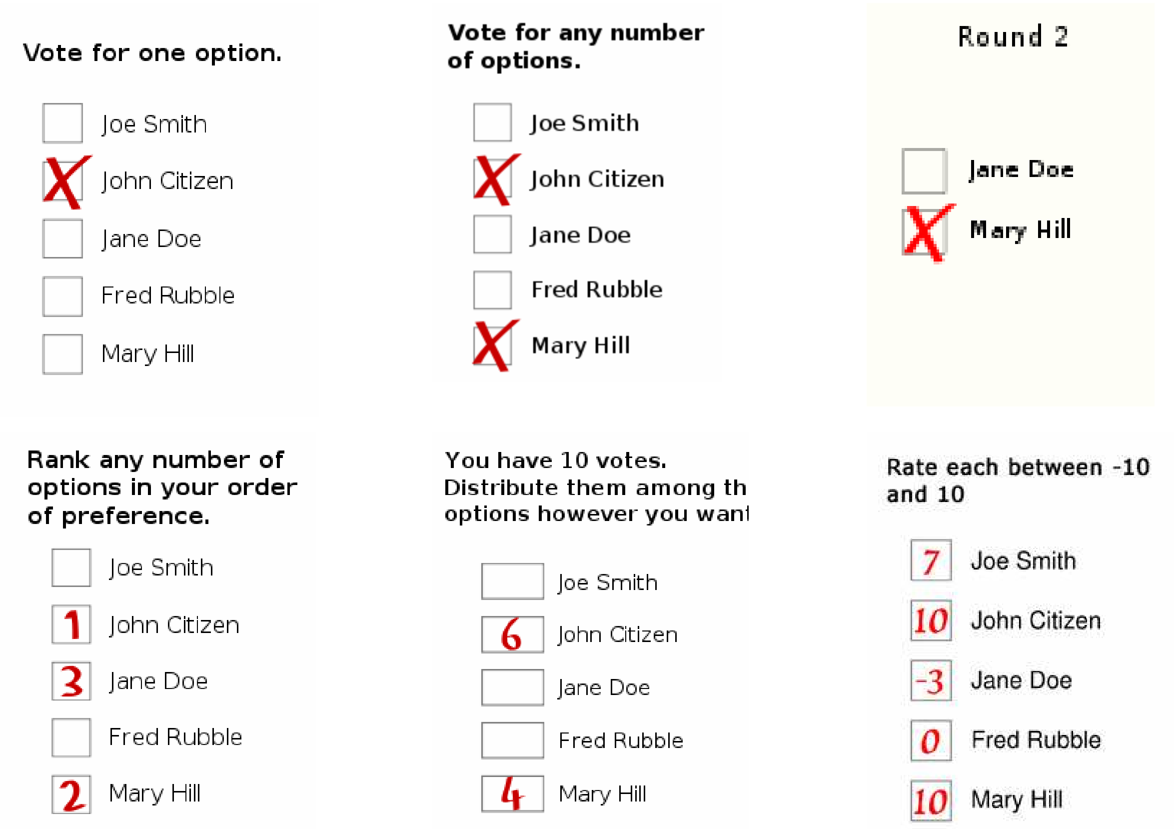
LAB II – TEORIA SPOŁECZNEGO WYBORU (GŁOSOWANIA)

1. Wprowadzenie

Zbiór n kandydatów/wariantów X = {a, b, c, …}

Zbiór m wyborców/decydentów W

Jak głosujemy? (źródło *wiki*)



Dla ćwiczeń zakładamy, że preferencja pojedynczego głosującego jest wyrażana jako **ranking kandydatów** (w szczególnym przypadku może być to jeden lub kilku kandydatów):

W1
a
b
c

Profil preferencji:

W1	W2	W3
a	b	c
b	c	b
c	a	a

Reguła społecznego wyboru (głosowania; *social choice rule - SCR*) agreguje profil preferencji w rezultat społeczny (*social outcome*) – na podstawie indywidualnych preferencji należy ustalić łączne preferencje i stworzyć ranking (wybrać najlepszego kandydata; mogą być remisy (radzenie sobie z remisami to osobna dziedzina)).

Przykłady: wybory polityczne, wybór pracowników, wybór projektów, rodzina decydująca o miejscu wakacji.

☺ **Przykład szczególny 1**:

W1 **W2** **W3**

Wynik (ale czy zawsze?):

 >  > 

☺ **Przykład szczególny 2**:

W1 **W2** **W3**

Wynik – cykl Condorceta:

 >  >  > 

2. Reguły głosowania

☺ **System większościowy - plurality rule** (simple majority, większość względna) - wygrywa ten, który jest zwycięzcą dla największej liczby głosujących (dostał najwięcej głosów); w ogólności głosujący nie musi dostarczać pełnego rankingu, a tylko wskazywać najlepszego kandydata; najczęściej stosowana w praktyce; jeśli jest tylko dwóch kandydatów, to jest świetna; wady - ignorowanie całego rankingu, rozłożenie głosów wśród podobnych kandydatów; często głosujący nie wskazuje swojego najlepszego kandydata, ale tego kto ma szansę wygrać.

Dane:

4: A > B > C

3: B > C > A

2: C > B > A

Decyzja: **???**

System większościowy jest jedynym systemem spełniającym następujące warunki:

- ***anonimowość*** – każdy głos ma tę samą wagę,
- ***neutralność*** – nierozróżnialność wariantów; zmieniając nazwiska kandydatów otrzymujemy tego samego kandydata tyle, że z odpowiednio podmienionym nazwiskiem,
- ***monotoniczność*** – jeżeli x jest zwycięzcą, a jeden z wyborców podniesie pozycję x w swoim rankingu, to x nadal będzie zwycięzcą po uwzględnieniu tej zmiany.

Przykłady: Wielka Brytania, USA, Azerbejdżan, Kanada, Jamajka, Kenia, Iran, Kuwejt, Nepal, Singapur, Południowa Korea, w sumie ponad 40 państw

☺ **Antiplurality rule** (każdy z wyjątkiem ostatniego kandydata jest nagradzany)

Decyzja: **???**

A co z przypadkiem szczególnym 1?

☺ **Głosowanie akceptacyjne** (**approval voting**) – każdy głosuje na podzbiór kandydatów, spośród których każdy otrzymuje jeden punkt. Ostateczny ranking wynika z sumarycznej liczby punktów

4: A

3: B, C

2: C

Decyzja: **???**

Przykłady: konklawe między 1294 a 1621, wybór sekretarza generalnego ONZ

☺ **Plurality run-off** (*run-off election*) – jeśli w pierwszej turze nikt nie osiągnie więcej niż 50%, to do drugiej rundy przechodzi dwóch kandydatów z największą liczbą.

Dane:

4: A > B > C

3: B > C > A

2: C > B > A

Decyzja: **???**

4: **???**

3: **???**

2: **???**

Decyzja: **???**

Przykład: wybory prezydenckie w Polsce, Francji (Le Pen w 2002), Brazylii, Ghanie, Portugalii, Ukrainie, itd.

☺ **Single transferable vote (STV) -** aby wygrać, trzeba mieć ponad 50% głosów (quota); jeśli w danym etapie to nie jest możliwe, usuwa się najsłabszego, i tak do skutku, przesuwając odpowiednio głosy po usunięciu kandydata/ów.

Dane:

5: A > B > C > D

7: B > D > C > A

7: C > B > A > D

4: D > C > B > A

Etap 1: **???**

5: **???**

7: **???**

7: **???**

4: **???**

Etap 2: **???**

5: **???**

7: **???**

7: **???**

4: **???**

Etap 3: **???**

Przykłady: Australia, Nowa Zelandia (dla trzech kandydatów STV = Plurality with run-off)

Wybrane paradoksy

☺ **Winner-turns-loser paradox** – zwycięzca staje się przegranym, jeśli niektórzy wyborcy podniosą jego ranking w swoich profilach preferencyjnych:

27: A > B > C

42: C > A > B

24: B > C > A

Plurality run-off: w I etapie wygrywa A oraz C, potem C bije A 66:27

Załóżmy, że 4 wyborców podniosło ranking C z trzeciego miejsca na pierwsze:

23: A > B > C

46: C > A > B

24: B > C > A

Plurality run-off: w I etapie wygrywa B i C, potem B bije C 47:46. C przegrywa mimo, że uzyskało dodatkowe wsparcie.

☺ **No-Show paradox** – niewygrywający do tej pory kandydat wygrywa, pomimo że dodano profile, w których jest on na ostatnim miejscu:

23: A > B > C

46: C > A > B

24: B > C > A

Plurality run-off: ostatecznie wygrywa B

25-65: A > B > C

46: C > A > B

24: B > C > A

Plurality run-off: ostatecznie wygrywa C (a dodano rankingi, w których był na ostatnim miejscu)

☺ **Głosowanie wg. Bordy** (Borda rule, reguła Bordy, Jean-Charles de Borda - każdy wyborca szereguje wszystkich n kandydatów; ten który jest pierwsze dostaje n-1, ten drugi n-2 punkty, …, ten najsłabszy 0; wygrywa wariant z największą sumaryczną liczbą punktów; wada - wysokie koszty)

Dane:

4: A > B > C

3: B > C > A

2: C > B > A

Obliczenia

A: **???**

B: **???**

C: **???**

Decyzja: **???**

Przykłady: Słowenia (mniejszość narodowościowa), prezydent Kiribati, parlament Nauru

☺ Uogólnienie: **Positional scoring rule**

Wektor punktów/wyników s = <s1, s2, …, sn>, gdzie s1 >= s2 >= … >=sn.

Borda rule: <n-1, n-2, …, 0>

Plurality rule: <1, 0, …, 0>

Antiplurality rule: <1, …,1, 0>

☺ **Głosowanie wg. Condorceta**

- porównuje się wszystkie pary wariantów;
- wariant, który wygrywa wszystkie porównania parami z innymi wariantami jest zwycięzcą (**Condorcet winner**);

W każdej komórce macierzy (x,y) – liczba pojedynków wygranych przez wariant z wiersza (x) / liczba pojedynków wygranych przez wariant z kolumny (y))

Dane:

1: B > C > A > D

1: D > A > C > B

1: A > C > B > D

Decyzja: **???**

	A	B	C	D
A				
B		**???**		
C				
D				

Macierz porównań:

Dane:

4 : C > B > A

3 : B > C > A

3 : A > B > C

Decyzja: **???**

	A	B	C
A			
B		**???**	
C			

☺ **Reguła Copelanda** (**Copeland rule**) – wygrywa kandydat, dla którego różnica liczby wygranych pojedynków i liczby przegranych pojedynków z innymi kandydatami (porównań parami) jest maksymalna

Dane:

31 : A > E > C > D > B

30 : B > A > E > C > D

29 : C > D > B > A > E

10 : D > A > B > C > E

Macierz porównań:

	A	B	C	D	E
A	-	41/59	71/29	61/39	100/0
B	59/41	-	40/60	30/70	69/31
C	29/71	60/40	-	90/10	39/61
D	39/61	70/30	10/90	-	39/61
E	0/100	31/69	61/39	61/39	-

Decyzja: **???**

☺ **Reguła Kemenego** – wybierz ranking, który jest najbliższy rankingowi wyborców pod względem całkowitej liczby przestawień

Dane:

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

Wygrane:

	M	W	B
M	-	11	7
W	9	-	16
B	13	4	-

Możliwe rankingi (sumujemy zgodność głosów):

M W B - (M vs. W = 11) + (M vs. B = 7) + (W vs. B = 16) = 34

M B W - (M vs. B = 7) + (M vs. W = 11) + (B vs. W = 4) = 22

W M B - (W vs. M = 9) + (W vs. B = 16) + (M vs. B = 7) = 32

W B M - **???**

B M W - **???**

B W M - **???**

Decyzja : **???**

☺ **Reguła maximin** (maximin rule) – uszereguj warianty zgodnie z minimalnym wsparciem, jakie otrzymują w porównaniach parami; im większe, tym lepsze.

Niech score(X,Y) oznacza liczbę głosujących, którzy w zestawieniu X oraz Y, wyżej cenią X

winner = $\mathrm{argmax}_X(\min_Y \mathrm{score}(X,Y))$

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

Decyzja: **???**

☺ **Reguła Coombsa** (**Coombs rule**) – podobna do STV, tyle że eliminuje się kandydata, który jest najmniej preferowany przez największą liczbę głosujących (ma największą liczbę ostatnich pozycji); do skutku, dopóki nie osiągnięta zostanie większość.

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

I etap: **???**

II etap: **???**

☺ **Reguła Baldwina** (Nansona) – w każdym kroku eliminowany jest kandydat z najgorszym wynikiem w głosowaniu Bordy.

Dane:

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

I etap: **???**

II etap: **???**

Ranking Baldwina (Nansona): **???**

Metody współcześnie stosowne do podziału mandatów w systemach wyborczych opartych na proporcjonalnej reprezentacji z listami partyjnymi.

☺ **Metoda d'Hondta**

- faworyzuje duże ugrupowania
- wybory parlamentarne: Polska, Austria, Finlandia, Izrael, Hiszpania, Holandia
- dzielimy liczby uzyskanych głosów przez kolejne liczby naturalne: 1, 2, 3, 4, 5,…
- znajdujemy największe ilorazy liczby uzyskanych głosów
- obsadzamy tyle mandatów, ile jest dostępnych w danym okręgu
- remis – decyduje ogólna liczba głosów, a potem liczba zwycięskich obwodów

Przykład: do obsadzenia jest 8 mandatów, 3 partie: A, B i C

<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td rowspan="6">Wyniki:
360B, 240A, 180B, 150C, 120B, 120A, 90B, 80A
B - 4 mandaty, A – 3 mandaty, C – 1 mandat</td></tr>
<tr><td>N=1</td><td>240</td><td>360</td><td>150</td></tr>
<tr><td>N=2</td><td>120</td><td>180</td><td>75</td></tr>
<tr><td>N=3</td><td>80</td><td>120</td><td>50</td></tr>
<tr><td>N=4</td><td>60</td><td>90</td><td>37.5</td></tr>
<tr><td>N=5</td><td>48</td><td>72</td><td>30</td></tr>
</table>

☺ **Metoda Sainte-Lague**

- podział bardziej proporcjonalny niż u d'Hondta
- wybory parlamentarne: Norwegia, Szwecja, Dania, Bośnia, Łotwa, Kosowo, Niemcy, Nowa Zelandia, Polska – 2001r.
- dzielimy liczby uzyskanych głosów przez kolejne liczby nieparzyste: 1, 3, 5, 7, …
- (czasami 1 zastępuje się 1.4 – wtedy zmodyfikowana metoda Sainte-Lague)

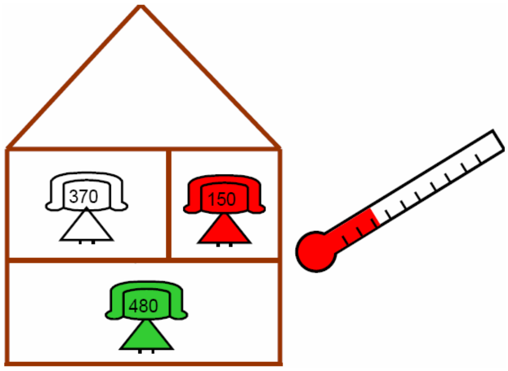
<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td rowspan="5">Wyniki:
360B, 240A, 150C, 120B, 80A, 72B, 51,43B, 50C
B - 4 mandaty, A – 2 mandaty, C – 2 mandaty</td></tr>
<tr><td>N=1</td><td>240</td><td>360</td><td>150</td></tr>
<tr><td>N=3</td><td>80</td><td>120</td><td>50</td></tr>
<tr><td>N=5</td><td>48</td><td>72</td><td>30</td></tr>
<tr><td>N=7</td><td>34,28</td><td>51,43</td><td>21,43</td></tr>
</table>

Wnioski:

- Istnieje wiele sensownych reguł głosowania.
- Niemal dla wszystkich metod głosowania można podać przykłady, dla których zastosowanie tych reguł prowadzi do różnych wyników.
- Rezultat głosowania zależy od preferencji wyborców, ale chyba w większym stopniu od tego, jaką regułę zastosuje się do ich agregacji.

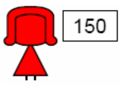
3. **Power indices („indeksy mocy”)** (na podstawie prezentacji Stefano Morettiego)

Budynek z trzema współwłaścicielami:

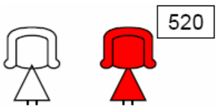


- Każdy współwłaściciel ma wagę proporcjonalną do powierzchni mieszkania (np. przeskalowaną tak, by wagi wszystkich współwłaścicieli sumowały się do 1000)
- Reguła decyzyjna: grupa współwłaścicieli jest wygrywająca jeśli łączna suma wag jej członków wynosi 667 (co najmniej 2/3) – wtedy może przeforsować decyzję dotyczącą budynku
- Jak zbadać siłę każdego ze współwłaścicieli?

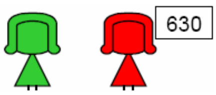
Jakie własności powinien spełniać indeks mocy?



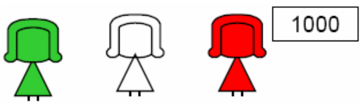
Ta grupa ma mniej głosów niż 667



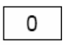
Ta grupa ma mniej głosów niż 667



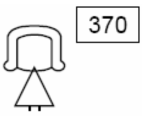
Ta grupa ma mniej głosów niż 667



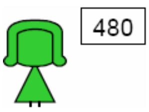
Ta grupa ma **więcej** głosów niż 667



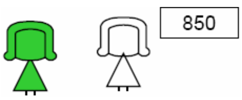
Ta grupa ma mniej głosów niż 667



Ta grupa ma mniej głosów niż 667

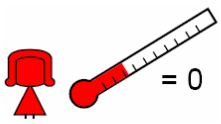


Ta grupa ma mniej głosów niż 667

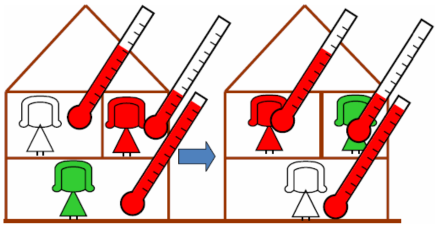


Ta grupa ma **więcej** głosów niż 667

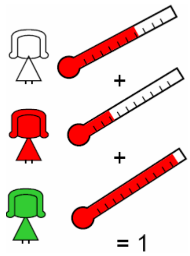
Null player property – moc gracza, który nigdy nie przyczynia się do utworzenia koalicji wygrywającej powinna wynosić 0:



Anonimity property – indeksy mocy nie mogą być uzależnione od nazwisk graczy:

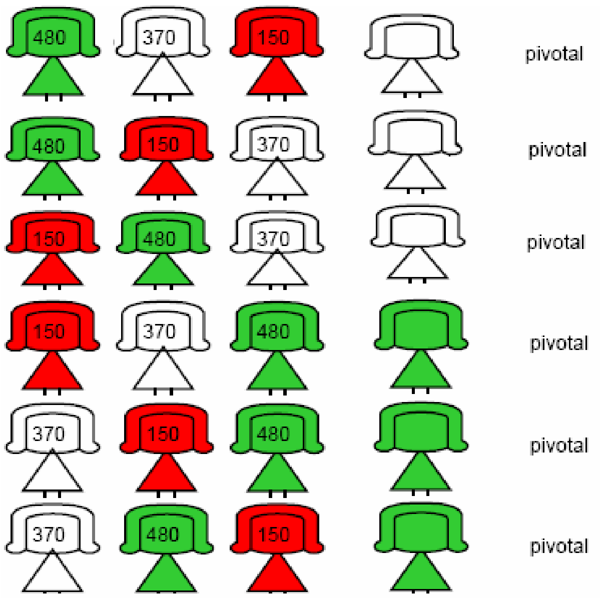


Efficiency property – suma mocy wszystkich graczy powinna wynosić 1:

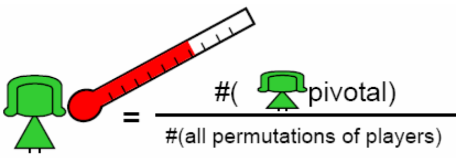


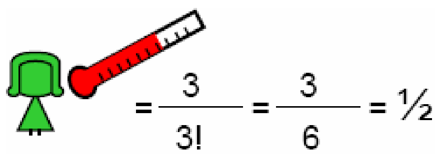
☺ **Shapley & Shubik Power index** (spełnia null player property, anonimity property, efficiency property oraz transfer property (tej ostatniej nie omawiamy))**:**

Rozważ wszystkie permutacje graczy:



Policz, ile razy każdy z graczy przekształca grupę z koalicji niewygrywającej w koalicję wygrywającą (pivotal) („pokój, do którego wchodzą pojedynczo gracze i trzeba zauważyć, w którym momencie koalicja wewnątrz pokoju jest wygrywająca”):





☺ Banzhaf Power Index

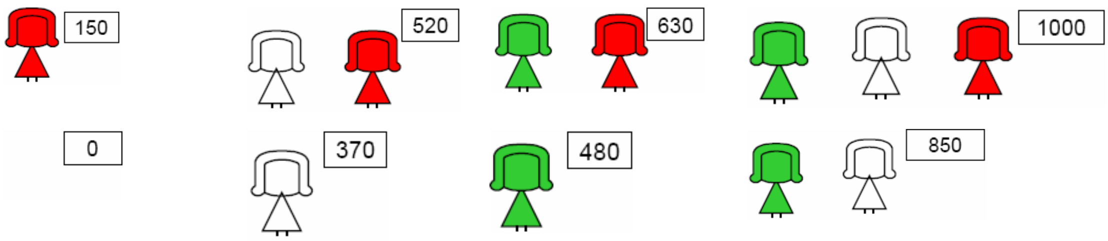
Gracz i jest krytyczny dla danej koalicji, jeśli:

- i należy do koalicji,
- koalicja nie byłaby wygrywająca, gdyby gracz i z niej odszedł.

Banzhaf Power Index (i) = Bz(i) =

= Number of winning coalitions for which i is critical / Total number of times all players are critical

Rozważ wszystkie podzbiory zbioru graczy:



Wybierz te, które są wygrywające:

Określ liczbę koalicji wygrywających, dla których każdy gracz jest krytyczny:

White = 2, Green = 2, Red = 0.

Łączna liczba „bycia krytycznym” wszystkich graczy = 4:

Bz(white) = ½, Bz(green) = ½, Bz(red) = 0

Dla tego przykładu wyniki wyszły takie same, w ogólności wychodzą oczywiście inne:

Rada bezpieczeństwa ONZ - 5 stałych członków (Chiny, Francja, Rosja, Wielka Brytania, USA) i 10 okresowych (2-letnie kadencje); aby podjąć rezolucję potrzeba 9 głosów z 15 członków rady, przy czym wystarczy co najmniej 1 głos negatywny członka stałego, by rezolucję odrzucić: