Metoda graficzna

W celu zilustrowania rozwiązania problemu liniowego, dla dwóch zmiennych można posłużyć się metodą graficzną. Polega ona na rozrysowaniu ograniczeń i funkcji celu na płaszczyźnie i odczytania z rysunku punktu optymalnego.

Przykład: Rozwiąż następujący problem PL:

$$\max z = x + y$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & x - y \geq -3 \\ & 3x + y \leq 5 \\ & x \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Rysujemy dla każdego ograniczenia prostą odpowiadającą nierówności, np. 3x + y = 5 i wykreślamy tą prostą na wykresie. Aby sprawdzić, po której stronie prostej jest spełniona nierówność, bierzemy dowolny punkt nie należący do prostej (zwykle jest to początek układu współrzędnych, tj. punkt (0,0)), a następnie sprawdzamy czy spełnia on nierówność czy nie. Jeśli spełnia – to nierówność jest spełniona po tej samej stronie co punkt, jeśli nie – po przeciwnej.

Wykreślając wszystkie nierówność bierzemy część wspólną wszystkich obszarów i to jest nasz obszar dopuszczalny. Następnie trzeba przeanalizować, jak zachowuje się funkcja celu z. Najlepiej zrobić to, rozwiązując równanie z = 0, w tym wypadku x + y –0. Wtedy otrzymuje prostą ze stałą wartością z (równą 0). Aby zobaczyć, w którą stronę z wzrasta (maleje), można wykreślić drugą prostą dla z= 1 i zobaczyć, czy będzie ona nad pierwszą prostą czy pod nią. Innym sposobem jest narysowanie wektora współczynników (w tym wypadku [1,1]) w punkcie (0,0) – określa on kierunek wzrostu funkcji celu.

Dalej, przesuwamy się funkcją celu równolegle, biorą maksymalny (lub minimalny) możliwy punkt obszaru dopuszczalnego. To jest nasze rozwiązanie. Zawsze powinien to być punkt wierzchołkowy obszaru dopuszczalnego albo cała krawędź albo wartość nieskończona (jeśli obszar dopuszczalny jest nieograniczony).

Przykład: Rozwiąż problem PL:

$$\min z = -x - y$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & 4x - y \leq 8 \\ & 2x + y \leq 10 \\ & -5x + 2y \leq 2 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Przykład: Rozwiąż problem PL:

$$\max z = 3x + y$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & 2x + y \leq 2 \\ & x + 2y \leq 2 \\ & x \geq 3 \\ & x1, x2 \geq 0 \end{aligned}$$

Przykład: Rozwiąż problem PL:

$$\max z = \tfrac{1}{2} x1 + x2$$

$$
\begin{aligned}
\text{p.o.}\quad & -x1 + 2x2 \le 6 \\
& -2\,x1 + x2 \ge -6 \\
& x1 + x2 \ge 3 \\
& x1,\ x2 \ge 0
\end{aligned}
$$

<u>Przykład:</u> Rozwiąż problem PL:

$$
\begin{aligned}
& \min z = x + 2y \\
\text{p.o.}\quad & 3x + 2y \le 18 \\
& x + y \ge 5 \\
& 3x - 4y \ge 0 \\
& x \le 4
\end{aligned}
$$

<u>Przykład:</u> Rozwiąż problem PL:

$$
\begin{aligned}
& \max z = 5x1 + x2 \\
\text{p.o.}\quad & x1 - 4x2 \le 4 \\
& x1 + 2x2 \le 10 \\
& x1,\ x2 \le 0
\end{aligned}
$$

<u>Przykład:</u> Rozwiąż problem PL:

$$
\begin{aligned}
& \max z = 3x + y \\
\text{p.o.}\quad & x + y \ge 6 \\
& 2x + y \ge 10 \\
& x - y \ge -3 \\
& x1,\ y \ge 0
\end{aligned}
$$