Złożenie relacji (ang. composition)

Niech
$R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$.

Pytanie:
$T \subset X \times Z$?
Czy można znaleźć taką relację T, która wiąże te same elementy z X, które zawiera R z tymi samymi elementami z Z, które zawiera S? Czyli czy szukamy $T \subset X \times Z$.

Przykład

Podstawowe formy operacji złożenia max-min i max-product (czasem nazywana max-dot):

1. max-min

$$T = R \circ S$$
$$\chi_T = (x,z) \; = \bigvee_{y\in Y}(\chi_R(x,y) \wedge \chi_S(y,z)) = \max_{y\in Y}(\min(\chi_R(x,y), \chi_S(y,z)))$$

2. max-product

$$T = R \bullet S$$
$$\chi_T = (x,z) \; = \bigvee_{y\in Y}(\chi_R(x,y) \bullet \chi_S(y,z)) = \max_{y\in Y}(\chi_R(x,y) \bullet \chi_S(y,z))$$

Rozmyte złożenie relacji (ang. fuzzy composition)

Jak w przypadku crisp. Niech $\tilde{R}$ będzie relacją która mapuje elementy z przestrzeni X na Y, a $\tilde{S}$ relacją, która mapuje elementy z Y na Z. Szukamy $\tilde{T}$ z $X \times Z$

1. max-min

$$\tilde{T} = \tilde{R} \circ \tilde{S}$$
$$\mu_{\tilde{T}} = (x,z) \; = \bigvee_{y\in Y}(\mu_{\tilde{R}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{S}}(y,z)) = \max_{y\in Y}(\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{S}}(y,z)))$$

2. max-product

$$\tilde{T} = \tilde{R} \bullet \tilde{S}$$
$$\mu_{\tilde{T}} = (x,z) \; = \bigvee_{y\in Y}(\mu_{\tilde{R}}(x,y) \bullet \mu_{\tilde{S}}(y,z)) = \max_{y\in Y}(\cancel{\min}(\mu_{\tilde{R}}(x,y) \bullet \mu_{\tilde{S}}(y,z)))$$

$R \circ S \neq S \circ R$ (Operacje na macierzach).

Logika klasyczna i rozmyta

Logika klasyczna

Załóżmy, że mamy dwa twierdzenia

P: ~~prawda, że~~ $x \in A$
Q: ~~prawda, że~~ $x \in B$

Prawdziwość mierzona jest następująco:
Jeżeli $x \in A$, T(P) = 1; w przeciwnym wypadku T(P) = 0
Jeżeli $x \in B$, T(Q) = 1; w przeciwnym wypadku T(Q) = 0

Spójniki logiczne (ang. logical connectives)

Dysjunkcja
$P \vee Q$: $x \in A$ lub $x \in B$
$T(P \vee Q) = \max(T(P),T(Q))$

Koniunkcja
$P \wedge Q$: $x \in A$ i $x \in B$
$T(P \wedge Q) = \min(T(P),T(Q))$

Negacja
Jeżeli T(P) = 1, to $\bar{T}(P) = 0$
Jeżeli T(P) = 0, to $\bar{T}(P) = 1$

Implikacja
$(P \rightarrow Q)$: $x \notin A$ lub $x \in B$
$T(P \rightarrow Q) = T(\bar{P} \vee Q)$

Równoważność

$$(P \leftrightarrow Q): T(P \leftrightarrow Q) = \begin{cases} 1, & \text{dla } T(P) = T(Q) \\ 0, & \text{dla } T(P) \neq T(Q) \end{cases}$$

Klasyczna implikacja $P \rightarrow Q$ jest prawdziwa we wszystkich przypadkach, oprócz takiego, gdy poprzednik jest prawdą, a następnik fałszem.

Przykład:
1. Jeżeli 1+1=2 to 4>0
2. Jeżeli 1+1=3 to 4>0
3. Jeżeli 1+1=3 to 4<0
4. Jeżeli 1+1=2 to 4<0

Czyli
$$T(P \rightarrow Q) = T(\bar{P}) \cup T(Q) = \overline{T(P) \cap T(\bar{Q})}$$

Wyobraźmy sobie, że implikacja dotyczy dwóch różnych przestrzeni
- P jest twierdzeniem (termem) wyrażonym przez zbiór A określonym na X
- Q jest twierdzeniem (termem) wyrażonym przez zbiór B określonym na Y

Implikacja $P \rightarrow Q$ może być też wyrażona przez relację R:

$$\textbf{jeżeli A to B} \equiv \mathbf{R = A \times B \cup (\bar{A} \times Y)}$$

	T	T	T
A		T	
	T	T	T
		B	

jeżeli A to B, w przeciwnym razie C

$\equiv$ **R = A $\times$ B $\cup$ ($\bar{A}$ $\times$ C)**

w logice $(P \rightarrow Q) \vee (\bar{P} \rightarrow S)$

gdzie S: $y \in C$, $C \subset Y$

			T
A		T	
			T
		B	C

Przykład

Tautologie

W logice pomocne są związki, które są zawsze prawdziwe (tautologie) w każdej niepustej dziedzinie.

Przykłady tautologii:

- „Każdy pies jest ssakiem” $\Rightarrow$ „Każdy pies jest kręgowcem”
  (w domyśle „Każdy ssak jest kręgowcem”)
  A jest B $\wedge$ B jest C $\Rightarrow$ A jest C
- $\sim \bigwedge_x T(x) \Rightarrow \bigvee_x \sim T(x)$
- A jest zbiorem liczb pierwszych, $A_1=1, A_2=2, A_3=3, A_4=5$ ..., wtedy twierdzenie „A_i nie jest podzielne przez 6” jest tautologią.

Dedukcja

wnioskowanie, w którym z przesłanek wynika logicznie wniosek

Dedukcja modus ponens (reguła odrywania)

Z prawdziwości przesłanki i implikacji wynika prawdziwość wniosku.

Przesłanka Implikacja	A $A \rightarrow B$
Wniosek	B

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

A – „Jan jest kierowcą”
B – „Jan posiada prawo jazdy”

Dedukcja modus tollens

Przesłanka Implikacja	$\bar{B}$ $A \rightarrow B$
Wniosek	$\bar{A}$

$$(\bar{B} \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \bar{A}$$

$\bar{B}$ – „Jan nie posiada prawa jazdy”
$\bar{A}$ – „Jan nie jest kierowcą”

Wnioskowanie dedukcyjne

Załóżmy, że mamy regułę $(A \rightarrow B)$

JEŻELI **A**, TO **B** $\equiv$ $R = ((A \times B) \cup (\bar{A} \times Y))$

gdzie A jest zdefiniowane na X, a B na Y.

? czy znając nowy poprzednik A’ możemy wywnioskować nowy następnik B’?

B’ może być znalezione następująco:

$$B' = A' \circ R = A' \circ ((A \times B) \cup (\bar{A} \times Y))$$

Paradoksy logiki dwuwartościowej

- Golibroda z Sevilli – goli wszystkich i tylko tych mężczyzn, którzy sami się nie golą, kto goli golibrodę?
- Lubię wszystkich tych i tylko tych którzy sami siebie nie lubią.
- Czy kłamca z Krety kłamie gdy mówi – wszyscy Kreteńczycy są kłamcami.

Niech
S – golibroda sam się goli
$\bar{S}$ – golibroda sam się nie goli

Wtedy
$S \rightarrow \bar{S}$ oraz $\bar{S} \rightarrow S$, tzn. $S \leftrightarrow \bar{S}$,
czyli $T(S) = T(\bar{S}) = 1 - T(S)$

$T(S) = ½$ (półprawda – pół fałsz)

Logika rozmyta

Załóżmy, że twierdzenie $\tilde{P}$ jest przypisane do zbioru $\tilde{A}$, wtedy wartość prawdziwa twierdzenia będzie wyrażona:

$$T(\tilde{P}) = \mu_{\tilde{A}}(x), \text{ gdzie } \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]$$

Stopień prawdziwości $T(\tilde{P})$ jest odpowiada stopniowi przynależności x do $\tilde{A}$.

Niech $\tilde{P}$ będzie określone na zbiorze $\tilde{A}$, a $\tilde{Q}$ na zbiorze $\tilde{B}$. Wtedy

Negacja

$$T(\overline{\tilde{P}}) = 1 - T(\tilde{P})$$

Dysjunkcja

$\tilde{P} \text{ v } \tilde{Q}$: x jest $\tilde{A}$ lub $\tilde{B}$ $\quad T(\tilde{P} \text{ v } \tilde{Q}) = \max(T(\tilde{P}), T(\tilde{Q}))$

Koniunkcja

$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$: x jest $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ $\quad T(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) = \min(T(\tilde{P}), T(\tilde{Q}))$

Implikacja [Zadeh, 1973]

$\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}$: x jest $\tilde{A}$, to y jest $\tilde{B}$ $\quad T(\overline{\tilde{P}} \text{ v } \tilde{Q}) = \max(T(\overline{\tilde{P}}), T(\tilde{Q}))$

Jeżeli x jest $\tilde{A}$ to y jest $\tilde{B}$

$$\tilde{R} = (\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\overline{\tilde{A}} \times Y)$$

funkcja przynależności

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \max[(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)), (1 - \mu_{\tilde{A}}(x))]$$

Jeżeli x jest $\tilde{A}$ to y jest $\tilde{B}$, w przeciwnym razie y jest $\tilde{C}$

$$\tilde{R} = (\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\overline{\tilde{A}} \times \tilde{C})$$
$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \max[(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)), ((1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \wedge \mu_{\tilde{C}}(y))]$$

Wnioskowanie przybliżone
(Wnioskowanie z nieprecyzyjnych twierdzeń)

Uogólniona (rozmyta) reguła wnioskowania *modus ponens.*

Przesłanka Implikacja	x jest $\tilde{A}$' Jeżeli x jest $\tilde{A}$ to y jest $\tilde{B}$
Wniosek	y jest $\tilde{B}$'

$$\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ \tilde{R}$$

Przykład:

Przesłanka Implikacja	Prędkość samochodu jest „duża” Jeżeli prędkość samochodu jest „bardzo duża”, to poziom hałasu jest „wysoki”
Wniosek	Poziom hałasu w samochodzie jest „średniowysoki”

Inne operacje rozmytej implikacji

Implikacja Zadeha (1973)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \max\{\min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)], 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\}$$

Implikacja Mamdani'ego (1976)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

Implikacja Larsena

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{B}}(y)$$

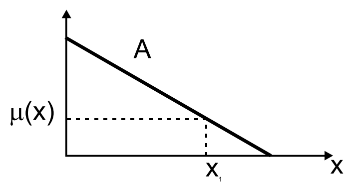
Implikacja Łukasiewicza

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \min\{1, [1 - \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(y)]\}$$

Ocena przesłanki

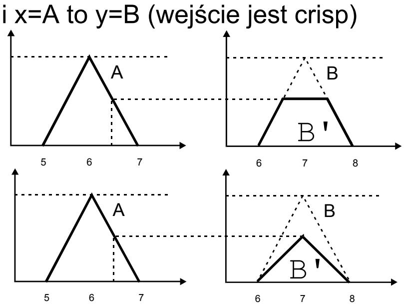
Wnioskowanie rozmyte - ocena stopnia spełnienia przesłanek poszczególnych reguł i przeniesienie go na konkluzje.

Sposób obliczania stopnia spełnienia przesłanki JEŻELI x=A

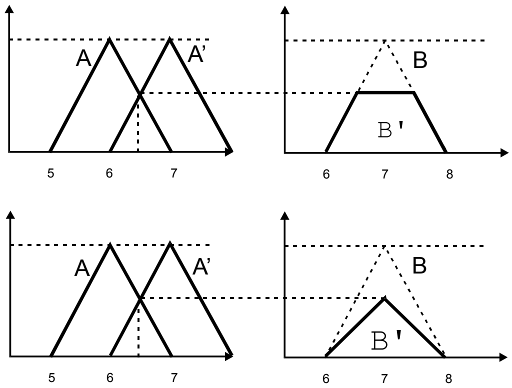


Przykłady graficzne wnioskowania

1. Jeżeli x=A to y=B (wejście jest crisp)



2. Jeżeli x=A to y=B (wejście jest fuzzy)



Obliczenia dla uproszczonej wersji dyskretnej, tzn.

$$\tilde{A} = \left\{\frac{0}{5}+\frac{.5}{5.5}+\frac{1}{6}+\frac{.5}{6.5}+\frac{0}{7}\right\} \qquad \tilde{B} = \left\{\frac{0}{6}+\frac{.5}{6.5}+\frac{1}{7}+\frac{.5}{7.5}+\frac{0}{8}\right\}$$

1. x = 6.5, tzn. $\tilde{A}' = \left\{\frac{0}{5}+\frac{0}{5.5}+\frac{0}{6}+\frac{1}{6.5}+\frac{0}{7}\right\}$ (crisp)

2. $\tilde{A}' = \left\{\frac{0}{5}+\frac{0}{5.5}+\frac{0}{6}+\frac{0.5}{6.5}+\frac{1}{7}\right\}$ (fuzzy)

Implikacja Mamdaniego ~~i iloczynowa.~~

ad.1.

A’	A\B	6	6.5	7	7.5	8
0	5	0	0	0	0	0
0	5.5	0	0.5	0.5	0.5	0
0	6	0	0.5	1	0.5	0
1	6.5	0	0.5	0.5	0.5	0
0	7	0	0	0	0	0

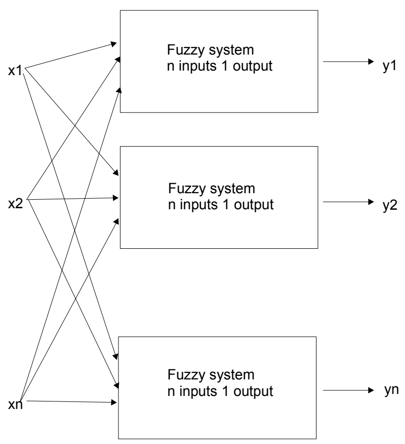
[0 0.5 0.5 0.5 0]

ad.2.

A’	A\B	6	6.5	7	7.5	8
0	5	0	0	0	0	0
0	5.5	0	0.5	0.5	0.5	0
0	6	0	0.5	1	0.5	0
0.5	6.5	0	0.5	0.5	0.5	0
1	7	0	0	0	0	0

[0 0.5 0.5 0.5 0]

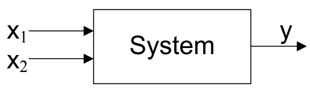
Rozmyte systemy regułowe

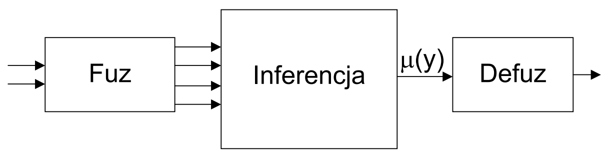


Postać kanoniczna systemu rozmytego

Reguła 1: JEŻELI c1, TO r1
Reguła 2: JEŻELI c2, TO r2
…

Struktura systemu rozmytego





Nazwa oper.	**Fuzyfikacja** (rozmywanie)	**Inferencja** (wnioskowanie)	**Defuzyfikacja** (ostrzenie)
Oper.	• obliczanie stopnia przynależności wartości wejść modelu do zbiorów rozmytych tych wejść	• ocena stopnia spełn. przesłanek reguł • określenie f. przyn. konkluzji • określenie wynikowej f. przyn. wszystkich reguł	• zastąpienie zbioru rozmytego wartością ostrą
Elem.	• funkcje przynależności wejść	• baza reguł • mechanizm inferencji • funkcje przynależności wyjścia *y*	• mechanizm defuzyfikacji

Dekompozycja reguł złożonych

Wiele koniunkcji poprzedników

JEŻELI x jest $\tilde{A}_1$ oraz … x jest $\tilde{A}_L$ TO y jest $\tilde{B}_s$

$$\tilde{A}_s = \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \ldots \cap \tilde{A}_L$$
$$\mu_{\tilde{A}_s}(x) = t[\mu_{\tilde{A}_1}(x), \ldots, \mu_{\tilde{A}_L}(x)]$$

JEŻELI x jest $\tilde{A}_s$ TO y jest $\tilde{B}_s$

Dla dwóch przesłanek prostych:

JEŻELI (x_1=A_1) I (x_2=A_2)

to dla x_1=x_1* oraz x_2=x_2* stopień jej prawdziwości jest obliczany

$$\mu_{\tilde{R}}(x_1^*, x_2^*) = \mu_{A_1 \cap A_1}(x_1^*, x_2^*) = t(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*))$$

gdzie *t* jest jednym z operatorów *t*-normy.

Operatory *t*-normy
1. min-operator
   $t(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*)) = \min(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*))$
2. iloczyn algebraiczny
   $t(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*)) = \mu_{A_1}(x_1^*) * \mu_{A_2}(x_2^*)$

Wiele dysjunkcji poprzedników

JEŻELI x jest $\tilde{A}_1$ lub … x jest $\tilde{A}_L$ TO y jest $\tilde{B}_s$

$$\tilde{A}_s = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup \ldots \cup \tilde{A}_L$$
$$\mu_{\tilde{A}_s}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}_1}(x), \ldots, \mu_{\tilde{A}_L}(x)]$$

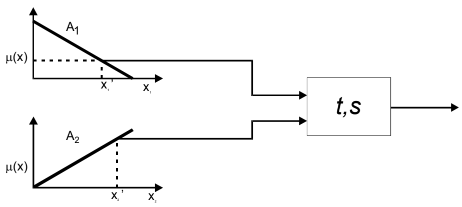
JEŻELI x jest $\tilde{A}_s$ TO y jest $\tilde{B}_s$

Dla dwóch przesłanek prostych:

JEŻELI (x_1=A_1) LUB (x_2=A_2)

$$\mu_{\tilde{R}}(x_1^*, x_2^*) = \mu_{A_1 \cup A_1}(x_1^*, x_2^*) = s(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*))$$

Operatory *s*-normy:
1. max-operator
   $s(\mu_{A1}(x_1^*), \mu_{A2}(x_2^*)) = \max(\mu_{A1}(x_1^*), \mu_{A2}(x_2^*))$
2. suma algebraiczna
   $s(\mu_{A1}(x_1^*), \mu_{A2}(x_2^*)) = \mu_{A1}(x_1^*) + \mu_{A2}(x_2^*)$



Agregacja zbioru reguł rozmytych

W określaniu strategii agregacji istnieją dwa ekstremalne przypadki:

a. *Koniunkcyjny system reguł.*
   Wszystkie reguły muszą być spełnione, połączenie „and”.

   $y = y^1$ and y^2 and … and y^r
   $y = y^1 \cap y^2 \cap \ldots \cap y^r$

   funkcja przynależności
   $\mu_y(y) = \min(\mu_{y^1}(y), \mu_{y^2}(y), \ldots, \mu_{y^{r1}}(y))$ dla $y \in Y$

b. *Dysjunkcyjny system reguł.*

   Tu wymagane jest spełnienie przynajmniej jednej reguły. Łącznik „or”.

   $y = y^1$ or y^2 or … or y^r
   $y = y^1 \cup y^2 \cup \ldots \cup y^r$

   funkcja przynależności
   $\mu_y(y) = \max(\mu_{y^1}(y), \mu_{y^2}(y), \ldots, \mu_{y^{r1}}(y))$ dla $y \in Y$

Graficzne techniki wnioskowania (system reguł z wieloma przesłankami)

Załóżmy rozmyty system regułowy, dysjunkcyjny: 2 wejścia i 1 wyjście

4 przypadki:
1. x1 i x2 są crisp (funkcjami delta), wtedy
   Wg metody wnioskowania Mamdaniego,
   $\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k[\min[\mu_{\tilde{A}_1^k}(\text{input}(i)), \mu_{\tilde{A}_2^k}(\text{input}(j))]] \quad k = 1,2,\ldots,r$

2. x1 i x2 są crisp (funkcjami delta), wtedy
   Wg metody (max-product inference method)
   $\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k[\mu_{\tilde{A}_1^k}(\text{input}(i)) \cdot \mu_{\tilde{A}_2^k}(\text{input}(j))] \quad k = 1,2,\ldots,r$

3. x1 i x2 są rozmyte
   Wg metody wnioskowania Mamdaniego
   $\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k[\min\{\max[\mu_{\tilde{A}_1^k}(x) \wedge \mu(x_1)],$
   $\max[\mu_{\tilde{A}_2^k}(x) \wedge \mu(x_2)]\}] \quad k = 1,2,\ldots,r$

4. x1 i x2 są rozmyte
   Wg metody wnioskowania max-product
   $\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k[\max[\mu_{\tilde{A}_1^k}(x) \wedge \mu(x_1)], \max[\mu_{\tilde{A}_2^k}(x) \wedge \mu(x_2)]]$

Algorytm inferencji

Reguła 1: JEŻELI $x_1 = A_{11}$ I … I $x_n = A_{1n}$, TO $y = B_1$
…
Reguła *j*: JEŻELI $x_1 = A_{j1}$ I … I $x_n = A_{jn}$, TO $y = B_j$
…
Reguła *m*: JEŻELI $x_1 = A_{m1}$ I … I $x_n = A_{jn}$, TO $y = B_m$

Krok 1.
Określić stopień spełnienia przesłanek poszczególnych reguł (agregacja przesłanek, t-norma)

$$h_1 = t(\mu_{A_{11}}(x_1^*), \dots, \mu_{A_{1n}}(x_n^*))$$
$$\vdots$$
$$h_j = t(\mu_{A_{j1}}(x_1^*), \dots, \mu_{A_{jn}}(x_n^*))$$
$$\vdots$$
$$h_m = t(\mu_{A_{m1}}(x_1^*), \dots, \mu_{A_{mn}}(x_n^*))$$

Krok 2.
Określić zmodyfikowane funkcje przynależności $\mu_{Bj}^*(y)$konkluzji (następników) poszczególnych reguł (inferencja w regułach). Tylko dla reguł, których przesłanki spełnione są w stopniu *h*>0.

$$\mu_{B1}^*(y) = t(h_1, \mu_{B_1}(y))$$
$$\vdots$$
$$\mu_{Bj}^*(y) = t(h_j, \mu_{B_j}(y))$$
$$\vdots$$
$$\mu_{Bm}^*(y) = t(h_m, \mu_{B_m}(y))$$

Krok 3.
Określić wynikową funkcję przynależności $\mu(y)$ przez akumulację zmodyfikowanych funkcji przynależności $\mu_{Bj}^*(y)$konkluzji poszczególnych reguł

$$\mu(y) = \mu_{B^*}(y) = s(\mu_{B_1^*}(y), \dots, \mu_{B_m^*}(y))$$