_p \sum_{k=0}^{n} |e(k)| \qquad I_{e^2} = T_p \sum_{k=0}^{n} e^2(k)$$

# **Algorytmy sterowania:** wskaźniki jakości

- Całkowe wskaźniki kosztów regulacji:
  - układy ciągłe:

$$I_{|u|} = \int_0^t |u(t)|dt \qquad I_{u^2} = \int_0^t u^2(t)dt$$

  - układy cyfrowe:

$$I_{|u|} = T_p \sum_{k=0}^{n} |u(k)| \qquad I_{u^2} = T_p \sum_{k=0}^{n} u^2(k)$$

# Implementacja UAR

**Krok 0:** Określenie wartości zadanej oraz wartości początkowej poziomu substancji.

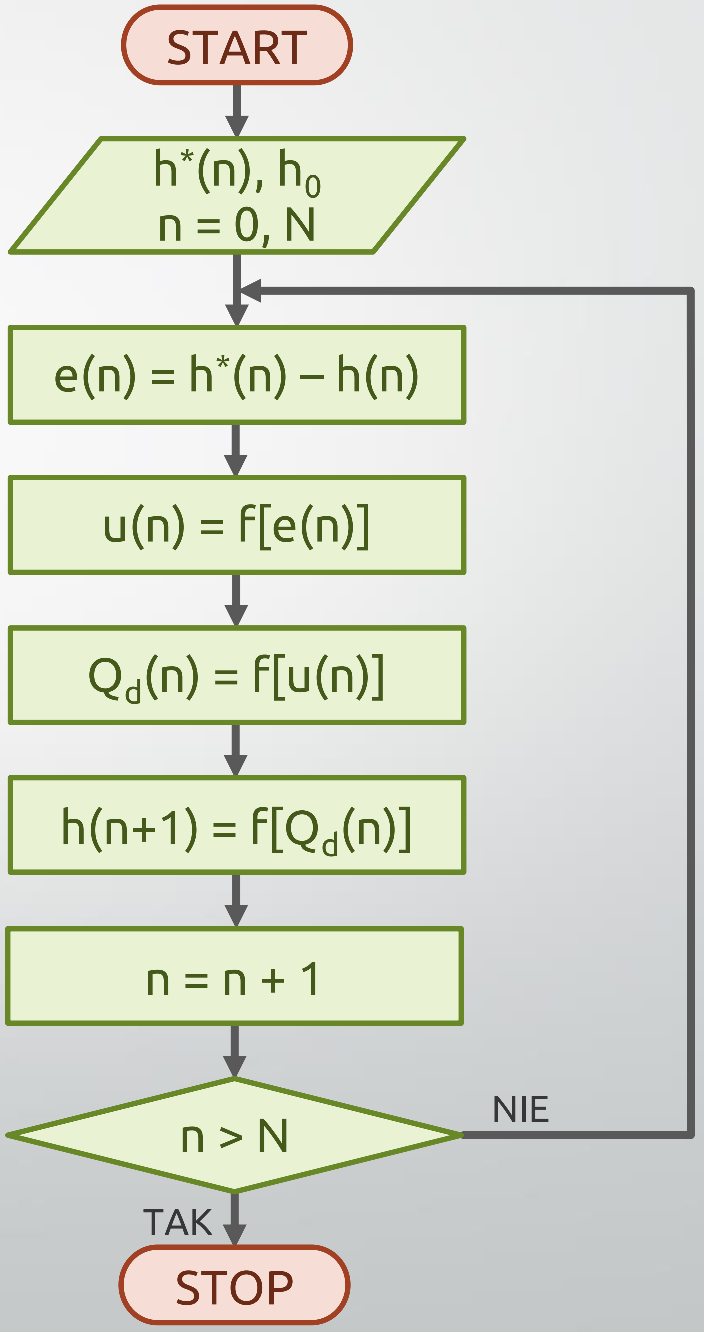
**Krok 1:** Wyznaczenie wartości uchybu regulacji.

**Krok 2:** Wyznaczenie wartości wielkości sterującej.

**Krok 3:** Wyznaczenie wartości natężenia dopływu.

**Krok 4:** Wyznaczenie wartości poziomu substancji.

**Krok 5:** Jeżeli osiągnięto liczbę kroków symulacji to STOP, w przeciwnym przypadku przejdź do kroku 1.



# Dziękuję za uwagę

**Konsultacje:**

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl