



Podstawy automatyki

Laboratorium 1: modelowanie procesów

dr inż. Przemysław Zakrzewski

Instytut Informatyki

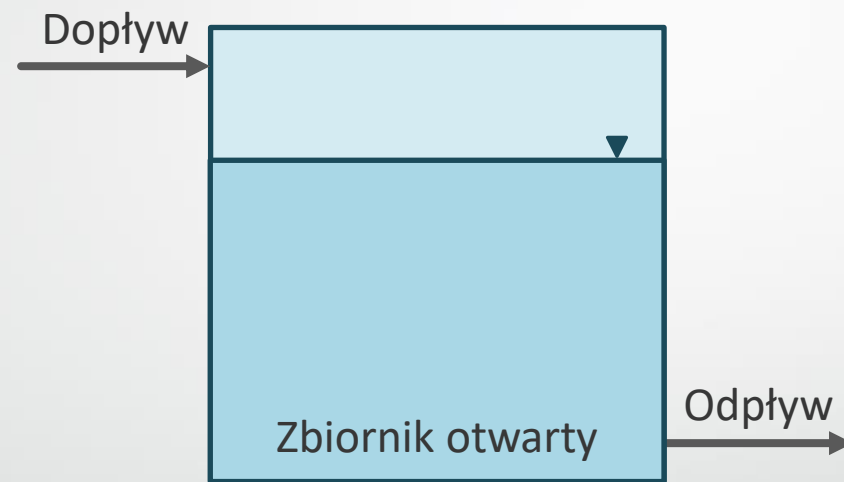
Politechnika Poznańska

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl

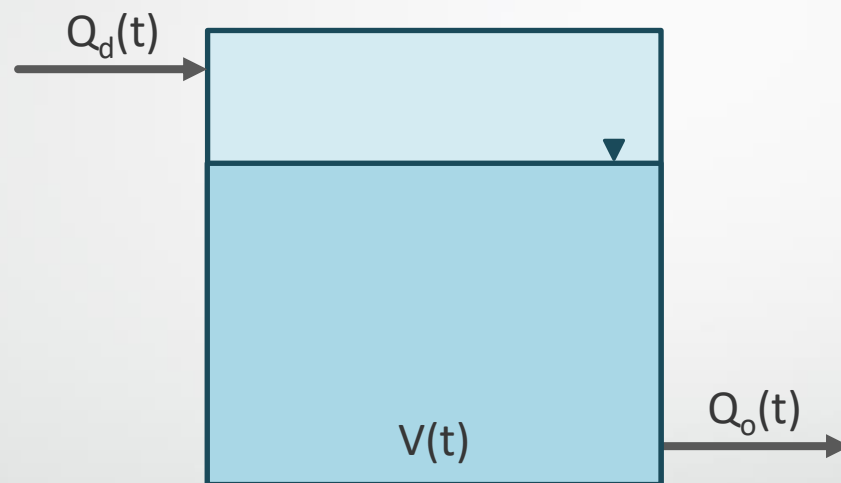
Plan laboratorium

- Proces I: napełnianie zbiornika:
 - ✓ schemat procesu,
 - ✓ model matematyczny dla zmian objętości,
 - ✓ model matematyczny dla zmian poziomu.
- Proces II: mieszanie substancji w zbiorniku:
 - ✓ schemat procesu,
 - ✓ model matematyczny dla zmian stężenia.

Proces I: schemat procesu



Proces I: model matematyczny dla zmian objętości



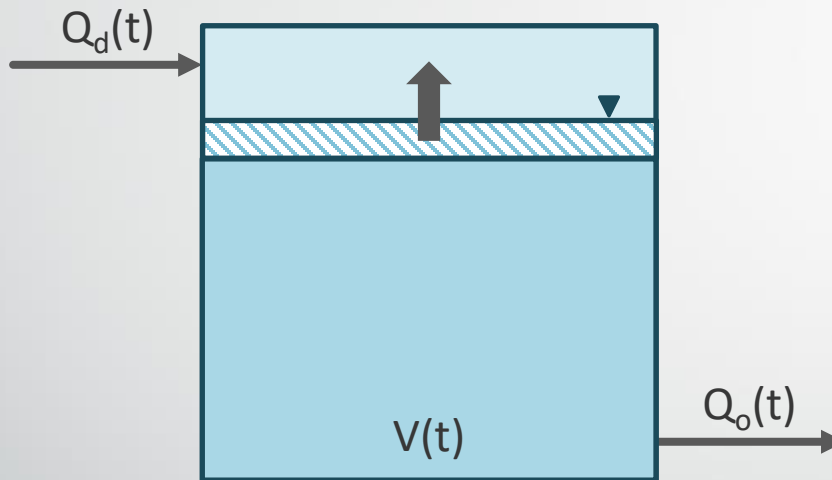
Zmienne procesowe:

$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość substancji w zbiorniku [m^3].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości

Objętość substancji rośnie:

$$Q_d(t) > Q_o(t) \Rightarrow V(t) \uparrow$$



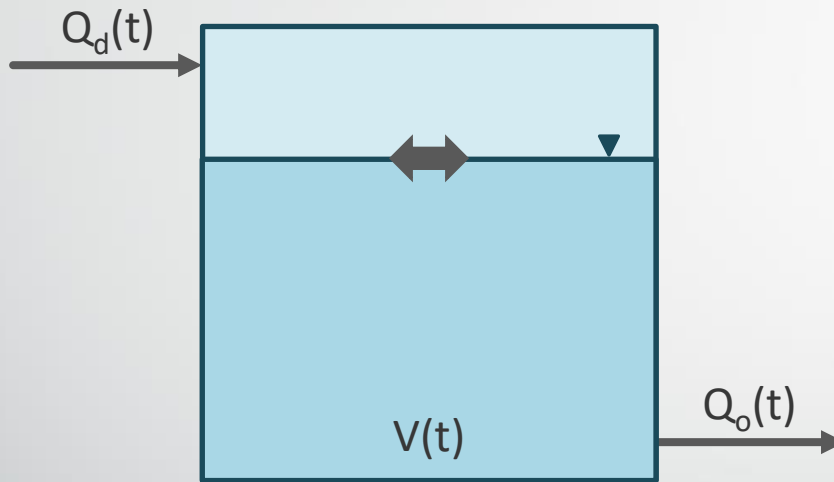
Zmienne procesowe:

$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość substancji w zbiorniku [m^3].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości

Objętość substancji bez zmian:

$$Q_d(t) = Q_o(t) \Rightarrow V(t) \leftrightarrow$$



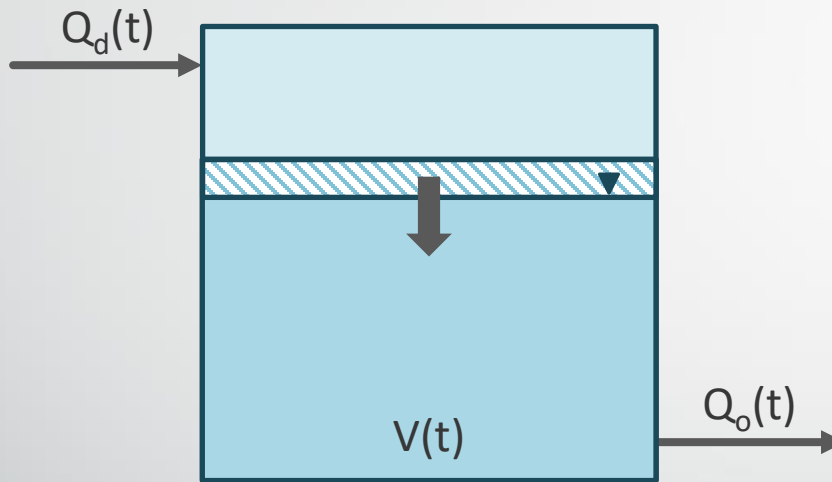
Zmienne procesowe:

$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość substancji w zbiorniku [m^3].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości

Objętość substancji maleje:

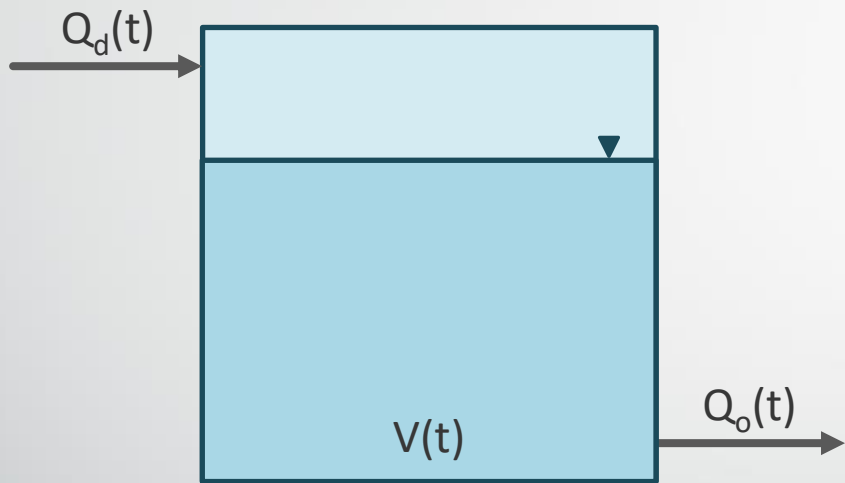
$$Q_d(t) < Q_o(t) \Rightarrow V(t) \downarrow$$



Zmienne procesowe:

$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość substancji w zbiorniku [m^3].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości



Zmiany objętości substancji:

$$Q_d(t) > Q_o(t) \Rightarrow V(t) \uparrow$$

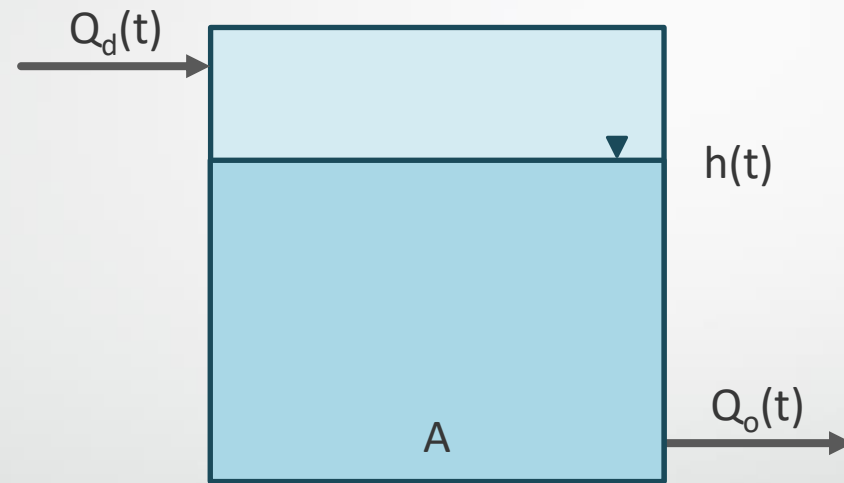
$$Q_d(t) = Q_o(t) \Rightarrow V(t) \leftrightarrow$$

$$Q_d(t) < Q_o(t) \Rightarrow V(t) \downarrow$$

Bilans masy całkowitej:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu



Zmienne procesowe:

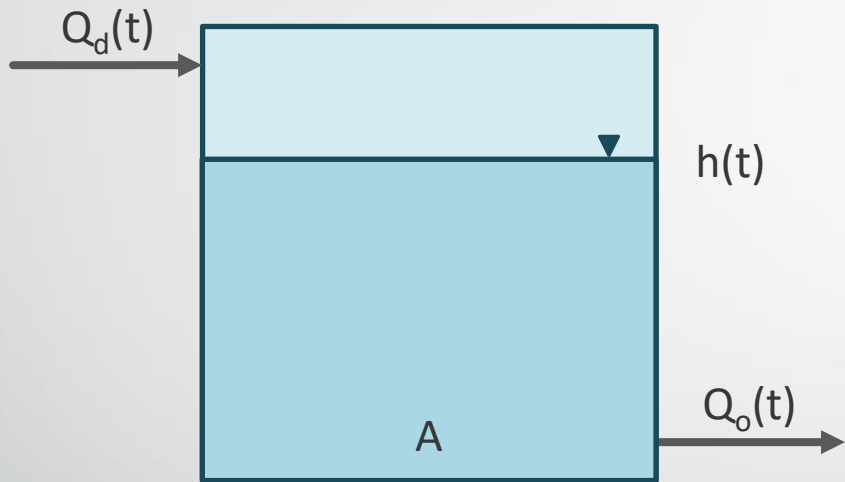
$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [m^2].

Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu

Bilans masy całkowitej:



$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

$$V(t) = Ah(t)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt}$$

$$A \frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

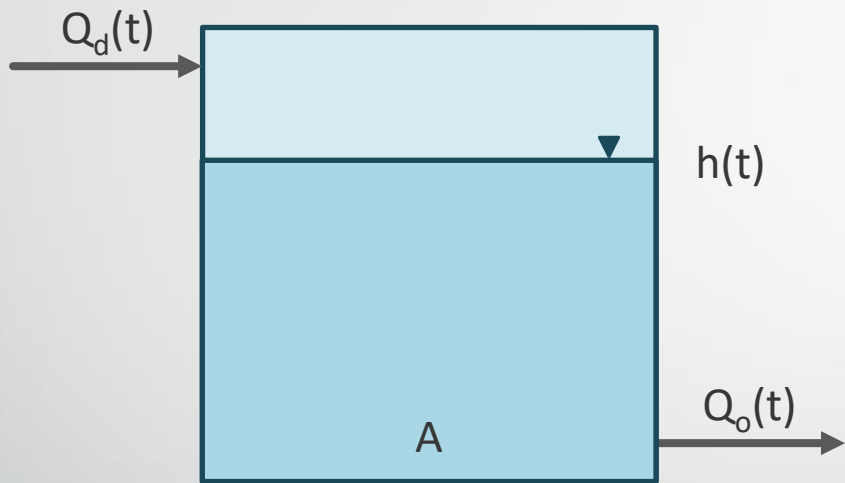
Zmienne procesowe:

$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [m^2].

Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu



Bilans masy całkowitej:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

Odływ wymuszony – stały:

$$Q_o(t) = Q_p$$

$$A \frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_p$$

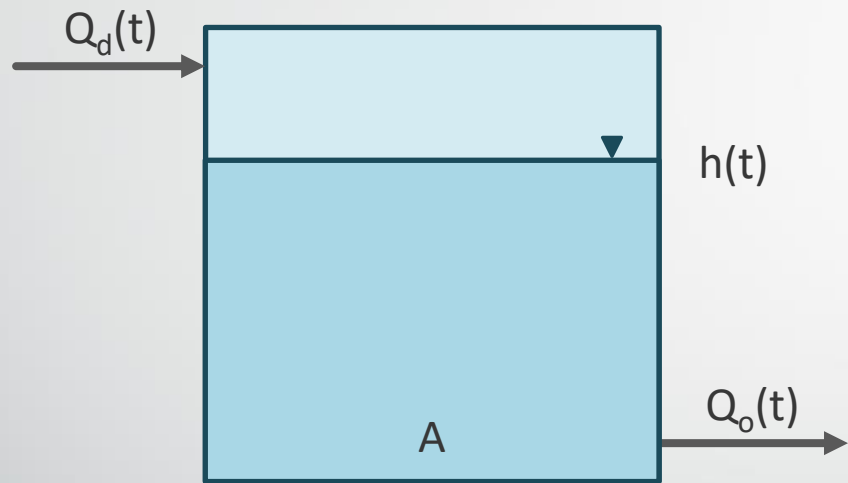
Zmienne procesowe:

$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], Q_p – wydajność pompy [m^3/s].

Parametry:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [m^2].

Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu



Bilans masy całkowitej:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

Odpływ swobodny – zmienny:

$$Q_o(t) = \beta \sqrt{h(t)}$$

$$A \frac{dh(t)}{dt} + \beta \sqrt{h(t)} = Q_d(t)$$

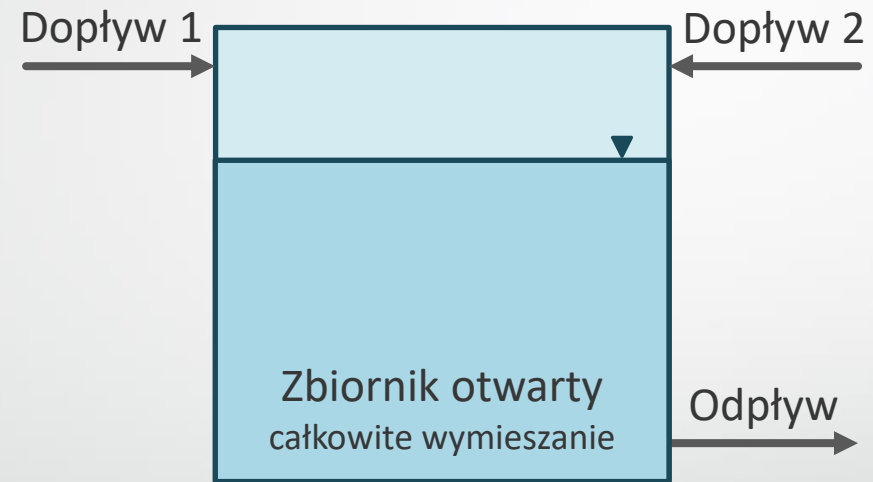
Zmienne procesowe:

$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [m^2], β – współczynnik wypływu [$\text{m}^{5/2}/\text{s}$].

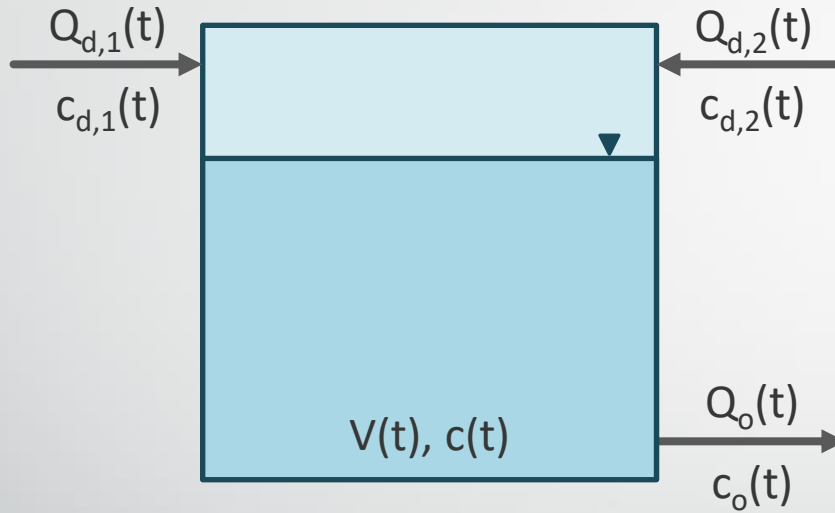
Proces II: schemat procesu



Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

Całkowite wymieszanie:

$$c_o(t) = c(t)$$



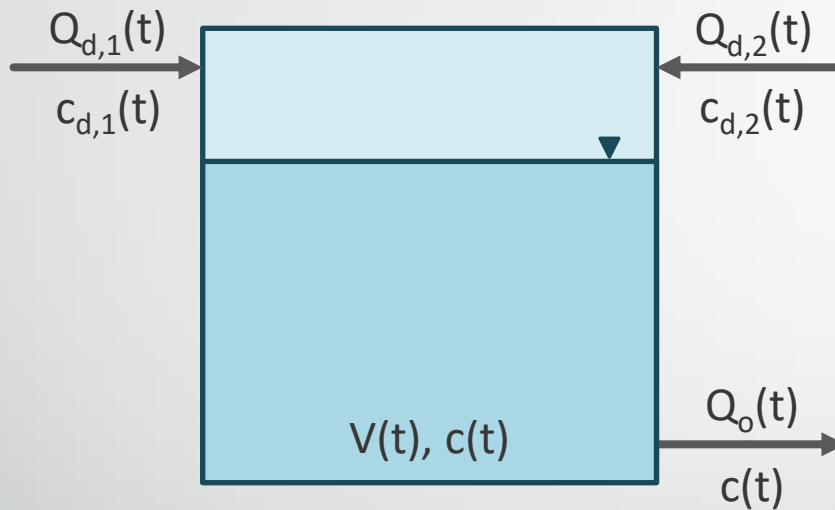
Zmienne procesowe:

$c(t)$ – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

Bilans masy całkowitej:

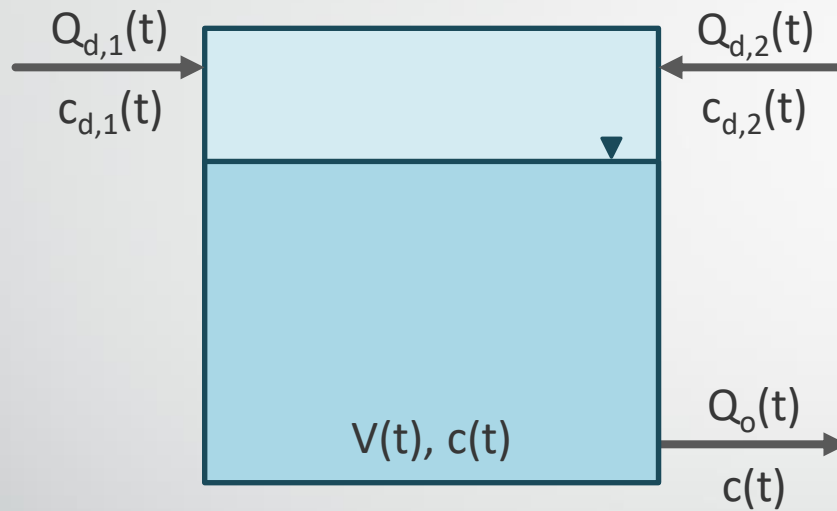
$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_{d,1}(t) + Q_{d,2}(t) - Q_o(t)$$



Zmienne procesowe:

$c(t)$ – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia



Natężenie dopływu składnika:

$$c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t)$$

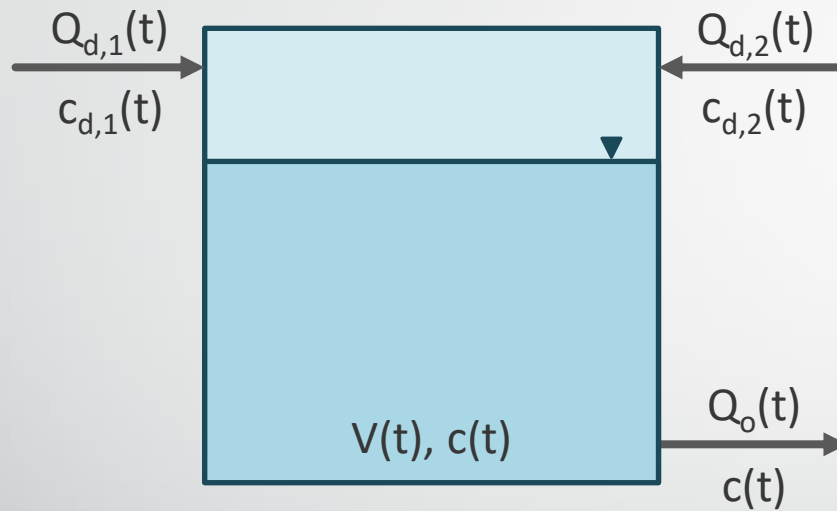
Natężenie odpływu składnika:

$$c(t)Q_o(t)$$

Zmienne procesowe:

$c(t)$ – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia



Bilans masy składnika:

$$\begin{aligned} \frac{d(c(t)V(t))}{dt} &= \\ &= c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t) + \\ &\quad - c(t)Q_o(t) \end{aligned}$$

Zmienne procesowe:

$c(t)$ – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Bilans masy składnika – przekształcenia:

$$\frac{d(c(t)V(t))}{dt} = c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t)$$

$$\frac{d(c(t)V(t))}{dt} = V(t) \frac{dc(t)}{dt} + c(t) \frac{dV(t)}{dt} =$$

$$= V(t) \frac{dc(t)}{dt} + c(t)(Q_{d,1}(t) + Q_{d,2}(t) - Q_o(t)) =$$

$$= V(t) \frac{dc(t)}{dt} + c(t)Q_{d,1}(t) + c(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t)$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Bilans masy składnika – przekształcenia:

$$V(t) \frac{dc(t)}{dt} + c(t)Q_{d,1}(t) + c(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t) =$$

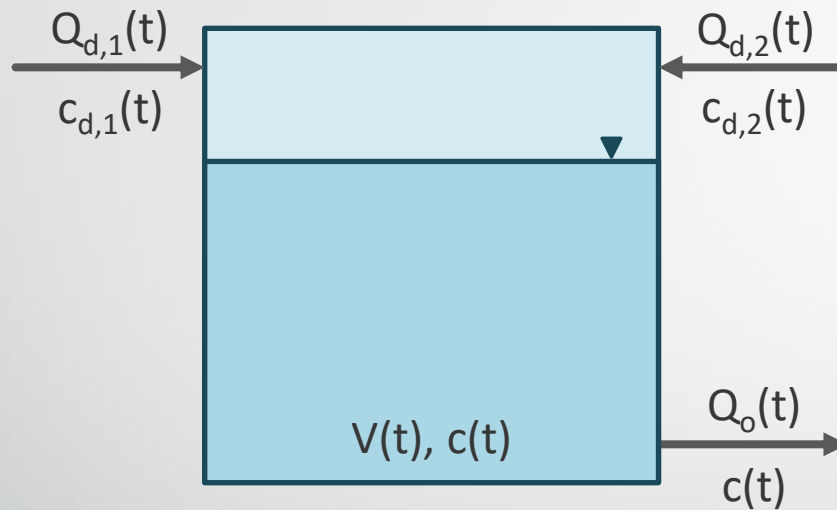
$$= c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t)$$

$$V(t) \frac{dc(t)}{dt} = Q_{d,1}(t)(c_{d,1}(t) - c(t)) + Q_{d,2}(t)(c_{d,2}(t) - c(t))$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{Q_{d,1}(t)}{V(t)}(c_{d,1}(t) - c(t)) + \frac{Q_{d,2}(t)}{V(t)}(c_{d,2}(t) - c(t))$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

Bilans masy składnika:



$$\begin{aligned} \frac{dc(t)}{dt} &= \\ &= \frac{Q_{d,1}(t)}{V(t)} (c_{d,1}(t) - c(t)) + \\ &+ \frac{Q_{d,2}(t)}{V(t)} (c_{d,2}(t) - c(t)) \end{aligned}$$

Zmienne procesowe:

$c(t)$ – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Równania różniczkowe:

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = Q_{d,1}(t) + Q_{d,2}(t) - Q_o(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{V(t)} \left(Q_{d,1}(t)(c_{d,1}(t) - c(t)) + Q_{d,2}(t)(c_{d,2}(t) - c(t)) \right) \end{cases}$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Równania różnicowe:

$$\begin{cases} \frac{\Delta V(n)}{T_p} = Q_{d,1}(n) + Q_{d,2}(n) - Q_o(n) \\ \frac{\Delta c(n)}{T_p} = \frac{1}{V(n)} \left(Q_{d,1}(n)(c_{d,1}(n) - c(n)) + Q_{d,2}(n)(c_{d,2}(n) - c(n)) \right) \end{cases}$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Rozwiązanie równań różnicowych – rekurencja:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(0) = V_0 \\ V(n+1) = (Q_{d,1}(n) + Q_{d,2}(n) - Q_o(n)) T_p + V(n) \\ c(0) = c_0 \\ c(n+1) = \frac{1}{V(n)} (Q_{d,1}(n)(c_{d,1}(n) - c(n)) + Q_{d,2}(n)(c_{d,2}(n) - c(n))) T_p + c(n) \end{array} \right.$$



Dziękuję za uwagę

Konsultacje:

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl