



# Inteligentne systemy sterowania

## Wykład 2: algorytmy sterowania

dr inż. Przemysław Zakrzewski

Instytut Informatyki

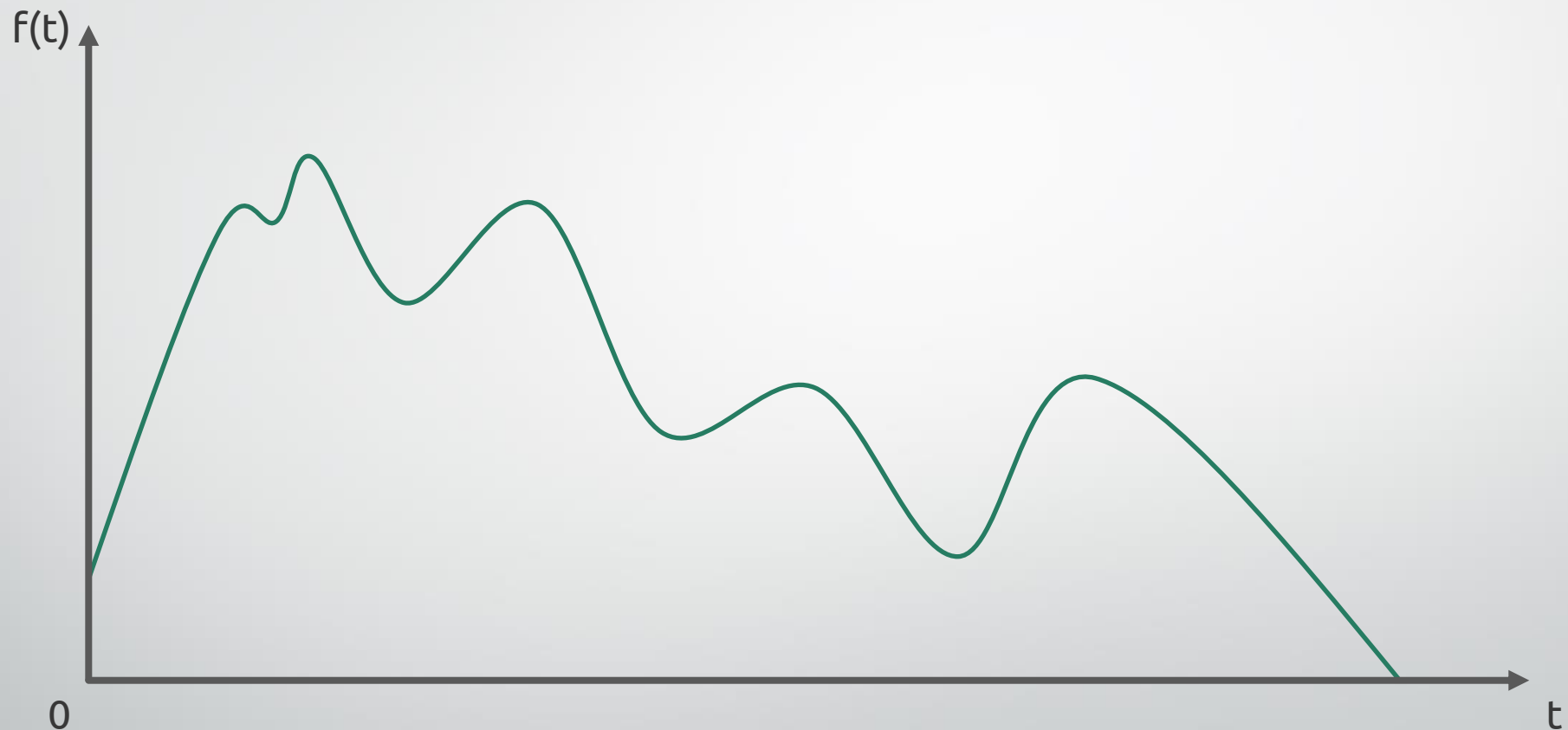
Politechnika Poznańska

[przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl](mailto:przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl)

# Plan wykładu

- Sterowanie:
  - ✓ sygnał analogowy (ciągły), dyskretny i cyfrowy,
  - ✓ obiekt sterowania,
  - ✓ układ otwarty,
  - ✓ układ zamknięty – układ automatycznej regulacji UAR.
- Opis dynamiki układów:
  - ✓ równania różniczkowe,
  - ✓ równania różnicowe.
- Algorytmy sterowania:
  - ✓ regulatory klasyczne typu: P, I, PI, PD, PID,
  - ✓ wskaźniki jakości.
- Implementacja UAR.

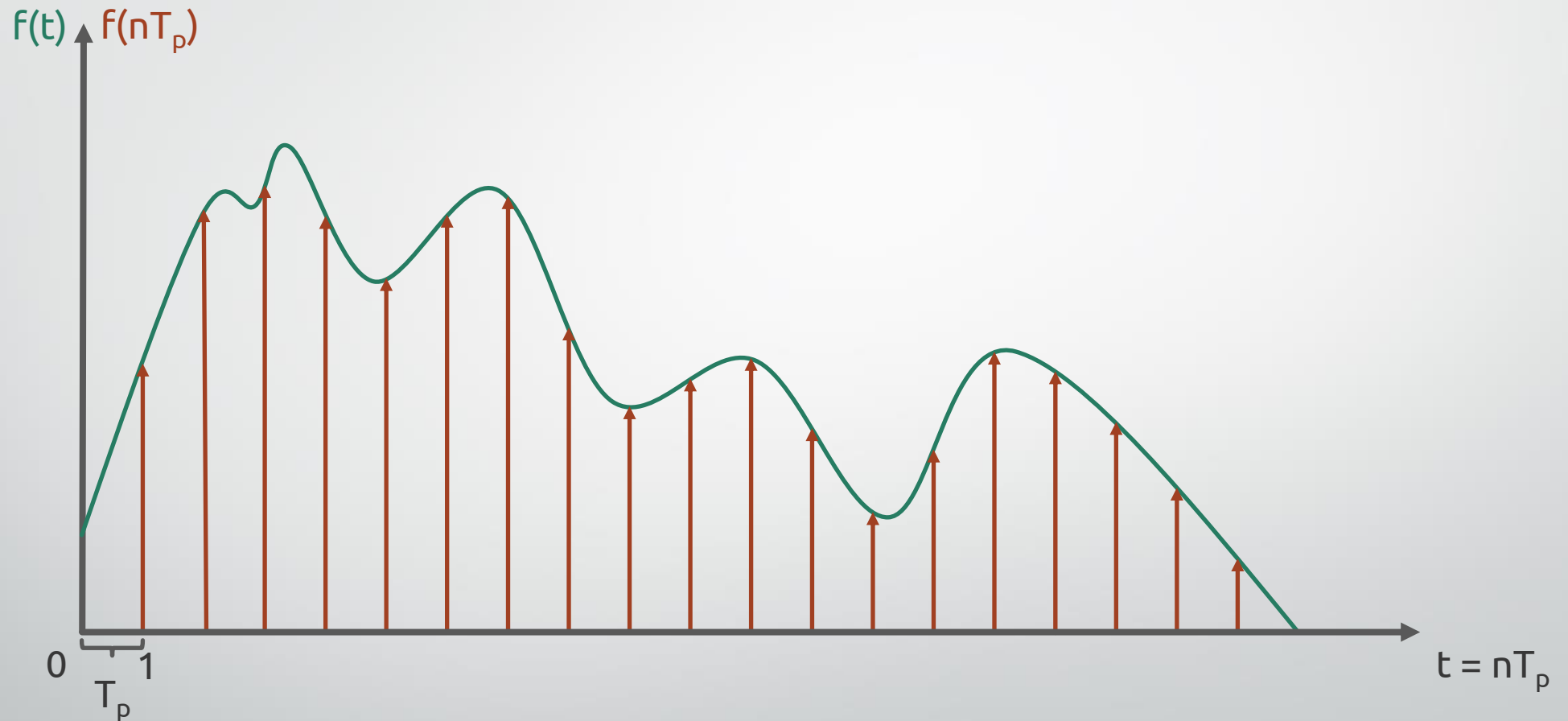
# Sterowanie: sygnał analogowy (ciągły)



**Oznaczenia:**

$f(t)$  – sygnał analogowy (ciągły),  $t$  – czas [s].

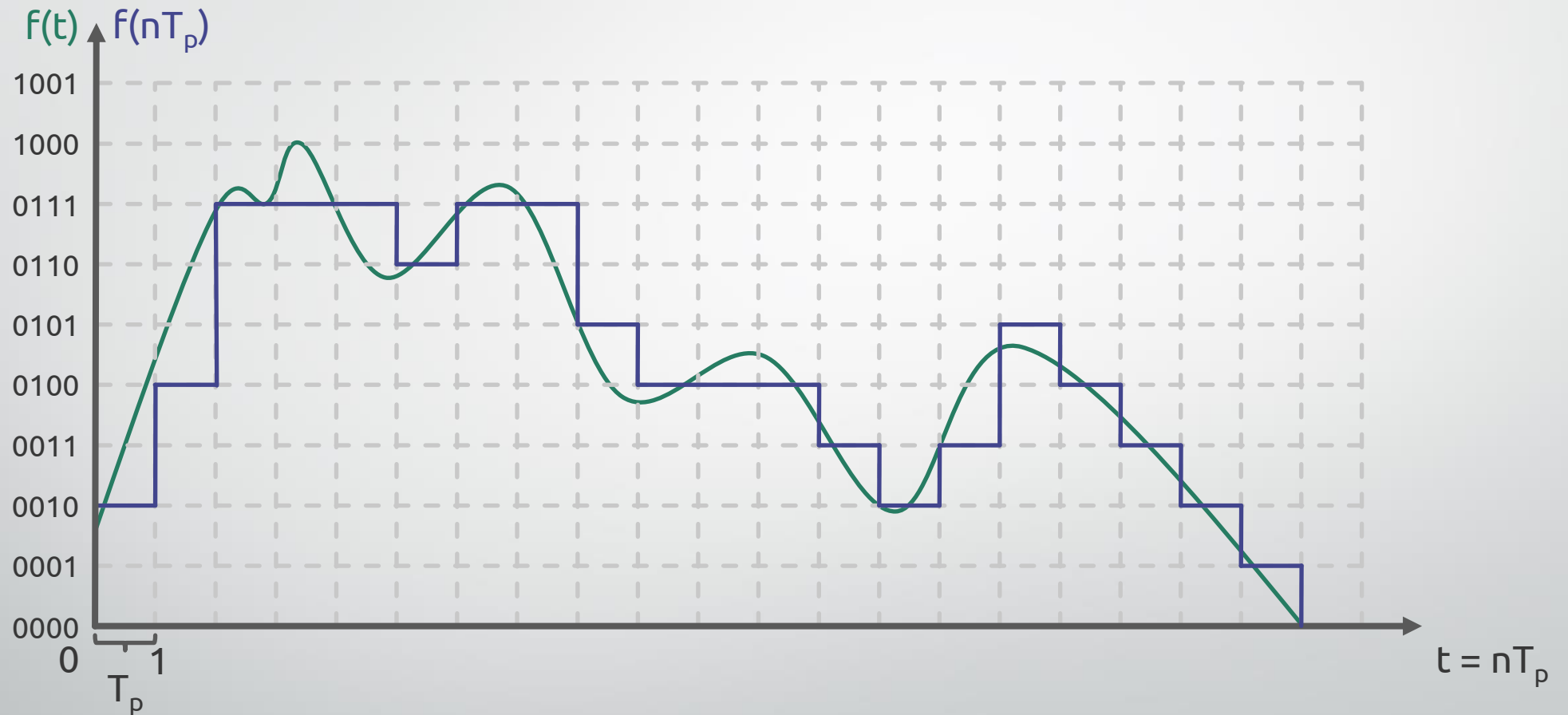
# Sterowanie: sygnał dyskretny



**Oznaczenia:**

$f(t)$  – sygnał analogowy (ciągły),  $f(nT_p)$  – sygnał dyskretny,  $t$  – czas [s],  $n$  – chwila próbkowania,  $T_p$  – okres próbkowania [s].

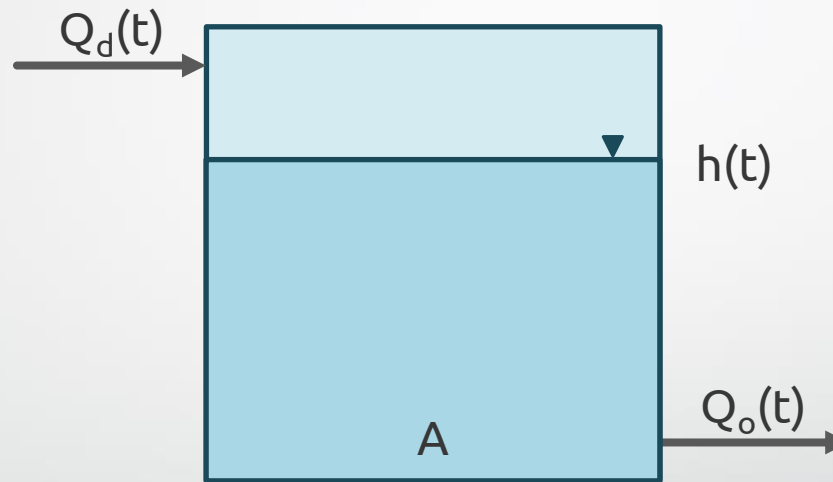
# Sterowanie: sygnał cyfrowy



**Oznaczenia:**

$f(t)$  – sygnał analogowy (ciągły),  $f(nT_p)$  – sygnał cyfrowy,  $t$  – czas [s],  $n$  – chwila próbkowania,  $T_p$  – okres próbkowania [s].

# Sterowanie: obiekt sterowania



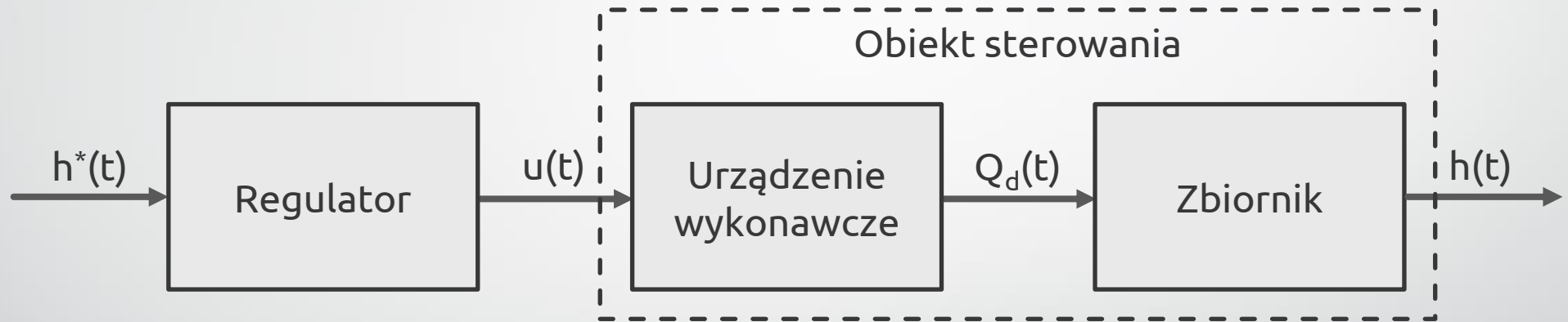
**Zmienne procesowe:**

$h(t)$  – poziom substancji w zbiorniku [m],  $Q_d(t)$  – natężenie dopływu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  $Q_o(t)$  – natężenie odpływu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].

**Parametry:**

$A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [ $\text{m}^2$ ].

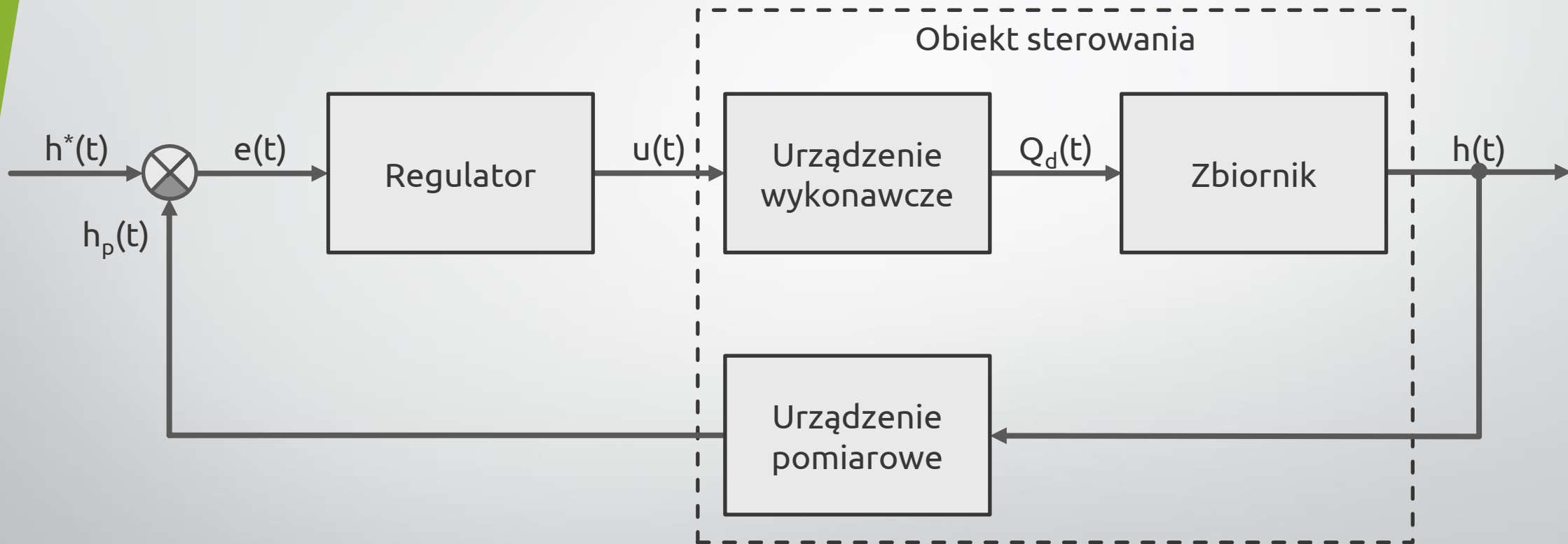
# Sterowanie: układ otwarty



**Zmienne procesowe:**

$h(t)$  – poziom substancji w zbiorniku [m],  $h^*(t)$  – wartość zadana poziomowi substancji w zbiorniku [m],  $Q_d(t)$  – natężenie dopływu [ $m^3/s$ ],  
 $u(t)$  – wielkość sterująca (np. natężenie prądu, napięcie).

# Sterowanie: układ zamknięty – UAR

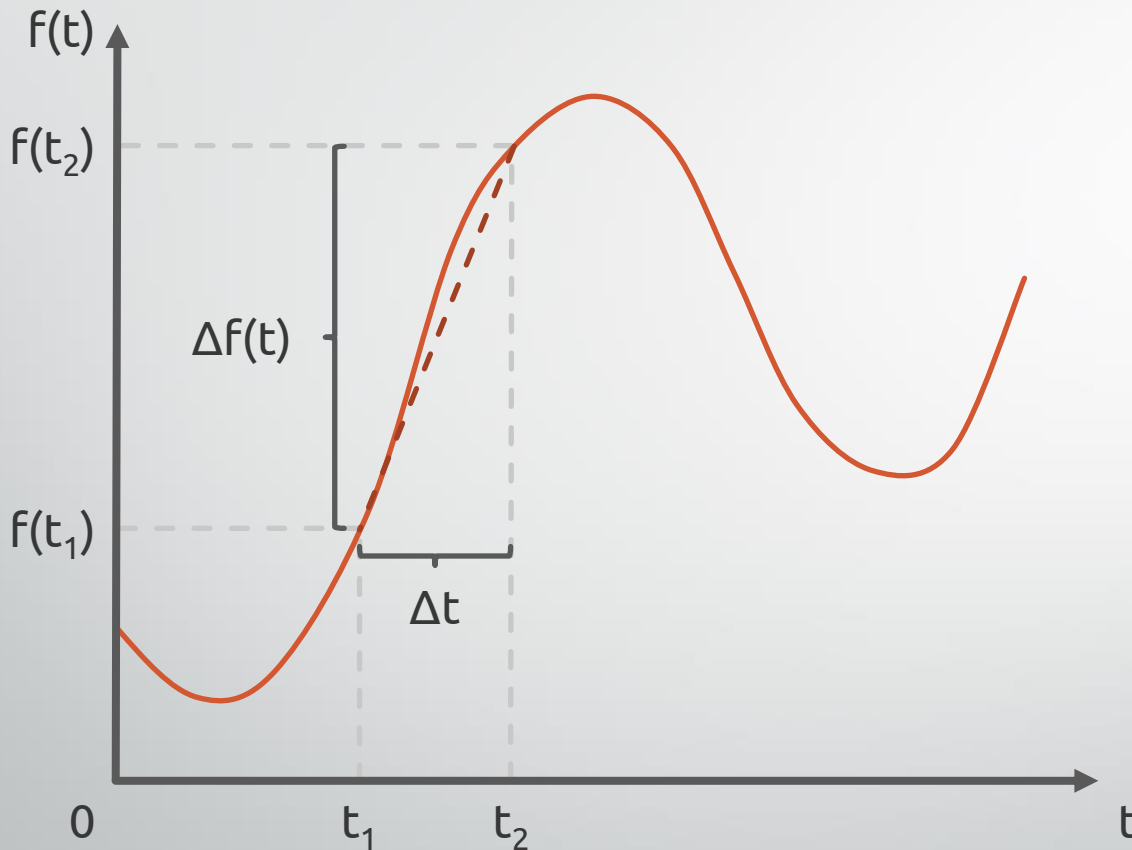


**Zmienne procesowe:**

$e(t)$  – uchyb regulacji [m],  $h(t)$  – poziom substancji w zbiorniku [m],  $h^*(t)$  – wartość zadana poziomowi substancji w zbiorniku [m],  $h_p(t)$  – wartość zmierzona poziomowi substancji w zbiorniku [m],  $Q_d(t)$  – natężenie dopływu [ $m^3/s$ ],  $u(t)$  – wielkość sterująca (np. natężenie prądu, napięcie).



# Opis dynamiki układów: równania różniczkowe



**Iloraz różnicowy:**

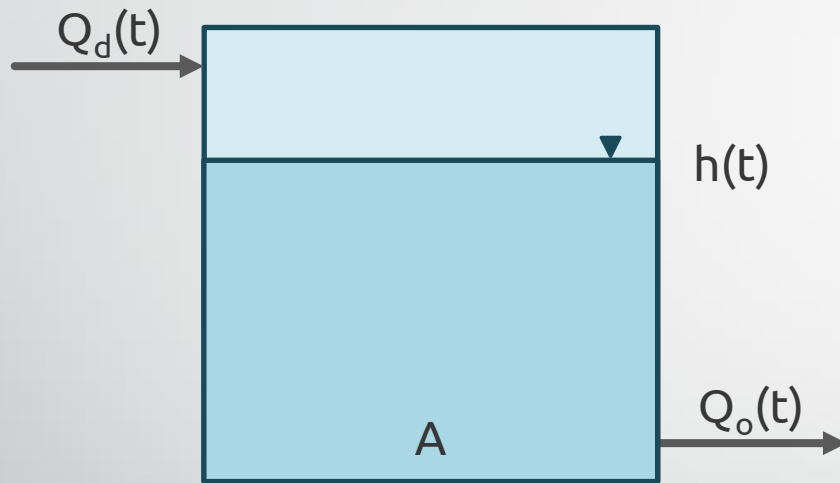
$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

**Pochodna funkcji:**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

# Opis dynamiki układów: równania różniczkowe



**Bilans masy całkowitej:**

$$A \frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

**Odptyw swobodny:**

$$Q_o(t) = \beta \sqrt{h(t)}$$

$$A \frac{dh(t)}{dt} + \beta \sqrt{h(t)} = Q_d(t)$$

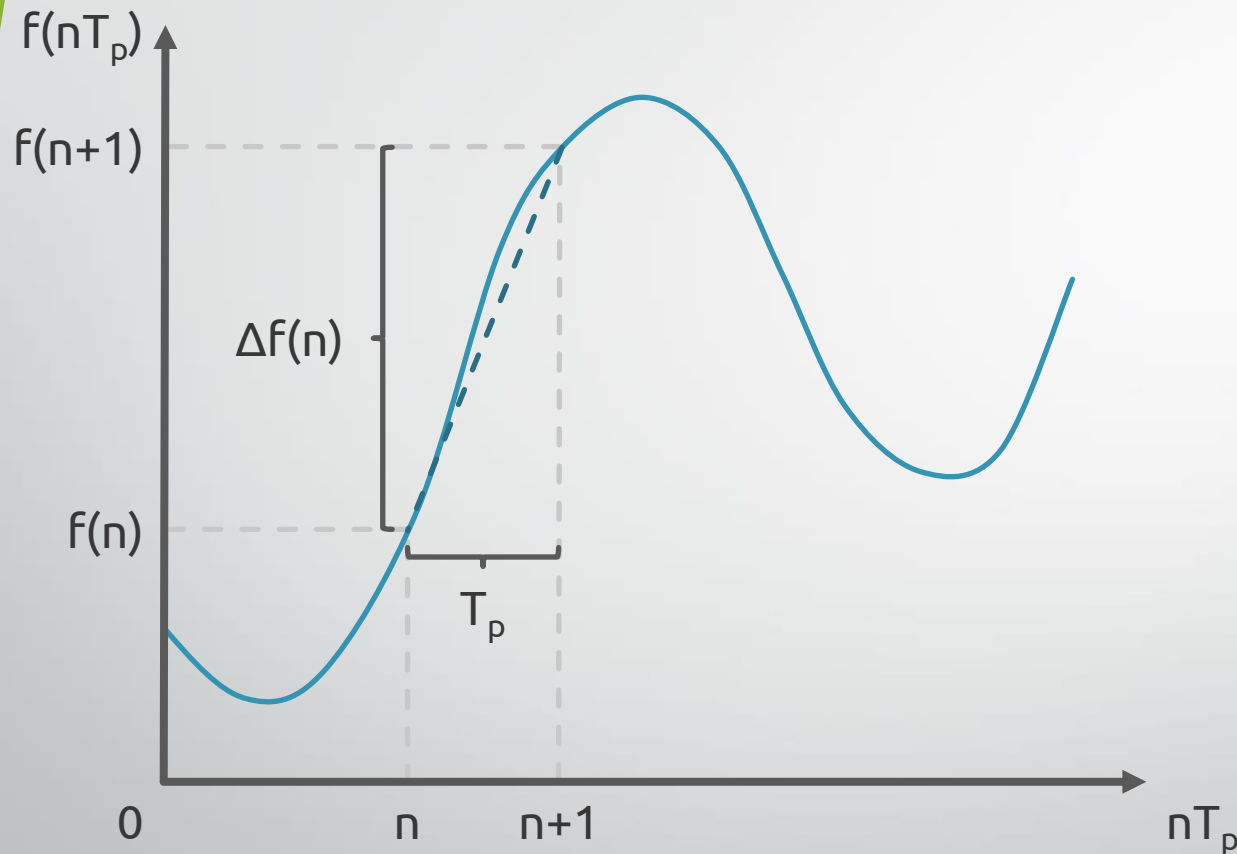
**Zmienne procesowe:**

$h(t)$  – poziom substancji w zbiorniku [m],  $Q_d(t)$  – natężenie dopływu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  $Q_o(t)$  – natężenie odpływu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].

**Parametry:**

$A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [ $\text{m}^2$ ],  $\beta$  – współczynnik wyptywu [ $\text{m}^{5/2}/\text{s}$ ].

# Opis dynamiki układów: równania różnicowe



**Iloraz różnicowy:**

$$\frac{\Delta f(n)}{T_p} = \frac{f(n+1) - f(n)}{T_p}$$

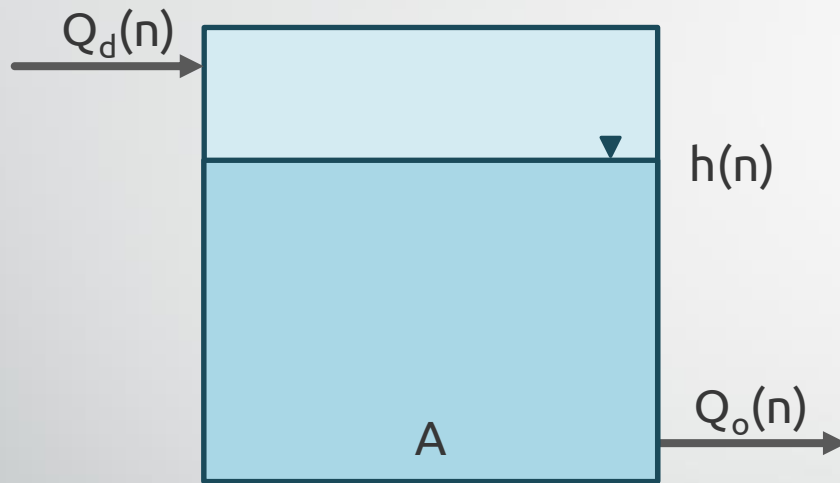
**Pochodna funkcji:**

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \frac{\Delta f(n)}{T_p}$$

**Parametry:**

$T_p$  – okres próbkowania [s].

# Opis dynamiki układów: równania różnicowe



**Bilans masy całkowitej:**

$$A \frac{\Delta h(n)}{T_p} = Q_d(n) - Q_o(n)$$

**Odptyw swobodny:**

$$Q_o(n) = \beta \sqrt{h(n)}$$

$$A \frac{\Delta h(n)}{T_p} + \beta \sqrt{h(n)} = Q_d(n)$$

**Zmienne procesowe:**

$h(n)$  – poziom substancji w zbiorniku [m],  $Q_d(n)$  – natężenie dopływu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  $Q_o(n)$  – natężenie odpływu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].

**Parametry:**

$A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika [ $\text{m}^2$ ],  $\beta$  – współczynnik wyptywu [ $\text{m}^{5/2}/\text{s}$ ].

# Opis dynamiki układów: równania różnicowe

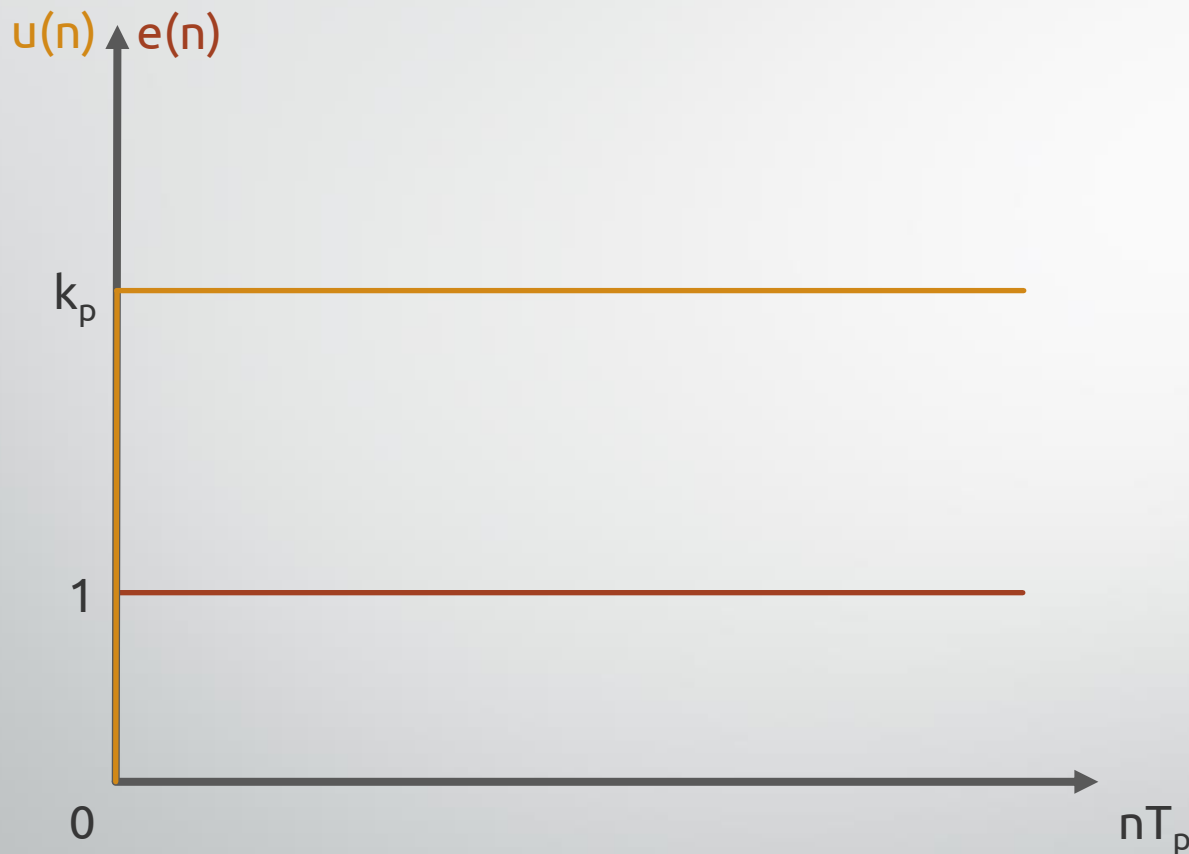
- Równanie różnicowe:

$$A \frac{\Delta h(n)}{T_p} + \beta \sqrt{h(n)} = Q_d(n)$$

- Rozwiązanie równania różnicowego – rekurencja:

$$\begin{cases} h(0) = h_0 \\ h(n+1) = \frac{1}{A} \left( -\beta \sqrt{h(n)} + Q_d(n) \right) T_p + h(n) \end{cases}$$

# Algorytmy sterowania: regulator typu P



**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p e(n)$$

**Algorytm przyrostowy:**

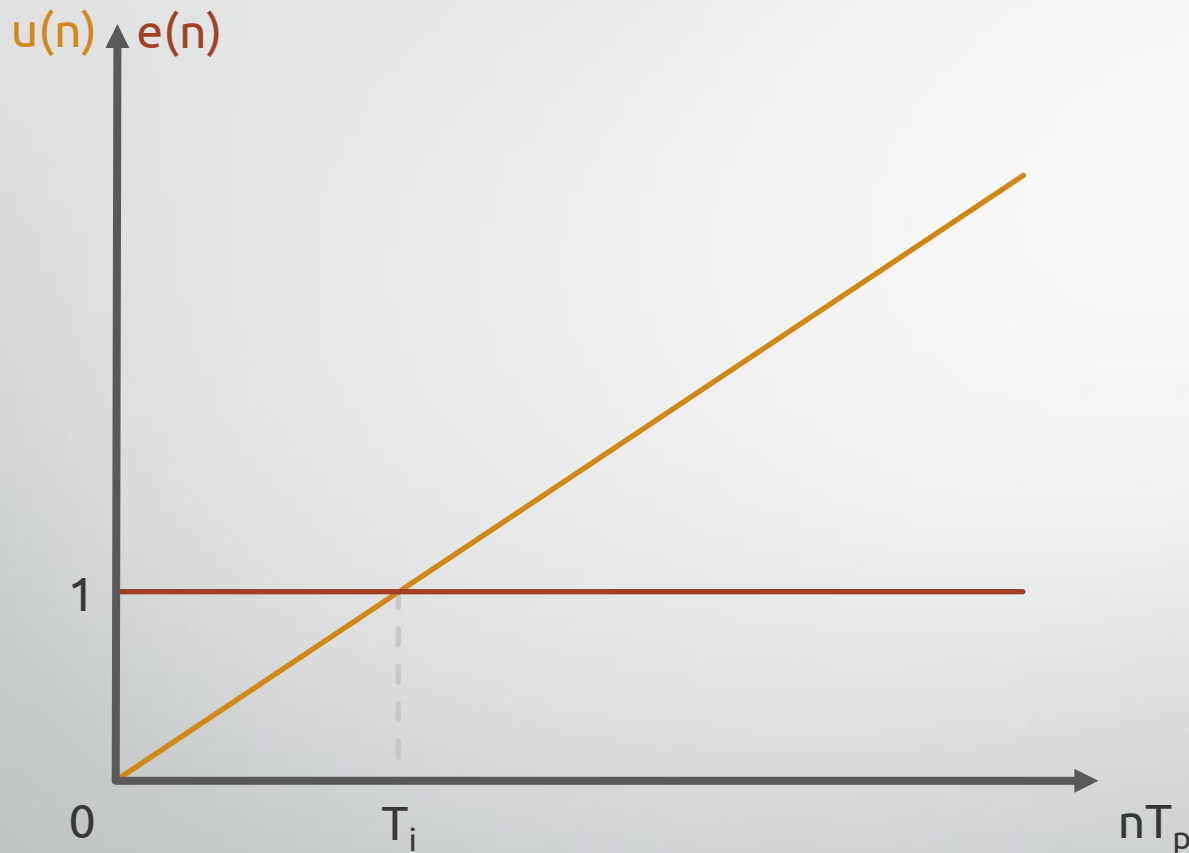
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n - 1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \Delta e(n)$$

**Nastawy regulatora:**

$k_p$  – wzmacnienie regulatora [-],  $T_p$  – okres próbkowania [s].

# Algorytmy sterowania: regulator typu I



**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^n e(k)$$

**Algorytm przyrostowy:**

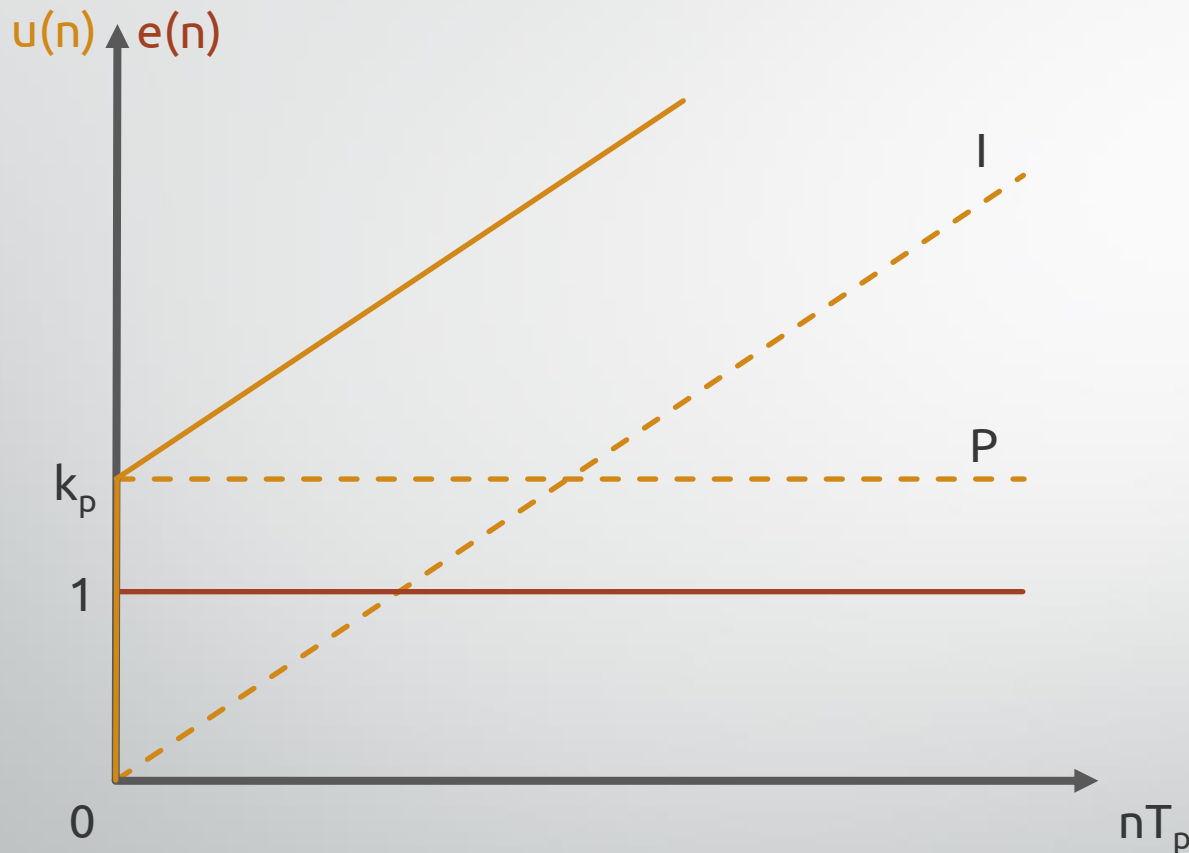
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = \frac{T_p}{T_i} e(n)$$

**Nastawy regulatora:**

$T_i$  – stała całkowania [s],  $T_p$  – okres próbkowania [s].

# Algorytmy sterowania: regulator typu PI



**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p \left[ e(n) + \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^n e(k) \right]$$

**Algorytm przyrostowy:**

$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

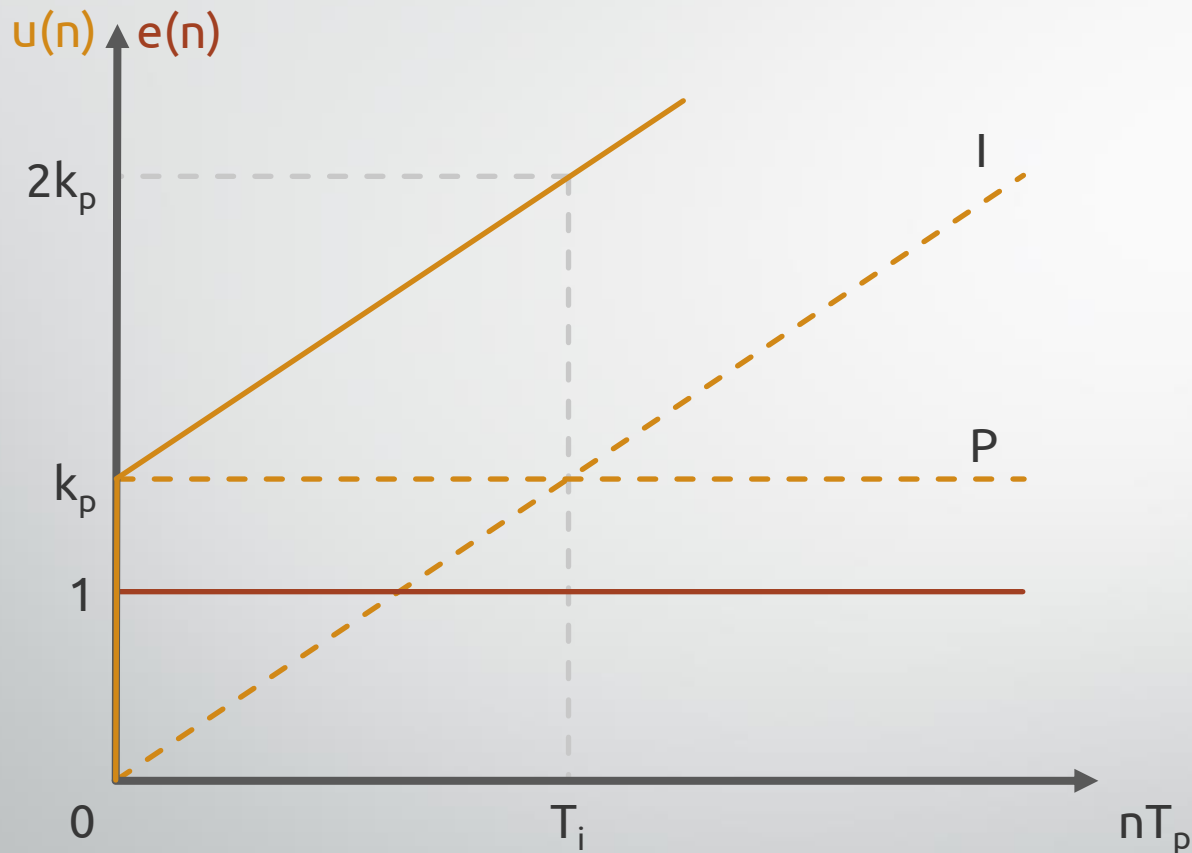
$$\Delta u(n) = k_p \left[ \Delta e(n) + \frac{T_p}{T_i} e(n) \right]$$

**Nastawy regulatora:**

$k_p$  – wzmacnienie regulatora [-],  $T_i$  – czas zdwojenia [s],  $T_p$  – okres próbkowania [s].



# Algorytmy sterowania: regulator typu PI



**Czas zdwojenia:**

$$T_i = n_i T_p$$

takie, że:

$$u_I(n_i) = u_P(n_i)$$

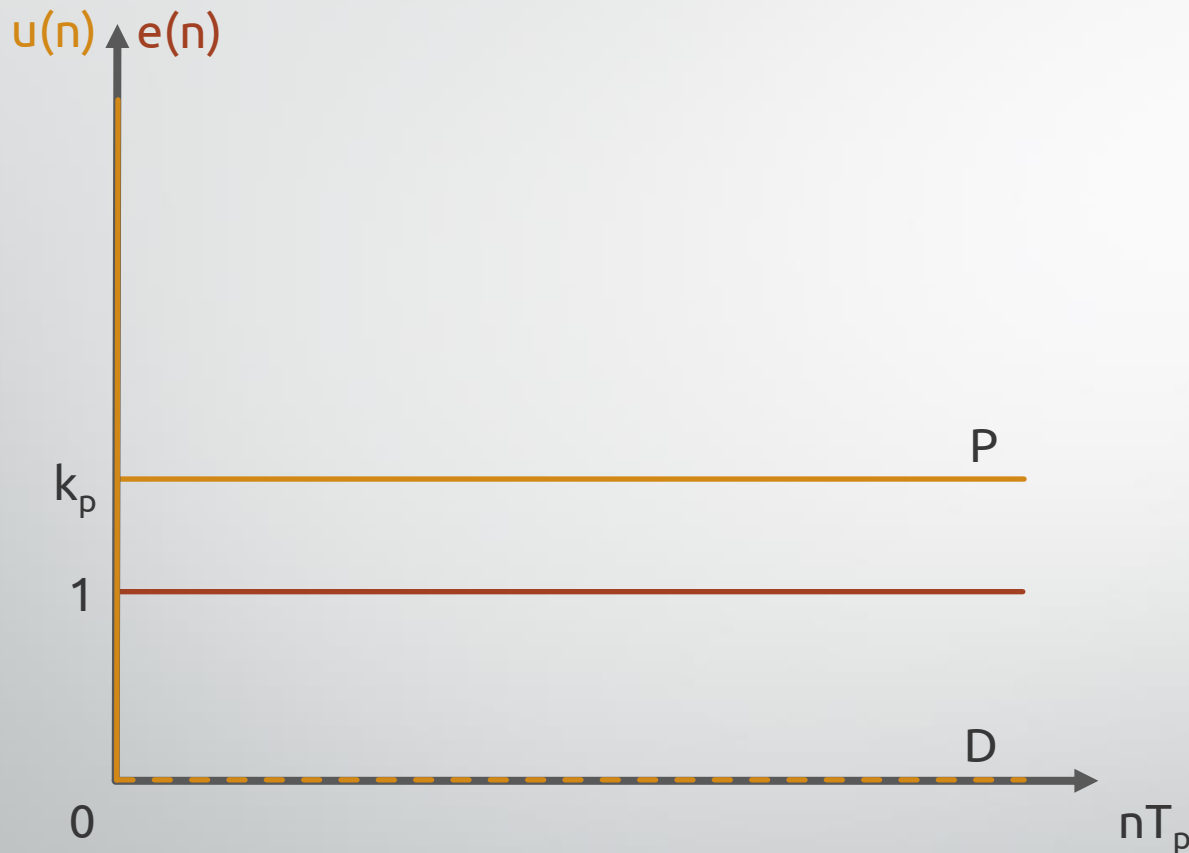
dla:

$$e(n) = \mathbf{1}(n)$$

**Nastawy regulatora:**

$k_p$  – wzmacnienie regulatora [-],  $T_i$  – czas zdwojenia [s],  $T_p$  – okres próbkowania [s].

# Algorytmy sterowania: regulator typu PD



**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p \left[ e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

**Algorytm przyrostowy:**

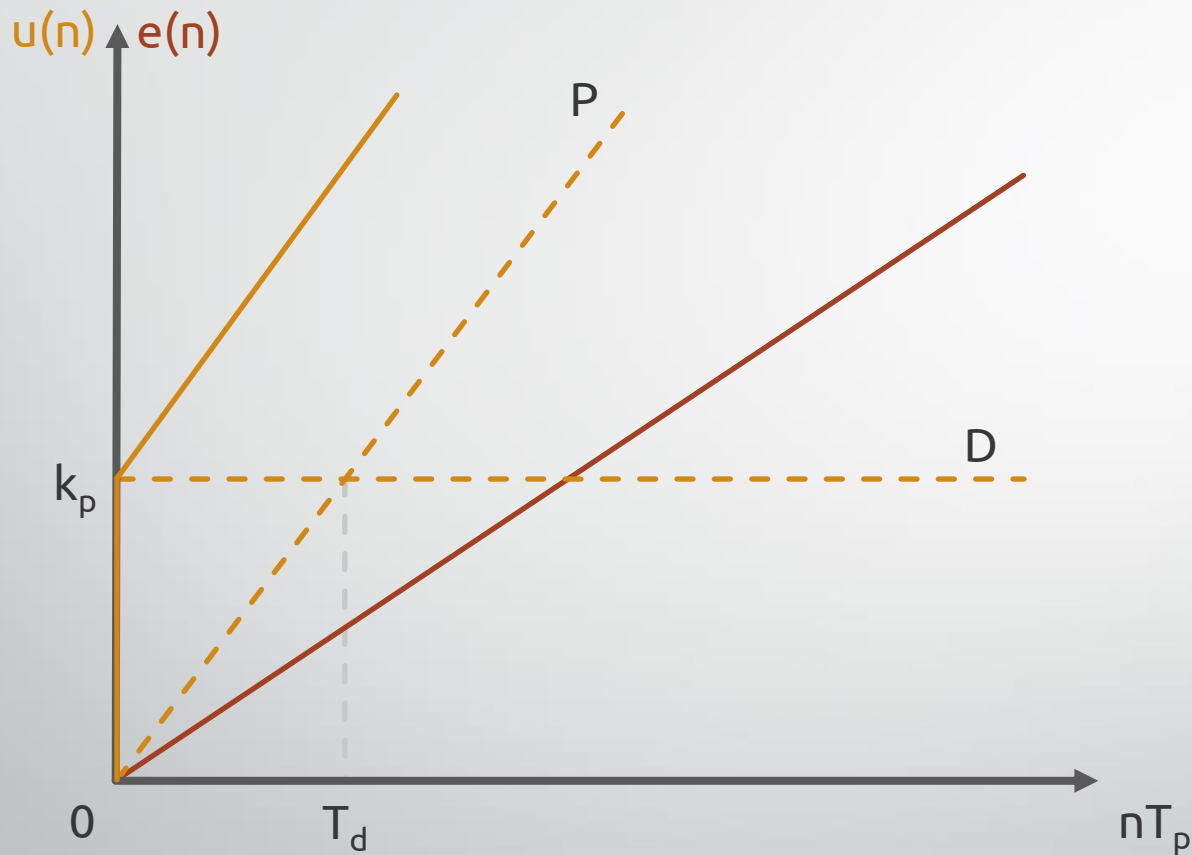
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[ \Delta e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta^2 e(n) \right]$$

**Nastawy regulatora:**

$k_p$  – wzmacnienie regulatora [-],  $T_d$  – czas wyprzedzenia [s],  $T_p$  – okres próbkowania [s].

# Algorytmy sterowania: regulator typu PD



**Czas wyprzedzenia:**

$$T_d = n_d T_p$$

takie, że:

$$u_D(n_d) = u_P(n_d)$$

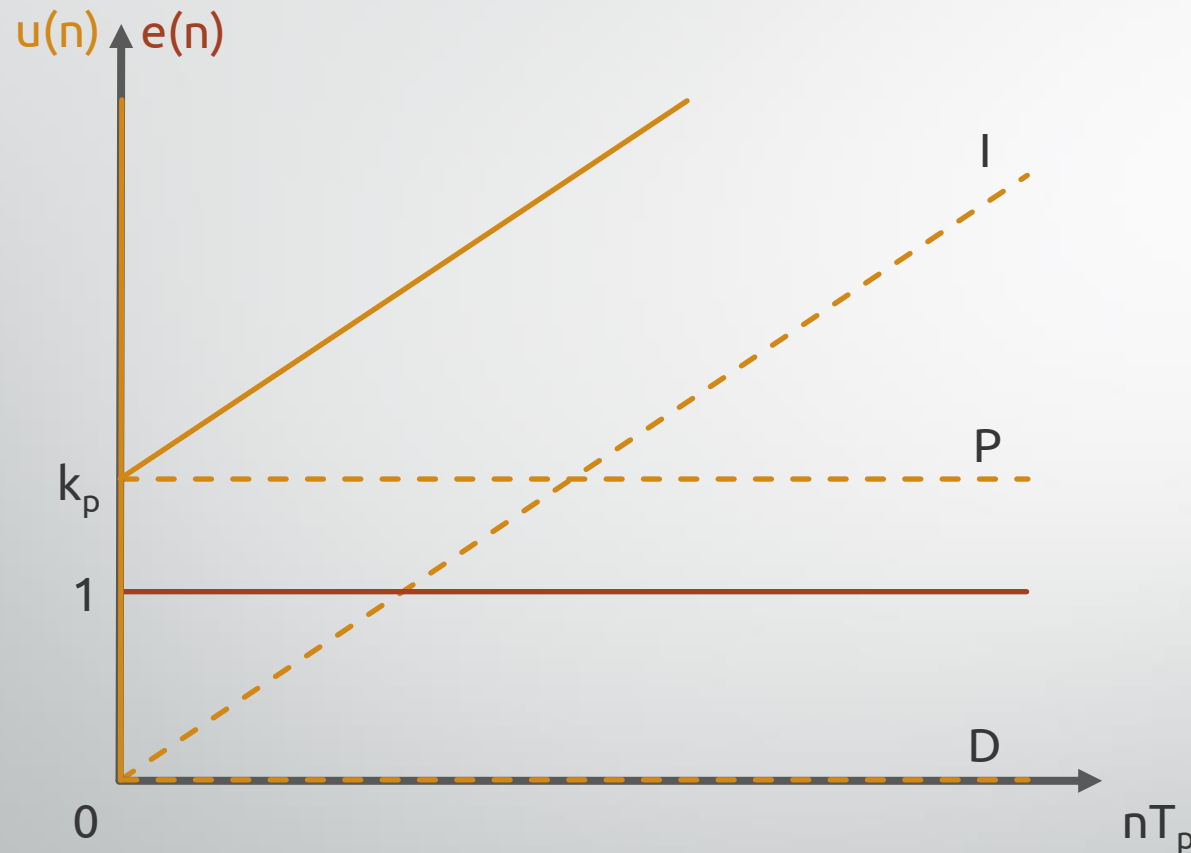
dla:

$$e(n) = t \cdot \mathbf{1}(n)$$

**Nastawy regulatora:**

$k_p$  – wzmacnienie regulatora [-],  $T_d$  – czas wyprzedzenia [s],  $T_p$  – okres próbkowania [s].

# Algorytmy sterowania: regulator typu PID



**Algorytm pozycyjny:**

$$u(n) = k_p \left[ e(n) + \frac{T_p}{T_i} \sum_{k=0}^n e(k) + \frac{T_d}{T_p} \Delta e(n) \right]$$

**Algorytm przyrostowy:**

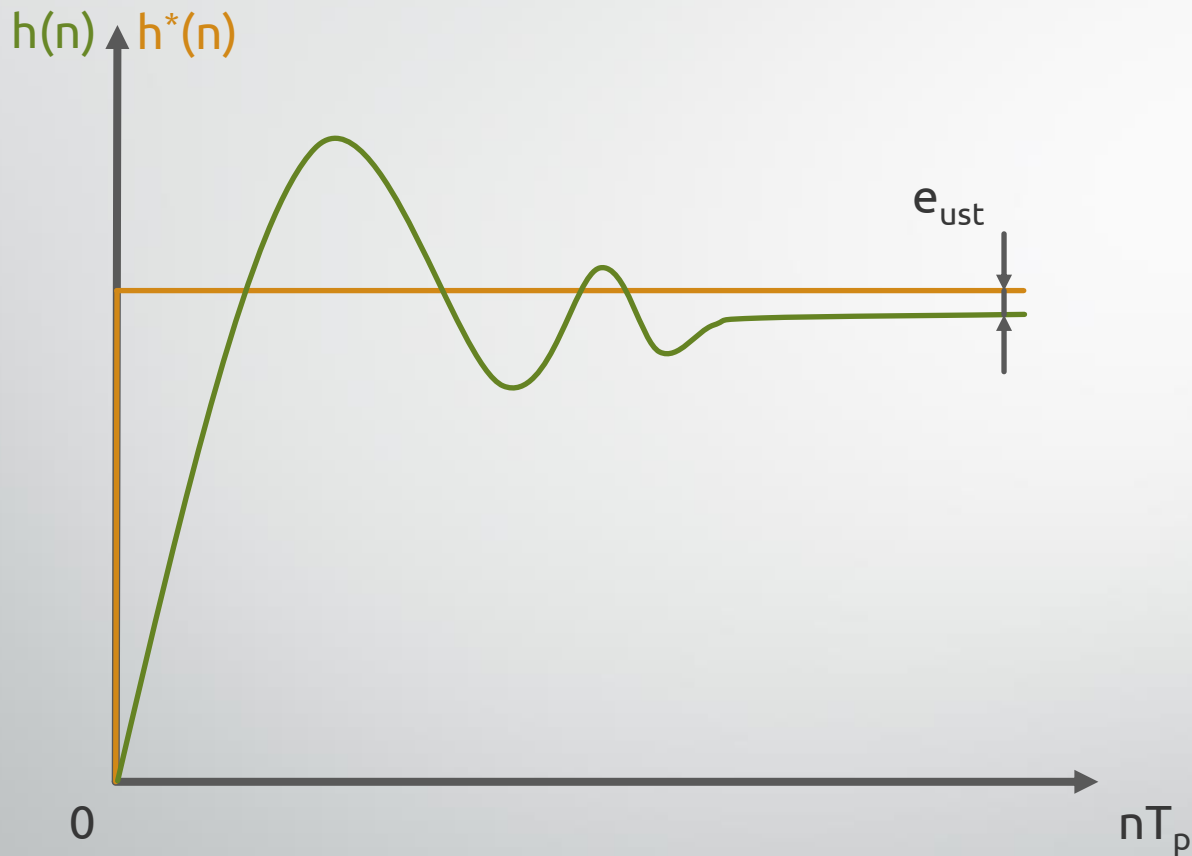
$$\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$\Delta u(n) = k_p \left[ \Delta e(n) + \frac{T_p}{T_i} e(n) + \frac{T_d}{T_p} \Delta^2 e(n) \right]$$

**Nastawy regulatora:**

$k_p$  – wzmacnienie regulatora [-],  $T_d$  – czas wyprzedzenia [s],  $T_i$  – czas zdwojenia [s],  $T_p$  – okres próbkowania [s].

# Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości



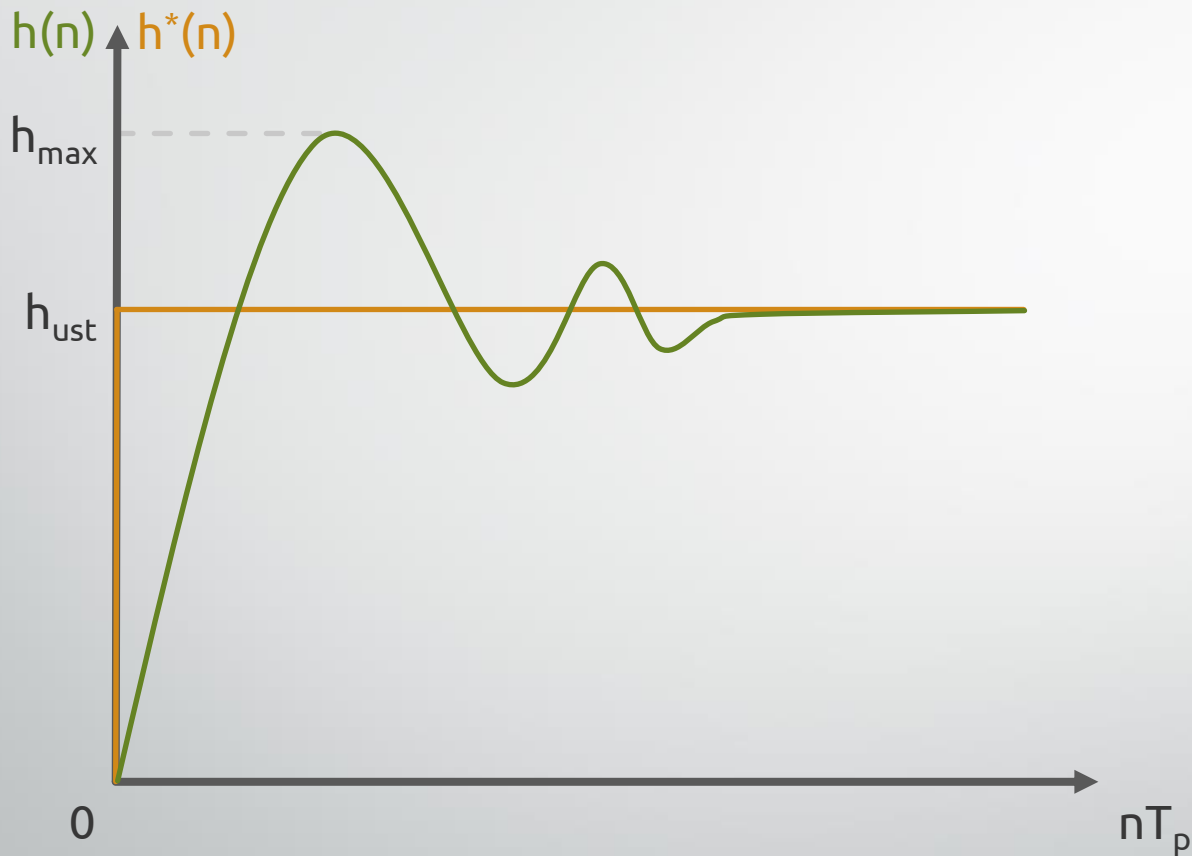
**Uchyb ustalony:**

$$e_{ust} = \lim_{n \rightarrow \infty} e(n)$$

lub:

$$e_{ust} = \lim_{n \rightarrow \infty} (h^*(n) - h(n))$$

# Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości

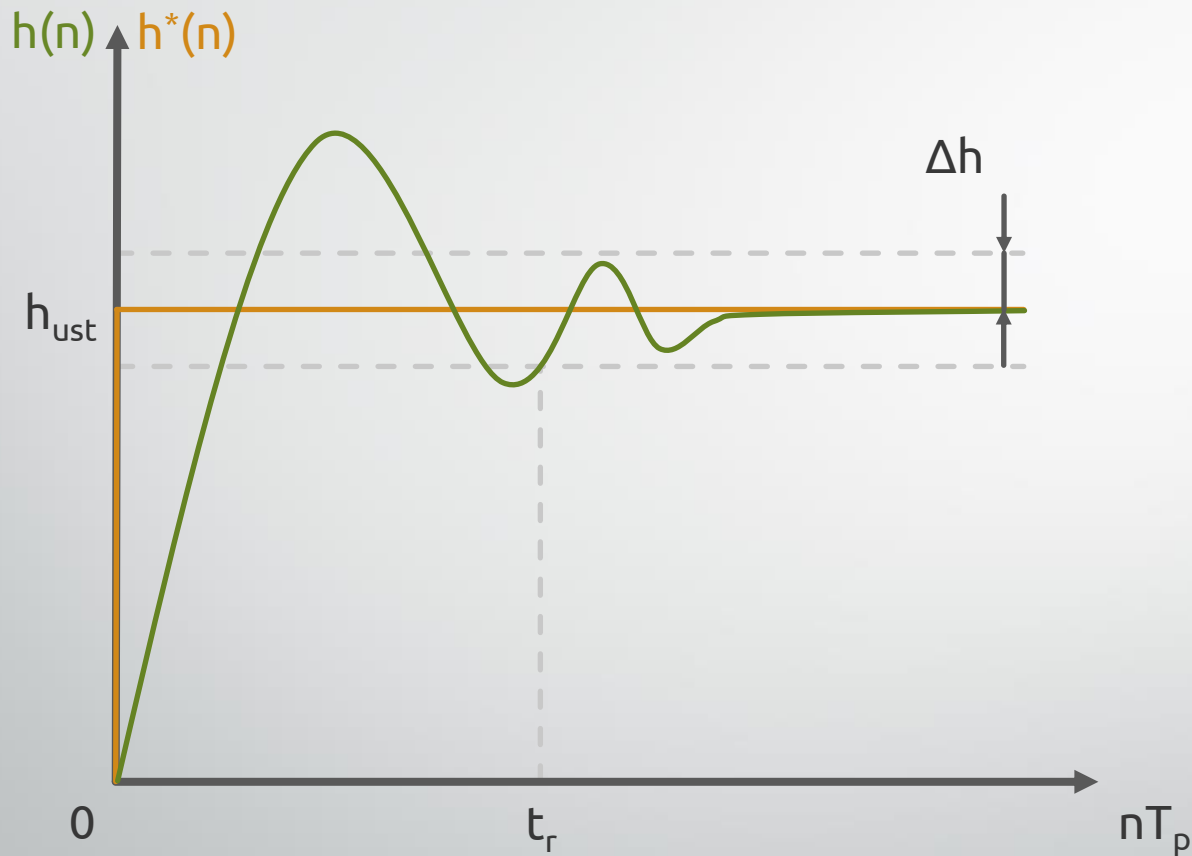


**Przeregulowanie:**

$$h_{ust} = \lim_{n \rightarrow \infty} h(n)$$

$$\kappa = \frac{h_{max} - h_{ust}}{h_{ust}} \cdot 100\%$$

# Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości



**Czas regulacji:**

$$t_r = n_r T_p$$

gdzie:

$$\bigwedge_{n > n_r} h_{ust} - \Delta h \leq h(n) \leq h_{ust} + \Delta h$$

$$\Delta h = (0,01 \div 0,05) \cdot h_{ust}$$

# Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości

- Całkowe wskaźniki dokładności regulacji:
  - ✓ układy ciągłe:

$$I_{|e|} = \int_0^t |e(t)| dt$$

$$I_{e^2} = \int_0^t e^2(t) dt$$

- ✓ układy cyfrowe:

$$I_{|e|} = T_p \sum_{k=0}^n |e(k)|$$

$$I_{e^2} = T_p \sum_{k=0}^n e^2(k)$$



# Algorytmy sterowania: wskaźniki jakości

- Całkowe wskaźniki kosztów regulacji:
  - ✓ układy ciągłe:

$$I_{|u|} = \int_0^t |u(t)| dt$$

$$I_{u^2} = \int_0^t u^2(t) dt$$

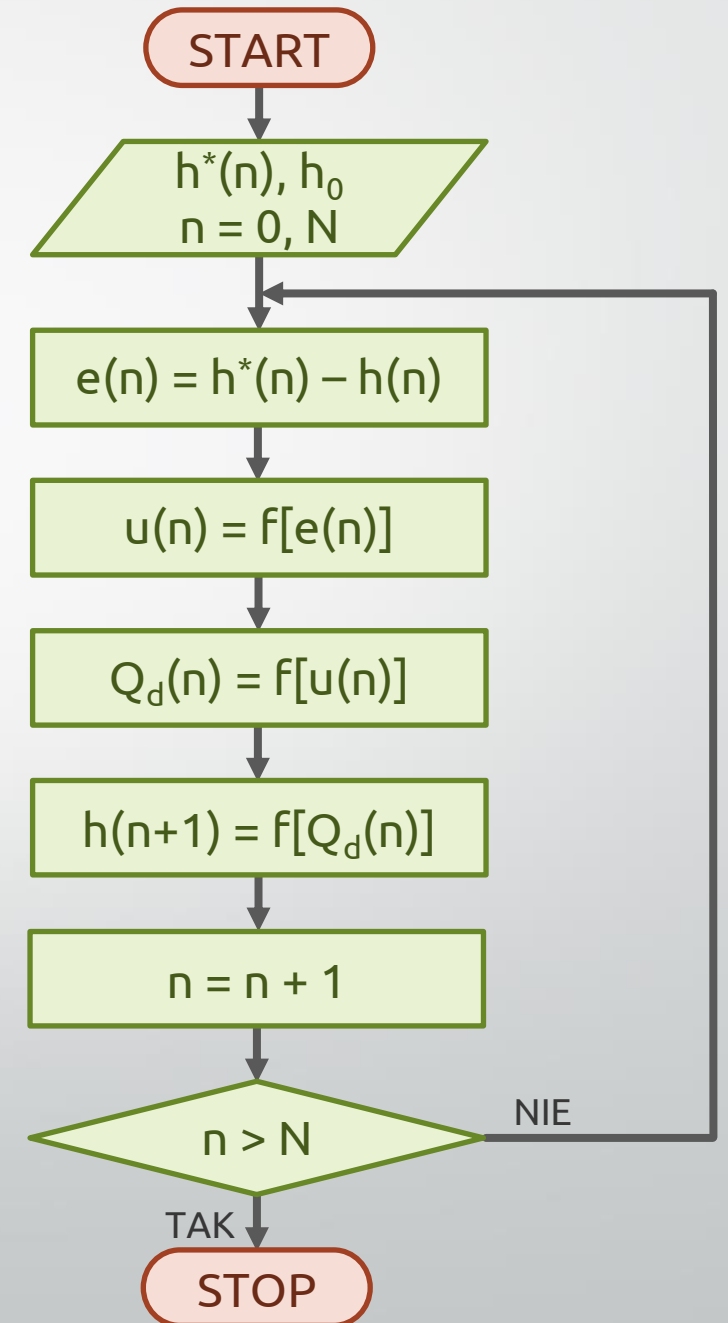
- ✓ układy cyfrowe:

$$I_{|u|} = T_p \sum_{k=0}^n |u(k)|$$

$$I_{u^2} = T_p \sum_{k=0}^n u^2(k)$$

# Implementacja UAR

- Krok 0:** Określenie wartości zadanej oraz wartości początkowej poziomu substancji.
- Krok 1:** Wyznaczenie wartości uchybu regulacji.
- Krok 2:** Wyznaczenie wartości wielkości sterującej.
- Krok 3:** Wyznaczenie wartości natężenia dopływu.
- Krok 4:** Wyznaczenie wartości poziomu substancji.
- Krok 5:** Jeżeli osiągnięto liczbę kroków symulacji to STOP, w przeciwnym przypadku przejdź do kroku 1.





**Dziękuję za uwagę**

**Konsultacje:**

[przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl](mailto:przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl)