Inteligentne systemy sterowania

Wykład 3: sterowanie rozmyte

dr inż. Przemysław Zakrzewski

Instytut Informatyki

Politechnika Poznańska

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl

Plan wykładu

- Pojęcia podstawowe.
- Regulatory rozmyte:
  - ✓ podział,
  - ✓ reguły sterowania regulatorów Mamdaniego typu: P, I, PI, PD, PID,
  - ✓ zasada działania.

Pojęcia podstawowe: zmienna lingwistyczna

- **Zmienna lingwistyczna** *x*, to każda wielkość poddawana ocenie:
  - ✓ uchyb regulacji *e*,
  - ✓ zmiana uchybu regulacji *ce*,
  - ✓ suma uchybów regulacji *se*,
  - ✓ wielkość sterująca *u*,
  - ✓ zmiana wielkości sterującej *cu*.

Pojęcia podstawowe: wartość lingwistyczna

- **Wartość lingwistyczna**, to słowna ocena wartości zmiennej lingwistycznej:
  - ✓ bardzo duży ujemny *BDU*,
  - ✓ duży ujemny *DU*,
  - ✓ średni ujemny *ŚU*,
  - ✓ mały ujemny *MU*,
  - ✓ około zera *Z*,
  - ✓ mały dodatni *MD*,
  - ✓ średni dodatni *ŚD*,
  - ✓ duży dodatni *DD*,
  - ✓ bardzo duży dodatni *BDD*.

Pojęcia podstawowe: przestrzeń numeryczna

- **Przestrzeń numeryczna** *X*, to skończony lub nieskończony zbiór wartości numerycznych, jakie może przyjąć zmienna lingwistyczna *x*.

$$E = [e_{min}, e_{max}]$$

Pojęcia podstawowe: przestrzeń lingwistyczna

- **Przestrzeń lingwistyczna** X_L, to skończony zbiór wartości lingwistycznych stosowanych do oceny zmiennej lingwistycznej *x*.

$$E_L = \{DU, ŚU, MU, Z, MD, ŚD, DD\}$$

Pojęcia podstawowe: funkcja charakterystyczna

- **Funkcja charakterystyczna** $\chi_C(x)$ zbioru ostrego C może przyjmować tylko wartości ze zbioru dwuelementowego $\{0, 1\}$ zgodnie z następującą zależnością:

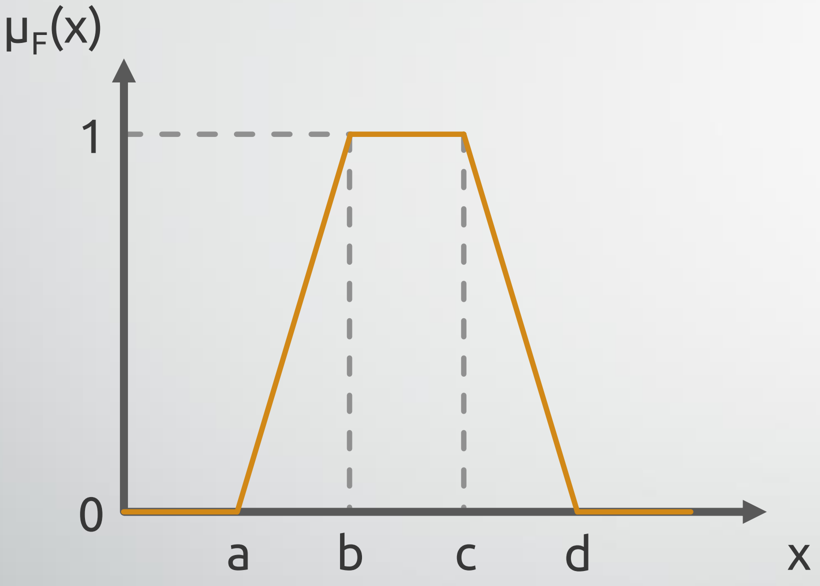
$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 \quad dla \quad x \in C \\ 0 \quad dla \quad x \notin C \end{cases}$$

Pojęcia podstawowe: funkcja przynależności

- **Funkcja przynależności** $\mu_F(x)$ zbioru rozmytego *F* może przyjmować każdą wartość z przedziału *[0, 1]* zwaną **stopniem przynależności**, zgodnie z następującą zależnością:

$$\mu_F(x) = \begin{cases} \in (0,1] & dla \quad x \in F \\ 0 & dla \quad x \notin F \end{cases}$$

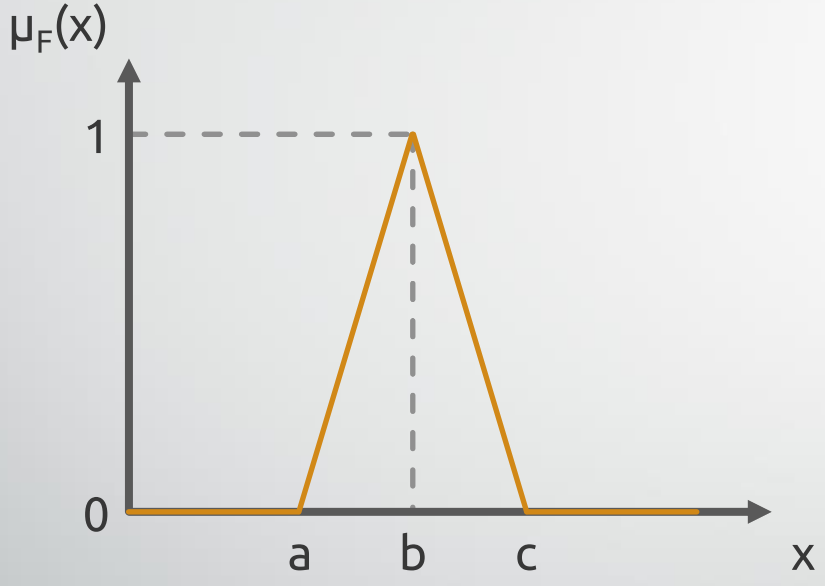
Pojęcia podstawowe: funkcja przynależności



Trapezowa:

$$\mu_F(x) = max\left\{min\left\{\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right\}, 0\right\}$$

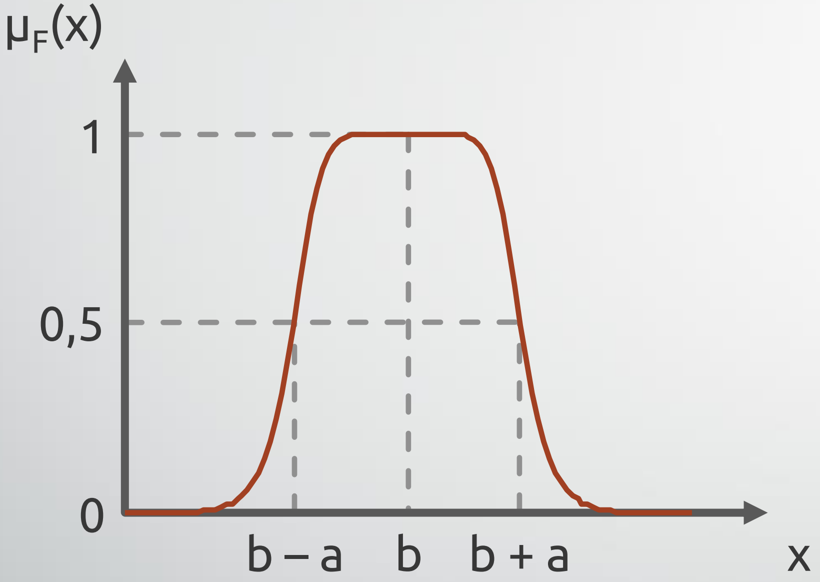
Pojęcia podstawowe: funkcja przynależności



Trójkatna:

$$\mu_F(x) = max\left\{min\left\{\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right\}, 0\right\}$$

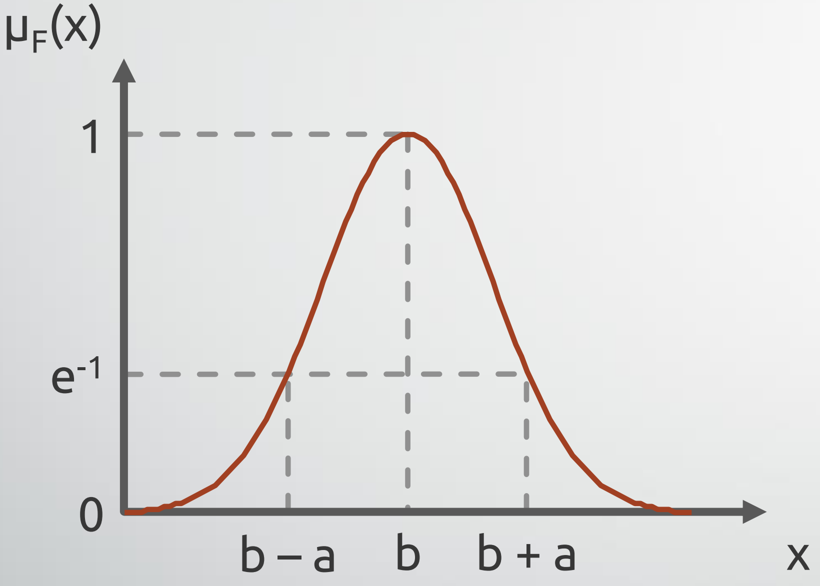
Pojęcia podstawowe: funkcja przynależności



Dzwonowa:

$$\mu_F(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-b}{a}\right|^c}$$

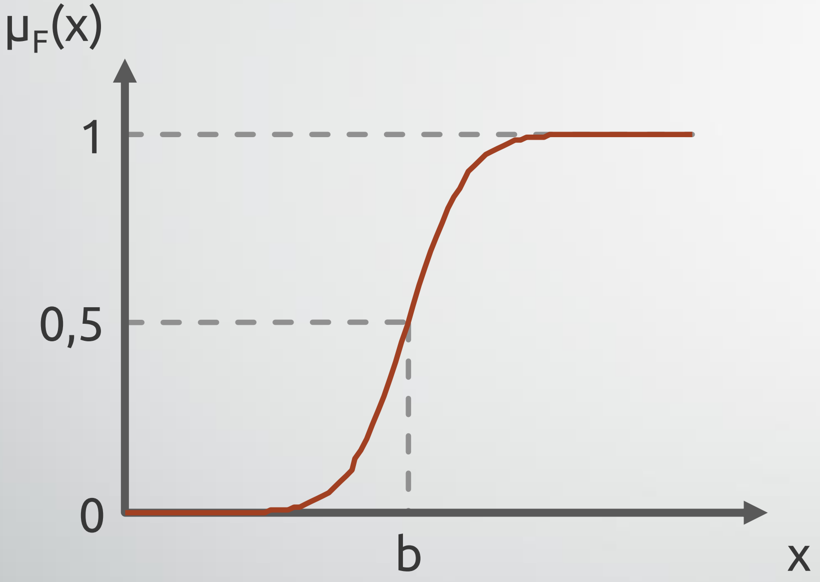
Pojęcia podstawowe: funkcja przynależności



Gaussa:

$$\mu_F(x) = e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}$$

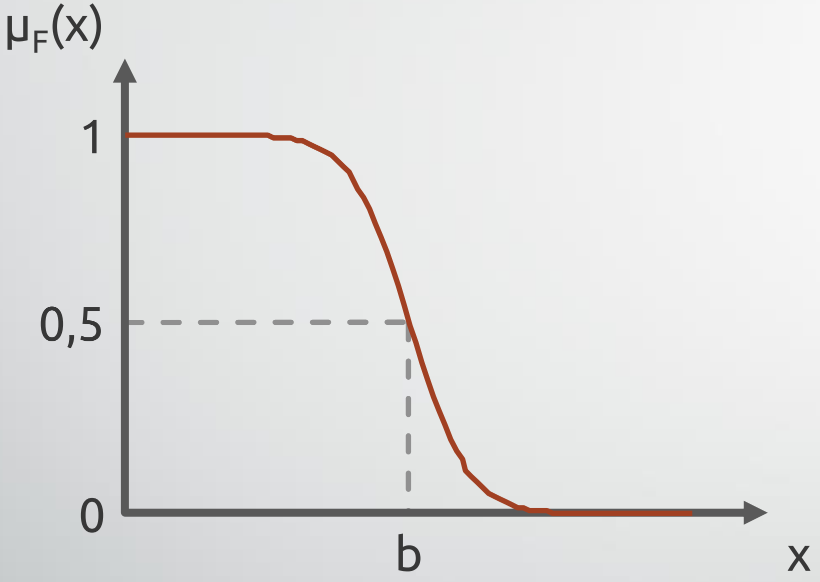
Pojęcia podstawowe: funkcja przynależności



Sigmoidalna prawa:

$$\mu_F(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}$$

Pojęcia podstawowe: funkcja przynależności



Sigmoidalna lewa:

$$\mu_F(x) = \frac{e^{-a(x-b)}}{1 + e^{-a(x-b)}}$$

Pojęcia podstawowe: zbiór rozmyty

- **Zbiorem rozmytym** *F* w pewnej przestrzeni numerycznej *X* zmiennej lingwistycznej *x* jest następujący zbiór dwójek:

$$F = \{(x, \mu_F(x)) \colon\ x \in X, \mu_F(x) \in [0, 1]\}$$

Pojęcia podstawowe: reguła sterowania

- **Reguła sterowania** jest to reguła rozmyta operująca na zmiennych lingwistycznych. Struktura reguły sterowania odpowiada strukturze **implikacji rozmytej**, która podobnie jak w przypadku implikacji klasycznej składa się ze zdania zwanego **przesłanką** oraz zdania zwanego **konkluzją**:

$$JEŻELI\ \langle przesłanka \rangle\ TO\ \langle konkluzja \rangle$$

Pojęcia podstawowe: przesłanka

- **Przesłanka prosta** składa się z pojedynczego warunku:

$$JEŻELI\ \ x\ jest\ A\ \ TO\ \ \langle konkluzja \rangle$$

- **Przesłanka koniunkcyjna** składa się z dwóch przesłanek prostych połączonych operatorem **iloczynu logicznego I**:

$$JEŻELI\ \ x_1\ jest\ A_1\ \ I\ \ x_2\ jest\ A_2\ \ TO\ \ \langle konkluzja \rangle$$

- **Przesłanka alternatywna** składa się z dwóch przesłanek prostych połączonych operatorem **sumy logicznej LUB**:

$$JEŻELI\ \ x_1\ jest\ A_1\ \ LUB\ \ x_2\ jest\ A_2\ \ TO\ \ \langle konkluzja \rangle$$

Regulatory rozmyte: podział

- **Regulator rozmyty Mamdaniego**, jeżeli reguła sterowania zawiera konkluzję rozmytą:

$$JE\dot{Z}ELI\ \langle przesłanka\rangle\ TO\ \ y\ jest\ B$$

- **Regulator rozmyty Takagi-Sugeno-Kanga (TSK)**, jeżeli reguła sterowania zawiera konkluzję funkcyjną:

$$JE\dot{Z}ELI\ \langle przesłanka\rangle\ TO\ \ y = f(x_i)$$

Regulatory rozmyte: Mamdaniego typu P

- **Algorytm liniowy**:

$$u(n) = k_p e(n)$$

- **Algorytm rozmyty**:

$$JEŻELI\ \ e\ jest\ \ldots\ \ TO\ \ u\ jest\ \ldots$$

Nastawy regulatora:
k_p – wzmocnienie regulatora [-], T_p – okres próbkowania [s].

Regulatory rozmyte: Mamdaniego typu I

- **Algorytm liniowy**:

$$\Delta u(n) = \frac{T_p}{T_i} e(n)$$

- **Algorytm rozmyty**:

$$JEŻELI \;\; e \; jest \ldots \;\; TO \;\; cu \; jest \ldots$$

Nastawy regulatora:
T_i – stała całkowania [s], T_p – okres próbkowania [s].

Regulatory rozmyte: Mamdaniego typu PI

- **Algorytm liniowy**:

$$\Delta u(n) = k_p \left[\Delta e(n) + \frac{T_p}{T_i} e(n) \right]$$

- **Algorytm rozmyty**:

$$JE\dot{Z}ELI \;\; e\, jest\, \ldots \;\; I \;\; ce\, jest\, \ldots \;\; TO \;\; cu\, jest\, \ldots$$

Nastawy regulatora:
k_p – wzmocnienie regulatora [-], T_i – czas zdwojenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Regulatory rozmyte: Mamdaniego typu PD

- **Algorytm liniowy**:

$$u(n) = k_p \left[e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

- **Algorytm rozmyty**:

$$JEŻELI\ \ e\ jest\ \ldots\ \ I\ \ ce\ jest\ \ldots\ \ TO\ \ u\ jest\ \ldots$$

Nastawy regulatora:
k_p – wzmocnienie regulatora [-], T_d – czas wyprzedzenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Regulatory rozmyte: Mamdaniego typu PID

- **Algorytm liniowy**:

$$u(n) = k_p \left[e(n) + \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^{n} e(k) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

- **Algorytm rozmyty**:

$$JEŻELI \;\; e \; jest \, \ldots \;\; I \;\; se \; jest \, \ldots \;\; I \;\; ce \; jest \, \ldots \;\; TO \;\; u \; jest \, \ldots$$

Nastawy regulatora:
k_p – wzmocnienie regulatora [-], T_d – czas wyprzedzenia [s], T_i – czas zdwojenia [s], T_p – okres próbkowania [s].

Regulatory rozmyte: zasada działania

- Schemat blokowy regulatora Mamdaniego typu PD:

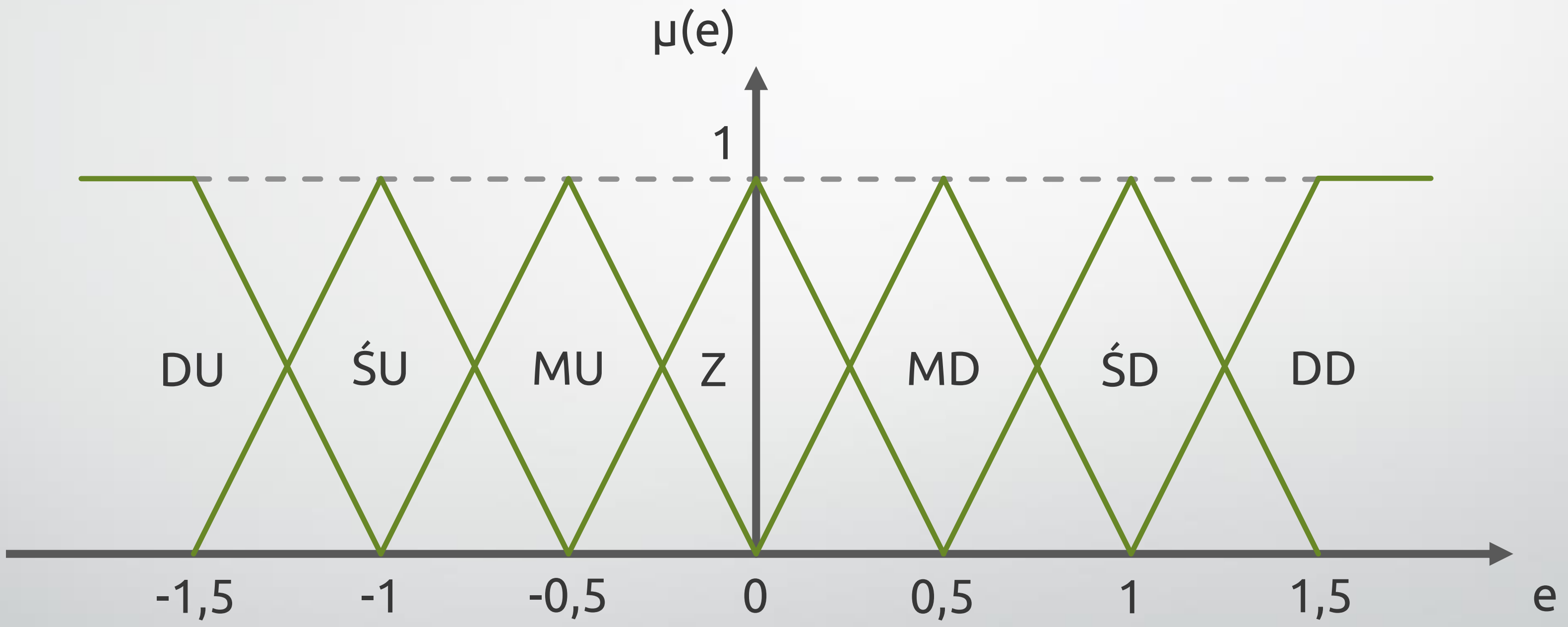
Regulatory rozmyte: rozmywanie

- **Rozmywanie** polega na wyznaczeniu stopni przynależności do poszczególnych zbiorów rozmytych wejściowych zmiennych lingwistycznych.

  Wykonanie tej operacji wymaga zdefiniowania:
  - ✓ funkcji przynależności zbiorów rozmytych wejściowych zmiennych lingwistycznych.

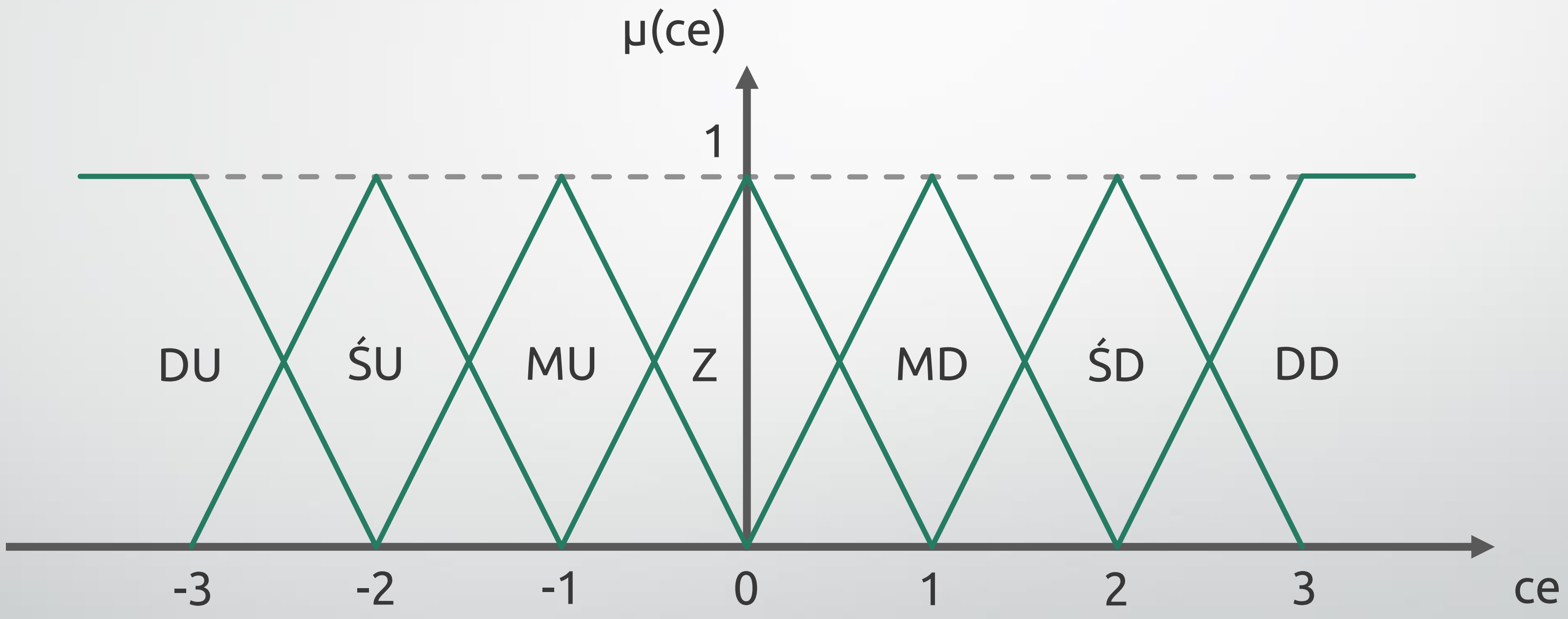
Regulatory rozmyte: rozmywanie

- Funkcje przynależności zbiorów rozmytych uchybu regulacji:



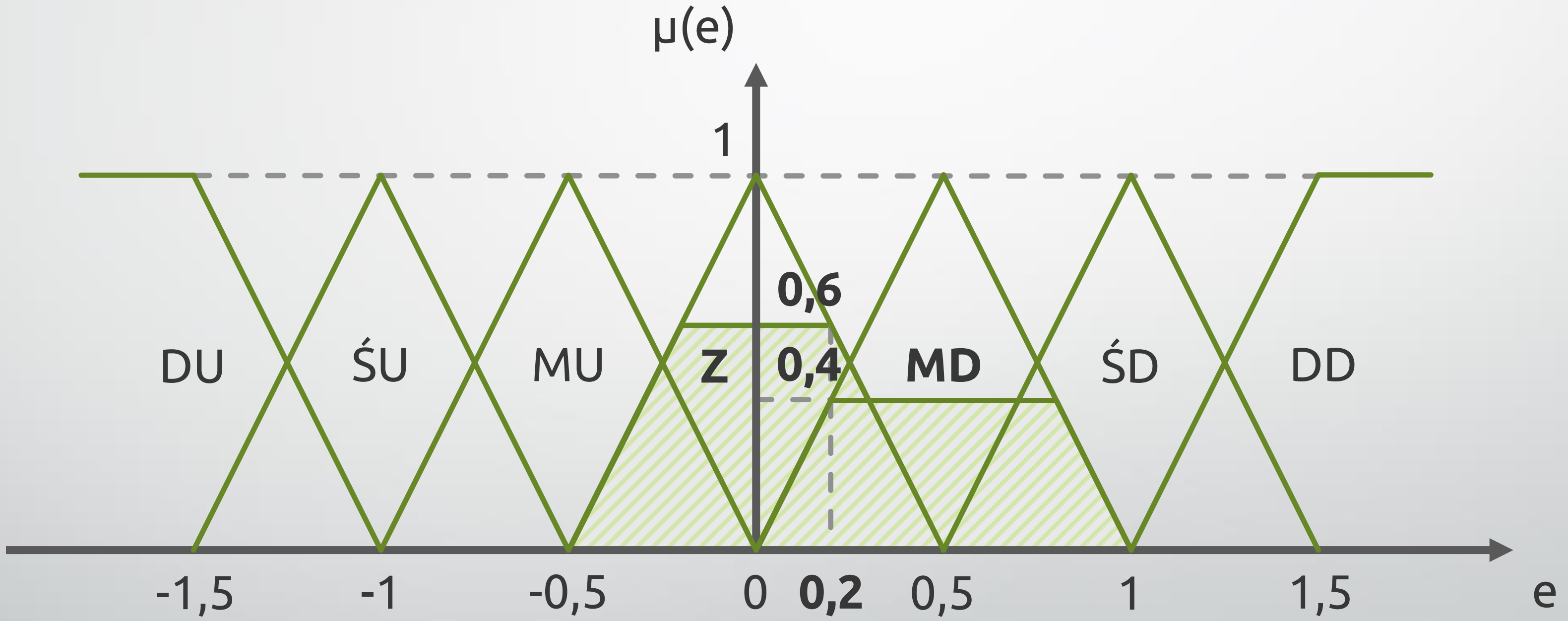
Regulatory rozmyte: rozmywanie

- Funkcje przynależności zbiorów rozmytych zmiany uchybu regulacji:



Regulatory rozmyte: rozmywanie

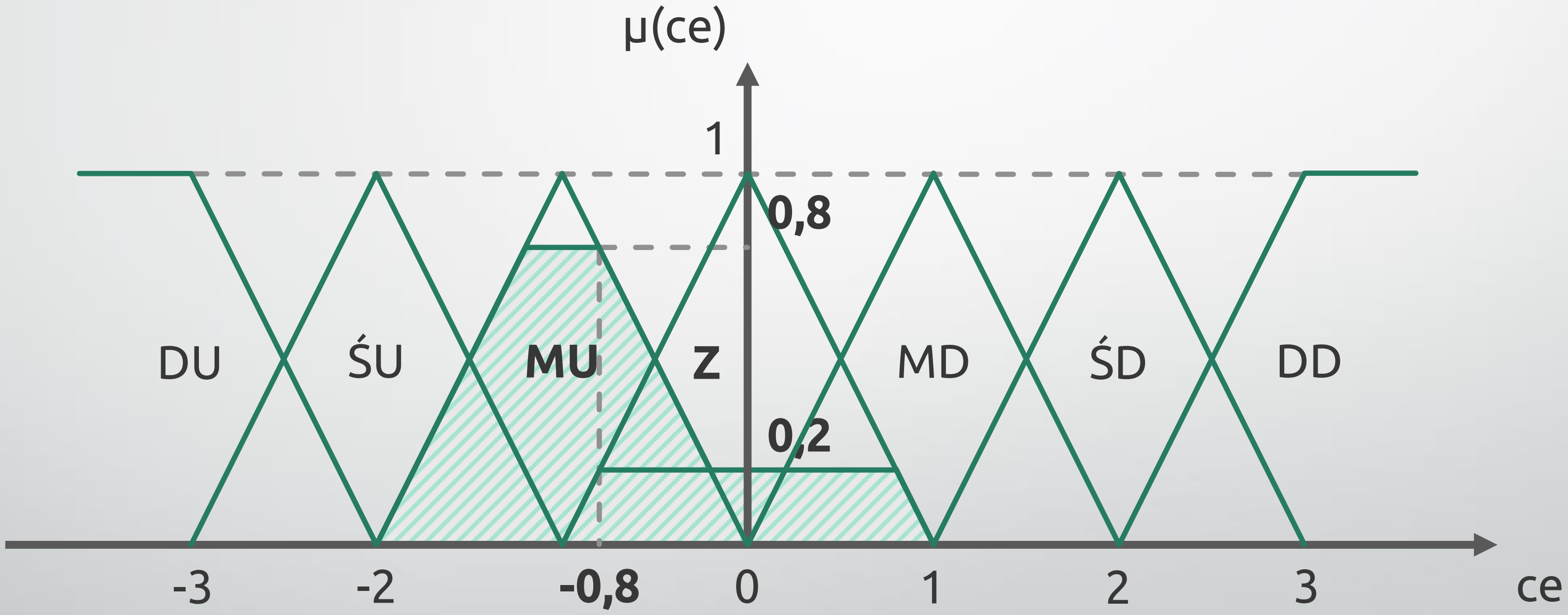
- Stopnie przynależności do zbiorów rozmytych uchybu regulacji:



$\mu_Z(e) = 0{,}6$ $\mu_{MD}(e) = 0{,}4$

Regulatory rozmyte: rozmywanie

- Stopnie przynależności do zbiorów rozmytych zmiany uchybu regulacji:



$\mu_Z(ce) = 0{,}2$ $\mu_{MU}(ce) = 0{,}8$

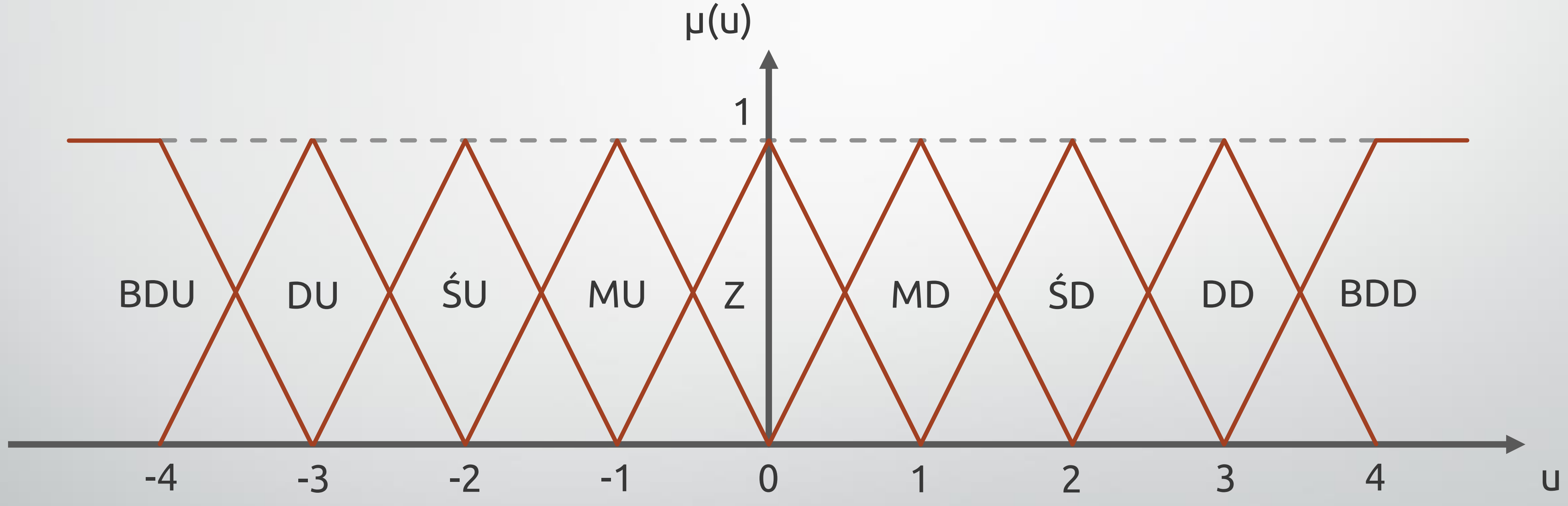
Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- **Wnioskowanie** polega na wyznaczeniu stopni przynależności do poszczególnych zbiorów rozmytych wyjściowej zmiennej lingwistycznej.

  Wykonanie tej operacji wymaga zdefiniowania:
  - ✓ funkcji przynależności zbiorów rozmytych wyjściowej zmiennej lingwistycznej,
  - ✓ bazy reguł,
  - ✓ algorytmu wnioskowania.

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Funkcje przynależności zbiorów rozmytych wielkości sterującej:



Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Baza reguł:

e | ce	DU	ŚU	MU	Z	MD	ŚD	DD
DU	BDU	BDU	BDU	DU	ŚU	MU	Z
ŚU	BDU	BDU	DU	ŚU	MU	Z	MD
MU	BDU	DU	ŚU	MU	Z	MD	ŚD
Z	DU	ŚU	MU	Z	MD	ŚD	DD
MD	ŚU	MU	Z	MD	ŚD	DD	BDD
ŚD	MU	Z	MD	ŚD	DD	BDD	BDD
DD	Z	MD	ŚD	DD	BDD	BDD	BDD

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Aktywne reguły sterowania:

Reguła 1: $JEŻELI \;\; e\ jest\ Z \;\; I \;\; ce\ jest\ MU \;\; TO \;\; u\ jest\ MU$

Reguła 2: $JEŻELI \;\; e\ jest\ MD \;\; I \;\; ce\ jest\ MU \;\; TO \;\; u\ jest\ Z$

Reguła 3: $JEŻELI \;\; e\ jest\ Z \;\; I \;\; ce\ jest\ Z \;\; TO \;\; u\ jest\ Z$

Reguła 4: $JEŻELI \;\; e\ jest\ Z \;\; I \;\; ce\ jest\ MU \;\; TO \;\; u\ jest\ MU$

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Algorytm wnioskowania wyznacza stopnie przynależności do poszczególnych zbiorów rozmytych wyjściowej zmiennej lingwistycznej:
  - ✓ **Krok 1:** wyznaczenie stopni prawdziwości przesłanek aktywnych reguł sterowania,
  - ✓ **Krok 2:** wyznaczenie stopni prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania,
  - ✓ **Krok 3:** agregacja stopni prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania.

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- **Krok 1:** wyznaczenie stopni prawdziwości przesłanek aktywnych reguł sterowania:
  - ✓ **przesłanka prosta:** stopień przynależności do danego zbioru rozmytego wejściowej zmiennej lingwistycznej,
  - ✓ **przesłanka koniunkcyjna:** stopień przynależności do **operacji przecięcia** danych zbiorów rozmytych wejściowych zmiennych lingwistycznych – do wyznaczania stopnia prawdziwości stosuje się **operatory T-normy**,
  - ✓ **przesłanka alternatywna:** stopień przynależności do **operacji połączenia** danych zbiorów rozmytych wejściowych zmiennych lingwistycznych – do wyznaczania stopnia prawdziwości stosuje się **operatory S-normy**.

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Operatory T-normy:

Nazwa	$\boldsymbol{\mu_{A_1 \cap A_2}(x_1, x_2)}$
Minimum – MIN	$min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
Iloczyn – PROD	$\mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)$
Iloczyn Hamachera	$\dfrac{\mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)}{\mu_{A_1}(x_1) + \mu_{A_2}(x_2) - \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)}$
Iloczyn Einsteina	$\dfrac{\mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)}{2 - \mu_{A_1}(x_1) - \mu_{A_2}(x_2) + \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)}$
Iloczyn drastyczny	$\begin{cases} min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} & gdy \quad max\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} = 1 \\ 0 & gdy \quad max\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} \neq 1 \end{cases}$
Różnica ograniczona	$max\{0, \mu_{A_1}(x_1) + \mu_{A_2}(x_2) - 1\}$

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Operatory S-normy:

Nazwa	$\mu_{A_1 \cup A_2}(x_1, x_2)$
Maksimum – MAX	$max\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
Suma – SUM	$\mu_{A_1}(x_1) + \mu_{A_2}(x_2) - \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)$
Suma Hamachera	$\dfrac{\mu_{A_1}(x_1) + \mu_{A_2}(x_2) - 2 \cdot \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)}{1 - \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)}$
Suma Einsteina	$\dfrac{\mu_{A_1}(x_1) + \mu_{A_2}(x_2)}{1 + \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2)}$
Suma drastyczny	$\begin{cases} max\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} & gdy \quad min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} = 0 \\ 1 & gdy \quad min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} \neq 0 \end{cases}$
Suma ograniczona	$min\{1, \mu_{A_1}(x_1) + \mu_{A_2}(x_2)\}$

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopnie prawdziwości przesłanek aktywnych reguł sterowania – operator **minimum MIN**:

Reguła 1: $\mu_{Z\cap MU}(e, ce) = min\{\mu_Z(e), \mu_{MU}(ce)\}$

Reguła 2: $\mu_{MD\cap MU}(e, ce) = min\{\mu_{MD}(e), \mu_{MU}(ce)\}$

Reguła 3: $\mu_{Z\cap Z}(e, ce) = min\{\mu_Z(e), \mu_Z(ce)\}$

Reguła 4: $\mu_{MD\cap Z}(e, ce) = min\{\mu_{MD}(e), \mu_Z(ce)\}$

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopnie prawdziwości przesłanek aktywnych reguł sterowania – operator **minimum MIN**:

Reguła 1: $\mu_{Z\cap MU}(e, ce) = min\{0{,}6; 0{,}8\} = 0{,}6$

Reguła 2: $\mu_{MD\cap MU}(e, ce) = min\{0{,}4; 0{,}8\} = 0{,}4$

Reguła 3: $\mu_{Z\cap Z}(e, ce) = min\{0{,}6; 0{,}2\} = 0{,}2$

Reguła 4: $\mu_{MD\cap Z}(e, ce) = min\{0{,}4; 0{,}2\} = 0{,}2$

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- **Krok 2:** wyznaczenie stopni prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania.

  Do wyznaczania stopni prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania stosuje się **operatory implikacji rozmytej**.

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Operatory implikacji rozmytej:

Nazwa	$\boldsymbol{\mu_{A\Rightarrow B}(x,y)}$
Mamdaniego	$min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Larsena	$\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$
Łukasiewicza	$min\{1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$
Kleene-Dienesa	$max\{1-\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Kleene-Dienes-Łukasiewicza	$1-\mu_A(x)+\mu_B(y)$
Gödela	$\begin{cases} 1 & gdy \quad \mu_A(x)\le\mu_B(y) \\ \mu_B(y) & gdy \quad \mu_A(x)>\mu_B(y) \end{cases}$
Yagera	$\mu_A(x)^{\mu_B(y)}$
Zadeha	$max\{1-\mu_A(x),min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}\}$

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopnie prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania – operator **implikacja Mamdaniego**:

Reguła 1: $\mu_{Z \cap MU \Rightarrow MU}[(e, ce), u] = min\{\mu_{Z \cap MU}(e, ce), \mu_{MU}(u)\}$

Reguła 2: $\mu_{MD \cap MU \Rightarrow Z}[(e, ce), u] = min\{\mu_{MD \cap MU}(e, ce), \mu_{Z}(u)\}$

Reguła 3: $\mu_{Z \cap Z \Rightarrow Z}[(e, ce), u] = min\{\mu_{Z \cap Z}(e, ce), \mu_{Z}(u)\}$

Reguła 4: $\mu_{MD \cap Z \Rightarrow MD}[(e, ce), u] = min\{\mu_{MD \cap Z}(e, ce), \mu_{MD}(u)\}$

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopnie prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania – operator **implikacja Mamdaniego**:

Reguła 1: $\mu_{Z \cap MU \Rightarrow MU}[(e, ce), u] = min\{0{,}6; \mu_{MU}(u)\}$

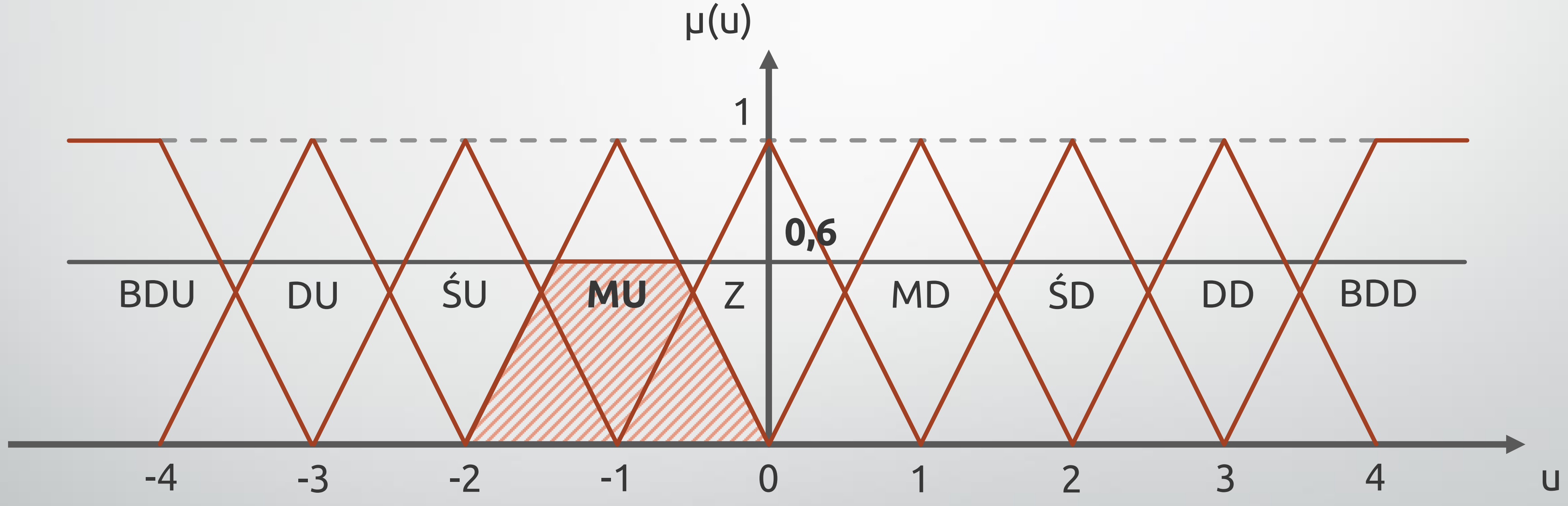
Reguła 2: $\mu_{MD \cap MU \Rightarrow Z}[(e, ce), u] = min\{0{,}4; \mu_{Z}(u)\}$

Reguła 3: $\mu_{Z \cap Z \Rightarrow Z}[(e, ce), u] = min\{0{,}2; \mu_{Z}(u)\}$

Reguła 4: $\mu_{MD \cap Z \Rightarrow MD}[(e, ce), u] = min\{0{,}2; \mu_{MD}(u)\}$

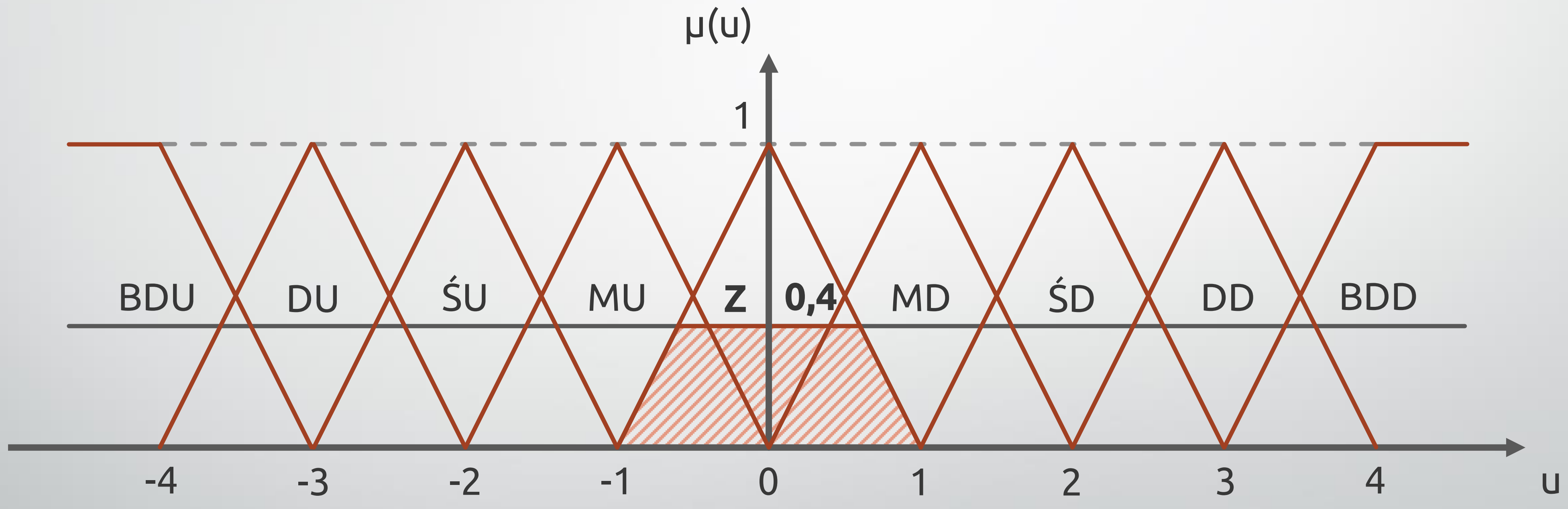
Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopień prawdziwości konkluzji **reguły 1**:



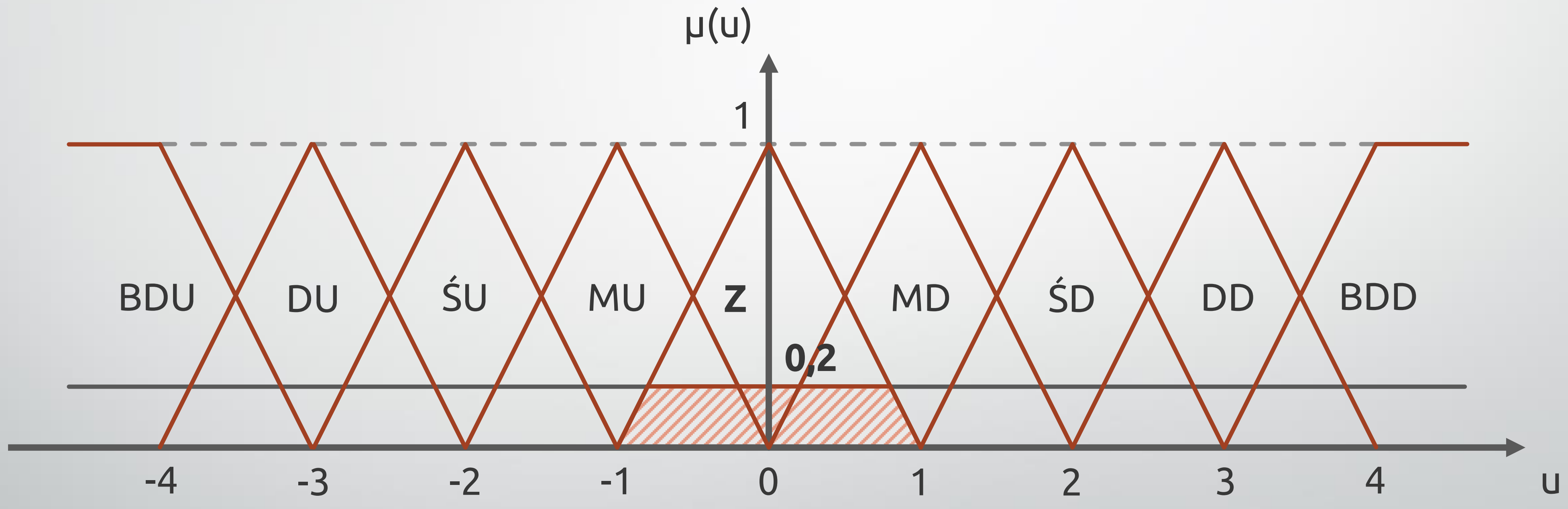
Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopień prawdziwości konkluzji **reguły 2**:



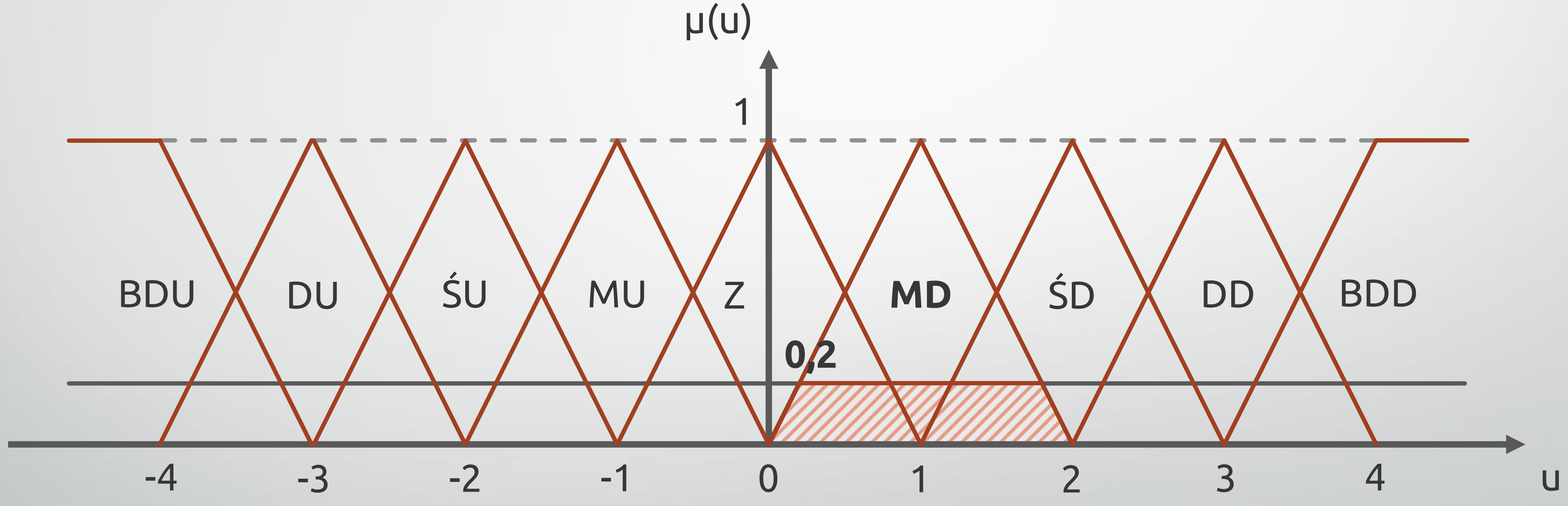
Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopień prawdziwości konkluzji **reguły 3**:



Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Stopień prawdziwości konkluzji **reguły 4**:



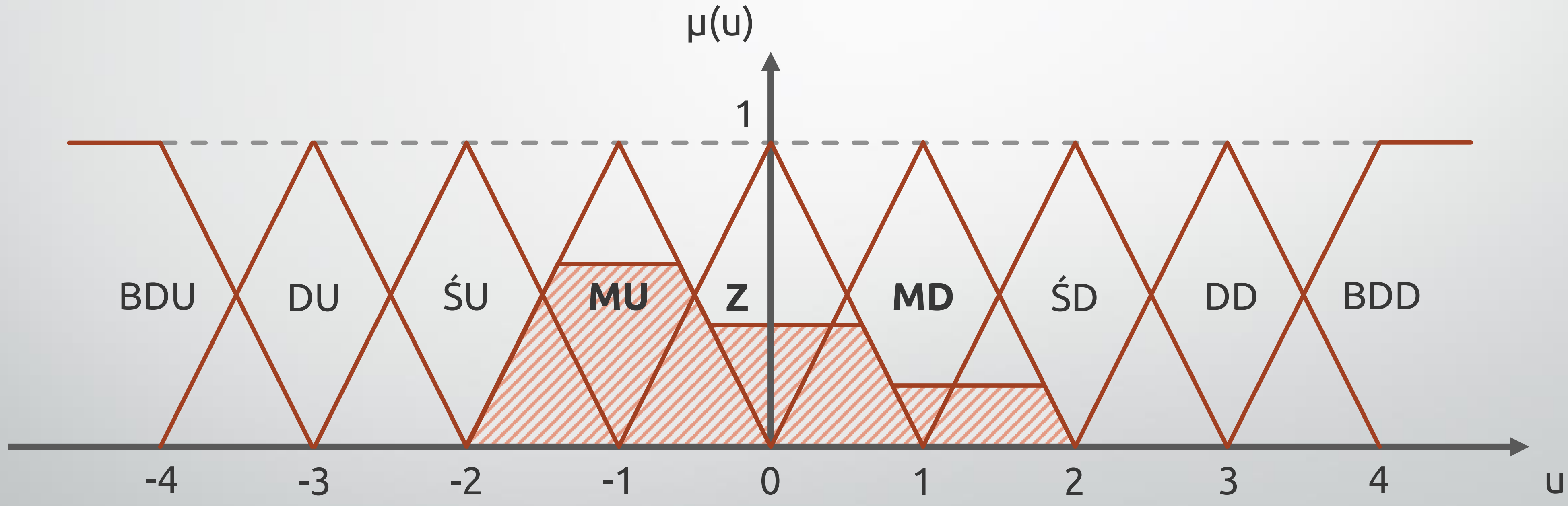
Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- **Krok 3:** agregacja stopni prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania.

  Do agregacji stopni prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania stosuje się **operatory S-normy**.

Regulatory rozmyte: wnioskowanie

- Agregacja stopni prawdziwości konkluzji aktywnych reguł sterowania – operator **maksimum MAX**:



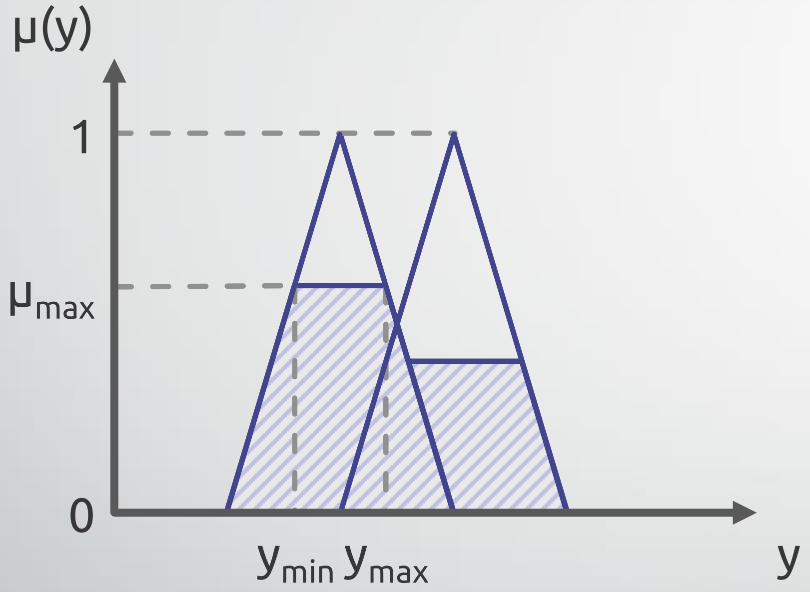
Regulatory rozmyte: wyostrzanie

- **Wyostrzanie** polega na wyznaczeniu wartości numerycznej wyjściowej zmiennej lingwistycznej.

  Wykonanie tej operacji wymaga zdefiniowania:

  - ✓ metody wyostrzania.

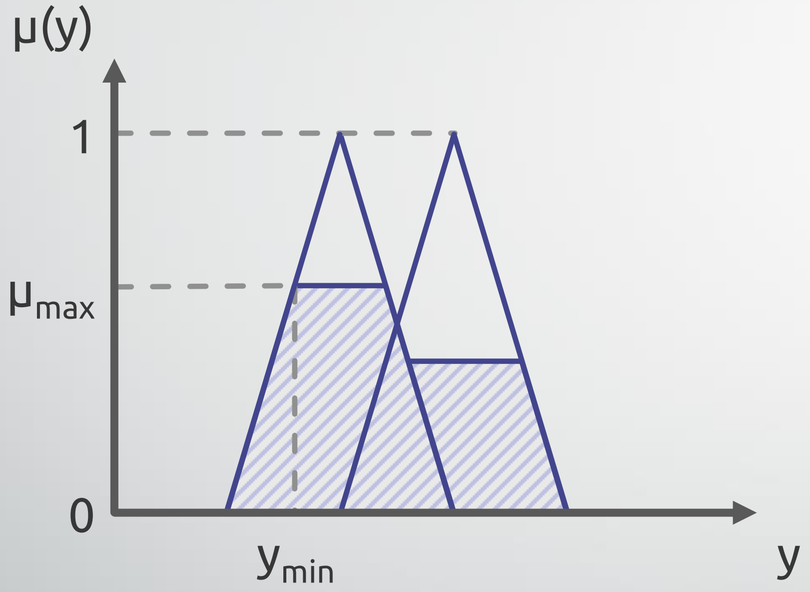
Regulatory rozmyte: wyostrzanie



Metoda środka maksimum:

$$y = \frac{y_{min} + y_{max}}{2}$$

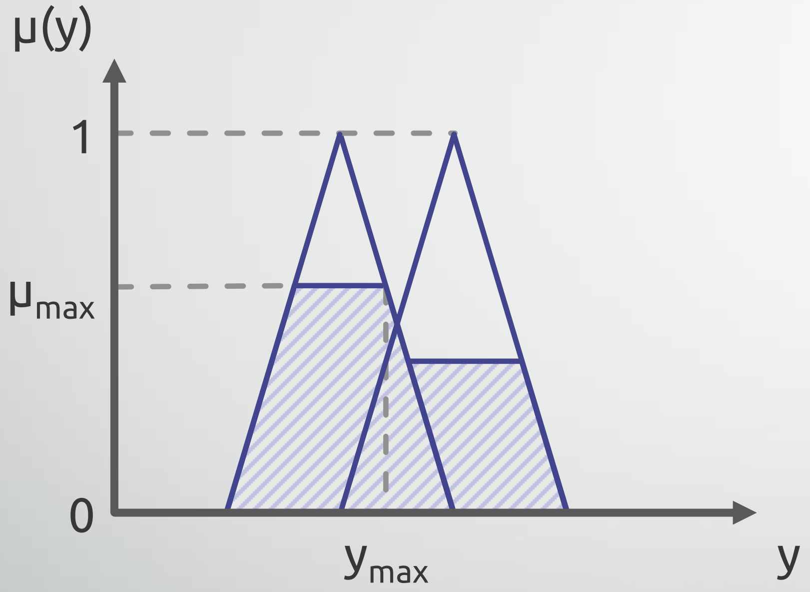
Regulatory rozmyte: wyostrzanie



Metoda pierwszego maksimum:

$$y = y_{min}$$

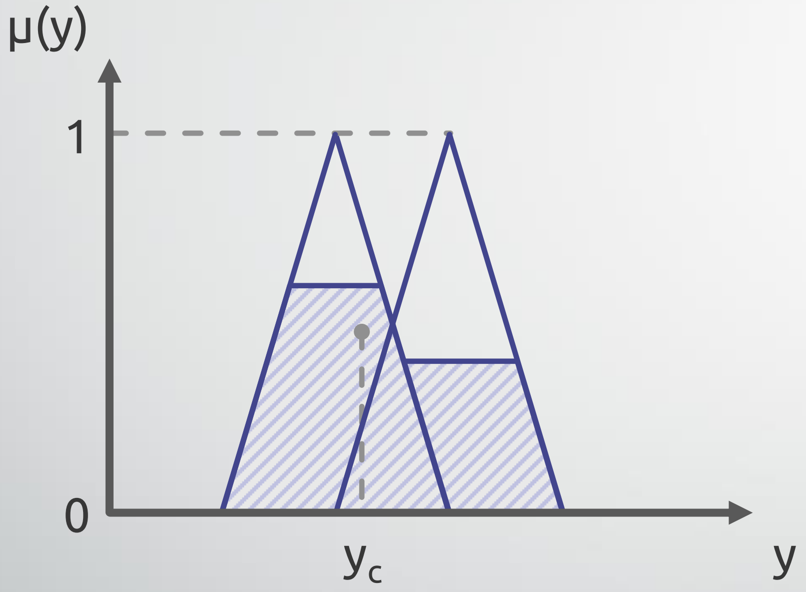
Regulatory rozmyte: wyostrzanie



Metoda ostatniego maksimum:

$$y = y_{max}$$

Regulatory rozmyte: wyostrzanie



Metoda środka ciężkości:

$$y = y_c = \frac{\int y \cdot \mu(y) dy}{\int \mu(y) dy}$$

Regulatory rozmyte: wyostrzanie

- Wartość numeryczna wielkości sterującej – **metoda środka ciężkości**:

$$u = -0{,}306$$

Dziękuję za uwagę

Konsultacje:

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl