

Programowanie celowe #1

- Problem programowania celowego (PC) jest przykładem problemu programowania matematycznego nieliniowego, który można skutecznie zlinearyzować, tzn. zapisać (i rozwiązać) jako problem programowania liniowego

Programowanie celowe #2

- Ogólna (nieważona) postać problemów PC:

$$\min \sum_{i=1}^S | \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} - c_i |$$

$$\text{p.o.: } \mathbf{Ax} \{ \leq, \geq, = \} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

– cechy problemu

- kierunek optymalizacji w funkcji celu: zawsze minimalizacja
- skalarne współczynniki c_i występujące w funkcji celu nazywane są celami, wymaga się aby wartości wyrażen $\mathbf{c}_i^T \mathbf{x}$ dążyły do odpowiednich celów (czyli wartości c_i)
- najmniejszą możliwą wartością funkcji celu jest wartość 0
 - wartość ta jest uzyskiwana wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego i zachodzi: $\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} = c_i$

Programowanie celowe #3

- Ogólna, ważona postać problemów PC:

$$\min \sum_{i=1}^S w_i | \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} - c_i |$$

$$\text{p.o.: } \mathbf{Ax} \{ \leq, \geq, = \} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- cechy problemu (oprócz wymienionych poprzednio)
 - wartość funkcji celu jest kontrolowana za pomocą wag w_i , których działanie jest następujące:
 - im większa wartość wagi w_i tym większa waga przykładana jest do osiągnięcia celu c_i (kosztem dokładności osiągnięcia innych celów)

Programowanie celowe #4

- Wyprowadzenie PC – rozwiązywanie układów równań
 - rozważmy oznaczony układ równań postaci $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$
 - (1) $1x_1+2x_2=5$
 - (2) $3x_1+2x_2=7$
 - zgodnie z twierdzeniem Kroneckera–Capellie’go
 - rozwiązanie tego problemu istnieje ponieważ
 - $\text{rank}(\mathbf{A})=\text{rank}([\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$
(jest to układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi)
 - rozwiązanie to jest jednoznaczne ponieważ
 - $\text{rank}(\mathbf{A})=N$, gdzie N jest liczbą kolumn macierzy \mathbf{A}
(równania te są niezależne)
 - rozwiązanie: wektor $\mathbf{x}=[1 \ 2]^T$

Programowanie celowe #5

- Wyprowadzenie PC – rozwiązywanie układów równań
 - rozważmy nieoznaczony układ równań postaci $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$
 - (1) $1x_1+2x_2=5$
 - (2) $2x_1+4x_2=10$
 - zgodnie z twierdzeniem Kroneckera–Capellie’go
 - rozwiązanie tego problemu istnieje ponieważ
 - $\text{rank}(\mathbf{A})=\text{rank}([\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$
(jest to układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi)
 - rozwiązanie to jest niejednoznaczne ponieważ
 - $\text{rank}(\mathbf{A})<N$, gdzie N jest liczbą kolumn macierzy \mathbf{A}
(równania te są zależne)
 - rozwiązanie: każdy wektor postaci $\mathbf{x}=[5-2p, p]^T$, gdzie $p \in (-\infty, +\infty)$

Programowanie celowe #6

- Wyprowadzenie PC – rozwiązywanie układów równań
 - rozważmy sprzeczny układ równań postaci $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$
 - (1) $1x_1+2x_2=5$
 - (2) $3x_1+2x_2=7$
 - (3) $2x_1+1x_2=5$
 - zgodnie z twierdzeniem Kroneckera–Capellie’go
 - rozwiązanie tego problemu nie istnieje ponieważ
 - $\text{rank}(\mathbf{A})<\text{rank}([\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$
(jest to układ trzech niezależnych równań z dwoma niewiadomymi)
 - powstaje pytanie, czy jeżeli dokładne rozwiązanie tego problemu nie istnieje, to czy można zaproponować jakieś rozwiązanie przybliżone?

Programowanie celowe #7

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - pomysły na uzyskanie rozwiązania przybliżonego: tworzenie różnych par równań i ich rozwiązanie, a konkretnie:
 - równanie pierwsze i drugie tworzą układ
 - (1) $1x_1 + 2x_2 = 5$
 - (2) $3x_1 + 2x_2 = 7$
 - którego rozwiązaniem jest: $\mathbf{x} = [1, 2]^T$
 - równanie pierwsze i trzecie tworzą układ:
 - (1) $1x_1 + 2x_2 = 5$
 - (3) $2x_1 + 1x_2 = 5$
 - którego rozwiązaniem jest: $\mathbf{x} = [5/3, 5/3]^T$
 - równanie drugie i trzecie tworzą układ:
 - (2) $3x_1 + 2x_2 = 7$
 - (3) $2x_1 + 1x_2 = 5$
 - którego rozwiązaniem jest: $\mathbf{x} = [3, -1]^T$

Programowanie celowe #8

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - można powiedzieć więc, że układ równań posiada trzy rozwiązania przybliżone:
 - rozwiązanie: $\mathbf{x}=[1, 2]^T$
 - rozwiązanie: $\mathbf{x}=[5/3, 5/3]^T$
 - rozwiązanie: $\mathbf{x}=[3, -1]^T$
 - powstają pytania, czy:
 - rozwiązania te są równie dobre, czy też może różnią się od siebie?
 - a jeżeli się różnią, to czym i które z nich jest najlepsze?

Programowanie celowe #9

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - otrzymane rozwiązania można scharakteryzować następująco:
 - $\mathbf{x}=[1, 2]^T$ spełnia równania (1) i (2) a nie spełnia równania (3)
 - $\mathbf{x}=[5/3, 5/3]^T$ spełnia równania (1) i (3) a nie spełnia równania (2)
 - $\mathbf{x}=[3, -1]^T$ spełnia równania (2) i (3) a nie spełnia równania (1)
 - jeżeli jakieś rozwiązanie \mathbf{x} nie spełnia równania $\mathbf{c}^T\mathbf{x}=c$, to znaczy, że wartością wyrażenia $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ jest d , przy czym $d \neq c$
 - rozwiązanie można więc ocenić obliczając różnicę pomiędzy wartościami d oraz c (a konkretnie: wartość bezwzględną z tej różnicy)
 - wartość tę nazwiemy odchyłką
 - oczywiście im mniejsza odchyłka tym lepsze rozwiązanie

Programowanie celowe #10

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - otrzymane rozwiązania można scharakteryzować następująco:
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[1, 2]^T$
 - nie spełnia równania (3), czyli równania $2x_1+1x_2=5$, mamy więc:
 $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$ (choć powinno być 5), odchyłka: $|4-5|=1$
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[5/3, 5/3]^T$
 - nie spełnia równania (2), czyli równania $3x_1+2x_2=7$, mamy więc:
 $3 \cdot 5/3 + 2 \cdot 5/3 = 25/3$ (choć powinno być 7 //czyli $21/3$ //), odchyłka:
 $|25/3 - 21/3| = 4/3$
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[3, -1]^T$
 - nie spełnia równania (1), czyli równania $1x_1+2x_2=5$, mamy więc:
 $1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 1$ (choć powinno być 5), odchyłka: $|1-5|=4$
 - widać więc, że za najlepsze rozwiązanie można uznać rozwiązanie $\mathbf{x}=[1, 2]^T$ (ponieważ jego odchyłka jest najmniejsza)

Programowanie celowe #11

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - odchyłki mogą być jednak obliczone ogólniej (dzięki czemu będzie można oceniać dowolne inne rozwiązania, a nie tylko takie, które powstały w rezultacie rozwiązywania wybranych par równań)
 - odchyłkę definiujemy jako sumę wartości bezwzględnych z różnic pomiędzy lewymi a prawymi stronami równań (oczywiście po wstawieniu do lewych stron nich ocenianych rozwiązań)

Programowanie celowe #12

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - sumaryczne odchyłki rozważanych rozwiązań
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[1, 2]^T$
$$|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 5| + |3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 7| + |2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5| = |5 - 5| + |7 - 7| + |4 - 5| = 0 + 0 + 1 = 1$$
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[5/3, 5/3]^T$
$$|1 \cdot 5/3 + 2 \cdot 5/3 - 5| + |3 \cdot 5/3 + 2 \cdot 5/3 - 7| + |2 \cdot 5/3 + 1 \cdot 5/3 - 5| = |5 - 5| + |25/3 - 7| + |5 - 5| = 0 + 4/3 + 0 = 4/3$$
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[3, -1]^T$
$$|1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) - 5| + |3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) - 7| + |2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 5| = |1 - 5| + |7 - 7| + |5 - 5| = 4 + 0 + 0 = 4$$
 - oczywiście otrzymane odchyłki są identyczne z poprzednimi, co wynika z faktu, że rozważane rozwiązania spełniają zawsze dwa spośród trzech równań, w rezultacie czego część odchyłki, która odpowiada tym równaniom, będzie zawsze wynosiła 0

Programowanie celowe #13

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - dzięki ogólnym odchyłkom można porównać dotychczasowe rozwiązania:
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[1, 2]^T$, odchyłka 1
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[5/3, 5/3]^T$, odchyłka $4/3$
 - rozwiązanie $\mathbf{x}=[3, -1]^T$, odchyłka 4
 - z rozwiązaniem znalezionym dowolną inną metodą, np. z rozwiązaniem $\mathbf{x}=[1, 1]^T$, którego odchyłka wynosi:
 $|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 5| + |3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 7| + |2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 5| = |3 - 5| + |5 - 7| + |3 - 5| =$
 $= 2 + 2 + 2 = 6$
 - rozwiązanie to jest więc gorsze od rozwiązań uzyskanych poprzednio

Programowanie celowe #14

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - definicja odchyłki sumarycznej nasuwa sposób jeszcze lepszego rozwiązywania postawionego problemu
 - celem jest więc znalezienie rozwiązania, które charakteryzuje się minimalną odchyłką (choć być może nie spełnia w sposób dokładny żadnego z równań)
 - tak postawiony problem może być rozwiązany metodami programowania matematycznego

Programowanie celowe #15

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone

- układ S równań

- (1) $(\mathbf{c}_1)^T \mathbf{x} = c_1$

- ...

- (S) $(\mathbf{c}_S)^T \mathbf{x} = c_S$

- definicje odchyłek:

- równanie (1): $(\mathbf{c}_1)^T \mathbf{x} = c_1$, odchyłka: $|(\mathbf{c}_1)^T \mathbf{x} - c_1|$

- ...

- równanie (S): $(\mathbf{c}_S)^T \mathbf{x} = c_S$, odchyłka: $|(\mathbf{c}_S)^T \mathbf{x} - c_S|$

- suma odchyłek:

- $|(\mathbf{c}_1)^T \mathbf{x} - c_1| + |(\mathbf{c}_2)^T \mathbf{x} - c_2| + \dots + |(\mathbf{c}_S)^T \mathbf{x} - c_S| = \sum_{i=1}^S |\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} - c_i|$

Programowanie celowe #16

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - formalne sformułowanie problemu poszukiwania przybliżonych rozwiązań układów równań więc jest następujące

$$\min \sum_{i=1}^S | \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} - c_i |$$

- jak więc widać jest to problem bardzo podobny do problemu PC (różnica: brak ograniczeń na nieujemność zmiennych)
- problem PC można więc traktować jako metodę służącą do przybliżonego rozwiązywania układów równań liniowych

Programowanie celowe #17

- Wyprowadzenie PC – rozwiązanie przybliżone
 - po dodaniu ograniczeń na nieujemność zmiennych: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ oraz dodatkowych (liniowych) ograniczeń roboczych postaci $\mathbf{Ax} \{\leq, \geq, =\} \mathbf{b}$ otrzymujemy pełną postać problemu PC

$$\min \sum_{i=1}^S | \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} - c_i |$$

$$\text{p.o.: } \mathbf{Ax} \{\leq, \geq, =\} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- problem programowania celowego można więc traktować jako metodę znajdującą rozwiązania wspólnych układów równań i nierówności liniowych, przy dla części równań poszukuje się w ogólności rozwiązania przybliżonego

Programowanie celowe #18

- Przykłady zadań PC
 - znaleźć rozwiązanie oznaczonego układu równań:
 - (1) $1x_1+2x_2=5$
 - (2) $3x_1+2x_2=7$
 - rozwiązanie układu $[1, 2]^T$
 - zapis zadania w postaci PC:
 - min $|1x_1+2x_2-5|+|3x_1+2x_2-7|$
 - p.o. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Programowanie celowe #19

- Przykłady zadań PC
 - znaleźć rozwiązanie oznaczonego układu równań:
 - (1) $1x_1 - 2x_2 = 5$
 - (2) $3x_1 - 2x_2 = 7$
 - rozwiązanie układu $[1, -2]^T$
 - zapis zadania w postaci PC:
 - min $|1x_1 - 2x_2 - 5| + |3x_1 - 2x_2 - 7|$
 - p.o. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Programowanie celowe #20

- Przykłady zadań PC

- znaleźć nieujemne przybliżenie rozwiązania sprzecznego układu równań:

- (1) $1x_1 + 2x_2 = 5$

- (2) $3x_1 + 2x_2 = 7$

- (3) $2x_1 + 1x_2 = 3$

- brak rozwiązań

- zapis zadania w postaci PC:

- $$\min |1x_1 + 2x_2 - 5| + |3x_1 + 2x_2 - 7| + |2x_1 + 1x_2 - 3|$$

- p.o. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Programowanie celowe #21

- Przykłady zadań PC

- znaleźć rozwiązanie zadania PC:

$$\min |1x_1+2x_2-5|+|3x_1+2x_2-7|+|2x_1+1x_2-3|$$

$$\text{p.o. } 5x_1+7x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Programowanie celowe #22

- Linearyzacja problemów PC
 - problemy PC należą do grupy problemów programowania matematycznego nieliniowego, który można skutecznie zlinearyzować
 - zlinearyzować czyli zapisać (i rozwiązać) jako problem programowania liniowego, którego rozwiązanie będzie jednocześnie rozwiązaniem problemu nieliniowego (lub rozwiązaniem, na podstawie którego można jednoznacznie odczytać rozwiązanie problemu liniowego)
 - linearyzacja problemu PC została podana przez Charnes'a i Cooper'a
 - linearyzacja ta polega na rozkładzie dowolnych wartości rzeczywistych na różnicę dwóch wartości nieujemnych

Programowanie celowe #23

- Linearyzacja problemów PC – rozkład dowolnej wartości na różnicę dwóch wartości nieujemnych
 - dana jest wartość skalarna $x \in (-\infty, +\infty)$
 - wartość tę można przedstawić w postaci różnicy:
 $x = y - z$
 - której składniki, tzn. y i z są wartościami nieujemnymi, tzn. $y \in [0, +\infty)$ oraz $z \in [0, +\infty)$
 - przykłady:
 $5 = 9 - 4$
 $-12 = 8 - 20$
 $50 = 100 - 50$
 $-1 = 1 - 2$

Programowanie celowe #24

- Linearyzacja problemów PC – rozkład dowolnej wartości na różnicę dwóch wartości nieujemnych
 - z definicji rozkład taki jest niejednoznaczny, tzn. dla każdego x istnieje nieskończenie wiele par y i z takich, że $x = y - z$
 - przykłady:
 - $5 = 7 - 2$
 - $5 = 8 - 3$
 - $5 = 9 - 4$
 - $5 = 9.5 - 4.5$
 - $5 = 9.789 - 4.789$
 - itd.

Programowanie celowe #25

- Linearyzacja problemów PC – rozkład dowolnej wartości na różnicę dwóch wartości nieujemnych
 - rozkład ten można „ujednoznaczyć” przyjmując, że co najmniej jedna z wartości y oraz z powinna być ustalona i wynosić 0
 - przykłady:
 - przykład liczby dodatniej:
 $5 = 5 - 0$ // jest to jedyna możliwość rozkładu liczby 5
 - przykład liczby zerowej:
 $0 = 0 - 0$ // jest to jedyna możliwość rozkładu liczby 0
 - przykład liczby ujemnej:
 $-5 = 0 - 5$ // jest to jedyna możliwość rozkładu liczby -5

Programowanie celowe #26

- Linearyzacja problemów PC – rozkład dowolnej wartości na różnicę dwóch wartości nieujemnych

- fakt, że co najmniej jedna z wartości y oraz z musi wynosić 0 można w ogólności zapisać za pomocą warunku:

$$y \cdot z = 0$$

(warunek ten jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej jedna z wartości y oraz z jest zerem)

- ogólny (jednoznaczny) rozkład wartości x można więc „zadać” następująco: dla danej $x \in (-\infty, +\infty)$ znaleźć takie $y \in [0, +\infty)$ oraz $z \in [0, +\infty)$, aby zachodziły warunki:

$$x = y - z$$

oraz

$$y \cdot z = 0$$

Programowanie celowe #27

- Linearyzacja problemów PC – rozkład dowolnej wartości na różnicę dwóch wartości nieujemnych
 - dysponowanie wartościami y i z (z których co najmniej jedna jest równa zero) jest korzystne, ponieważ:
 - y i z mogą przyjąć rolę zmiennych w problemie PL (zmienne te są zawsze nieujemne)
 - na podstawie y i z łatwo można obliczyć wartość bezwzględną z wartości x :
jeżeli $x = y - z$ oraz $y \cdot z = 0$ to $|x| = y + z$
 - przykłady:
 - $5 = 5 - 0$, $5 \cdot 0 = 0$, czyli $|5| = 5 + 0 = 5$
 - $0 = 0 - 0$, $0 \cdot 0 = 0$, czyli $|0| = 0 + 0 = 0$
 - $-5 = 0 - 5$, $0 \cdot 5 = 0$, czyli $|-5| = 0 + 5 = 5$

Programowanie celowe #28

- Linearyzacja problemów PC – zastosowanie rozkładu
 - operację rozkładu dowolnej wartości na składniki nieujemne można zastosować do dowolnego wyrażenia, a nie tylko do pojedynczej wartości, np.:
jeżeli $3x_1+4x_2-10 = y - z$ oraz $y \cdot z = 0$ to $|3x_1+4x_2-10| = y + z$
 - technikę tę można zastosować w problemie PC, którego funkcja celu jest postaci:
 - $$\min \sum_{i=1}^S | \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} - c_i |$$
 - w tym przypadku dla każdego i można znaleźć takie y_i oraz z_i aby zachodziło:
 $(\mathbf{c}_i)^T \mathbf{x} - c_i = y_i - z_i$ oraz $y_i \cdot z_i = 0$, wtedy oczywiście $|(\mathbf{c}_i)^T \mathbf{x} - c_i| = y_i + z_i$
 - pozwala to na usunięcie wartości bezwzględnej z funkcji celu

Programowanie celowe #29

- Linearyzacja problemów PC – zastosowanie rozkładu

- powstaje nowa funkcja celu:

- $\min \sum_{i=1}^S (y_i + z_i)$

- oczywiście należy dodać ograniczenia, które wiążą (występujące w nowej funkcji celu) zmienne y_i i z_i z wyrażeniami $(\mathbf{c}_i)^T \mathbf{x} - c_i$:

- dla każdego i : $(\mathbf{c}_i)^T \mathbf{x} - c_i = y_i - z_i$

- dodajemy także ograniczenia „ujednoznaczniające” rozkład:

- dla każdego i : $y_i \cdot z_i = 0$

Programowanie celowe #30

- Linearyzacja problemów PC – zastosowanie rozkładu
 - dla kompletności dodajemy oryginalne ograniczenia problemu:
 $Ax \{\leq, \geq, =\} b$
 - w tym ograniczenia na nieujemność zmiennych **x**
 $x \geq 0$
 - ograniczenia te „rozciągają” się na wszystkie zmienne, łącznie z nowo wprowadzonymi zmiennymi y_i i z_i , co w postaci wektorowej można zapisać następująco:
 $y \geq 0$
 $z \geq 0$

Programowanie celowe #31

- Linearyzacja problemów PC – zastosowanie rozkładu
 - w rezultacie otrzymujemy problem:

- $\min \sum_{i=1}^S (y_i + z_i)$

- przy ograniczeniach:

- dla każdego i : $(\mathbf{c}_i)^T \mathbf{x} - c_i = y_i - z_i$

- dla każdego i : $y_i \cdot z_i = 0$

- $\mathbf{Ax} \{ \leq, \geq, = \} \mathbf{b}$

- $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

- $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

- $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$

- powstały problem byłby problemem PL gdyby nie nieliniowe ograniczenia postaci: $y_i \cdot z_i = 0$

Programowanie celowe #32

- Linearyzacja problemów PC – zastosowanie rozkładu
 - okazuje się jednak, że ograniczenia $y_i \cdot z_i = 0$ można pominąć (a pomimo tego rozwiązanie optymalne będzie identyczne)
 - jest to cecha charakterystyczna dla tzw. problemów programowania wypukłego, którą można uzasadnić na następującym przykładzie:
 - założmy, że wartość pewnego wyrażenia postaci $(\mathbf{c}_i)^T \mathbf{x} - c_i$ wynosi 5
 - wartość 5 można np. przedstawić w postaci różnicy: $5 = 7 - 2$ (czyli $y=7, z=2$), wtedy wyrażenie $(y + z)$ w funkcji celu przyjmie wartość 9
 - gdyby wartość 5 przedstawić w postaci różnicy: $5 = 6 - 1$ (czyli $y=6, z=1$), to wtedy wyrażenie $(y + z)$ w funkcji celu przyjmie wartość 7
 - gdyby wreszcie wartość 5 przedstawić w postaci różnicy: $5 = 5 - 0$ (czyli $y=5, z=0$), to wyrażenie $(y + z)$ w funkcji celu przyjmie wartość 5, co stanowi wartość minimalną tego wyrażenia
 - ponieważ wyrażenie reprezentujące wartość funkcji celu jest minimalizowane, to wartości par zmiennych y i z będą zawsze tak dobierane, aby jedna z nich przyjmowała wartość zero

Programowanie celowe #33

- **Linearyzacja problemów PC** – zastosowanie rozkładu
 - **ostateczna postać powstałego problemu:**
 - $\min \sum_{i=1}^S (y_i + z_i)$
 - przy ograniczeniach:
 - dla każdego i : $(\mathbf{c}_i)^T \mathbf{x} - c_i = y_i - z_i$
 - $\mathbf{Ax} \{ \leq, \geq, = \} \mathbf{b}$**
 - $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$**
 - $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$**
 - $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$**
 - powyższy problem jest zlinearyzowaną wersją problemu celowego, czyli takim problemem liniowym, którego rozwiązanie jest identyczne z rozwiązaniem problemu celowego

Programowanie celowe #34

- Rozwiązania przykładowych PC
 - znaleźć rozwiązanie oznaczonego układu równań:
 - (1) $1x_1+2x_2=5$
 - (2) $3x_1+2x_2=7$
 - rozwiązanie układu $[1, 2]^T$
 - zapis zadania w postaci PC:
 - $\min |1x_1+2x_2-5|+|3x_1+2x_2-7|$
 - p.o. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
 - rozwiązanie optymalne: $[1, 2]^T$
 - wartość funkcji celu: 0
 - otrzymano identyczne rozwiązania

Programowanie celowe #35

- Rozwiązania przykładowych PC
 - znaleźć rozwiązanie oznaczonego układu równań:
 - (1) $1x_1 - 2x_2 = 5$
 - (2) $3x_1 - 2x_2 = 7$
 - rozwiązanie układu $[1, -2]^T$
 - zapis zadania w postaci PC:
 - $\min |1x_1 - 2x_2 - 5| + |3x_1 - 2x_2 - 7|$
 - p.o. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
 - rozwiązanie optymalne: $[2.333..., 0]^T$
 - wartość funkcji celu: 2.666...
 - otrzymane rozwiązania różnią się (ponieważ rozwiązanie otrzymane metodą PC musi być nieujemne)

Programowanie celowe #36

- Rozwiązania przykładowych PC

- znaleźć nieujemne przybliżenie rozwiązania sprzecznego układu równań:

- (1) $1x_1 + 2x_2 = 5$

- (2) $3x_1 + 2x_2 = 7$

- (3) $2x_1 + 1x_2 = 3$

- brak rozwiązań

- zapis zadania w postaci PC:

- $$\min |1x_1 + 2x_2 - 5| + |3x_1 + 2x_2 - 7| + |2x_1 + 1x_2 - 3|$$

- p.o. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- rozwiązanie optymalne: $[1, 2]^T$

- wartość funkcji celu: 1

- rozwiązanie otrzymane metodą PC jest nieujemnym przybliżeniem rozwiązania układu wyjściowego

Programowanie celowe #37

- Rozwiązania przykładowych PC

- znaleźć rozwiązanie zadania PC:

$$\min |1x_1+2x_2-5|+|3x_1+2x_2-7|+|2x_1+1x_2-3|$$

$$\text{p.o. } 5x_1+7x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- rozwiązanie optymalne: [1.222..., 0.555...]^T
 - wartość funkcji celu: 4.888...