

Plan laboratoriów ze Wspomagania Decyzji

1. zajęcia organizacyjne + omówienie projektu
2. programowanie liniowe
3. programowanie celowe, min-max (max-min) i ilorazowe (raport)
4. elementy teorii społecznego wyboru
5. zbiory przybliżone (raport)
6. projekt – dane (raport)
7. kolokwium 1 (z zagadnień 2–6)
8. Assess (raport)
- 9. UTA (wprowadzenie)**
- 10. UTA (raport)**
11. Electre 1s (raport)
12. Electre Tri
13. kolokwium 2 (z zagadnień 6, 8–12)
14. podsumowanie

Metoda UTA

Poniższe opracowanie przygotował dr inż. Marcin Szelaąg, który zdalne zajęcia z WD prowadził już w zeszłym semestrze. Osobiście na pewno – w przykładzie z produktami żywnościowymi – uznałabym kryterium „kaloryczność” za *kosztowe* ;) Kolejny raz widać, że każdy decydent ma swoją subiektywną specyfikę preferencji, które metodami WWD próbujemy modelować. W kilku innych miejscach opracowania wprowadziłam niewielkie uzupełnienia/dopowiedzenia.

Wprowadzenie

Metoda UTA służy **porządkowaniu wariantów decyzyjnych** z rozważanego zbioru wariantów A (czyli rozważana jest problematyka γ – tworzenie **rankingu**).

Model preferencji decydenta jest ponownie funkcją użyteczności (jak w metodzie Assess, ale o znacznie „przyjaźniejszej” postaci addytywnej), która umożliwia uporządkowanie zbioru A od wariantu o największej użyteczności globalnej do wariantu o najmniejszej użyteczności globalnej. W UTA:

- **Globalna użyteczność** wariantu $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ (wektor ocen na poszczególnych kryteriach), oznaczana przez $U(x)$, zależy od jego **użyteczności cząstkowych** $u_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ (gdzie n – liczba kryteriów). Konkretnie, jest ich **sumą** (model addytywny):

$$U(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i) \quad (1)$$

- Funkcje u_i wyznaczone są **niezależnie** dla poszczególnych kryteriów g_i , $i = 1, \dots, n$, w oparciu o przyjmowane **założenie o niezależności kryteriów w sensie preferencji**
- Globalna funkcja użyteczności $U(x)$ jest **znormalizowana** tak, by przyjmować wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Uwaga: skoro globalna użyteczność jest prostą sumą użyteczności cząstkowych, to można się domyślić, że funkcje użyteczności cząstkowych będą znormalizowane inaczej niż w Assess

Identycznie jak w Assess, wartość funkcji $U(x)$, $x \in A$, określa **pozycję** wariantu decyzyjnego x w **rankingu końcowym** na zbiorze A . I tak, wariant decyzyjny z **najwyższą użytecznością globalną** zajmuje miejsce pierwsze (najwyższe), ..., wariant decyzyjny z **najniższą użytecznością globalną** zajmuje miejsce ostatnie (najniższe). Jeżeli dwa warianty mają **identyczną** użyteczność globalną, to zajmują **ex aequo to samo miejsce** w rankingu końcowym.

Ograniczenia dot. przebiegów funkcji użyteczności cząstkowych

- Dla najgorszej wartości kryterium g_{i_*} zachodzi:

$$u_i(g_{i_*}) = 0 \quad (2)$$

Dzięki temu, **wariant antyidealny** (sztuczny wariant o najgorszych możliwych wartościach na wszystkich kryteriach) ma użyteczność globalną równą 0 (suma samych 0)

- Suma użyteczności cząstkowych dla najlepszych wartości kryteriów g_i^* jest równa 1:

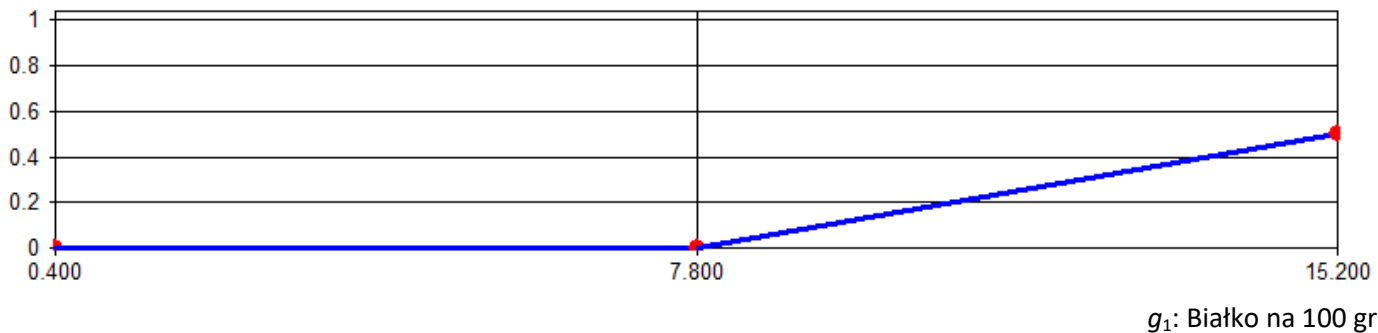
$$\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1 \quad (3)$$

Dzięki temu, **wariant idealny** (sztuczny wariant o najlepszych możliwych wartościach na wszystkich kryteriach) ma użyteczność globalną równą 1

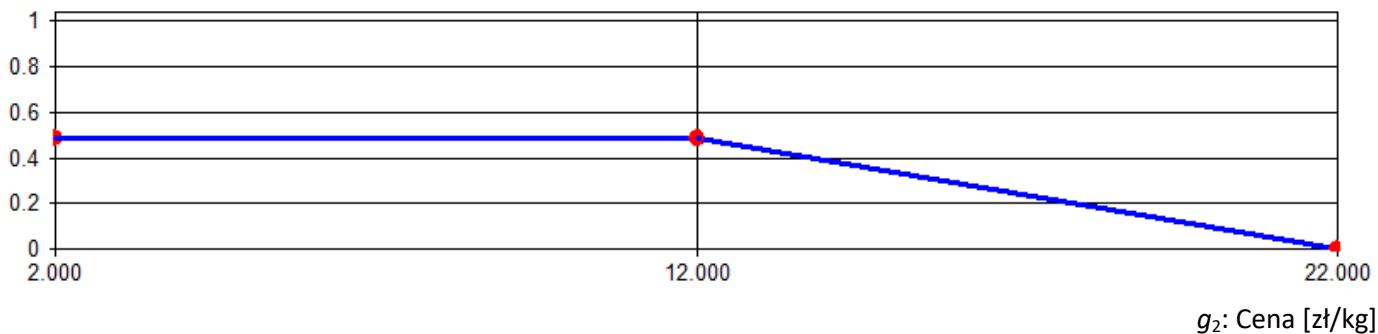
- Funkcje użyteczności cząstkowych u_i są **odcinkami liniowe** (ang. piece-wise linear) i **monotoniczne** (niemalejące dla kryteriów typu zysk, nierosnące dla kryteriów typu koszt)
- **Pierwszy punkt charakterystyczny** funkcji u_i przypada w najmniejszej wartości kryterium (min), a **ostatni punkt charakterystyczny** w największej wartości kryterium (max)
- Jeżeli funkcja użyteczności cząstkowej u_i ma 3+ punkty charakterystyczne (2 i więcej odcinków), to odległości na osi odciętych pomiędzy kolejnymi punktami charakterystycznymi są równe

Przykład:

u_1



u_2



Kryterium g_1 jest typu zysk (im większa wartość, tym lepiej), kryterium g_2 jest typu koszt (im niższa wartość, tym lepiej). Wariant idealny x^* to $[15.2, 2]$. Jego użyteczność wynosi:

$$U(x^*) = \sum_{i=1}^2 u_i(x_i^*) = u_1(15.2) + u_2(2) = 0.5 + 0.5 = 1$$

Znając przebiegi funkcji użyteczności cząstkowych możemy określić użyteczność globalną dowolnego wariantu decyzyjnego sumując jego użyteczności cząstkowe. Np. użyteczność wariantu *ryż brązowy* = $[7.1, 7.6]$ wynosi:

$$U(\text{ryż brązowy}) = \sum_{i=1}^2 u_i(g_i(\text{ryż brązowy})) = u_1(7.1) + u_2(7.6) = 0 + 0.5 = 0.5$$

Jeżeli jakiś wariant decyzyjny miałby np. na kryterium g_2 wartość 14, to jego użyteczność cząstkowa na tym kryterium wynosiłaby 0.4 (ponieważ między 12 a 22 maleje liniowo o 0.05 co jednostkę).

Uwaga: Funkcja odcinkami liniowa jest w pełni zdefiniowana poprzez **współrzędne swoich punktów charakterystycznych** (czerwone kropki na powyższych wykresach).

Informacja preferencyjna w metodzie UTA

Pierwszym rodzajem informacji preferencyjnej podawanej w metodzie UTA przez decydenta (wyrażającej jego preferencje) jest **maksymalna liczba odcinków liniowych dla poszczególnych kryteriów** (dla każdego kryterium może być ustalona inna liczba, większa od lub równa 1).

Drugim rodzajem informacji preferencyjnej jest tzw. **ranking referencyjny**. Ma on postać tzw. **preporządku zupełnego** wariantów referencyjnych. Pamiętajmy, że „preporządek” zakłada istnienie między wariantami relacji: **preferencji** „>” i **nierozróżnialności** „~” (inne oznaczenia to: „P” i „I”)

Zbiór **wariantów referencyjnych** A^R to (najczęściej relatywnie niewielki) podzbiór właściwy całego porządkowanego zbioru wariantów A . Zawiera on zwykle warianty dobrze znane decydentowi, co do których jest on w stanie łatwo wyrazić swoje preferencje (porównywać je między sobą). Przykładowo, jeżeli wśród 30 modeli laptopów decydent zna dobrze 8 modeli (używał ich bądź czytał opinie o nich), to te 8 modeli laptopów stanowi podzbiór wariantów referencyjnych.

Przykład:

Wracając do pojęcia *rankingu referencyjnego*, rozważmy następujący zbiór wariantów decyzyjnych:

	Cena [zł/kg]	Kalorie na 100gr [kcal]	Białko na 100gr	Wapno na 100gr	Indeks glikemiczny	błonnik na 100gr
jajka gotowane	6.58	155	12.5	50	50	0
brokuł	8	27	3	48	20	2.5
banan	3.49	90	1	6	61	1.7
jabłko	2.29	48	0.4	4	38	2
płatki owsiane	8	379	11.9	54	57	6.9
marchewka	2.5	40	1.1	41	63	4
jogurt naturalny	6.3	60	4.2	170	27	0
kefir	5	52	4.1	103	30	0
szpinak	12	20	2.6	93	10	2.6
płatki kukurydzia	12.32	393	6.9	8	84	6.6
ryż brązowy	7.6	357	7.1	32	65	8.7
ziemniaki	2	99	2.1	2.22	90	1.1
ser mozzarella	10	250	11	610	30	0
chleb żytni	9	230	5.6	25	47	5.9
makaron razow	22	357	15.2	49	37	8.3

Kryteria *Cena* i *Indeks glikemiczny* są minimalizowane, pozostałe kryteria są maksymalizowane.

Przykładowy ranking referencyjny podany przez decydenta może mieć postać:

Rank	Item
Rank 1	makaron razowy
Rank 2	ryż brązowy
Rank 2	marchewka
Rank 3	brokuł

Oznacza to, że decydent ze zbioru wszystkich 15 wariantów decyzyjnych (alternatyw) wybrał 4 warianty bliżej mu znane (tzw. *warianty referencyjne*) i uporządkował je od najlepszego (makaron razowy), poprzez pośrednie (*ex aequo* ryż brązowy i marchewka), po najgorsze (brokuł). Uwaga: „smak” nie jest kryterium, którym kieruje się decydent. Swoją ranking ustawił w oparciu o kryteria, które zebrał w tabeli. Słabszą pozycję brokułów w stosunku do marchewki można tłumaczyć ich wyższą ceną, niższą kalorycznością i zawartością błonnika ;)

Powyższy przykładowy ranking referencyjny jest właśnie **preporządkiem zupełnym**:

- warianty są uporządkowane liniowo (od najlepszego do najgorszego), stąd porządek zupełny (nie ma wariantów nieporównywalnych ze sobą),
- poszczególne miejsca w rankingu referencyjnym (tzw. rangi, ang. ranks) mogą być współdzielone przez dwa (lub więcej) warianty, stąd preporządek.

Informacja wejściowa metody UTA

Metoda UTA wymaga do **wyznaczenia modelu preferencji** – wyznaczenia przebiegów wszystkich funkcji użyteczności cząstkowych $u_i, i = 1, \dots, n$ – następujących informacji:

- **zakres** (min-max) i **kierunek preferencji** (zysk/koszt) każdego z kryteriów; zakres może być podany przez decydenta lub wyznaczony ze zbioru danych,
- **wartości wariantów decyzyjnych** na poszczególnych kryteriach (macierz ocen),
- **informacja preferencyjna**:
 - **maksymalna liczba odcinków liniowych** dla każdego z kryteriów,
 - **ranking referencyjny** (uwaga: „referencyjny”, czyli odniesienia, a nie „preferencyjny” – do zbioru referencyjnego decydent powinien dobrać warianty różnorodne, a nie najlepsze).

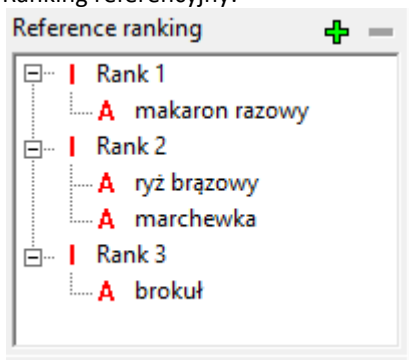
Zasada działania metody UTA

Metoda UTA wykorzystuje **programowanie liniowe (PL)** do **wyznaczenia współrzędnych punktów charakterystycznych funkcji użyteczności cząstkowych u_i** . Współrzędne te muszą:

- gwarantować spełnienie ograniczeń podanych w punkcie [Ograniczenia dot. przebiegów funkcji użyteczności cząstkowych](#),
- gwarantować spełnienie ograniczeń dot. **maksymalnej liczby odcinków liniowych**,
- zapewniać możliwie wierne (najlepiej dokładne) **odtworzenie rankingu referencyjnego** przez funkcję użyteczności globalnej $U(x), x \in A$.

Aby zilustrować pojęcie **odtworzenia rankingu referencyjnego**, rozważmy następujący **przykład**:

Ranking referencyjny:



Ranking końcowy, wynikający z wyliczonej funkcji $U(x)$

Rank	Alternative	Utility
A 1	makaron razowy	0.832120
A 2	płatki owsiane	0.737245
A 3	ryż brązowy	0.582120
A 4	marchewka	0.582120
A 5	chleb żytni	0.529522
A 6	płatki kukurydziane	0.487853
A 7	jabłko	0.372225
A 8	brokuł	0.332120
A 9	banan	0.320588
A 10	jajka gotowane	0.295900
A 11	ziemniaki	0.280971
A 12	szpinak	0.277331
A 13	ser mocarella	0.173806
A 14	kefir	0.114547
A 15	jogurt naturalny	0.093274

Po lewej stronie mamy ranking referencyjny z 4 wariantami referencyjnymi (za najlepszą potrawę decydent uznał makaron razowy, a za najgorszą brokuły). Po prawej stronie mamy ranking końcowy, z zaznaczonymi na czerwono wariantami referencyjnymi. Ponieważ **względna kolejność** 4 wariantów referencyjnych jest w rankingu końcowym **identyczna**, mówimy, że wyznaczona funkcja użyteczności globalnej **odtworza w pełni** zadany ranking referencyjny. Uwaga: nie zawsze to się udaje. Szczególnie trudno może być odtworzyć „zadaną” w rankingu referencyjnym nierozróżnialność między wariantami (zapewnić równość ich wartości użyteczności). Wówczas funkcja użyteczności może odtwarzać zadany ranking z pewnym błędem – nie w pełni.

Ograniczenia w problemie PL wynikające z rankingu referencyjnego

W zależności od relacji pomiędzy wariantami $a, b \in A^R$ (z rankingu referencyjnego) rozważamy **dwa typy ograniczeń**:

- Jeżeli decydent **preferuje wariant decyzyjny a nad b** (wariant a jest w rankingu referencyjnym wyżej niż wariant b), co oznaczamy **$a P b$** , to w problemie PL występuje ograniczenie

$$U(a) > U(b),$$

czyli użyteczność globalna wariantu a musi być większa niż użyteczność globalna wariantu b .

- Jeżeli decydent uznaje **warianty a i b za nierozróżnialne** (wariant a jest w rankingu referencyjnym na tej samej pozycji co wariant b , *ex aequo*), co oznaczamy **$a I b$** , to w problemie PL występuje ograniczenie

$$U(a) = U(b),$$

czyli użyteczności globalne wariantów a i b muszą być sobie równe.

Formułując problem PL, ponieważ może okazać się, że **nie da się spełnić wszystkich ograniczeń wynikających z rankingu referencyjnego** podanego przez decydenta (co powodowałoby brak rozwiązań dopuszczalnych w problemie PL) rozważa się dla każdego wariantu referencyjnego $x \in A^R$ **dwa możliwe błędy** (dwie możliwe odchyłki):

- **błąd przeszacowania** użyteczności globalnej wariantu x , oznaczany przez $\sigma^+(x)$,
- **błąd niedoszacowania** użyteczności globalnej wariantu x , oznaczany przez $\sigma^-(x)$.

Oba błędy są **nieujemne**. Przynajmniej **jeden z nich jest zerem** (można przeszacować lub niedoszacować, ale nie obie rzeczy naraz – tak jak w problemie celowym :)

Ostatecznie, ograniczenia wynikające z rankingu referencyjnego formułuje się w sposób następujący:

- Jeżeli **$a P b$** , to:
$$U(a) - \sigma^+(a) + \sigma^-(a) > U(b) - \sigma^+(b) + \sigma^-(b) \quad (4)$$

- Jeżeli **$a I b$** , to:
$$U(a) - \sigma^+(a) + \sigma^-(a) = U(b) - \sigma^+(b) + \sigma^-(b) \quad (5)$$

Funkcja celu w problemie PL wynikająca z rankingu referencyjnego

Aby zapewnić możliwie wierne **odtworzenie rankingu referencyjnego** przez funkcję użyteczności globalnej $U(x)$, $x \in A$, stosuje się w formułowanym problemie PL **funkcję celu będącą sumą odchyłek** (po wszystkich wariantach referencyjnych), którą należy **minimalizować**:

$$\min F = \sum_{x \in A^R} (\sigma^+(x) + \sigma^-(x)) \quad (6)$$

Jeżeli po rozwiązaniu problemu PL wyjdzie $F^* = 0$, to oznacza to, że znaleziono rozwiązanie (współrzędne punktów charakterystycznych funkcji użyteczności cząstkowych u_i , $i = 1, \dots, n$) odtwarzające ranking referencyjny. W metodzie UTA taką sytuację określa się mianem znalezienia funkcji użyteczności $U(x)$ **kompatybilnej z rankingiem referencyjnym**. Często jest tak, że istnieje wówczas **więcej niż jedna funkcja** użyteczności globalnej odtwarzająca zadany ranking referencyjny (niejednoznaczność rozwiązania!). Wówczas decydent powinien mieć możliwość wyboru jednej z kilku tych kompatybilnych funkcji.

Jeżeli po rozwiązaniu problemu PL „wyjdzie” $F^* > 0$, to ze strony decydenta możliwe są następujące działania:

- **zmiana rankingu referencyjnego** (inny zbiór wariantów referencyjnych i/lub inna kolejność wariantów) + ponowne obliczenia,
- **zwiększenie maksymalnej liczby odcinków liniowych** dla jednej lub więcej funkcji u_i + ponowne obliczenia,
- pogodzenie się z faktem, że nie cały ranking referencyjny zostanie odtworzony (+ ew. wybór innej z wielu funkcji $U(x)$ odpowiadających uzyskanej wartości $F^* > 0$).

Zmienne decyzyjne w problemie PL

W formułowanym w metodzie UTA problemie PL wyróżniamy następujące zmienne decyzyjne:

- **rzędne punktów charakterystycznych** przebiegów funkcji u_i , $i = 1, \dots, n$ – **główne zmienne decyzyjne**,
- **wartości odchyłek** $\sigma^+(x)$, $\sigma^-(x)$, $x \in A^R$ – pomocnicze zmienne decyzyjne.

Należy podkreślić, że dla każdego kryterium **odcięte punktów charakterystycznych są znane** – wynikają z ograniczeń podanych w punkcie [Ograniczenia dot. przebiegów funkcji użyteczności cząstkowych](#) oraz z maksymalnej liczby odcinków liniowych dla tego kryterium.

Ocena rankingu końcowego – współczynnik Kendalla

W celu oceny zgodności rankingu referencyjnego na zbiorze A^R i rankingu końcowego na zbiorze A , wynikającego z wartości funkcji użyteczności globalnej $U(x)$, $x \in A$, wykorzystuje się **współczynnik Kendalla**. Przy czym, **w rankingu końcowym ma znaczenie jedynie względna kolejność wariantów referencyjnych** (pozostałe warianty mogą być w dowolnej kolejności – nie ma to wpływu na wartość współczynnika Kendalla). Wartość współczynnika Kendalla, oznaczanego przez τ , zawiera się w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$. **Wartość 1** oznacza **pełną zgodność obu rankingów**. Wartość -1 oznacza **całkowity brak zgodności** (ta wartość jest możliwa do osiągnięcia jeżeli ranking referencyjny jest porządkiem zupełnym, a w rankingu końcowym warianty referencyjne są ustawione w odwrotnej kolejności).

W celu wyznaczenia wartości τ , w pierwszej kolejności wyznaczamy **łączny błąd (error)**, sumując **błędy** $error(a, b)$, obliczone dla poszczególnych par wariantów referencyjnych, wg poniższego schematu:

relacja wynikająca z rankingu referencyjnego	relacja wynikająca z rankingu końcowego	$error(a, b)$
aPb	aPb	0
aPb	aIb	$\frac{1}{2}$
aPb	$aP^{-1}b$ (a jest gorsze od b ; równoważne zapisowi bPa)	1
aIb	aIb	0
aIb	aPb lub $aP^{-1}b$	$\frac{1}{2}$
$aP^{-1}b$	$aP^{-1}b$	0
$aP^{-1}b$	aIb	$\frac{1}{2}$
$aP^{-1}b$	aPb	1

$$error = \sum_{(a,b) \in A^R \times A^R} error(a, b) \quad (7)$$

Jak widać w powyższej tabeli, błąd związany z **odwróceniem kolejności wariantów referencyjnych** (w rankingu referencyjnym było: a przed b , a w rankingu końcowym jest: b przed a) **wynosi 1**. Natomiast błąd wynikający z zamiany relacji P na I , lub I na P , to $\frac{1}{2}$.

Następnie, **uśredniamy ww. błąd** poprzez jego podzielenie przez liczbę par $(a, b) \in A^R \times A^R$, dla których $a \neq b$ (tylko dla tych par może zaistnieć błąd). Niech liczba wariantów referencyjnych, $|A^R|$ wynosi m . Wówczas, $error$ należy podzielić przez $m(m-1)$:

$$error_{avg} = \frac{error}{m(m-1)} \quad (8)$$

Tak wyznaczony średni błąd przyjmuje wartość z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ i jest miarą typu koszt (im większy średni błąd, tym mniejsza zgodność rankingów). Aby uzyskać współczynnik Kendalla, która jest miarą typu zysk, z przedziałem zmienności $\langle -1, 1 \rangle$, należy dokonać **monotonicznego przekształcenia skali średniego błędu**:

$$\tau = 1 - 2 \cdot error_{avg} \quad (9)$$

Dzięki powyższemu przekształceniu odwracamy kierunek miary i rozciągamy dwukrotnie jej zakres. W szczególności:

gdy $error_{avg} = 1$, to $\tau = 1 - 2 \cdot 1 = -1$; czyli maksymalny średni błąd odpowiada wsp. Kendalla = -1 ,
 gdy $error_{avg} = 0$, to $\tau = 1 - 2 \cdot 0 = 1$; czyli minimalny średni błąd odpowiada wsp. Kendalla = 1 .

Prosty przykład formułowania problemu regresji porządkowej

Dane wejściowe

Niech dane będą 3 **maksymalizowane** kryteria: g_1, g_2, g_3 . Znale są ich wartości najgorsze g_{i*} (tu: min, bo wszystkie kryteria są typu zysk) oraz najlepsze g_i^* (tu: max), $i = 1, \dots, 3$. Znale są również oceny 3 wariantów referencyjnych a, b, c na tych kryteriach:

Wariant \ Kryterium	g_1	g_2	g_3
a	a_1	a_2	a_3
b	b_1	b_2	b_3
c	c_1	c_2	c_3

Decydent podał następującą **informację preferencyjną**:

- 1 odcinek liniowy dla każdego kryterium (dwa punkty charakterystyczne); **uwaga**: funkcje użyteczności cząstkowych w postaci pojedynczych odcinków liniowych odpowiadają stałym wagom poszczególnych kryteriów w całym przedziale ich zmienności,
- ranking referencyjny: $aIbPc$ (a nierozróżnialne z b , *ex aequo* na pierwszym miejscu; c na miejscu drugim, czyli tu ostatnim)

Problem PL

Zauważmy, że każdą z funkcji użyteczności cząstkowych $u_i, i = 1, \dots, 3$, można wyrazić wzorem:

$$u_i(x_i) = w_i(x_i - g_{i*}),$$

gdzie w_i to współczynnik kierunkowy prostej, na której leży odcinek łączący punkty o współrzędnych $(g_{i*}, 0)$ i $(g_i^*, u_i(g_i^*))$. **To czego nie znamy, to rzędne $u_i(g_i^*)$, $i = 1, \dots, 3$.** Aby je poznać, **konieczne jest wyznaczenie współczynników kierunkowych $w_i, i = 1, \dots, 3$.**

Wobec powyższych danych wejściowych metody UTA, problem regresji porządkowej (będący problemem PL) przedstawia się następująco:

$$\min F = \sigma^+(a) + \sigma^-(a) + \sigma^+(b) + \sigma^-(b) + \sigma^+(c) + \sigma^-(c)$$

p.o.

$$\left(\sum_{i=1}^3 w_i(a_i - g_{i*})\right) - \sigma^+(a) + \sigma^-(a) = \left(\sum_{i=1}^3 w_i(b_i - g_{i*})\right) - \sigma^+(b) + \sigma^-(b) \quad //bo aIb$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 w_i(b_i - g_{i*})\right) - \sigma^+(b) + \sigma^-(b) > \left(\sum_{i=1}^3 w_i(c_i - g_{i*})\right) - \sigma^+(c) + \sigma^-(c) \quad //bo bPc$$

$$\sum_{i=1}^3 w_i(g_i^* - g_{i*}) = 1 \quad //normalizacja$$

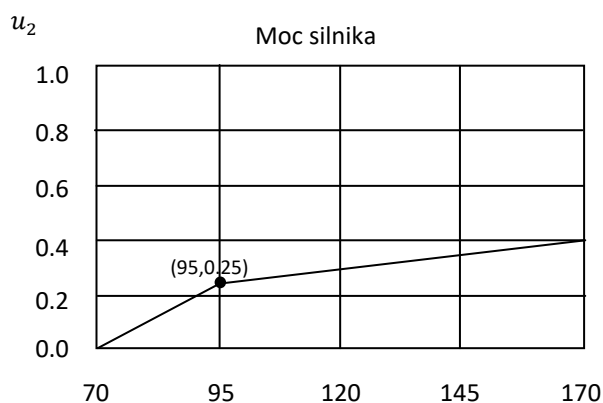
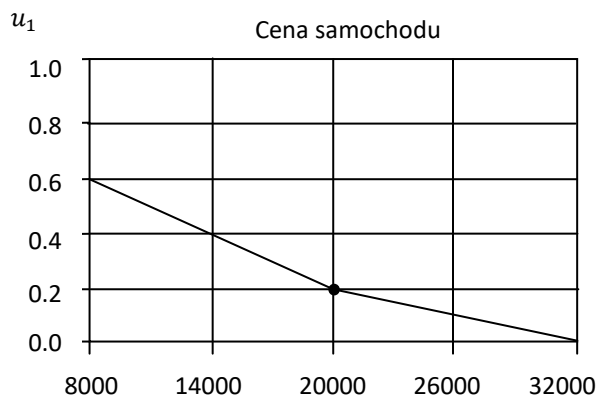
$$w_1, w_2, w_3 \geq 0 \quad //monotoniczność$$

$$\sigma^+(a), \sigma^-(a), \sigma^+(b), \sigma^-(b), \sigma^+(c), \sigma^-(c) \geq 0 \quad //nieujemność odchyłek$$

Ćwiczenia (oblicz samodzielnie i porównaj z rozwiązaniami na końcu pliku)

- Oblicz współczynnik Kendalla dla par rankingów I i II oraz I i III podanych poniżej:
 - $aPbPcPd$ (ranking referencyjny)
 - $dPcPePbPa$
 - $aP(bIc)PdPe$
- Decydent chce dokonać wyboru samochodu. Rozważa 5 wariantów podanych w tabeli. Spośród nich uszeregował trzy: Skoda Fabia P Fiat Panda P VW Passat. Na podstawie rankingu referencyjnego utworzono zbiór cząstkowych funkcji użyteczności. Jedną z możliwości zaprezentowano na wykresach.

Wariant decyzyjny $x=[x_1, x_2]$	g_1 : Cena	g_2 : Moc silnika
Ford Mondeo	26000	145
Peugeot 308	20000	120
Fiat Panda	8000	70
Skoda Fabia	14000	95
VW Passat	32000	170



a. Wyznacz wartości użyteczności cząstkowych oraz globalnych.

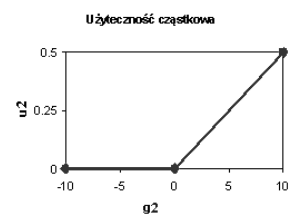
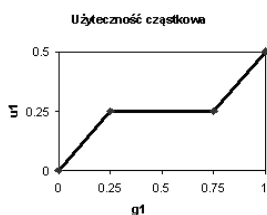
Wariant decyzyjny	$u_1(x_1)$	$u_2(x_2)$	$U(x)$
Ford Mondeo			
Peugeot 308			
Fiat Panda			
Skoda Fabia			
VW Passat			

b. Podaj ostateczny ranking.

c. Czy ranking referencyjny jest odtwarzany przez funkcję użyteczności globalnej $U(x)$?

- Dany jest dodatkowy samochód Opel Astra (cena 17000 zł, moc X KM). Ile co najmniej KM powinien mieć ten samochód, aby być w rankingu końcowym preferowany nad Fiatem Panda?
- Dane są funkcje użyteczności cząstkowej oraz sparametryzowane opisy wariantów a , b i c . Jakie wartości muszą przyjąć parametry X i Y , aby zachodziły relacje bPa i cPa ? Oznaczenie „ \uparrow ” symbolizuje kierunek preferencji „zysk”, czyli *maksymalizację* wartości kryterium

	$g_1 \uparrow$	$g_2 \uparrow$
a	0.75	2
b	0	X
c	Y	0



Ćwiczenia – rozwiązania

1. a. współczynnik Kendalla dla pary rankingów I i II:

Odp.: $\tau = -1$ (dokładnie odwrotna kolejność wariantów referencyjnych)

- b. współczynnik Kendalla dla pary rankingów I i III:

Patrząc na parę (b, c) , w rankingu referencyjnym jest bPc (b lepsze od c), a w rankingu końcowym mamy bIc ; daje to błąd

$$error(b, c) = \frac{1}{2}$$

Z kolei patrząc na parę (c, b) , w rankingu referencyjnym jest $cP^{-1}b$ (c gorsze od b), a w rankingu końcowym mamy cIb (relacja nierozróżnialności jest symetryczna); daje to błąd

$$error(c, b) = \frac{1}{2}$$

Zatem łączny błąd

$$error = 1$$

Liczność zbioru referencyjnego $A^R = \{a, b, c, d\}$ to 4 ($|A^R| = m = 4$). Zatem z wzoru (8) na średni błąd mamy:

$$error_{avg} = \frac{error}{m(m-1)} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$

Wobec tego, współczynnik Kendalla:

$$\tau = 1 - 2 \cdot error_{avg} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{12} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Odp. $\tau = \frac{5}{6}$

2. a. Użyteczności cząstkowe wariantów decyzyjnych odczytujemy z wykresów, a użyteczność globalną wyznaczamy przez zsumowanie użyteczności cząstkowych

Wariant decyzyjny $x=[x_1, x_2]$	$u_1(x_1)$	$u_2(x_2)$	$U(x)$
Ford Mondeo	0.1	0.35	0.45
Peugeot 308	0.2	0.3	0.5
Fiat Panda	0.6	0.0	0.6
Skoda Fabia	0.4	0.25	0.65
VW Passat	0.0	0.4	0.4

b. Ostateczny ranking: **Skoda Fabia P Fiat Panda P** Peugeot 308 P Ford Mondeo P **VW Passat** (pogrubiono warianty referencyjne).

c. Decydent podał ranking referencyjny Skoda Fabia P Fiat Panda P VW Passat. Ranking ten **jest odtwarzany** przez funkcję użyteczności globalnej $U(x)$.

3. Jeżeli Opel Astra P Fiat Panda, to oznacza to, że użyteczność globalna Opla musi być większa niż użyteczność globalna Fiata:

$$U(\text{Opel Astra}) > U(\text{Fiat Panda})$$

Innymi słowy:

$$u_1(\text{Opel Astra}) + u_2(\text{Opel Astra}) > u_1(\text{Fiat Panda}) + u_2(\text{Fiat Panda})$$

Przechodząc na liczby:

$$\begin{aligned}u_1(17000) + u_2(X) &> u_1(8000) + u_2(70) \\0.3 + u_2(X) &> 0.6 + 0.0 \\u_2(X) &> 0.3\end{aligned}$$

Zatem:

$$X > 120$$

Odp. Aby Opel Astra o cenie 17000 zł był preferowany nad Fiatem Pandą, musi mieć moc większą niż 120 KM.

4. Oznaczając $g_i(x)$ przez x_i , mamy:

$$U(\mathbf{a}) = u_1(a_1) + u_2(a_2)$$

$$U(\mathbf{b}) = u_1(b_1) + u_2(b_2)$$

$$U(\mathbf{c}) = u_1(c_1) + u_2(c_2)$$

a. Aby zachodziła relacja \mathbf{bPa} , musimy mieć

$$U(\mathbf{b}) > U(\mathbf{a})$$

$$u_1(b_1) + u_2(b_2) > u_1(a_1) + u_2(a_2)$$

Podstawiając liczby:

$$u_1(0) + u_2(X) > u_1(0.75) + u_2(2)$$

Odczytując użyteczności z wykresów użyteczności cząstkowych:

$$0 + u_2(X) > 0.25 + 0.1$$

$$u_2(X) > 0.35$$

Zatem

$$X > 7$$

b. Aby zachodziła relacja \mathbf{cPa} , musimy mieć

$$U(\mathbf{c}) > U(\mathbf{a})$$

$$u_1(c_1) + u_2(c_2) > u_1(a_1) + u_2(a_2)$$

Podstawiając liczby:

$$u_1(Y) + u_2(0) > u_1(0.75) + u_2(2)$$

Odczytując użyteczności z wykresów użyteczności cząstkowych:

$$u_1(Y) + 0 > 0.25 + 0.1$$

$$u_1(Y) > 0.35$$

Zatem

$$Y > 0.85$$