1 Zbiory klasyczne

Operacje na zbiorach klasycznych

A i B zbiory określone na X (dziedzina)

Suma	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ lub } x \in B\}$
Iloczyn	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$
Dopełnienie	$\bar{A} = \{x \mid x \notin A,\ x \in X\}$
Różnica	$A \mid B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$

Własności klasycznych zbiorów

Przemienność	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Łączność	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Rozdzielność	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identyczność	$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap X = A$
	$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup X = X$
Przechodniość	Jeżeli $A \subseteq B \subseteq C$, to $A \subseteq C$
Inwolucja	dopełnienie dopełnienia A = A

Prawa wyłączonego środka

$$A \cup \bar{A} = X$$
$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Prawa De Morgana $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Operacje na zbiorach klasycznych (z funkcją przynależności)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Suma (unia)

$A \cup B \rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Iloczyn (przecięcie)

$A \cap B \rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Dopełnienie

$\bar{A} \rightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Zawieranie

$A \subseteq B \rightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x)$

2 Zbiory rozmyte, przynależność i modelowanie

Funkcja przynależności

Nośnikiem (ang. support) zbioru rozmytego nazywamy zbiór elementów, dla których wartość przynależności $\mu_A(x) > 0$.

Rdzeniem (ang. core) zbioru rozmytego nazywamy zbiór elementów, dla których wartość przynależności jest $\mu_A(x) = 1$.

Wysokością zbioru rozmytego A jest największa wartość funkcji przynależności, tzn.

$$h = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Zbiór rozmyty jest **znormalizowany**, jeśli jego wysokość h jest równa 1.

Zbiór rozmyty jest **wypukły** jeżeli dla jakichkolwiek x,y,z,`takich, że x<=y<=z, zachodzi:`

$$\mu_A(y) \ge \min[\mu_A(x), \mu_A(z)]$$

Reprezentacje zbiorów rozmytych

Reprezentacja trójkątna A = (1, 2, 3)
Reprezentacja trapezoidalna B = (1, 2, 3, 4)

Reprezentacja dyskretna
Jeśli przestrzeń X jest dyskretna i skończona to zbiór rozmyty jest reprezentowany w sposób następujący:

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots \right\} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \right\}$$

Wymagane są dwa wektory do reprezentacji (wektor definiujący przestrzeń X, wektor określający wartości przynależności do zbioru).

Np. M – zbiór studentów mądrych
X = {Poldek, Hieronim, Jasiu, Małgosia }

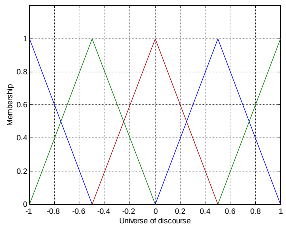
$$\tilde{M} = \left\{ \frac{0.3}{\text{Poldek}} + \frac{1}{\text{Hieronim}} + \frac{0}{\text{Jasiu}} + \frac{0.7}{\text{Malgosia}} \right\}$$

Reprezentacja dla X ciągłej

$$\tilde{A} = \left\{ \int \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \right\}$$

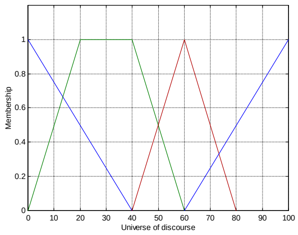
Reprezentacja wektorowa

Np.
C = [-1, -0.5, 0, 0.5, 1]



Reprezentacja macierzowa

D= [	-inf,	0,	40,	60;	%P1
	0,	20,	60,	100;	%P2
	0,	40,	60,	100;	%P3
	40,	60,	80,	inf;]	%P4



Reprezentacja LR
(Dubois i Prade, 1987). Liczba taka jest definiowana za pomocą czterech liczb rzeczywistych:

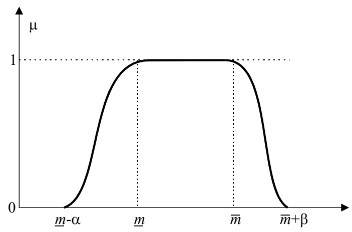
$$\tilde{M} = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR},$$

gdzie:

$[\underline{m}, \overline{m}]$ - rdzeń liczby rozmytej $\tilde{M}$,
$\underline{m}, \overline{m}$ - dolna i górna wartość rdzenia,
α, β - zakres lewego i prawego zbocza liczby rozmytej $\tilde{M}$.
L, R - funkcje referencyjne takie, że *L*(0)=*R*(0)=1 i *L*(1)=*R*(1)=0:

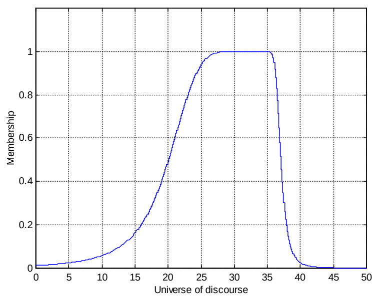
Funkcja przynależności liczby rozmytej $\tilde{M}$ typu LR zdefiniowana jest jako:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L[(\underline{m} - x)/\alpha] & \text{gdy } x < \underline{m} \\ 1 & \text{gdy } m \in [\underline{m}, \overline{m}] \\ R[(x - \overline{m})/\beta] & \text{gdy } x > \underline{m}, \alpha, \beta \in R^+ \end{cases}$$



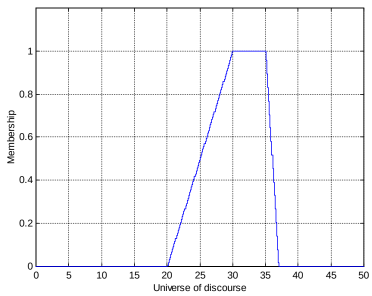
Przykład liczby rozmytej typu LR

```
L     = '1/(1+x^2)';
R     = '1/(1+x^2)';
xmin  = 0; xmax  = 50;
m1    = 30; m2    = 35;
alpha = 10; beta  = 2;
ymin  = 0; ymax  = 1;
resx  = 400;
[A,x] = modlrset
(L,R,[xmin,xmax,m1,m2,alpha,beta,ymin,ymax],resx);
plot_set(x,A);
```



LR odcinkami liniowe (trapezoidalne)

```
xmin  = 0; xmax  = 50;
m1    = 30; m2    = 35;
alpha = 10; beta  = 2;
ymin  = 0; ymax  = 1;
resx  = 400;
[A,x] = modlrset
('tr','',[xmin,xmax,m1,m2,alpha,beta,ymin,ymax],resx)
;
```



Reprezentacja **6-punktowa** (Rommelfanger 1990)

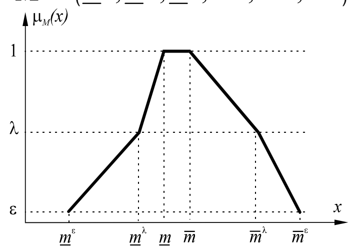
- $\alpha = 1 : \mu(x) = 1$
  wszystkie $x : \mu(x) = 1$ z całą pewnością należą do zbioru możliwych wartości
- $\alpha = \lambda : \mu(x) \geq \lambda$
  wszystkie $x : \mu(x) \geq \lambda$ mogą należeć do zbioru możliwych wartości
- $\alpha = \varepsilon : \mu(x) \leq \varepsilon$
  wszystkie $x : \mu(x) \leq \varepsilon$ nie należą do zbioru możliwych wartości i dlatego można je pominąć bez straty informacji

Odpowiada to następującemu rozumowaniu:

- „x najpewniej leży w przedziale $[\underline{m}, \overline{m}]$,
- jest możliwe, że x będzie w przedziale $[\underline{m}^{\lambda}, \overline{m}^{\lambda}]$,
- x na pewno nie będzie leżało poza przedziałem $[\underline{m}^{\varepsilon}, \overline{m}^{\varepsilon}]$".

Symboliczna definicja takiej reprezentacji jest następująca:

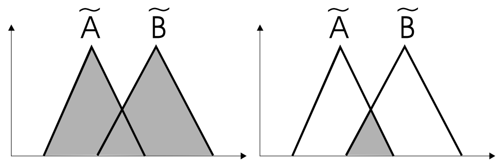
$$\tilde{M} = (\underline{m}^{\varepsilon}, \underline{m}^{\lambda}, \underline{m}, \overline{m}, \overline{m}^{\lambda}, \overline{m}^{\varepsilon})$$

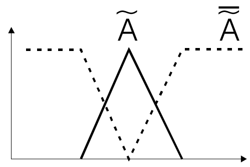


Operacje na zbiorach rozmytych

Niech zbiory $\tilde{A}, \tilde{B}$ i $\tilde{C}$ będą zbiorami rozmytymi w dziedzinie X. Dla danego elementu $x \in X$ można określić następujące operacje:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$
$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$
$$\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$





Prawa wyłączonego środka

$$\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}} \neq X$$
$$\tilde{A} \cap \overline{\tilde{A}} \neq \emptyset$$

Własności zbiorów rozmytych

Zbiory klasyczne są **szczególnym przypadkiem zbiorów rozmytych**.

(Wszędzie tyldy nad nazwą zbioru)

Przemienność	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Łączność	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Rozdzielność	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identyczność	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap X = A$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup X = X$
Przechodniość	
	Jeżeli $A \subseteq B \subseteq C$, to $A \subseteq C$
Inwolucja	dopełnienie dopełnienia A = A

przykład,
zadania

3 Klasyczne relacje i relacje rozmyte

Iloczyn kartezjański

Niech $A_1, A_2, ..., A_n$ będą klasycznymi zbiorami. Zbiór wszystkich takich n-tek $(a_1, a_2, ..., a_n)$ gdzie $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$ jest nazywany iloczynem kartezjańskim.

Przykład:
A = {0, 1}
B = {a, b, c}

A × B = {(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)}

Klasyczne (ang. crisp) relacje

Podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ jest nazywany n-elementową realcją nad zbiorami $A_1, A_2, ..., A_n$.

Jeśli ograniczymy się do dwóch zbiorów A_1 i A_2 to relacja ta będzie relacją binarną z A_1 do A_2.
Iloczyn kartezjański dwóch przestrzeni X × Y jest określony następująco

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Siła tej relacji mierzona jest za pomocą charakterystycznej funkcji χ

$$\chi = \begin{cases} 1, & (x, y) \in X \times Y \\ 0, & (x, y) \notin X \times Y \end{cases}$$

Relacja **zupełna** i **brak relacji**.

Jeśli przestrzenie są skończone to relację taką można zapisać w postaci tabeli.

Załóżmy, że
X = {1, 2, 3}, Y = {a, b, c}

R = {(1,a), (1,c), (2,b), (2,c), (3,a)} $\quad R \subset X \times Y$

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

odpowiedni graf połączeń

Dla **przypadków ciągłych**

$$R = \{(x, y\} \mid y \geq 2x,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

Lub wykorzystując funkcję χ

$$\chi_R(x, y) = \begin{cases} 1, & y \geq 2x \\ 0, & y < 2x \end{cases}$$

Operacje na relacjach

R i S dwie różne relacje w przestrzeni kartezjańskiej $X \times Y$

O – relacja pusta (same zera w wierszach i kolumnach)
E – relacja zupełna (same jedynki w wierszach i kolumnach)

Operacje

Suma (unia)
$R \cup S \rightarrow \chi_R(x) \vee \chi_S(x) = \max(\chi_R(x,y), \chi_S(x,y))$

Iloczyn (przecięcie)
$R \cap S \rightarrow \chi_{R \cap S}(x,y) = \min(\chi_R(x,y), \chi_S(x,y))$

Dopełnienie
$\bar{R} \rightarrow \chi_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \chi_R(x,y)$

Zawieranie
$R \subseteq S \rightarrow \chi_R(x,y) \leq \chi_S(x,y)$

Właściwości relacji analogiczne do właściwości zbiorów.

Relacje rozmyte

Różnica jest taka, że zamiast binarnej funkcji χ (jest relacja, brak relacji) występuje funkcja μ reprezentująca różne stopnie siły relacji z [0, 1]. Stąd relacja rozmyta $\tilde{R}$ jest odwzorowaniem $X \times Y$ w przedział [0, 1] gdzie siła odwzorowania jest wyrażona funkcją przynależności $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$.

Operacje na relacjach rozmytych analogiczne do operacji na relacjach klasycznych.

Suma (unia)
$\mu_{\tilde{R} \cup \tilde{S}}(x, y) = \max(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(x, y))$

Iloczyn (przecięcie)
$\mu_{\tilde{R} \cap \tilde{S}}(x, y) = \min(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(x, y))$

Dopełnienie
$\mu_{\bar{\tilde{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y)$

Zawieranie
$\tilde{R} \subset \tilde{S} \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{S}}(x, y)$

przykład

4 Konwersje fuzzy-crisp

α-cięcie liczby rozmytej

α-cięcie liczby rozmytej przekształca zbiór rozmyty w zbiór nierozmyty w taki sposób, że

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Przykład:
Rozważmy dyskretny zbiór rozmyty zdefiniowany na X = {a, b, c, d, e, f}

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{1}{a} + \frac{0.9}{b} + \frac{0.6}{c} + \frac{0.3}{d} + \frac{0.01}{e} + \frac{0}{f} \right\}$$

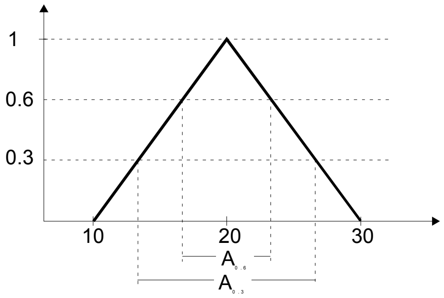
Możemy teraz utworzyć kilka α-obciętych zbiorów

$$A_1 = \{a\} = \left\{ \frac{1}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} + \frac{0}{d} + \frac{0}{e} + \frac{0}{f} \right\}$$

$A_{0.6}$ = {a, b, c}
A_{0+} = {a, b, c, d, e}
$A_{0.9}$ = {a, b}
$A_{0.3}$ = {a, b, c, d}
A_0 = X

Przykład:

Ciągły zbiór rozmyty $\tilde{A} = (10,20,30)$, i dwa 0,3 i 0,6 cięcia.



$A_{0.3}$=[13, 27], $A_{0.6}$=[16, 24]

α-cięcie relacji rozmytej

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

α-cięcie relacji rozmytej $\tilde{R}$.

$$R_\alpha = \{(x,y) \mid \mu_{\tilde{R}}(x,y) \ge \alpha\}$$

przykład dla α=1 i 0.9.

Metody defazyfikacji (ang. defuzzification)

Defazyfikacja – przekształcenie zbioru rozmytego $\tilde{Z}$ w odpowiadający punkt nierozmyty z* (ang. crisp).

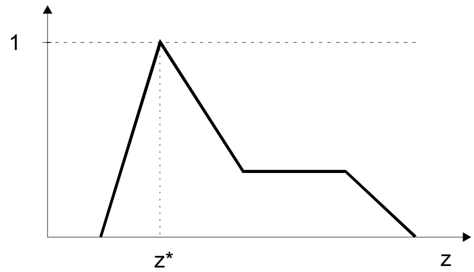
Po co?

- Gdy wyjście procesu rozmytego ma być liczbą nierozmytą.
- Gdy trzeba porównać wartości rozmyte

1. Zasada maksymalnej przynależności.

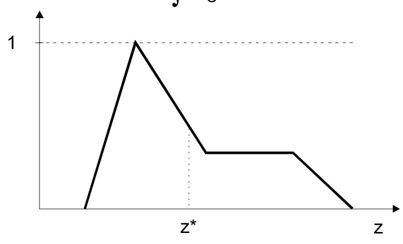
Jest znana również jako metoda wysokości zbioru. Ograniczona dla funkcji ostrych (peak).

$$\mu_{\tilde{C}}(z^*) \ge \mu_C(z) \text{ dla wszystkich } z \in Z$$



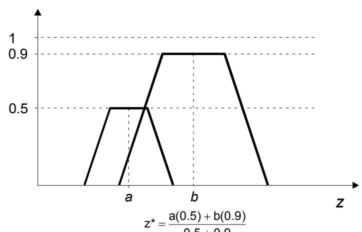
2. Metoda środka ciężkości (ang. centroid method) (Sugeno, 1985; Lee, 1990).

$$z^* = \frac{\int \mu_{\tilde{C}}(z) * z\, dz}{\int \mu_{\tilde{C}}(z)\, dz}$$



3. Metoda średniej ważonej (ang. weighted average method)
Tylko dla symetrycznych funkcji przynależności.

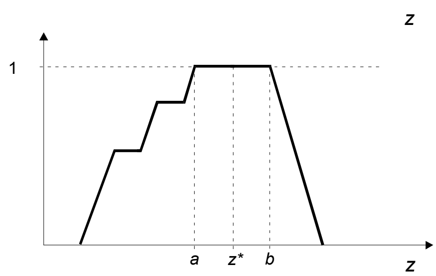
$$z^* = \frac{\sum \mu_{\tilde{C}}(\bar{z}) \cdot \bar{z}}{\sum \mu_{\tilde{C}}(\bar{z})}$$



$$z^* = \frac{a(0.5) + b(0.9)}{0.5 + 0.9}$$

4. Środek maksimów (ang. mean-max membership, middle-of-maxima) (Sugeno, 1985; Lee, 1990).

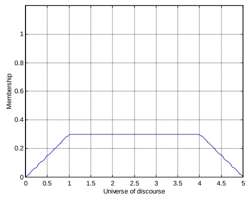
Podobna do pierwszej metody (z tą różnicą, że może być stosowana do płaskich l.r.)

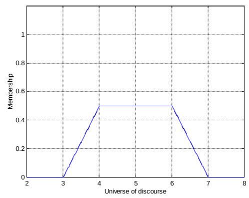


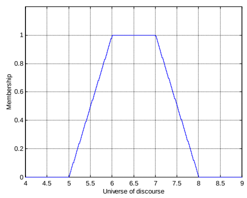
$$z^* = \frac{a+b}{2}$$

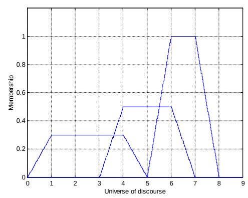
Przykład:

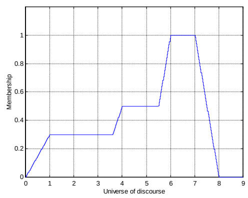
```
[A,x]=modlrset('tr','',[0,5,1,4,1,1,0,0.3],400)
[B,x]=modlrset('tr','',[2,8,4,6,1,1,0,0.5],400)
[C,x]=modlrset('tr','',[0,9,6,7,1,1,0,1],400)
D=fuz_for(1,C,fuz_for(1,A,B))
```











ad.1. (max-membership) tylko dla ostrych

ad.2. (centorid)

$$z^* = \frac{\int \mu_{\tilde{B}}(z)\cdot z\,dz}{\int \mu_{\tilde{B}}(z)dz} =$$

$$\left[\int_0^1 (0.3z)z\,dz + \int_1^{3.6}(0.3z)dz + \int_{3.6}^{4}\left(\frac{z-3}{2}\right)z\,dz + \int_4^{5.5}(0.5)z\,dz + \int_{5.5}^{6}(z-5)z\,dz + \int_6^7 z\,dz + \int_7^8 (8-z)z\,dz\right] \div$$

$$\left[\int_0^1 (0.3z)\,dz + \int_1^{3.6}(0.3)dz + \int_{3.6}^{4}\left(\frac{z-3}{2}\right)dz + \int_4^{5.5}(0.5)\,dz + \int_{5.5}^{6}(z-5)\,dz + \int_6^7 \,dz + \int_7^8 (8-z)\,dz\right] = 4.9\ [m]$$

ad.3. (weigted average)

$$z^* = \frac{0.3\times 2.5 + 0.5\times 5 + 1\times 6.5}{0.3 + 0.5 + 1} = 5.41\,[m]$$

ad.4. (mean-max membership)

$$z^* = (6+7)/2 = 6.5\ [m]$$

5. Środek sum (ang. center of sums)

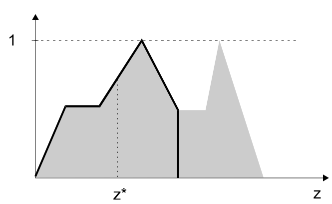
$$z^* = \frac{\int_z \bar{z}\sum_{k=1}^{n}\mu_{\tilde{C}_k}(z)dz}{\int_z \sum_{k=1}^{n}\mu_{\tilde{C}_k}(z)dz}$$

Suma iloczynów poszczególnych pól i środków ciężkości symetrycznych zbiorów rozmytych dzielona przez sumę pól.

$$z^* = \frac{\int_0^8 [2.5\times 0.5\times 0.3(3+5) + 5\times 0.5\times 0.5(2+4) + 6.5\times 0.5\times 1(3+1)]dz}{\int_0^8 [0.5\times 0.3(3+5) + 0.5\times 0.5(2+4) + 0.5\times 1(3+1)]dz}$$

6. Środek największego pola (ang. center of largest area)

Metoda zawiera metodę środka ciężkości ale stosuje się do zbiorów niewypukłych. Dla zbioru wypukłego środek największego pola sprowadza się do metody środka ciężkości.



7. Pierwsze (lub ostatnie) maksimum (ang. first or last maxima)

Najmniejsza wartość o największej wysokości zbioru.

Najpierw wyznacza się najwyższą wysokość zbioru (sumy)

$$h(\tilde{C}_k) = \sup_{z\in Z}\mu_{\tilde{C}_k}(z)$$

Następnie znajduje się pierwsze maksimum

$$z^* = \inf_{z\in Z}\{z\in Z \mid \mu_{\tilde{C}_k}(z) = h(\tilde{C}_k)\}$$

lub ostatnie

$$z^* = \sup_{z\in Z}\{z\in Z \mid \mu_{\tilde{C}_k}(z) = h(\tilde{C}_k)\}$$

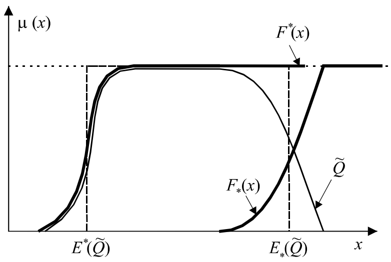
8. Środek wartości średniej liczby rozmytej (Dempster, Shafer, Dubois, Fortemps)

Wartość średnia liczby rozmytej

$$E(\tilde{Q}) = [E_*(\tilde{Q}), E^*(\tilde{Q})]$$

Środek wartości średniej

$$\Im(\tilde{Q}) = \frac{E_*(\tilde{Q}) + E^*(\tilde{Q})}{2}$$



Gdzie

$$E_*(\tilde{Q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF^*(x) \qquad E^*(\tilde{Q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_*(x)$$

Przykład dla 6-punktowej reprezentacji

Niech

$$e_1 = \frac{\underline{a}^{\varepsilon} + \underline{a}^{\lambda}}{2} \qquad e_2 = \frac{\underline{a}^{\lambda} + \underline{a}}{2}$$

$$e_3 = \frac{\overline{a} + \overline{a}^{\lambda}}{2} \qquad e_4 = \frac{\overline{a}^{\lambda} + \overline{a}^{\varepsilon}}{2}$$

Z bilansu pól wynika, że:

$$(1-\lambda)e_2 + (\lambda-\varepsilon)e_1 = (1-\varepsilon)E_*(\tilde{A})$$

Stąd:

$$E_*(\tilde{A}) = \frac{(1-\lambda)e_2 + (\lambda-\varepsilon)e_1}{1-\varepsilon}$$

$$E^*(\tilde{A}) = \frac{(1-\lambda)e_3 + (\lambda-\varepsilon)e_4}{1-\varepsilon}$$

$$\frac{E_*(\tilde{A}) + E^*(\tilde{A})}{2} =$$

$$\frac{(1-\lambda)(\underline{a}^{\lambda} + \underline{a} + \overline{a} + \overline{a}^{\lambda}) + (\lambda-\varepsilon)(\underline{a}^{\varepsilon} + \underline{a}^{\lambda} + \overline{a}^{\lambda} + \overline{a}^{\varepsilon})}{4(1-\varepsilon)}$$