



Podstawy automatyki

Wykład 2: algorytmy sterowania

dr inż. Przemysław Zakrzewski

Instytut Informatyki

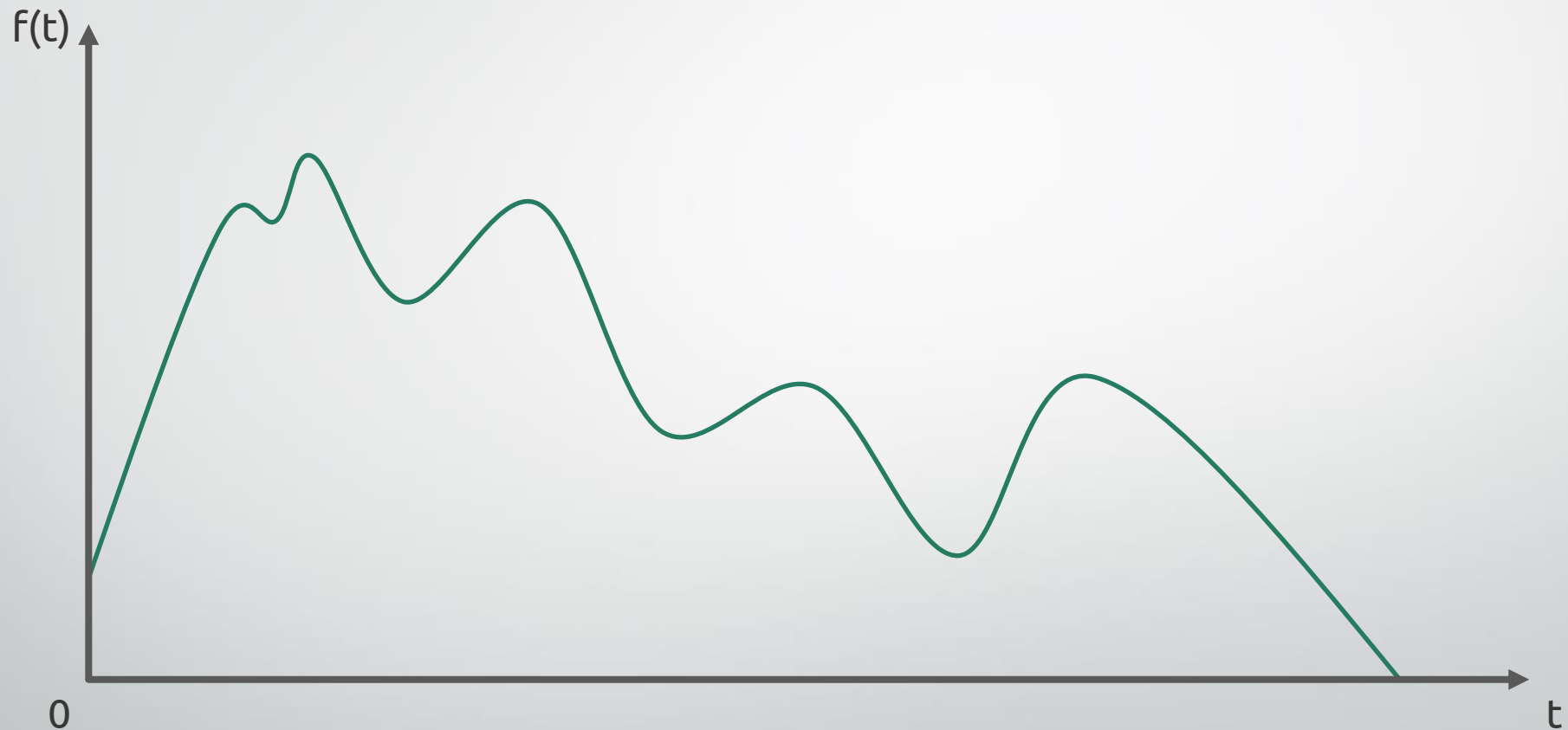
Politechnika Poznańska

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl

Plan wykładu

- Sterowanie:
 - ✓ sygnał analogowy (ciągły), dyskretny i cyfrowy,
 - ✓ obiekt sterowania,
 - ✓ układ otwarty,
 - ✓ układ zamknięty – układ automatycznej regulacji UAR.
- Opis dynamiki układów:
 - ✓ równania różniczkowe,
 - ✓ równania różnicowe.
- Algorytmy sterowania:
 - ✓ regulatory klasyczne typu: P, I, PI, PD, PID,
 - ✓ wskaźniki jakości.
- Implementacja UAR.

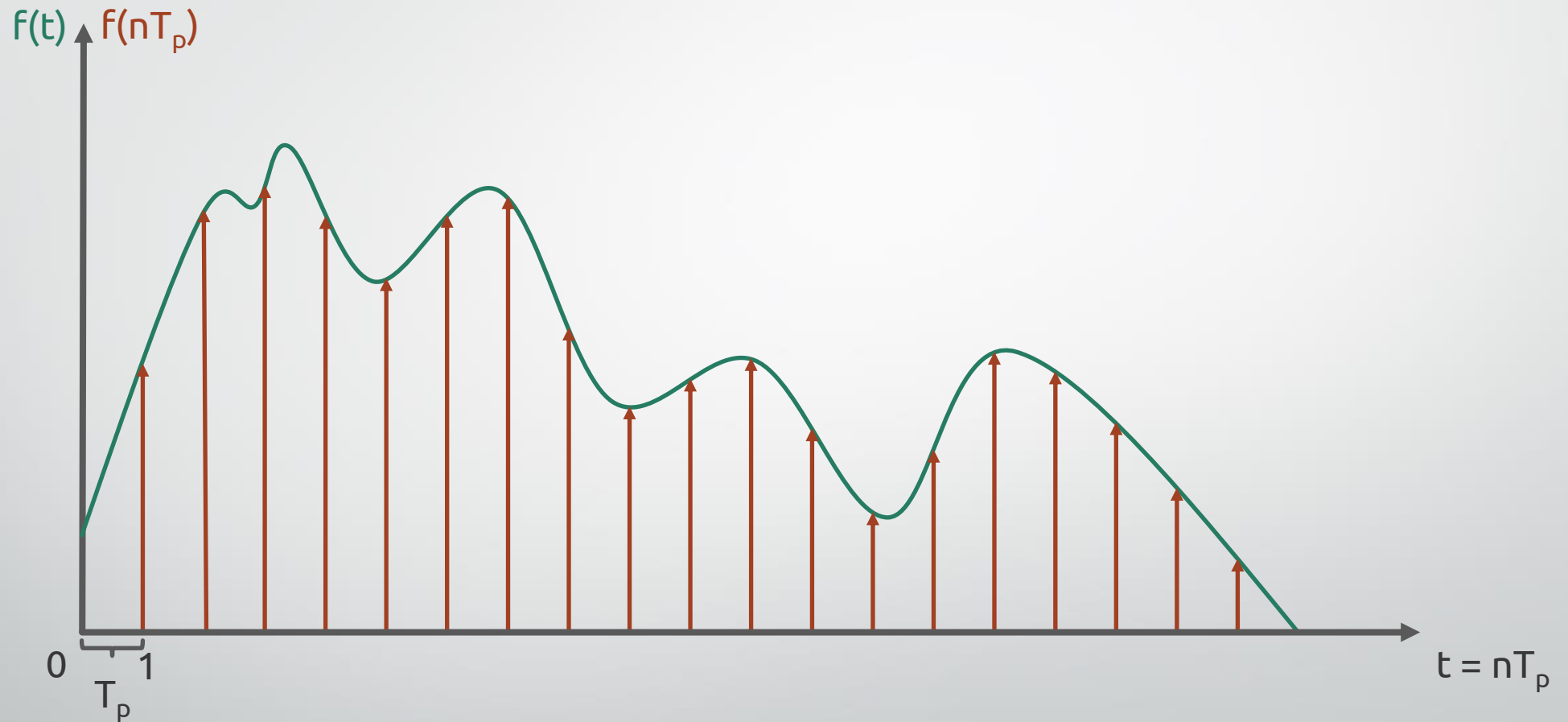
Sterowanie: sygnał analogowy (ciągły)



Oznaczenia:

$f(t)$ – sygnał analogowy (ciągły), t – czas [s].

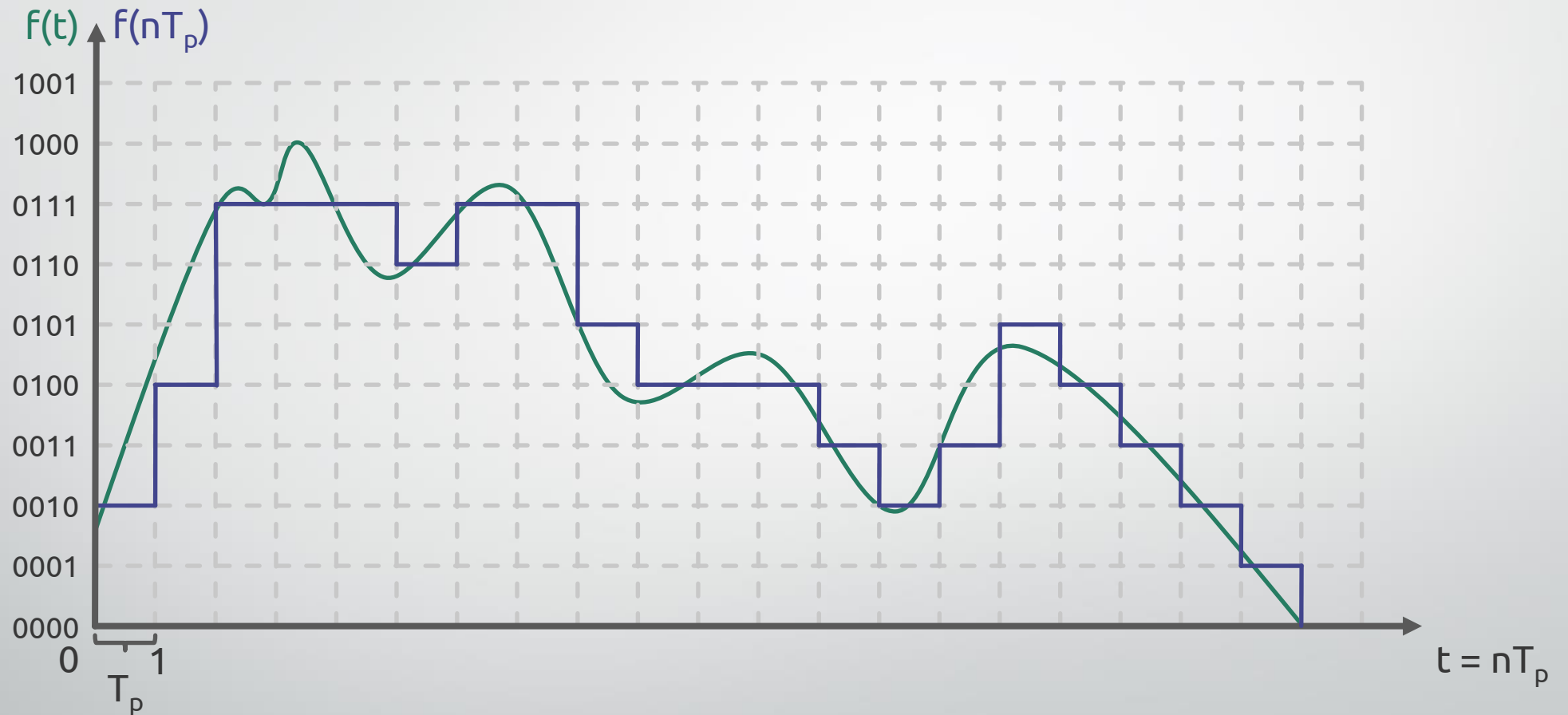
Sterowanie: sygnał dyskretny



Oznaczenia:

$f(t)$ – sygnał analogowy (ciągły), $f(nT_p)$ – sygnał dyskretny, t – czas [s], n – chwila próbkowania, T_p – okres próbkowania [s].

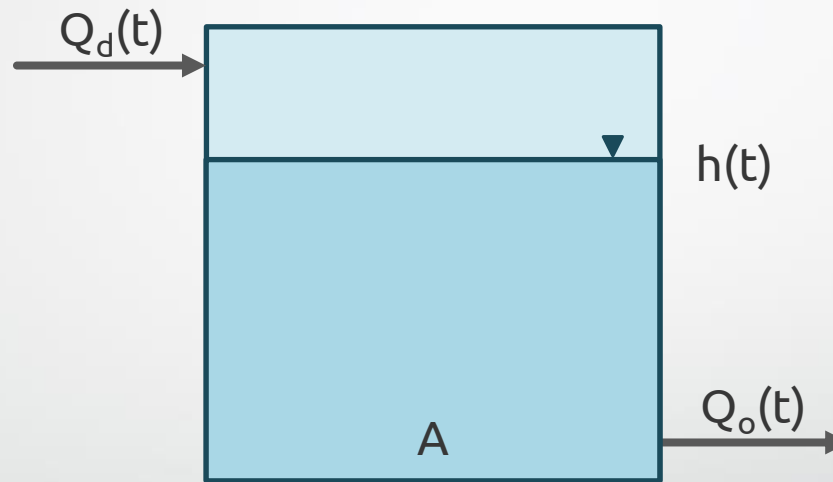
Sterowanie: sygnał cyfrowy



Oznaczenia:

$f(t)$ – sygnał analogowy (ciągły), $f(nT_p)$ – sygnał cyfrowy, t – czas [s], n – chwila próbkowania, T_p – okres próbkowania [s].

Sterowanie: obiekt sterowania



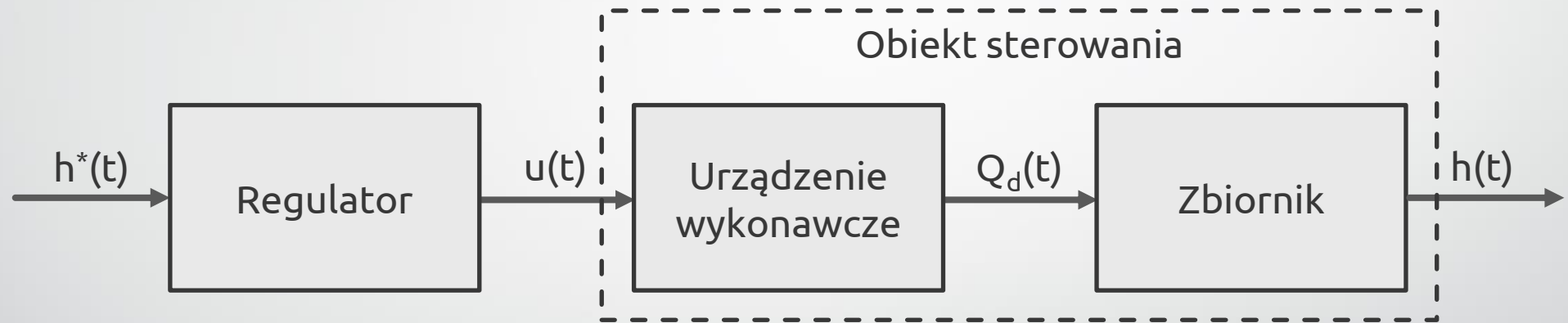
Zmienne procesowe:

$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [m^2].

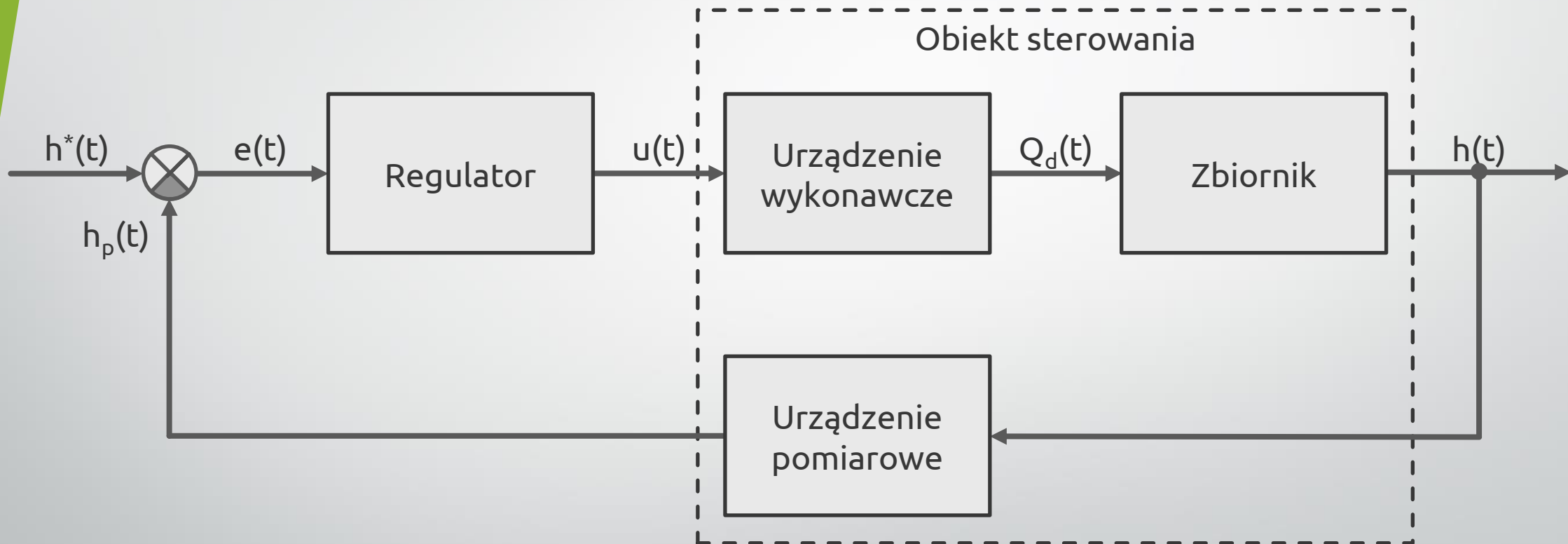
Sterowanie: układ otwarty



Zmienne procesowe:

$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $h^*(t)$ – wartość zadana poziomowi substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $u(t)$ – wielkość sterująca (np. natężenie prądu, napięcie).

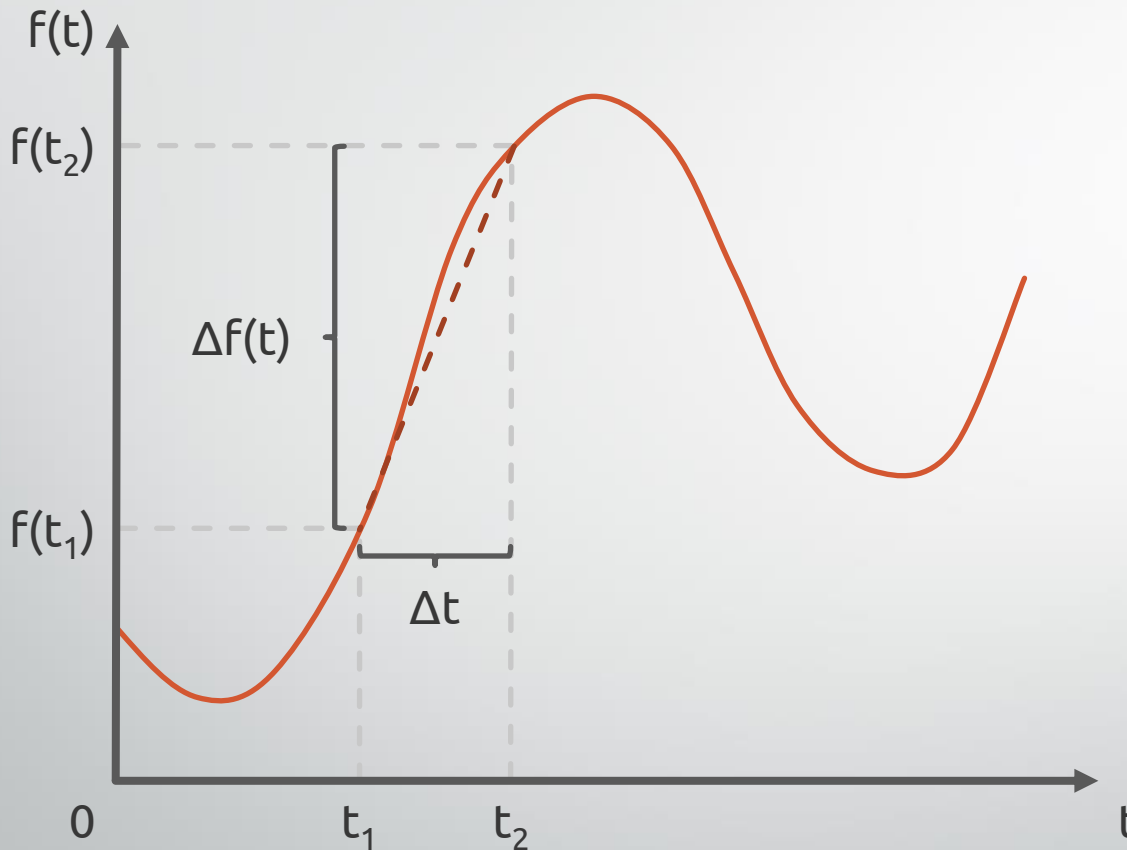
Sterowanie: układ zamknięty – UAR



Zmienne procesowe:

$e(t)$ – uchyb regulacji [m], $h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $h^*(t)$ – wartość zadana poziomu substancji w zbiorniku [m], $h_p(t)$ – wartość zmierzona poziomu substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $u(t)$ – wielkość sterująca (np. natężenie prądu, napięcie).

Opis dynamiki układów: równania różniczkowe



Iloraz różnicowy:

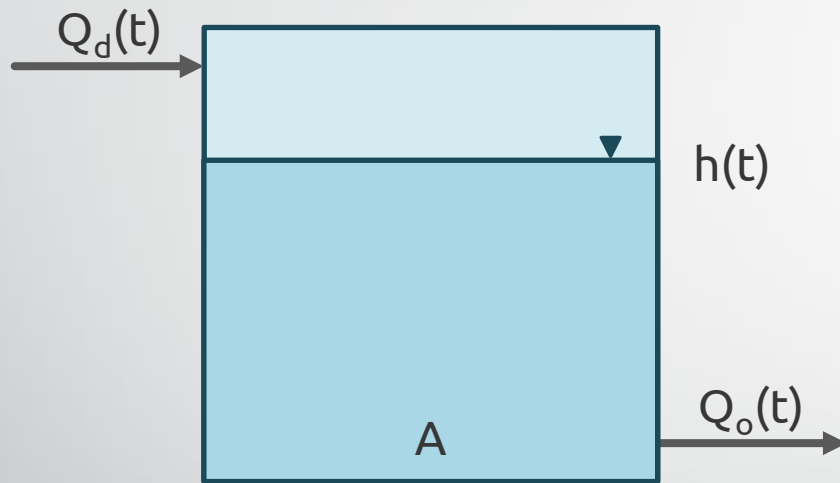
$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pochodna funkcji:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

Opis dynamiki układów: równania różniczkowe



Bilans masy całkowitej:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

Odptyw swobodny:

$$Q_o(t) = \beta \sqrt{h(t)}$$

$$A \frac{dh(t)}{dt} + \beta \sqrt{h(t)} = Q_d(t)$$

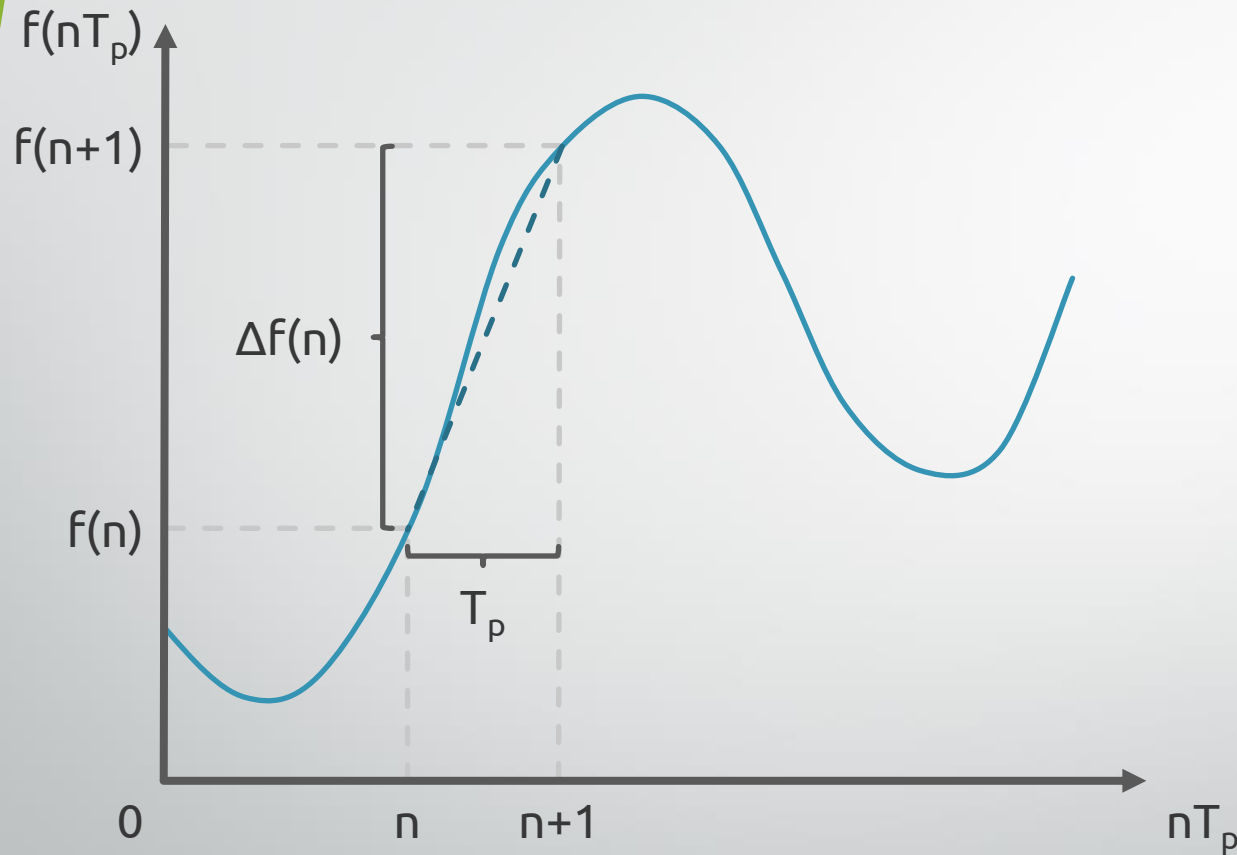
Zmienne procesowe:

$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [m^2], β – współczynnik wypływu [$\text{m}^{5/2}/\text{s}$].

Opis dynamiki układów: równania różnicowe



Iloraz różnicowy:

$$\frac{\Delta f(n)}{T_p} = \frac{f(n+1) - f(n)}{T_p}$$

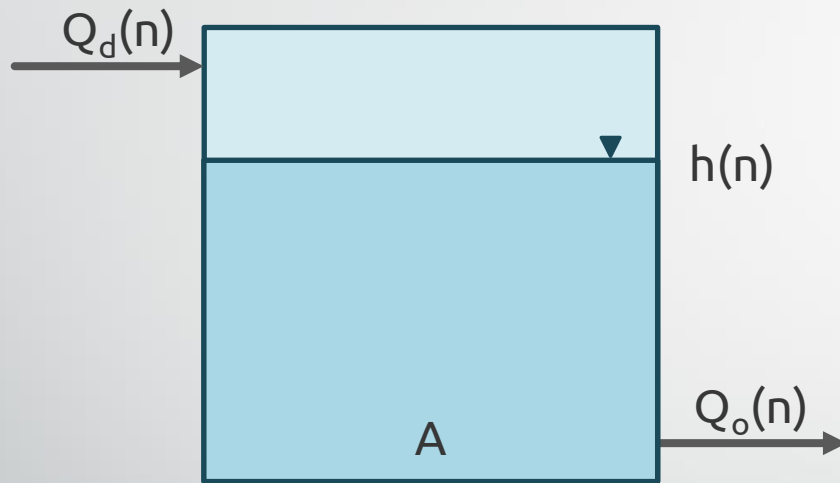
Pochodna funkcji:

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \frac{\Delta f(n)}{T_p}$$

Parametry:

T_p – okres próbkowania [s].

Opis dynamiki układów: równania różnicowe



Bilans masy całkowitej:

$$A \frac{\Delta h(n)}{T_p} = Q_d(n) - Q_o(n)$$

Odptyw swobodny:

$$Q_o(n) = \beta \sqrt{h(n)}$$

$$A \frac{\Delta h(n)}{T_p} + \beta \sqrt{h(n)} = Q_d(n)$$

Zmienne procesowe:

$h(n)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(n)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(n)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [m^2], β – współczynnik wypływu [$\text{m}^{5/2}/\text{s}$].

Opis dynamiki układów: równania różnicowe

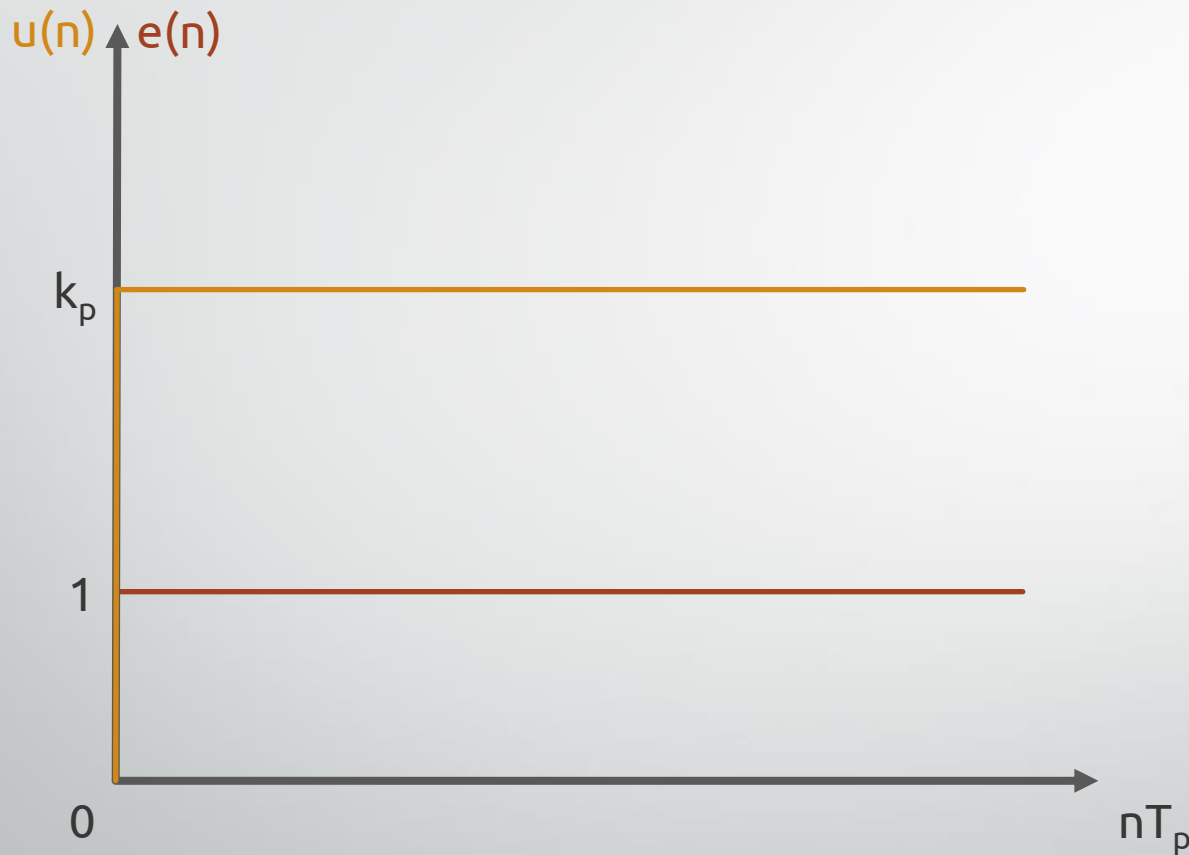
- Równanie różnicowe:

$$A \frac{\Delta h(n)}{T_p} + \beta \sqrt{h(n)} = Q_d(n)$$

- Rozwiązanie równania różnicowego – rekurencja:

$$\begin{cases} h(0) = h_0 \\ h(n+1) = \frac{1}{A} \left(-\beta \sqrt{h(n)} + Q_d(n) \right) T_p + h(n) \end{cases}$$

Algorytmy sterowania: regulator typu P



Algorytm pozycyjny:

$$u(n) = k_p e(n)$$

Algorytm przyrostowy:

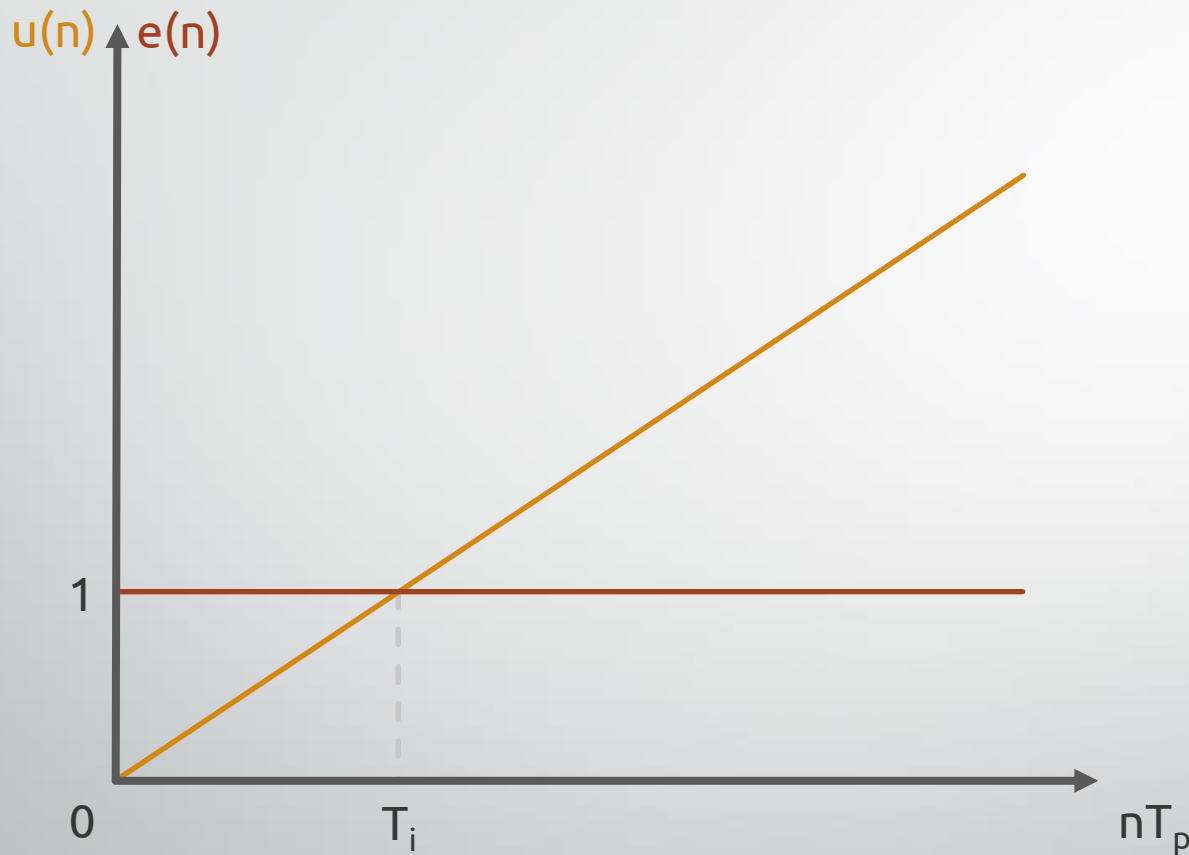
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n - 1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \Delta e(n)$$

Nastawy regulatora:

k_p – wzmacnienie regulatora [-], T_p – okres próbkowania [s].

Algorytmy sterowania: regulator typu I



Algorytm pozycyjny:

$$u(n) = \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^n e(k)$$

Algorytm przyrostowy:

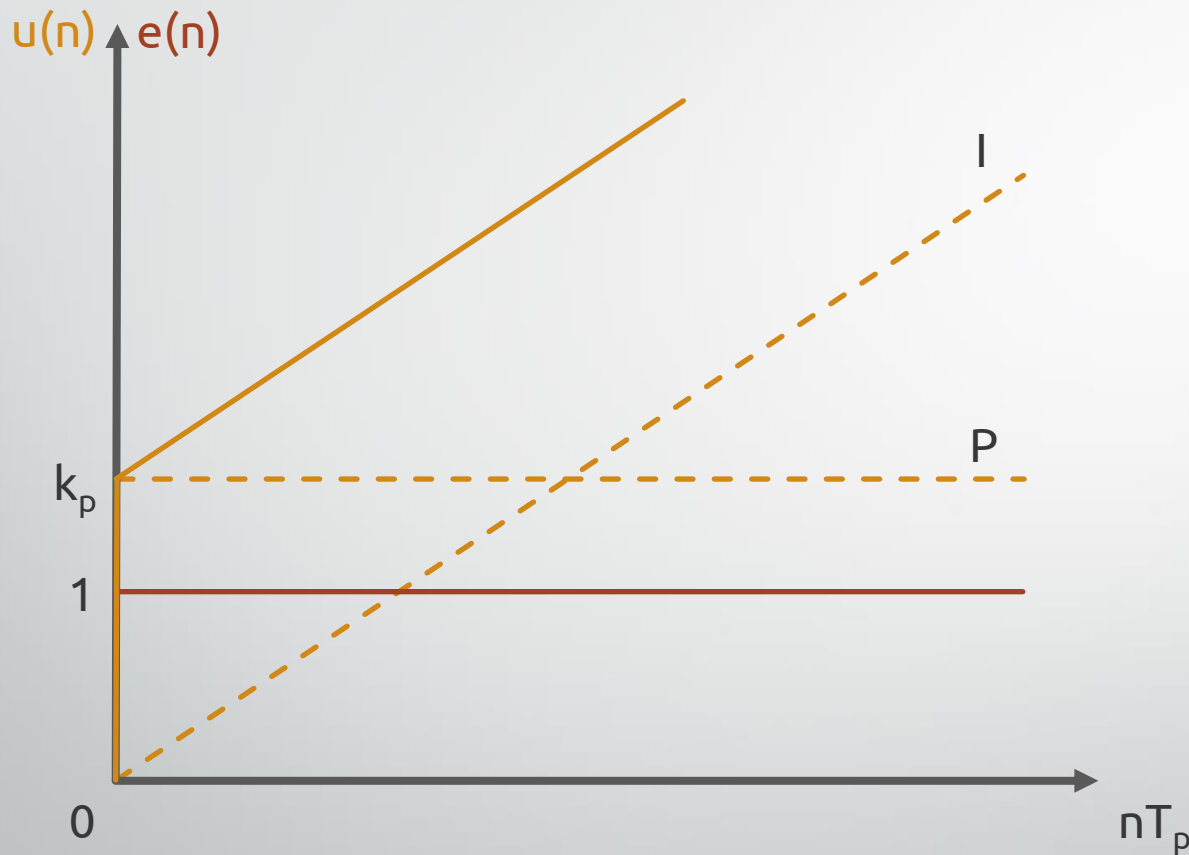
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = \frac{T_p}{T_i} e(n)$$

Nastawy regulatora:

T_i – stała całkowania [s], T_p – okres próbkowania [s].

Algorytmy sterowania: regulator typu PI



Algorytm pozycyjny:

$$u(n) = k_p \left[e(n) + \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^n e(k) \right]$$

Algorytm przyrostowy:

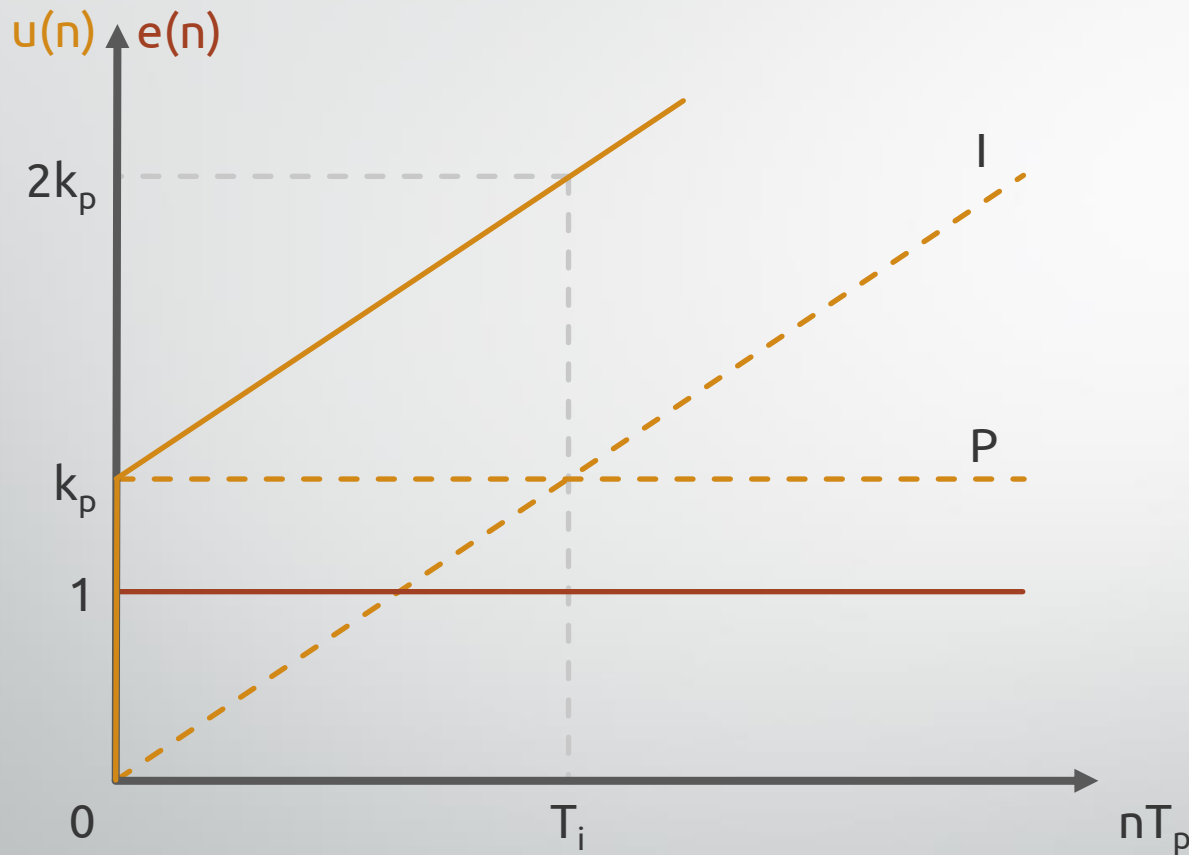
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[\Delta e(n) + \frac{T_p}{T_i} e(n) \right]$$

Nastawy regulatora:

k_p – wzmacnienie regulatora [-], T_i – czas zdwojenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Algorytmy sterowania: regulator typu PI



Czas zdwojenia:

$$T_i = n_i T_p$$

takie, że:

$$u_I(n_i) = u_P(n_i)$$

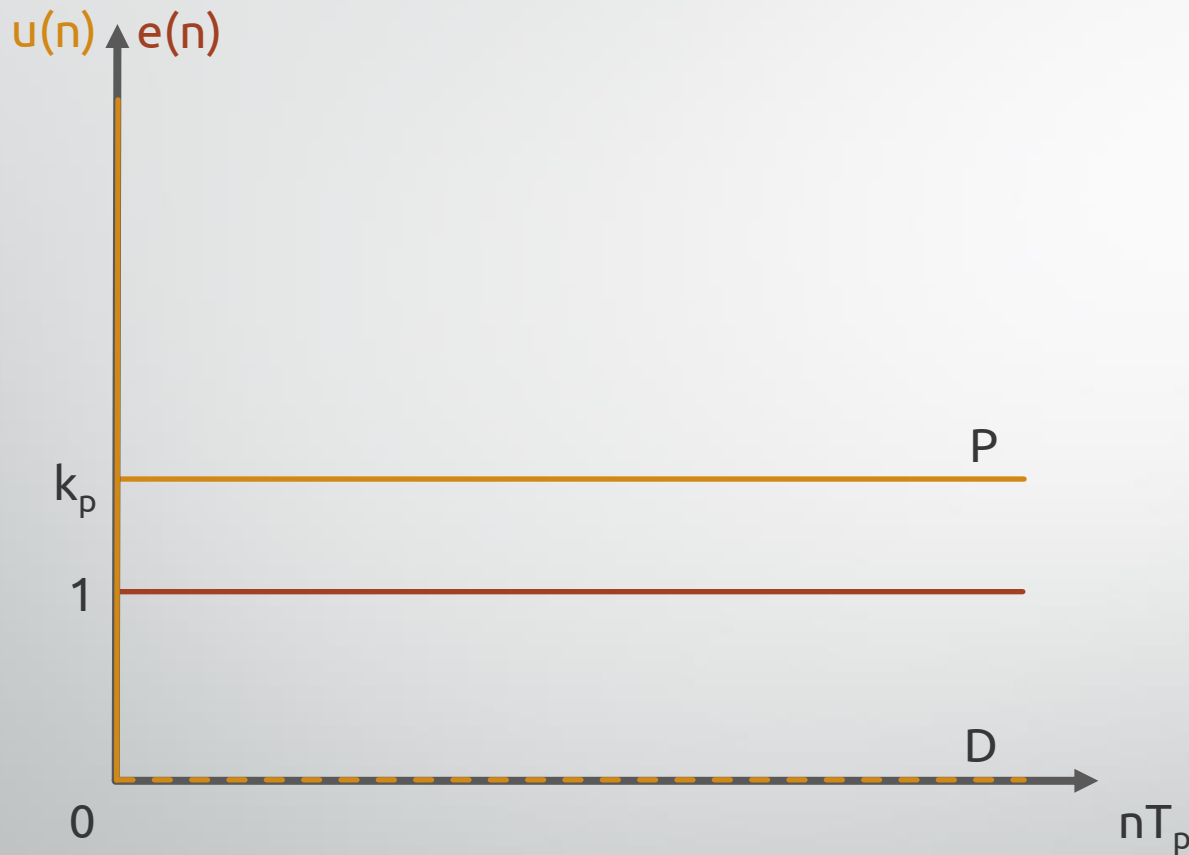
dla:

$$e(n) = \mathbf{1}(n)$$

Nastawy regulatora:

k_p – wzmacnienie regulatora [-], T_i – czas zdwojenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Algorytmy sterowania: regulator typu PD



Algorytm pozycyjny:

$$u(n) = k_p \left[e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

Algorytm przyrostowy:

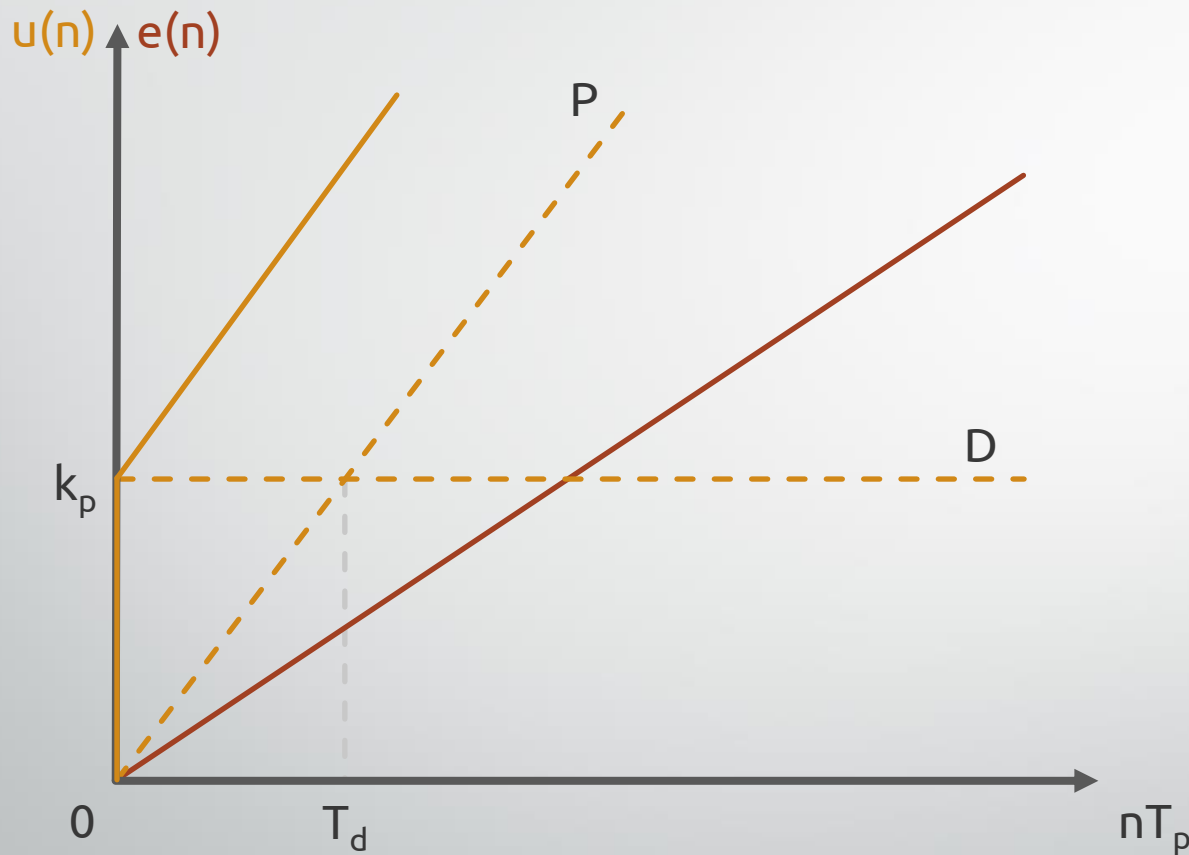
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[\Delta e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta^2 e(n) \right]$$

Nastawy regulatora:

k_p – wzmacnienie regulatora [-], T_d – czas wyprzedzenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Algorytmy sterowania: regulator typu PD



Czas wyprzedzenia:

$$T_d = n_d T_p$$

takie, że:

$$u_D(n_d) = u_P(n_d)$$

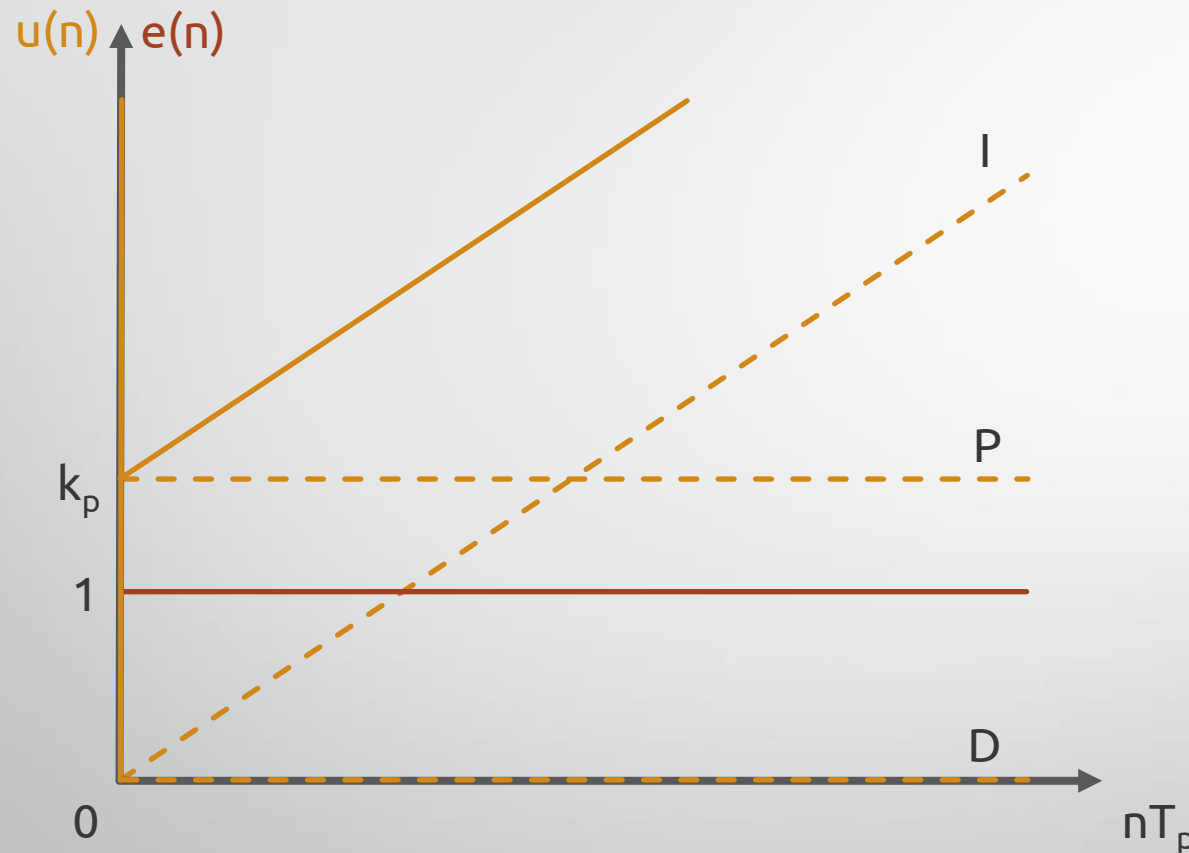
dla:

$$e(n) = t \cdot \mathbf{1}(n)$$

Nastawy regulatora:

k_p – wzmacnienie regulatora [-], T_d – czas wyprzedzenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Algorytmy sterowania: regulator typu PID



Algorytm pozycyjny:

$$u(n) = k_p \left[e(n) + \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^n e(k) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

Algorytm przyrostowy:

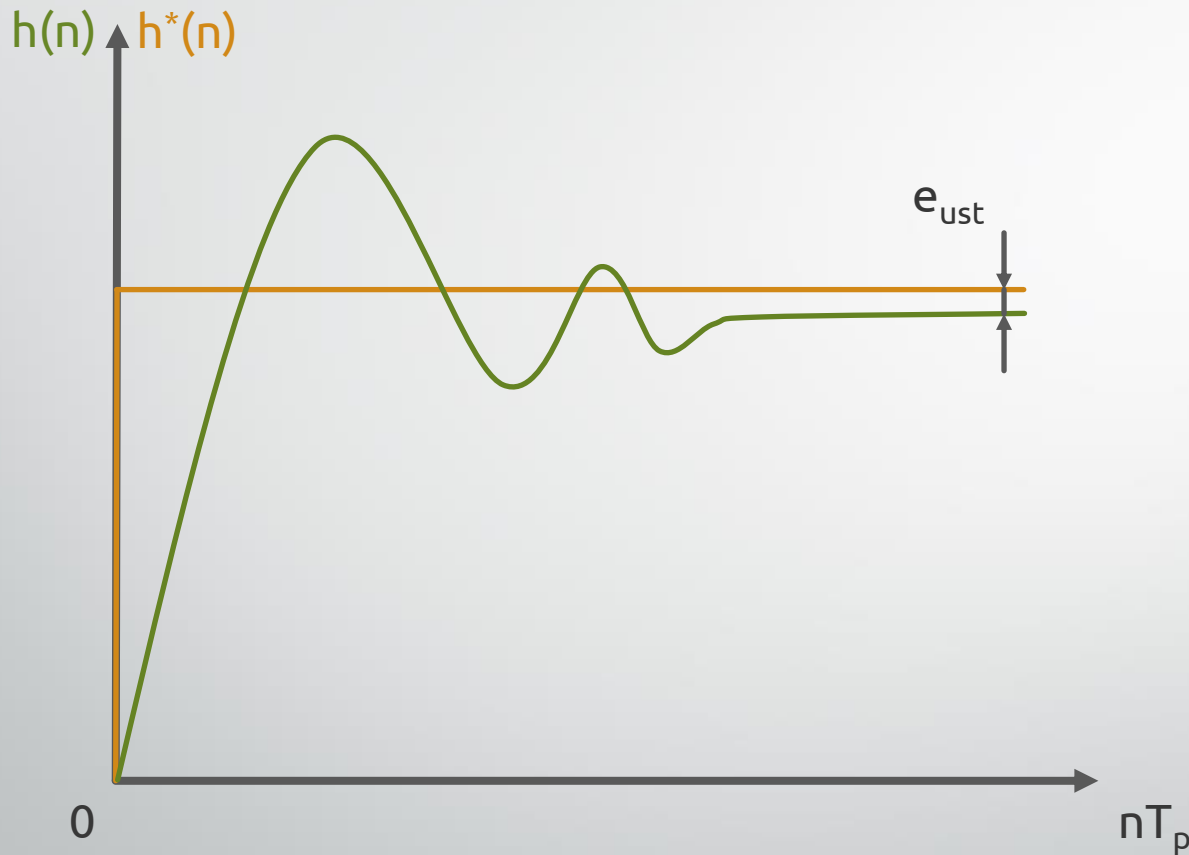
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[\Delta e(n) + \frac{T_p}{T_i} e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta^2 e(n) \right]$$

Nastawy regulatora:

k_p – wzmacnienie regulatora [-], T_d – czas wyprzedzenia [s], T_i – czas zdwojenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości



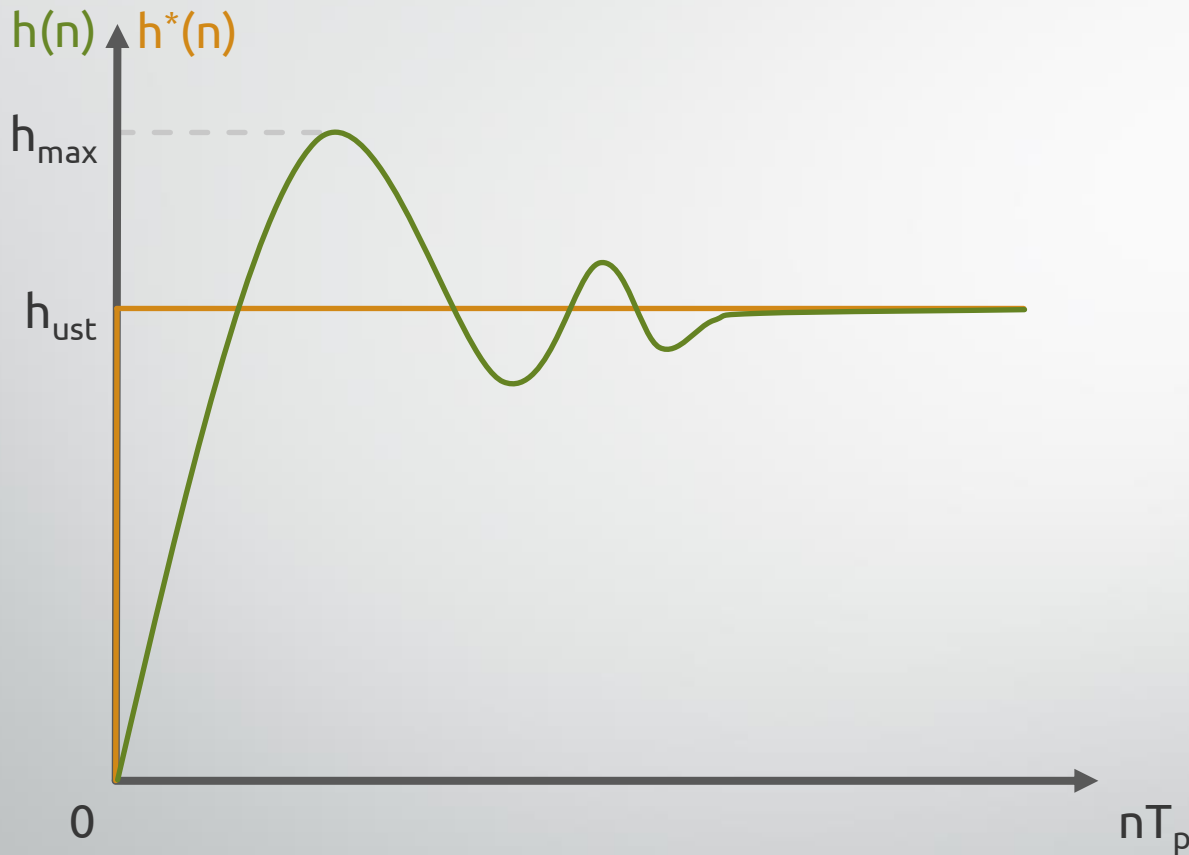
Uchyb ustalony:

$$e_{ust} = \lim_{n \rightarrow \infty} e(n)$$

lub:

$$e_{ust} = \lim_{n \rightarrow \infty} (h^*(n) - h(n))$$

Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości

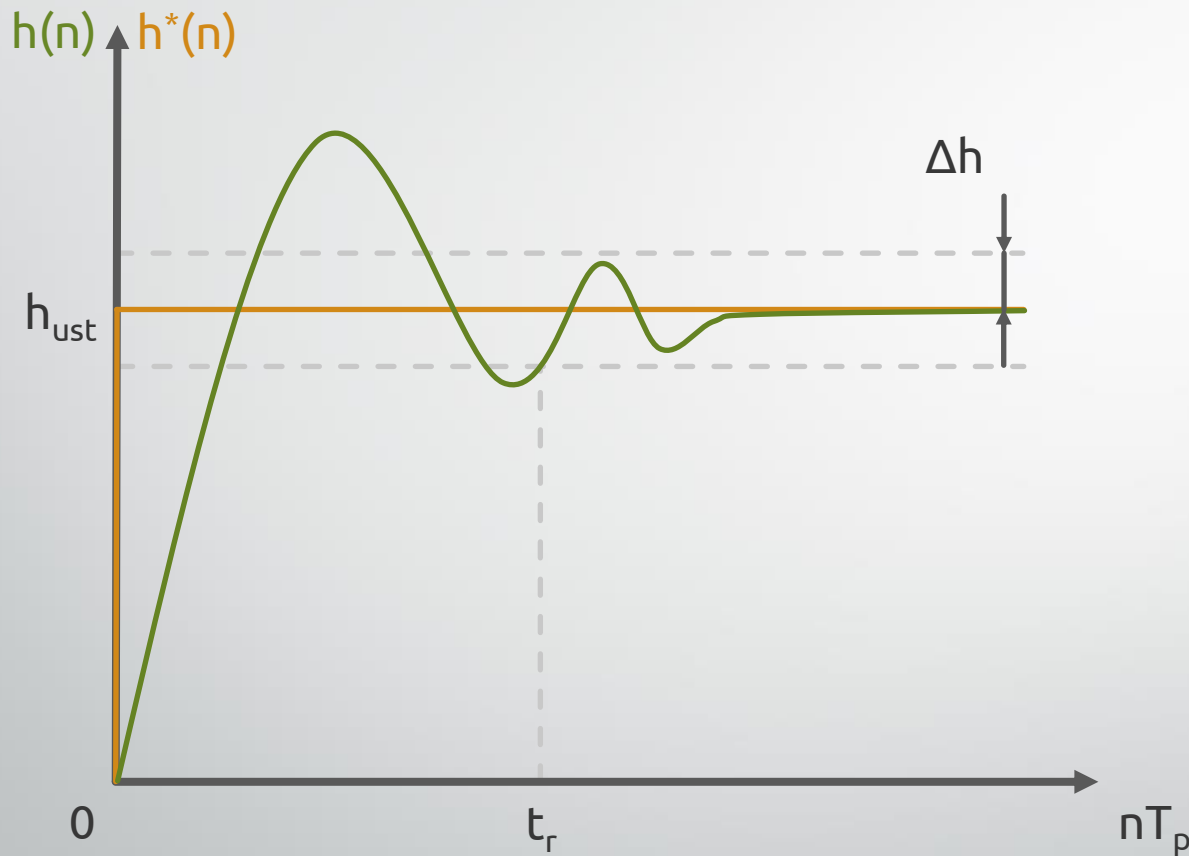


Przeregulowanie:

$$h_{ust} = \lim_{n \rightarrow \infty} h(n)$$

$$\kappa = \frac{h_{\max} - h_{ust}}{h_{ust}} \cdot 100\%$$

Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości



Czas regulacji:

$$t_r = n_r T_p$$

gdzie:

$$\bigwedge_{n > n_r} h_{ust} - \Delta h \leq h(n) \leq h_{ust} + \Delta h$$

$$\Delta h = (0,01 \div 0,05) \cdot h_{ust}$$

Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości

- Całkowe wskaźniki dokładności regulacji:
 - ✓ układy ciągłe:

$$I_{|e|} = \int_0^t |e(t)| dt$$

$$I_{e^2} = \int_0^t e^2(t) dt$$

- ✓ układy cyfrowe:

$$I_{|e|} = T_p \sum_{k=0}^n |e(k)|$$

$$I_{e^2} = T_p \sum_{k=0}^n e^2(k)$$

Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości

- Całkowe wskaźniki kosztów regulacji:
 - ✓ układy ciągłe:

$$I_{|u|} = \int_0^t |u(t)| dt$$

$$I_{u^2} = \int_0^t u^2(t) dt$$

- ✓ układy cyfrowe:

$$I_{|u|} = T_p \sum_{k=0}^n |u(k)|$$

$$I_{u^2} = T_p \sum_{k=0}^n u^2(k)$$

Implementacja UAR

Krok 0: Określenie wartości zadanej oraz wartości początkowej poziomu substancji.

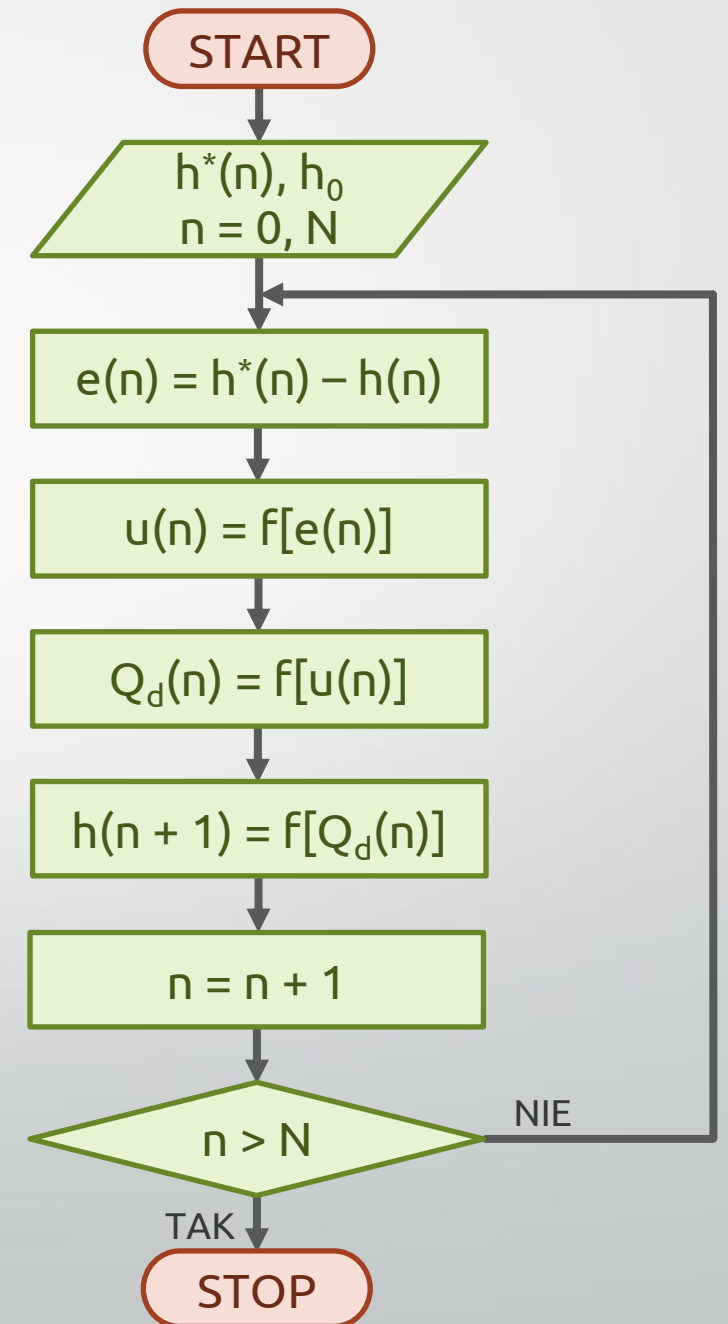
Krok 1: Wyznaczenie wartości uchybu regulacji.

Krok 2: Wyznaczenie wartości wielkości sterującej.

Krok 3: Wyznaczenie wartości natężenia dopływu.

Krok 4: Wyznaczenie wartości poziomu substancji.

Krok 5: Jeżeli osiągnięto liczbę kroków symulacji to STOP, w przeciwnym przypadku przejdź do kroku 1.





Dziękuję za uwagę

Konsultacje:

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl