Inteligentne systemy sterowania

Laboratorium 1: modelowanie procesów

dr inż. Przemysław Zakrzewski

Instytut Informatyki

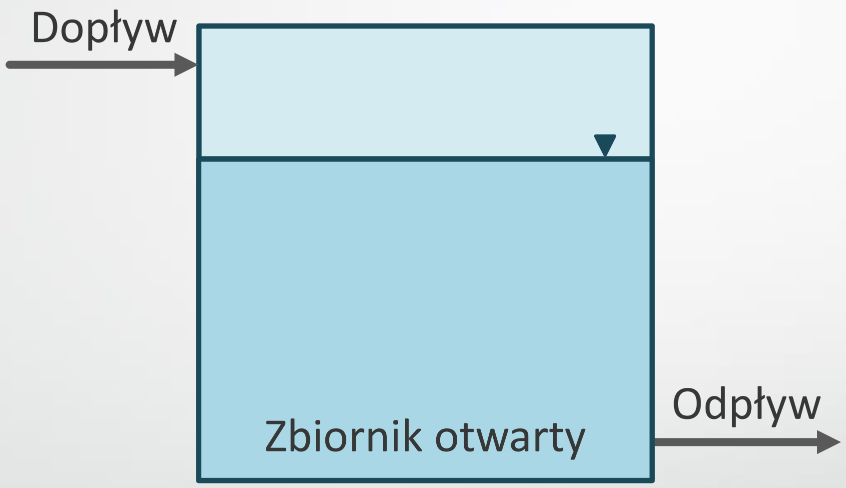
Politechnika Poznańska

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl

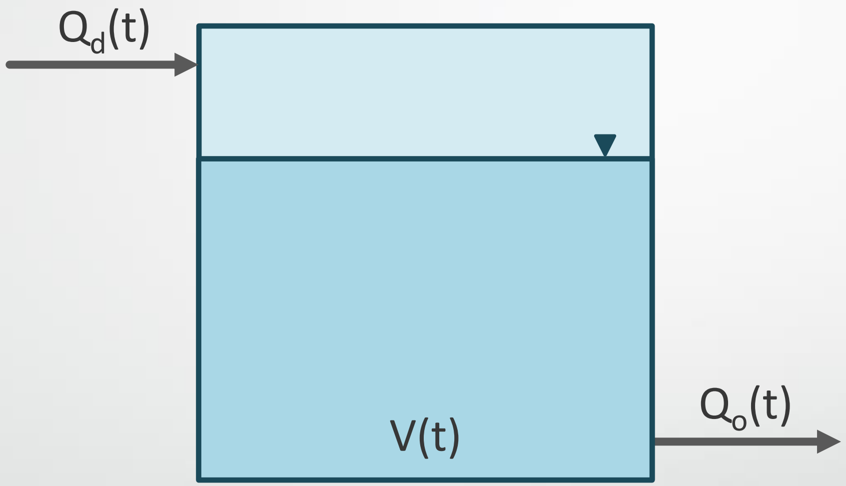
Plan laboratorium

- Proces I: napełnianie zbiornika:
  - ✓ schemat procesu,
  - ✓ model matematyczny dla zmian objętości,
  - ✓ model matematyczny dla zmian poziomu.
- Proces II: mieszanie substancji w zbiorniku:
  - ✓ schemat procesu,
  - ✓ model matematyczny dla zmian stężenia.

Proces I: schemat procesu

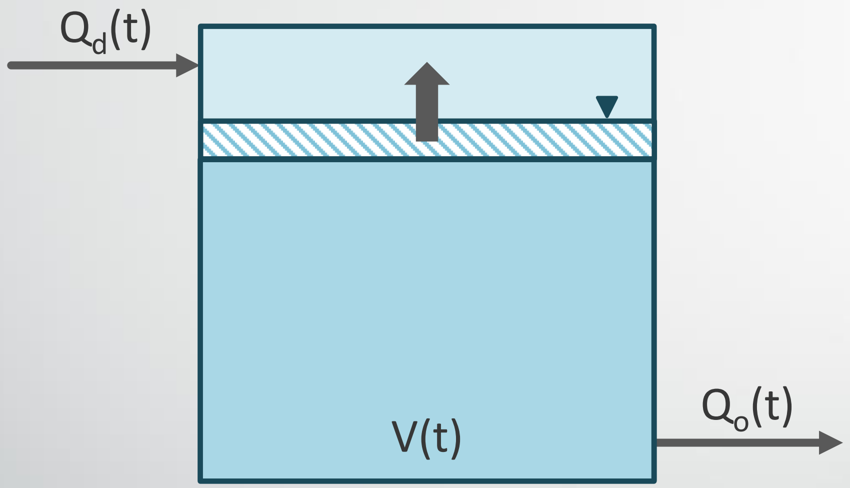


Proces I: model matematyczny dla zmian objętości



Zmienne procesowe:
$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m³/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m³/s], $V(t)$ – objętość substancji w zbiorniku [m³].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości

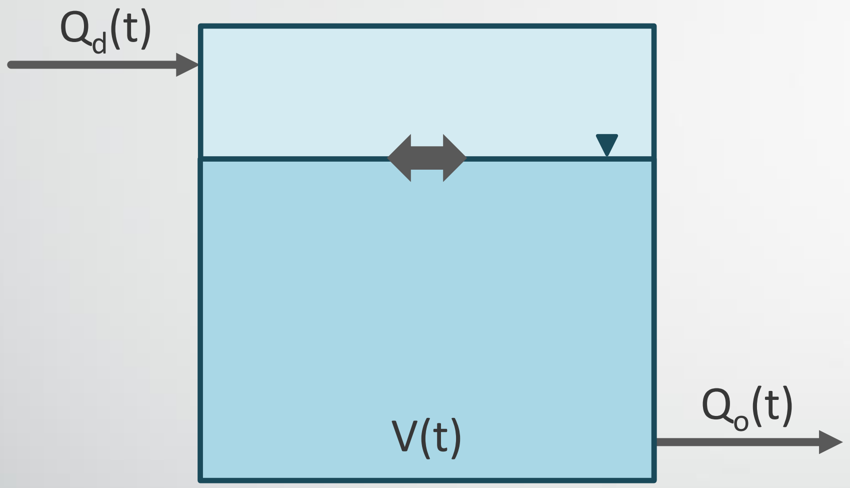


Objętość substancji rośnie:

$$Q_d(t) > Q_o(t) \Longrightarrow V(t) \uparrow$$

Zmienne procesowe:
$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość substancji w zbiorniku [m^3].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości

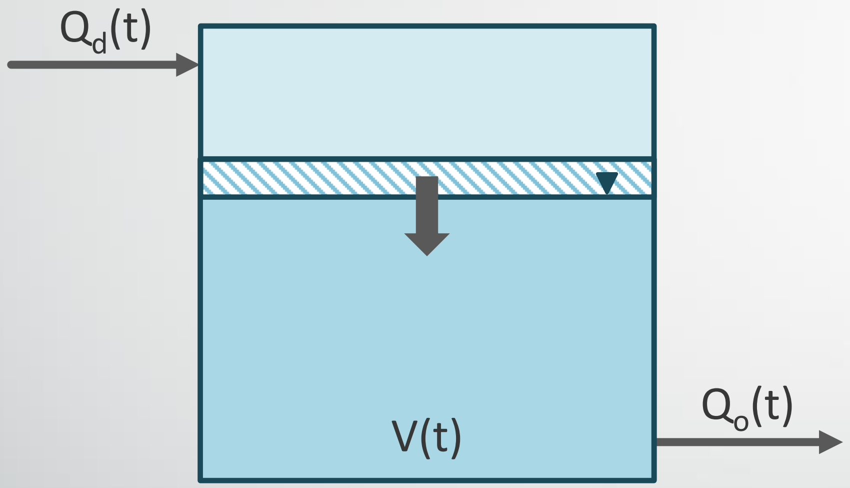


Objętość substancji bez zmian:

$$Q_d(t) = Q_o(t) \Longrightarrow V(t) \leftrightarrow$$

Zmienne procesowe:
$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość substancji w zbiorniku [m^3].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości

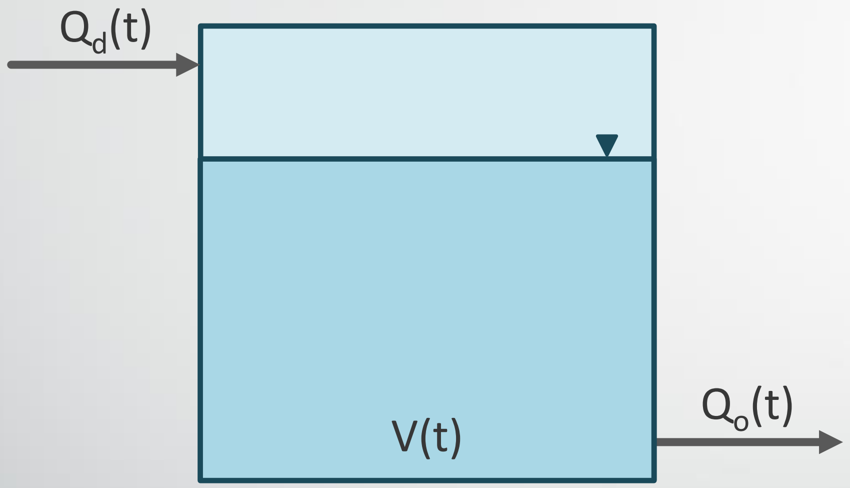


Objętość substancji maleje:

$$Q_d(t) < Q_o(t) \Longrightarrow V(t) \downarrow$$

Zmienne procesowe:
$Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], V(t) – objętość substancji w zbiorniku [m^3].

Proces I: model matematyczny dla zmian objętości



Zmiany objętości substancji:

$$Q_d(t) > Q_o(t) \Longrightarrow V(t) \uparrow$$

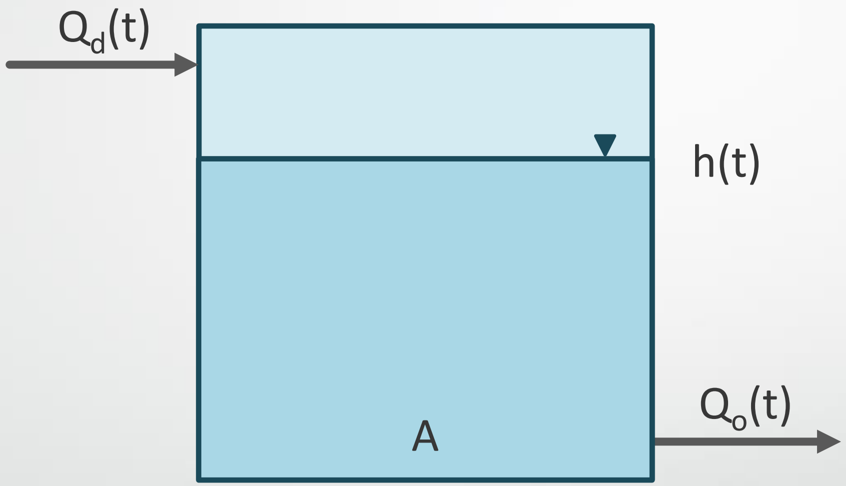
$$Q_d(t) = Q_o(t) \Longrightarrow V(t) \leftrightarrow$$

$$Q_d(t) < Q_o(t) \Longrightarrow V(t) \downarrow$$

Bilans masy całkowitej:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

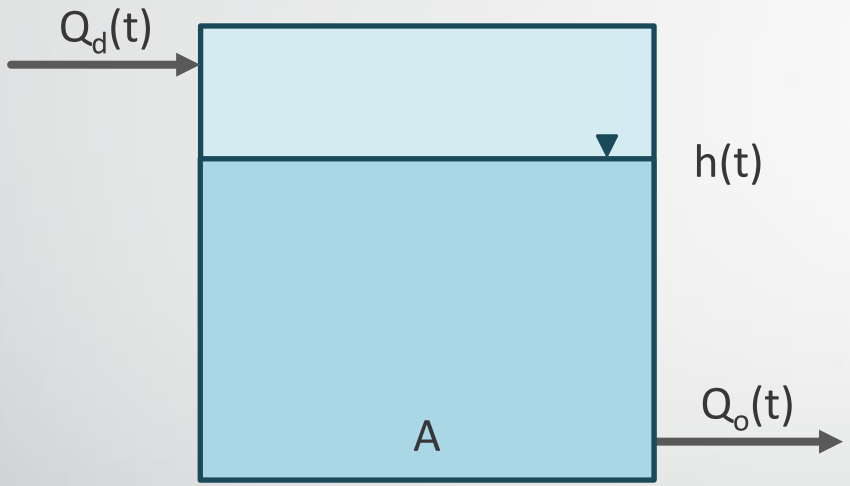
Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu



Zmienne procesowe:
h(t) – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:
A – pole powierzchni przekroju porzecznego zbiornika [m^2].

Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu



Bilans masy całkowitej:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

$$V(t) = Ah(t)$$

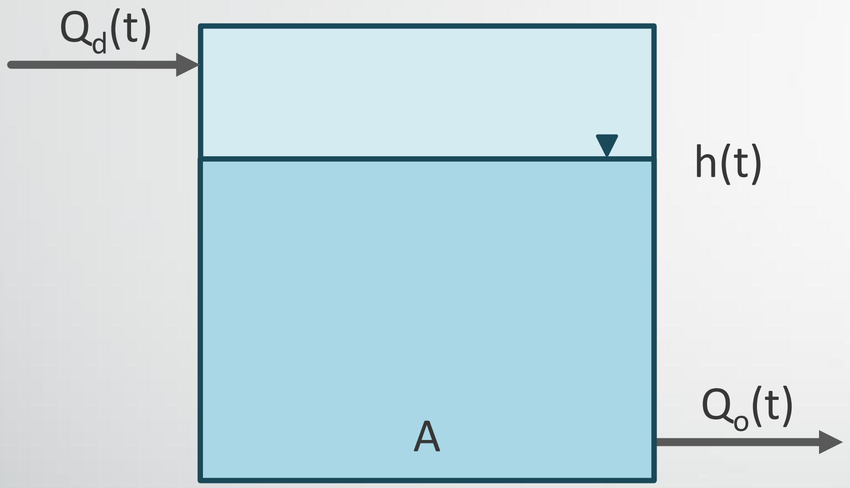
$$\frac{dV(t)}{dt} = A\frac{dh(t)}{dt}$$

$$A\frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

Zmienne procesowe:
$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:
A – pole powierzchni przekroju porzecznego zbiornika [m^2].

Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu



Bilans masy całkowitej:

$$A\frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

Odpływ wymuszony – stały:

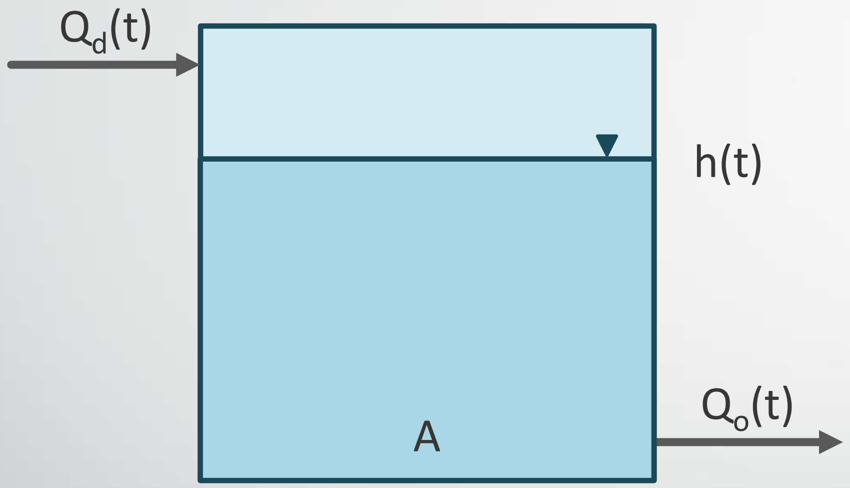
$$Q_o(t) = Q_p$$

$$A\frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_p$$

Zmienne procesowe:
$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s],], Q_p – wydajność pompy [m^3/s].

Parametry:
A – pole powierzchni przekroju porzecznego zbiornika [m^2].

Proces I: model matematyczny dla zmian poziomu



Bilans masy całkowitej:

$$A\frac{dh(t)}{dt} = Q_d(t) - Q_o(t)$$

Odpływ swobodny – zmienny:

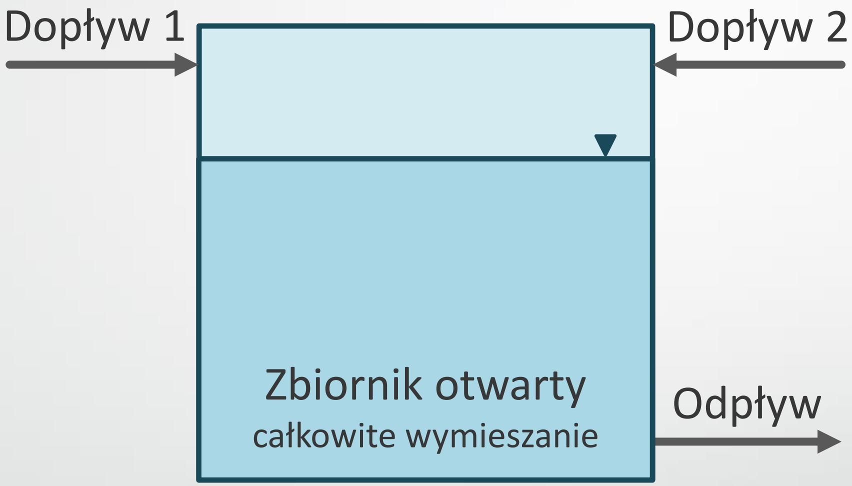
$$Q_o(t) = \beta\sqrt{h(t)}$$

$$A\frac{dh(t)}{dt} + \beta\sqrt{h(t)} = Q_d(t)$$

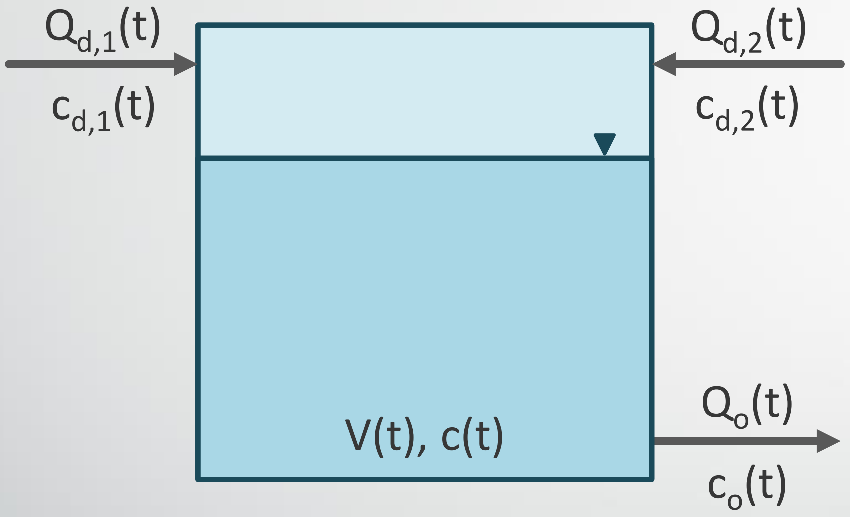
Zmienne procesowe:
$h(t)$ – poziom substancji w zbiorniku [m], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s].

Parametry:
A – pole powierzchni przekroju porzecznego zbiornika [m^2], β – współczynnik wypływu [$m^{5/2}/s$].

Proces II: schemat procesu



Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

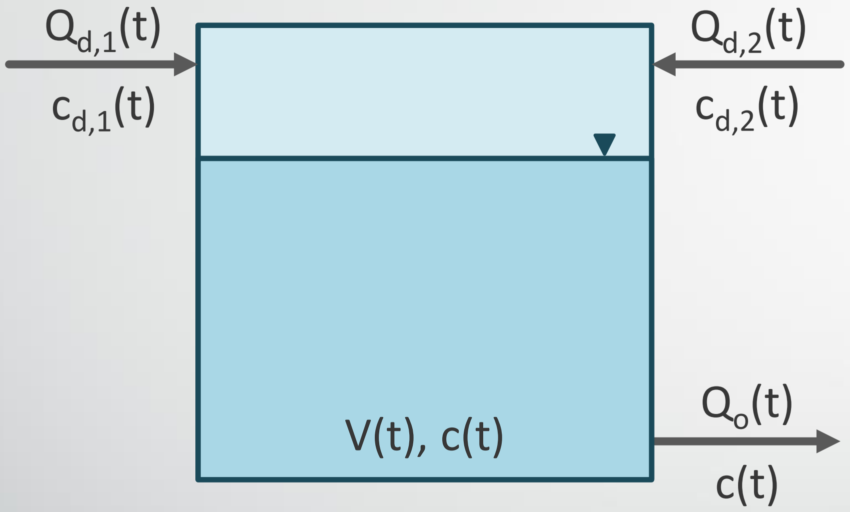


Całkowite wymieszanie:

$$c_o(t) = c(t)$$

Zmienne procesowe:
$c(t)$ – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

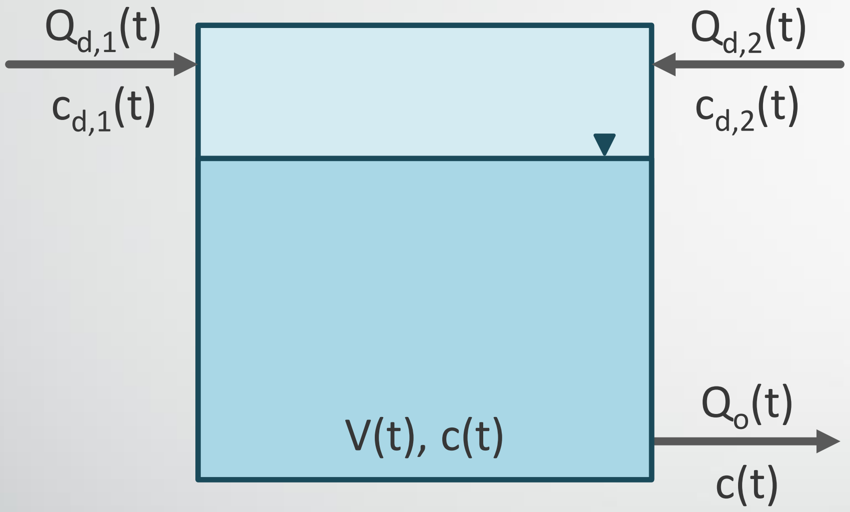


Bilans masy całkowitej:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_{d,1}(t) + Q_{d,2}(t) - Q_o(t)$$

Zmienne procesowe:
c(t) – stężenie składnika [% lub kg/m^3], Q_d(t) – natężenie dopływu [m^3/s], Q_o(t) – natężenie odpływu [m^3/s], V(t) – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia



Natężenie dopływu składnika:

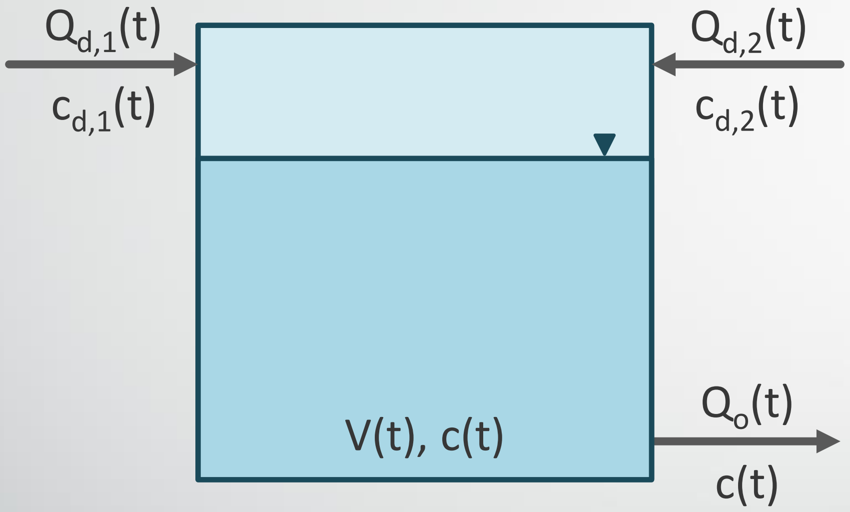
$$c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t)$$

Natężenie odpływu składnika:

$$c(t)Q_o(t)$$

Zmienne procesowe:
c(t) – stężenie składnika [% lub kg/m^3], Q_d(t) – natężenie dopływu [m^3/s], Q_o(t) – natężenie odpływu [m^3/s], V(t) – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia



Bilans masy składnika:

$$\frac{d\big(c(t)V(t)\big)}{dt} =$$

$$= c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t) +$$

$$- c(t)Q_o(t)$$

Zmienne procesowe:
c(t) – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], V(t) – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Bilans masy składnika – przekształcenia:

$$\frac{d\big(c(t)V(t)\big)}{dt} = c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t)$$

$$\frac{d\big(c(t)V(t)\big)}{dt} = V(t)\frac{dc(t)}{dt} + c(t)\frac{dV(t)}{dt} =$$

$$= V(t)\frac{dc(t)}{dt} + c(t)\big(Q_{d,1}(t) + Q_{d,2}(t) - Q_o(t)\big) =$$

$$= V(t)\frac{dc(t)}{dt} + c(t)Q_{d,1}(t) + c(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t)$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Bilans masy składnika – przekształcenia:

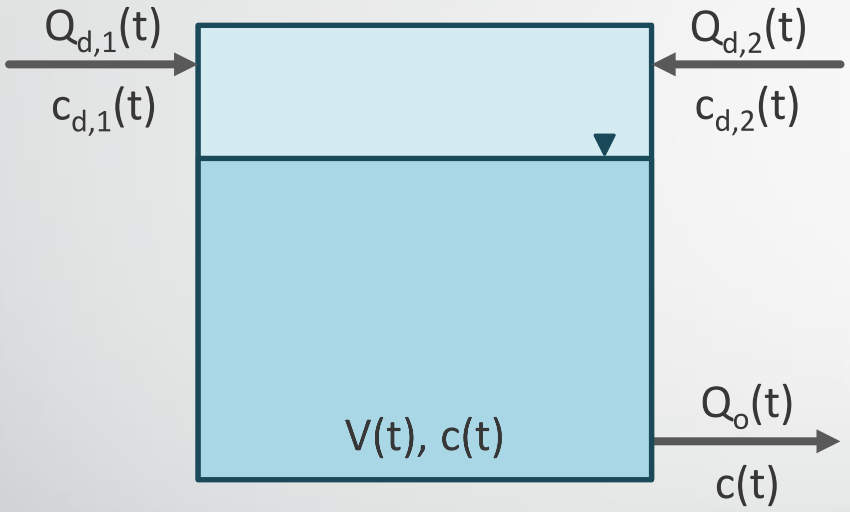
$$V(t)\frac{dc(t)}{dt} + c(t)Q_{d,1}(t) + c(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t) =$$

$$= c_{d,1}(t)Q_{d,1}(t) + c_{d,2}(t)Q_{d,2}(t) - c(t)Q_o(t)$$

$$V(t)\frac{dc(t)}{dt} = Q_{d,1}(t)\big(c_{d,1}(t) - c(t)\big) + Q_{d,2}(t)\big(c_{d,2}(t) - c(t)\big)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{Q_{d,1}(t)}{V(t)}\big(c_{d,1}(t) - c(t)\big) + \frac{Q_{d,2}(t)}{V(t)}\big(c_{d,2}(t) - c(t)\big)$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia



Bilans masy składnika:

$$\frac{dc(t)}{dt} =$$

$$= \frac{Q_{d,1}(t)}{V(t)}\big(c_{d,1}(t) - c(t)\big) +$$

$$+ \frac{Q_{d,2}(t)}{V(t)}\big(c_{d,2}(t) - c(t)\big)$$

Zmienne procesowe:
$c(t)$ – stężenie składnika [% lub kg/m^3], $Q_d(t)$ – natężenie dopływu [m^3/s], $Q_o(t)$ – natężenie odpływu [m^3/s], $V(t)$ – objętość mieszaniny w zbiorniku [m^3].

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Równania różniczkowe:

$$\begin{cases} \dfrac{dV(t)}{dt} = Q_{d,1}(t) + Q_{d,2}(t) - Q_o(t) \\ \dfrac{dc(t)}{dt} = \dfrac{1}{V(t)}\Big(Q_{d,1}(t)\big(c_{d,1}(t) - c(t)\big) + Q_{d,2}(t)\big(c_{d,2}(t) - c(t)\big)\Big) \end{cases}$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Równania różnicowe:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta V(n)}{T_p} = Q_{d,1}(n) + Q_{d,2}(n) - Q_o(n) \\ \dfrac{\Delta c(n)}{T_p} = \dfrac{1}{V(n)}\Big(Q_{d,1}(n)\big(c_{d,1}(n) - c(n)\big) + Q_{d,2}(n)\big(c_{d,2}(n) - c(n)\big)\Big) \end{cases}$$

Proces II: model matematyczny dla zmian stężenia

- Rozwiązanie równań różnicowych – rekurencja:

$$\begin{cases} V(0) = V_0 \\ V(n+1) = \Big(Q_{d,1}(n) + Q_{d,2}(n) - Q_o(n)\Big) T_p + V(n) \\ c(0) = c_0 \\ c(n+1) = \dfrac{1}{V(n)} \Big(Q_{d,1}(n)\big(c_{d,1}(n) - c(n)\big) + Q_{d,2}(n)\big(c_{d,2}(n) - c(n)\big)\Big) T_p + c(n) \end{cases}$$

Dziękuję za uwagę

Konsultacje:

przemyslaw.zakrzewski@cs.put.poznan.pl