

# Metoda ELECTRE TRI

Most slides courtesy of Robert Susmaga 😊

# Metoda ELECTRE TRI

- Charakterystyka metody ELECTRE TRI
  - rozwiązuje problematykę  $\beta$
  - realizuje model relacyjny
    - implementowane relacje pomiędzy wariantami: P, I, R ( $\succ$ ,  $\sim$ , ?)
  - wymagane dane
    - **tabela informacyjna (warianty, kryteria)**
    - **informacja preferencyjna od decydenta:**
      - wagi kryteriów
      - profile separujące  $b_t$  (służące do zdefiniowania klas jakości)
      - parametry charakteryzujące profile na poszczególnych kryteriach: progi nierozróżnialności  $q_i^t$ , preferencji  $p_i^t$ , veto  $v_i^t$ ; progi stałe, ale podawane przez decydenta osobno dla każdego profilu (zatem ich wartość można uzależnić od wartości profilu na danym kryterium)
    - próg odcięcia  $\lambda$
  - aparat matematyczny
    - przekształcenia algebraiczne

# Metoda ELECTRE TRI

- Zadaniem metody ELECTRE TRI jest posortowanie wariantów (czyli przydzielenie ich do ustalonych z góry klas jakości) – problematyka  $\beta$ 
  - klasy te są zdefiniowane niezależnie od wariantów
- Problemy typu  $\beta$  powinny być formalnie odróżniane od problemów typu  $\gamma$ ; wprowadzie elementem wspólnym obu problematyk jest wprowadzenie pewnego uporządkowania do zbioru wariantów, ale
  - w problematyce  $\gamma$  uporządkowanie to wynika z porównania wariantów pomiędzy sobą
  - w problematyce  $\beta$  uporządkowanie to wynika z porównania wariantów z przyjętymi definicjami klas

# Metoda ELECTRE TRI – ogólna idea

- Idea podziału na klasy
  - historycznie:
    - podział na 3 klasy jakości, np. warianty dobre, niedobre i pośrednie (po uporządkowaniu klas wg jakości – rosnąco: niedobre, pośrednie, dobre)
  - w obecnej wersji liczba klas jest dowolna
  - interpretacja jakości klas:
    - w stosunku do klas istnieje zawsze jasno określona preferencja decydenta: im wyższa klasa tym lepiej (**decydent preferuje warianty z wyższych klas nad warianty z niższych klas**)
- O klasach zakłada się, że są od siebie oddzielone możliwymi do zdefiniowania wartościami granicznymi
  - definiowanie wartości granicznych jest zadaniem decydenta
  - wartości graniczne definiuje się dla każdego kryterium z osobna

# Metoda ELECTRE TRI – przykład

- Przykłady sortowania wariantów (podziału na klasy)
  - przykład 1.: wstępna ewaluacja kandydatów
    - trzy klasy:
      - $C_1$ : „odrzuceni”,  $C_2$ : „do rozstrzygnięcia”,  $C_3$ : „przyjęci”
  - przykład 2.: wystawianie ocen końcowych
    - sześć klas:
      - $C_1$ : „ndst”,  $C_2$ : „dst”,  $C_3$ : „dst+”,  $C_4$ : „db”,  $C_5$ : „db+”,  $C_6$ : „bdb”
- Warianty są opisane wartościami na kryteriach
  - w pierwszym przykładzie będziemy oceniać kandydatów na podstawie 3 kryteriów: oceny z matematyki, fizyki i j.angielskiego

Uwaga: w takim przypadku kryteria mają identyczne przedziały zmienności – bo są to oceny, np. ze świadectwa – ale wiemy, że w ogólności kryteria mają różne jednostki i przedziały zmienności

# Metoda ELECTRE TRI – przykład cd.

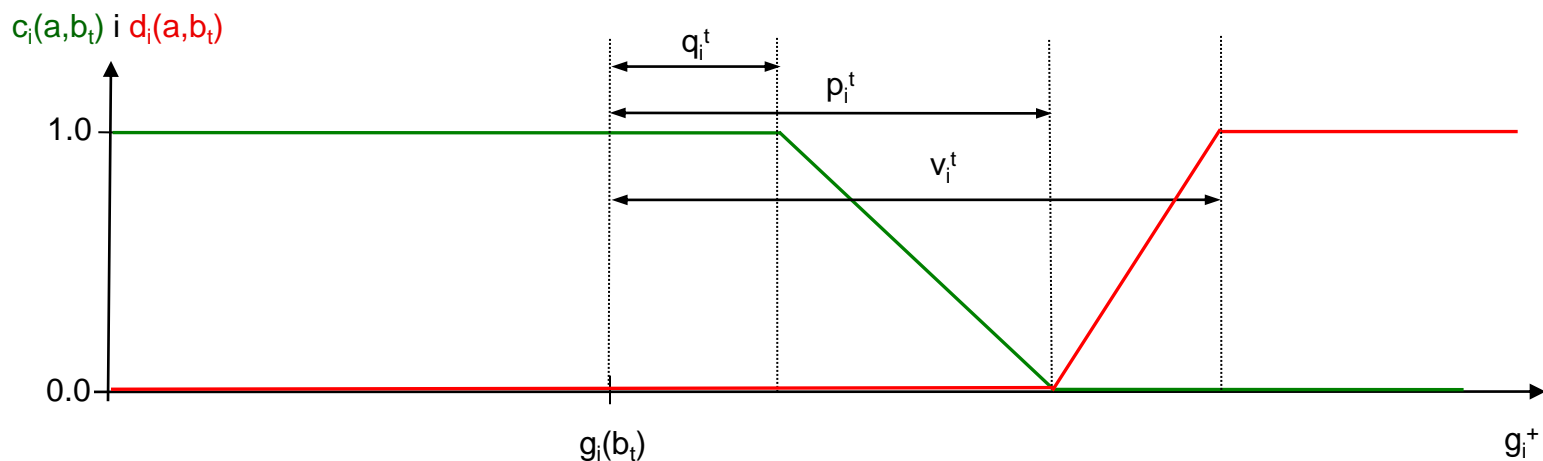
- Definiowanie klas (przykład sortowania kandydatów)
  - każdy wariant ma być przydzielony do jednej z trzech klas
    - $C_1$ : „odrzuceni”,  $C_2$ : „do rozstrzygnięcia”,  $C_3$ : „przyjęci”
  - rolę kryteriów pełnią np. oceny uzyskane w szkole średniej
    - matematyka, fizyka i angielski
  - klasy definiuje się ustalając ich „dolne” granice
    - klasa najwyższa  $C_3$ : aby znaleźć się w klasie „przyjęci” kandydat musi wykazać się przynajmniej następującymi ocenami:
      - „db+” z matematyki, „db” z fizyki, „db” z angielskiego
    - klasa pośrednia  $C_2$ : aby znaleźć się w klasie „do rozstrzygnięcia” kandydat musi wykazać się przynajmniej nast. ocenami:
      - „db” z matematyki, „dst+” z fizyki, „db” z angielskiego
    - klasa najniższa  $C_1$ : zawiera warianty, które nie zostały przydzielone do żadnej z powyższych klas („nieprzyjęci”)

# Metoda ELECTRE TRI – profile

- Powstałe w powyższy sposób granice pomiędzy klasami nazywane są profilami
  - w poprzednim przykładzie wystąpiły dwa profile:
    - $b_1$ : (db, dst+, db) – oddziela klasę  $C_1$  od  $C_2$
    - $b_2$ : (db+, db, db) – oddziela klasę  $C_2$  od  $C_3$
  - specyfikacja profilu bardzo przypomina specyfikację wariantu
    - aby zdefiniować wariant trzeba podać wartości opisujące go na każdym kryterium z osobna
  - i analogicznie:
    - **aby zdefiniować profil trzeba podać wartości opisujące go na każdym kryterium z osobna**
  - oznacza to, że zdefiniowany profil wygląda identycznie jak zwykły wariant (choć nie jest dostępnym wyborem dla decydenta)
  - **można zatem badać istnienie relacji przewyższania między parami: wariant – profil, profil – wariant** (testami zgodności oraz niezgodności – **prawie** identycznie jak w ELECTRE Is)

# Metoda ELECTRE TRI – test niezgodności

- Nowy sposób wyznaczania wartości współczynników niezgodności  $d_i(a, b_t)$  (oraz oczywiście  $d_i(b_t, a)$ ):
  - współczynnik  $d_i$  jest zdefiniowany z wykorzystaniem progów  $p$  i  $v$ 
    - **rozszerzenie w stosunku do ELECTRE Is**
  - przykładowy wykres dla kryterium  $g_i$  typu koszt (!):



- współczynnik zgodności  $c_i$  jest zdefiniowany z wykorzystaniem  $q$  i  $p$ 
  - **identycznie jak w ELECTRE Is**



# Metoda ELECTRE – macierze

- Relacja przewyższania pomiędzy wariantami i profilami
  - podstawową różnicą pomiędzy metodami ELECTRE Is i ELECTRE TRI jest to, że:
    - w ELECTRE Is wykonuje się testy zgodności i niezgodności dla każdej pary wariant – wariant
      - wyniki można więc zamieścić w macierzy kwadratowej o rozmiarach  $m \times m$ , gdzie  $m$  jest liczbą wariantów
    - w ELECTRE TRI wykonuje się testy zgodności i niezgodności dla każdej pary wariant – profil, profil – wariant
      - wyniki trzeba więc zamieścić w dwóch macierzach o rozmiarach:  $m \times p$  i  $p \times m$ , gdzie  $m$  jest liczbą wariantów a  $p$  liczbą profili

**Uwaga:** różnica dotyczy też samej definicji relacji przewyższania, która w metodzie ELECTRE TRI jest ogólniejsza, chociaż – z technicznego punktu widzenia – można by wykorzystać dowolną definicję relacji przewyższania, także tę wykorzystywaną w ELECTRE Is

# Metoda ELECTRE TRI – agregacja

- Uogólnienie definicji relacji przewyższania
  - w ELECTRE TRI uogólniono metodę ustalania relacji przewyższania w ten sposób, że składające się na definicję tej relacji współczynniki  $d_i(a,b)$  mogą przyjmować wartości z przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ 
    - w ELECTRE Is przyjmowały one wartości ze zbioru  $\{0, 1\}$
  - uogólnienie to wymaga innej formy agregowania współczynników  $d_i(a,b)$  (a tym samym określania relacji  $aSb$ )
    - w ELECTRE Is odbywało się to z wykorzystaniem zagregowanego współczynnika  $D(a,b)$
  - w ELECTRE TRI współczynnik **wiarygodności przewyższania**  $\sigma(a,b)$  – będący odpowiednikiem  $S(a,b)$  z ELECTRE Is – zależy od  $C(a,b)$  i od współczynników  $d_i(a,b)$
  - cząstkowe współczynniki niezgodności  $d_i(a,b)$  (czasami też zapisywane jako  $D_i(a,b)$ ) są bezpośrednio agregowane do  $\sigma(a,b)$ , a nie do  $D(a,b)$  (wartości  $D(a,b)$  w ogóle się nie oblicza!)

# Metoda ELECTRE TRI – agregacja cd.

- Uogólnienie definicji relacji przewyższania, cd.
  - wzór definiujący współczynnik wiarygodności przewyższania  $\sigma(a,b)$ :

$$\sigma(a,b) = C(a,b) \cdot \left( \prod_{i: d_i(a,b) > C(a,b)} \frac{1 - d_i(a,b)}{1 - C(a,b)} \right)$$

- **uwaga:** „ $i: d_i(a,b) > C(a,b)$ ” oznacza, że iloczyn ilorazów w powyższym wzorze jest budowany tylko dla tych współczynników  $d_i(a,b)$ , które mają wartość większą niż  $C(a,b)$
- zbudowane w ten sposób ilorazy są liczbami mniejszymi od 1 (dlaczego?), w rezultacie wartość  $\sigma(a,b)$  zostaje odpowiednio pomniejszona
- jeżeli na którymkolwiek kryterium współczynnik niezgodności  $d_i(a,b)=1$ , to znajdzie veto i współczynnik  $\sigma(a,b)$  przyjmie wartość 0 (dlaczego?)
- na podstawie obliczonego współczynnika  $\sigma(a,b)$  oraz progu odcięcia  $\lambda$  zachodzenie relacji przewyższania S określa się następująco:
  - $aSb$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\sigma(a,b) \geq \lambda$
  - $\neg aSb$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\sigma(a,b) < \lambda$

# Metoda ELECTRE TRI – oznaczenia

- W ogólności stosuje się oznaczenia

- $p+1$  klas:  $C_1, C_2, \dots, C_{p+1}$

- $C_1$ : klasa najgorsza
- $C_{p+1}$ : klasa najlepsza

- $p$  profili:  $b_1, b_2, \dots, b_p$

- $b_1$ : oddziela klasę  $C_1$  od  $C_2$
- $b_2$ : oddziela klasę  $C_2$  od  $C_3$
- itd., ogólnie:
- $b_t$ : oddziela klasę  $C_t$  od  $C_{t+1}$

**(jest istotne, że liczba klas jest większa o jeden od liczby profili**

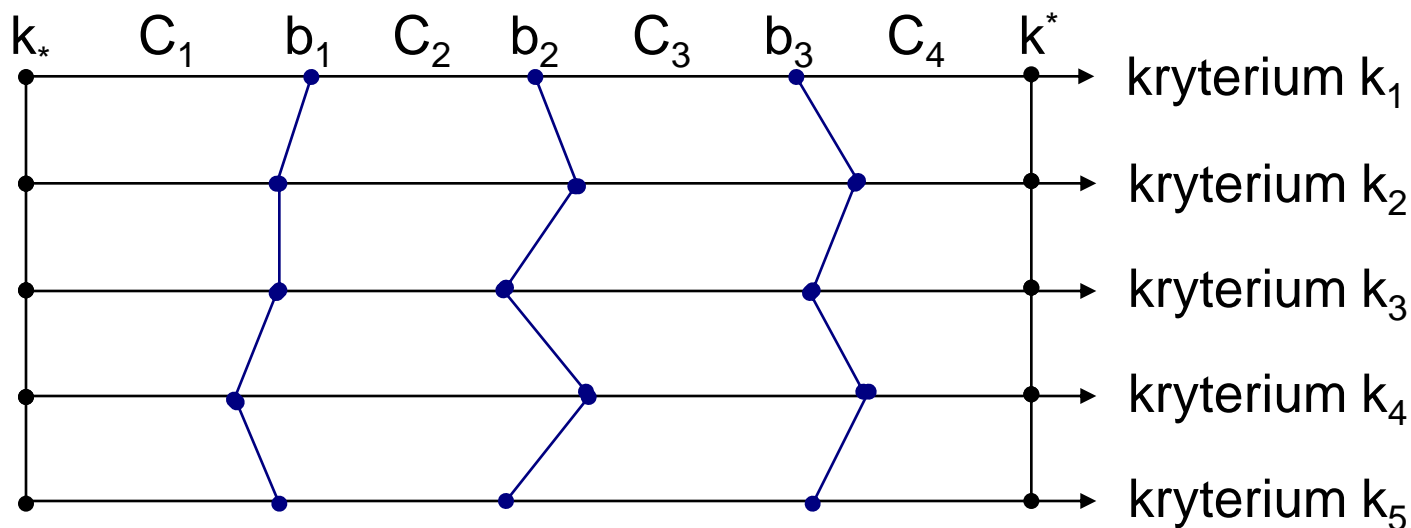
uwaga: ilustracja zamieszczona w mat. wykładowych wprowadza zbędny profil skrajnie prawy – nie definiuje się go w naszym software!)

- konsekwencją takiego oznaczenia jest to, że:

- klasa  $C_1$  jest ograniczona wartościami najgorszymi i profilem  $b_1$
- każda z klas  $C_2, C_3, \dots, C_p$  jest ograniczona dwoma profilami
- klasa  $C_{p+1}$  jest ograniczona profilem  $b_p$  i wartościami najlepszymi

# Metoda ELECTRE TRI – ilustracja

- Schemat demonstrujący klasy i profile
  - założmy istnienie czterech klas:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$  oddzielonych od siebie trzema profilami  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  na pięciu kryteriach  $k_1, k_2, k_3, k_4$  i  $k_5$

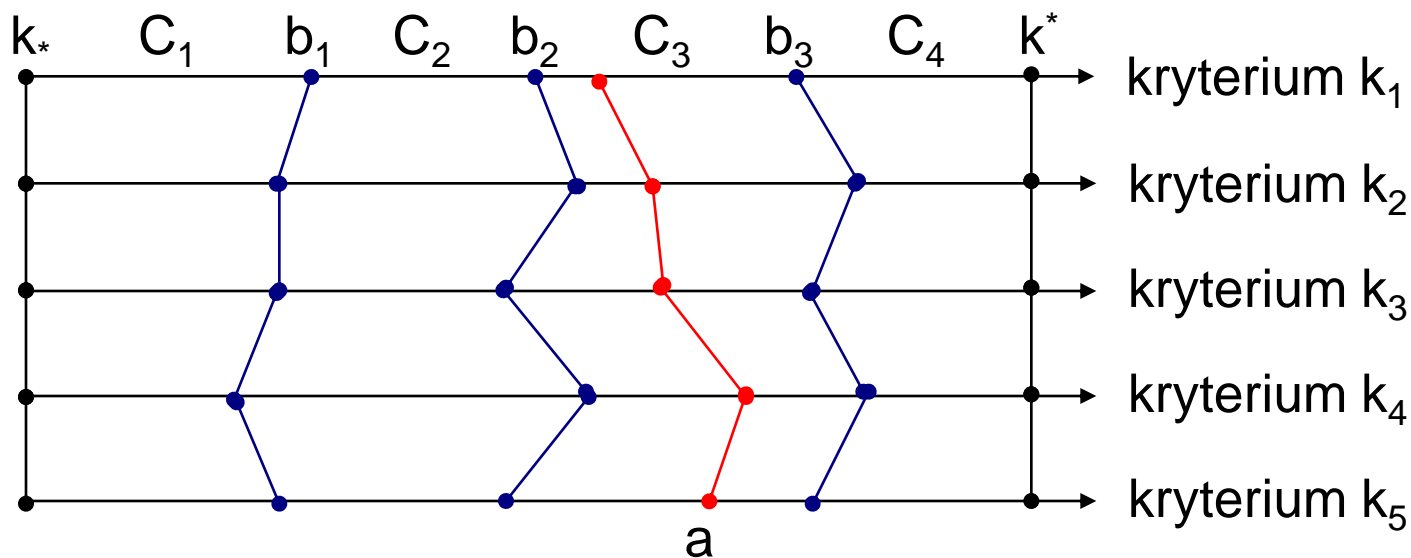


**Uwaga:** Schemat ten abstrahuje od typu kryterium dzięki temu, że najmniej korzystne wartości (oznaczenie:  $k_*$ ) danego kryterium przedstawiono z lewej, a najbardziej korzystne (oznaczenie:  $k^*$ ) z prawej strony

**czyli kryteria **kosztowe** mają na osiach wartości ustawione **malejąco!****

# Metoda ELECTRE TRI – ilustracja cd.

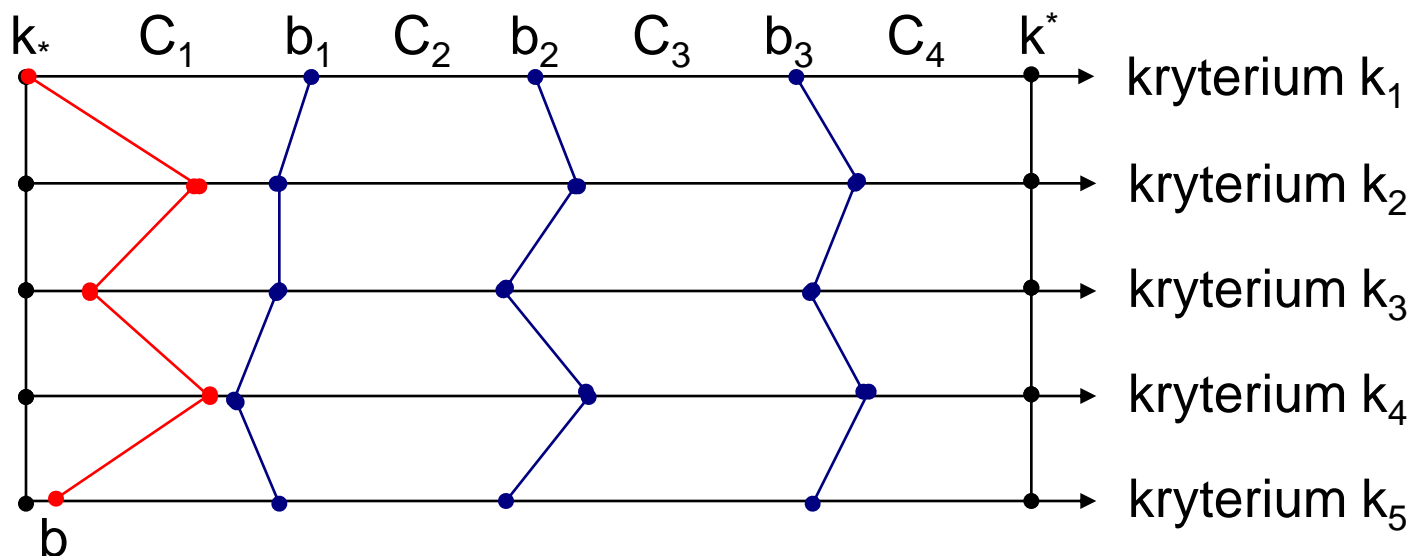
- Działanie metody ELECTRE TRI
  - działanie to polega na porównywaniu ze sobą profili i wariantów
    - zadanie: przydziel wariant a do odpowiedniej klasy



- rozwiązanie: wariant a powinien zostać przydzielony do klasy  $C_3$ , na co wyraźnie wskazuje jego „położenie” pomiędzy profilami  $b_2$  a  $b_3$

# Metoda ELECTRE TRI – ilustracja cd.

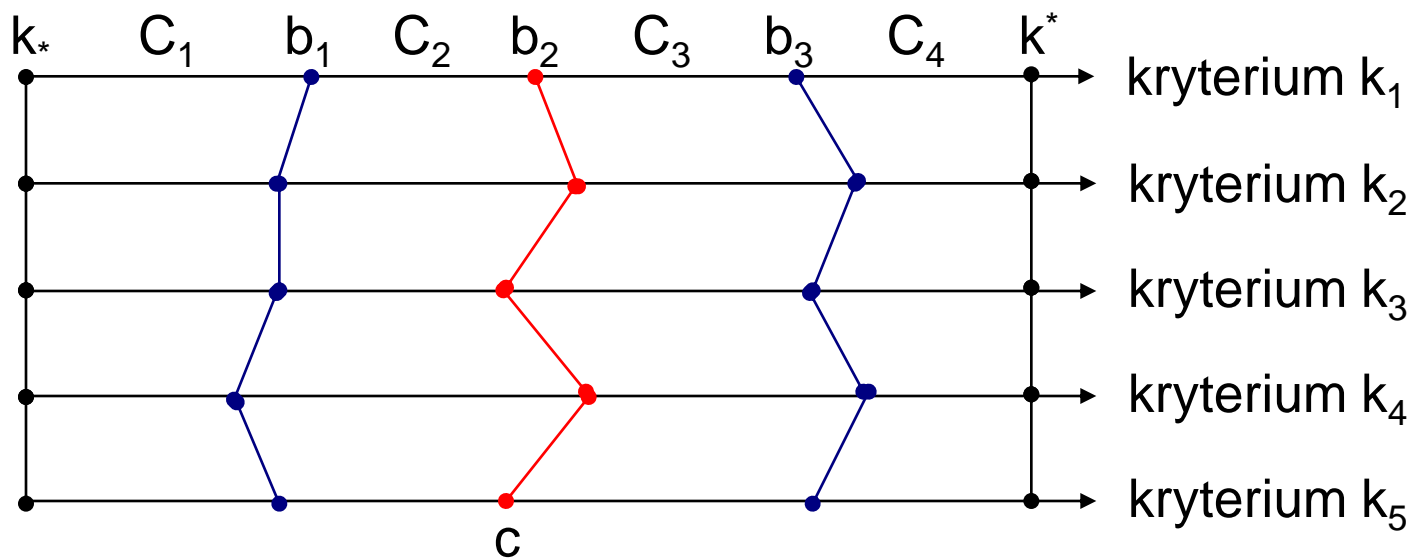
- Działanie metody ELECTRE TRI, cd.
  - sytuacja analogiczna do poprzedniej:
    - zadanie: przydziel wariant b do odpowiedniej klasy



- rozwiązanie: wariant  $b$  powinien zostać przydzielony do klasy  $C_1$ , na co wyraźnie wskazuje jego „położenie na lewo” od profilu  $b_1$

# Metoda ELECTRE TRI – ilustracja cd.

- Działanie metody ELECTRE TRI, cd.
  - sytuacja trudniejsza:
    - zadanie: przydziel wariant c do odpowiedniej klasy

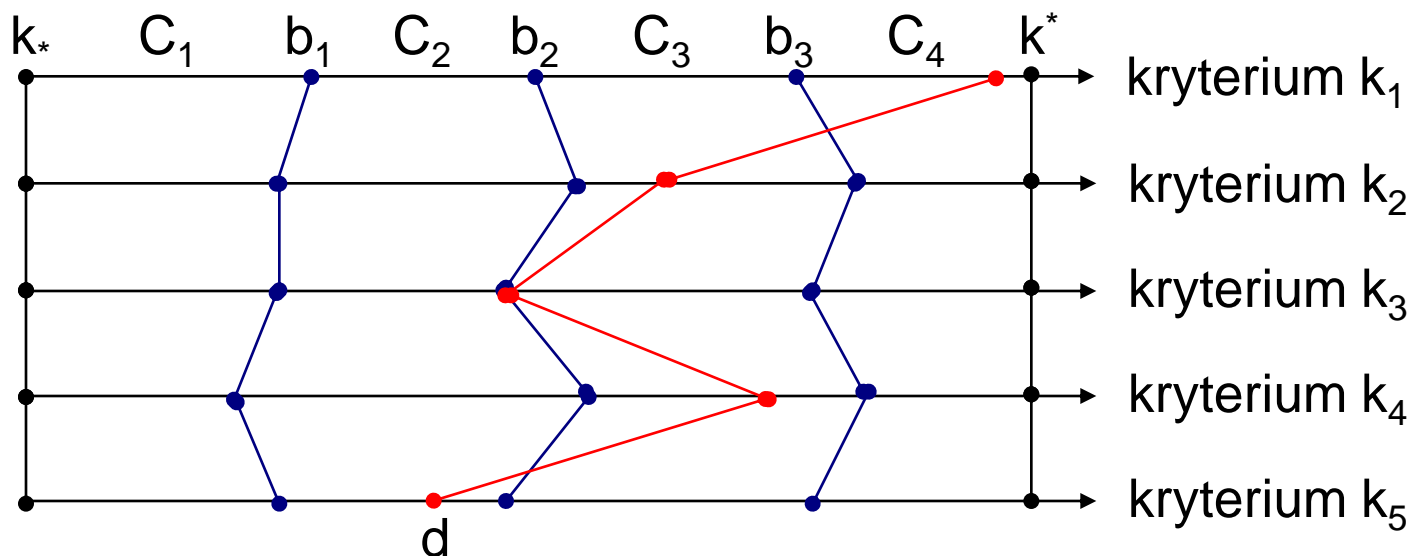


- wariant c charakteryzuje się takimi wartościami jak profil  $b_2$ ; powstaje pytanie: do której klasy powinien być przydzielony?



# Metoda ELECTRE TRI – ilustracja cd.

- Działanie metody ELECTRE TRI, cd.
  - sytuacja jeszcze trudniejsza:
    - zadanie: przydziel wariant d do odpowiedniej klasy



- wariant d charakteryzuje się wartościami przynależącymi do różnych klas; pytanie: do której powinien być przydzielony?
- by to orzec trzeba wziąć pod uwagę wagi kryteriów i szerokości progów

# Metoda ELECTRE TRI – schemat postępowania

- Formalny schemat postępowania implementowany w metodzie ELECTRE TRI
  - porównywanie wariantów z profilami przyjmuje formę poszukiwania relacji pomiędzy wariantami a profilami
  - poszukiwanymi ostatecznymi relacjami są rozważane wcześniej (patrz: prezentacja ELECTRE Is – slajd 11):
    - preferencja ( $P, \succ$ )
    - nierozróżnialność ( $I, \sim$ )
    - nieporównywalność ( $R, ?$ )
  - na podstawie wyznaczonych relacji występujących między wariantami a profilami określa się przydział wariantów do odpowiednich klas

# Metoda ELECTRE TRI – relacje

- Wzajemne położenia wariantów i profili na schemacie oraz występowanie konkretnych relacji jest ze sobą w pewien sposób powiązane – w dużym uproszczeniu:
  - stwierdzenie, że pomiędzy wariantem  $x$  a profilem  $b_t$  zachodzi relacja  $P$  w postaci  $xPb_t$  oznacza, że wariant jest preferowany od profilu (wariant „leży na prawo” od profilu)
  - stwierdzenie, że pomiędzy wariantem  $x$  a profilem  $b_t$  zachodzi relacja  $P$  w postaci  $b_tPx$  oznacza, że profil jest preferowany od wariantu (wariant „leży na lewo” od profilu)
  - stwierdzenie, że pomiędzy wariantem  $x$  a profilem  $b_t$  zachodzi relacja  $I$  (tzn.  $xIb_t$ , równoważne z  $b_tIx$ ) oznacza, że wariant jest nierozróżnialny z profilem (wariant „leży blisko lub na” profilu)
  - stwierdzenie, że pomiędzy wariantem  $x$  a profilem  $b_t$  zachodzi relacja  $R$  (tzn.  $xRb_t$ , równoważne z  $b_tRx$ ) oznacza, że wariant jest nieporównywalny z profilem (wariant „przecina” profil)

# Metoda ELECTRE TRI – relacje cd.

- Specyfika zapisywania relacji w metodzie ELECTRE TRI
  - macierze przechowujące relacje są prostokątne (a tym samym niesymetryczne), przy czym wiersze tych macierzy reprezentują warianty, a kolumny – profile
  - przykładowa poniższa macierz przedstawia relacje pomiędzy wariantami  $x$  i  $y$  a profilami  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$x$	P	R	R
$y$	P	I	???

– relacje dla wariantu  $x$

$xPb_1$ ,  $xRb_2$ ,  $xRb_3$

– relacje dla wariantu  $y$

$yPb_1$ ,  $ylb_2$ ,  $b_3Py$

- powstaje pytanie, jak w tej macierzy zapisać informację, że profil jest preferowany nad wariant (a nie wariant nad profil) – przykładowo relacja ta zachodzi pomiędzy profilem  $b_3$  a wariantem  $y$ 
  - uwaga: wpisanie P oznaczałoby zachodzenie relacji  $yPb_3$  a nie  $b_3Py$ !
  - dlatego stosowaliśmy czasami trochę niewygodne oznaczenie  $P^{-1}$  lub  $P^-$

# Metoda ELECTRE TRI – relacje cd.

- Warto stosować alternatywne oznaczenia ( $\succ$ ,  $\sim$ ,  $?$ )
  - każdy z trzech poniższych (równoważnych sobie) zapisów  
 $aPb$     $a>b$     $b<a$   
oznacza, że  $a$  jest preferowane nad  $b$
  - macierz wypełniona z użyciem alternatywnych oznaczeń:

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$x$	$\succ$	$?$	$?$
$y$	$\succ$	$\sim$	$\prec$

- relacje dla wariantu  $x$   
 $xPb_1, xRb_2, xRb_3$ , inaczej:  $x>b_1, x?b_2, x?b_3$
- relacje dla wariantu  $y$   
 $yPb_1, yIb_2, b_3Py$ , inaczej:  $y>b_1, y\sim b_2, y<b_3$

# Metoda ELECTRE TRI – sortowanie wariantów

- Sortowanie wariantów – podejście intuicyjne
  - po ustaleniu relacji pomiędzy wariantami a profilami przydział wariantów do klas jest intuicyjnie jasny w wielu przypadkach (ale nie wszystkich)

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
a	$\succ$	$\succ$	$\prec$
b	$\succ$	$\succ$	$\succ$
c	$\prec$	$\prec$	$\prec$
d	$\succ$	$\sim$	$\prec$
e	$\succ$	$\succ$	?
f	?	?	?

→ klasa  $C_3$  (a „leży” pomiędzy  $b_2$  i  $b_3$ )

→ klasa  $C_4$  (b „leży” na prawo od  $b_3$ )

→ klasa  $C_1$  (c „leży” na lewo od  $b_1$ )

→ klasa  $C_3$  (d „leży” na profilu  $b_2$ )

→ klasa  $C_3$  albo  $C_4$  (e „przecina” profil  $b_3$ )

→ klasa  $C_1, C_2, C_3$  albo  $C_4$   
(f „przecina” wszystkie profile)

# Metoda ELECTRE TRI – sortowanie wariantów

- Sortowanie wariantów – podejście formalne
  - formalny system przydzielania wariantów do klas jednoznacznie rozwiązuje (możliwe do rozwiązania) sytuacje konfliktowe wynikające z niejasności wnoszonych przez zachodzące relacje
    - relacja preferencji nie wnosi żadnych niejasności
    - relacja nierozróżnialności wnosi łatwe do wyjaśnienia niejasności
      - istota niejasności: co robić z wariantem, który jest nierozróżnialny z  $b_t$ ?
      - rozwiązanie: wariant nierozróżnialny z  $b_t$  można traktować jak identyczny z  $b_t$  (dzięki tolerancji implikowanej na etapie definiowania relacji S przez progi nierozróżnialności  $q_i$ ), a wariant identyczny z  $b_t$  należy przydzielać do klasy  $C_{t+1}$  (co wynika z definicji klasy/profilu)
        - » przypomnienie: np. klasę  $C_4$  definiuje się tak, aby przydzielone do niej zostały warianty charakteryzujące się wartościami co najmniej następującymi: (i tu wymienia się wartości stanowiące definicją profilu  $b_3$ )
    - relacja nieporównywalności wnosi niejasności, których nie rozwiązuje się jednoznacznie w metodzie ELECTRE TRI

# Metoda ELECTRE TRI – sortowanie wariantów

- Sortowanie wariantów – podejście formalne cd.
  - występowanie **nieporównywalności** pomiędzy wariantem a profilem  $b_t$  oznacza, że **istniejące dane nie pozwalają na jednoznaczne zadecydowanie, czy wariant ten powinien być przydzielony do klasy  $C_t$  czy do  $C_{t+1}$** 
    - im więcej nieporównywalności tym większa niepewność przydziału
  - aby dać temu wyraz, metoda implementuje dwie różne procedury
    - **procedurę pesymistyczną przydziału**
    - **procedurę optymistyczną przydziału**
  - obowiązuje zasada: **procedura optymistyczna nigdy nie przydziela do klas niższych niż procedura pesymistyczna!**
    - jeżeli tak jest, to prawdopodobnie błędnie zdefiniowano klasy/profile, a jeszcze bardziej prawdopodobnie – „ręcznie” dokonano błędnego przydziału
  - gdy wynikowe przydziały się różnią, ostateczną decyzję o przydziale musi dokonać decydent (niezgodność taka sygnalizuje występowanie pewnych niejednoznaczności)



# Metoda ELECTRE TRI – sortowanie wariantów

- Definicje procedur przydziału

- **Procedura pesymistyczna**

By przydzielić wariant  $x$  do jednej z  $p+1$  klas wykonuj:

**Dla  $t =$  kolejno  $p, p-1, \dots, 1$**  określ relację pomiędzy  $x$  i profilem  $b_t$   
jeżeli relacją tą jest  $>$  lub  $\sim$ , to przydziel wariant  $x$  do klasy  $C_{t+1}$   
Jeżeli nigdzie nie wystąpiła relacja  $>$  ani  $\sim$ , to przydziel  $x$  do  $C_1$

- **Procedura optymistyczna**

By przydzielić wariant  $x$  do jednej z  $p+1$  klas wykonuj:

**Dla  $t =$  kolejno  $1, 2, \dots, p$**  określ relację pomiędzy  $x$  i profilem  $b_t$   
jeżeli relacją tą jest  $<$ , to przydziel wariant  $x$  do klasy  $C_t$   
Jeżeli nigdzie nie wystąpiła relacja  $<$ , to przydziel  $x$  do  $C_{p+1}$

# Metoda ELECTRE TRI – rozwiązanie

- Przykładowe przydziały dokonane przez procedury – pesymistyczną i optymistyczną

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	<b>Pes</b>	<b>Opt</b>
a	$\succ$	$\succ$	$\prec$	$C_3$	$C_3$
b	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$C_4$	$C_4$
c	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$C_1$	$C_1$
d	$\succ$	$\sim$	$\prec$	$C_3$	$C_3$
e	$\succ$	$\succ$	?	$C_3$	$C_4$
f	?	?	?	$C_1$	$C_4$

Uwaga: przydzielamy warianty **do klas  $C_t$**  – nigdy do profili!