

Kolokwium zaliczeniowe z ćwiczeń do przedmiotu
Metody probabilistyczne i statystyka
21 stycznia 2022 roku

Zestaw 1

- 1 (2 pkt.). W urnie znajdują się kartki oznaczone liczbami 12, 13, 14, 15, 18, 25 i 30. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 5.
- 2 (3 pkt.). Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawia się następująco: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III 17 studentek i 5 studentów. Z trzech list, z których każda jest listą jednej z wymienionych grup, losowano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że należy ona do grupy III.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa skokowa podlega rozkładowi danemu w następującej tabelicy:

x_k	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe.

- 4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano pięciu niezależnych pomiarów i otrzymano wyniki (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych): $4,781 \cdot 10^{-10}$; $4,795 \cdot 10^{-10}$; $4,769 \cdot 10^{-10}$; $4,792 \cdot 10^{-10}$; $4,779 \cdot 10^{-10}$. Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,95, zakładając, że wynik pomiaru jest obciążony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 2

- 1 (2 pkt.). Mamy dwie urny: urnę A zawierającą 2 białe i 8 czarnych kul i urnę B z 4 białymi i 6 czarnymi kulami. Losujemy jedną kulę z urny A oraz jedną kulę z urny B . Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna kula będzie biała.
- 2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 500 ludzi dokładnie 2 osoby będą miały urodziny w dniu Nowego Roku.
- 3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości C funkcja

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Obliczyć $P(1 \leq X \leq 4)$.

- 4 (3 pkt.). W celu wyznaczenia błędu standardowego pewnego przyrządu pomiarowego (odchylenia standardowego tego przyrządu) dokonano sześciu pomiarów pewnej wielkości i otrzymano wyniki: 8,15; 8,20; 8,04; 8,14; 8,22; 8,11. Oszacować wariancję wskazań przyrządu i wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego tego przyrządu przy poziomie ufności 0,95.

Zestaw 3

- 1 (2 pkt.). Mamy 4 urny typu *A* zawierające 7 białych i 3 czarne kule oraz 16 urn typu *B* o składzie: 4 białe i 6 czarnych kul. Losujemy jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy kulę białą.
- 2 (2 pkt.). Trzy fabryki produkują ten sam towar. Pierwsza fabryka zaopatruje rynek w 50%, a druga w 30%. Średni procent braków w produkcji pierwszej fabryki wynosi 3%, drugiej fabryki 4%, a trzeciej 5%. Kupiono sztukę towaru, która okazała się brakiem. Z której fabryki jest najbardziej prawdopodobny zakup tego braku?
- 3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości *a* funkcja

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

jest gęstością prawdopodobieństwa. Obliczyć $P(X < 1)$.

- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 100 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 100 metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0,95$.

Zestaw 4

- 1 (2 pkt.). W urnie znajdują się 4 kule białe, 3 czarne i 5 zielonych. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania białej lub czarnej kuli
- 2 (3 pkt.). Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawia się następująco: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III 17 studentek i 5 studentów. Z listy zawierającej alfabetyczny spis całego roku wybrano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrana studentka należy do grupy III.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa skokowa X podlega rozkładowi danemu w tabelicy

x_k	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Obliczyć wartość oczekiwaną, modę, medianę i wariancję.

4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 100 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 100 metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0,95$.

Zestaw 5

- 1 (2 pkt.). Pobieramy losowo dwie karty z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jedna karta będzie koloru czerwonego, a druga czarnego?
- 2 (2 pkt.). W urnie znajduje się 25 kul białych i 45 kul czarnych. Losujemy 20 razy według schematu Pólya dodając po każdym losowaniu 2 kule odpowiedniego koloru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 7 razy kulę białą.
- 3 (3 pkt.). Zmienna losowa X przyjmuje wartości $-2, 2, 3$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$ oraz obliczyć wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe, medianę i modę zmiennej losowej Y .
- 4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano sześciu niezależnych pomiarów. Otrzymano następujące wyniki: $4,783 \cdot 10^{-10}$; $4,781 \cdot 10^{-10}$; $4,795 \cdot 10^{-10}$; $4,769 \cdot 10^{-10}$; $4,792 \cdot 10^{-10}$; $4,779 \cdot 10^{-10}$ (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych). Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,95, zakładając, że wynik pomiaru jest obciążony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 6

- 1 (2 pkt.). Z talii 52 kart wyciągnięto losowo dwa razy po jednej karcie i, nie oglądając ich, włożono do drugiej takiej samej talii, po czym karty potasowano. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania asa z tak utworzonego zbioru 54 kart.
- 2 (3 pkt.). W urnie znajduje się 6 kul białych i 14 czarnych. Losujemy 5 razy po trzy kule jednocześnie, zwracając je po każdym takim losowaniu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwa razy otrzymamy wśród takich trójek wylosowanych kul jedną kulę białą.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\infty < x < 1, \\ \frac{1}{4}x & \text{dla } 1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{dla } 3 < x < \infty. \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę oraz obliczyć $P(1,4 \leq X \leq 2)$.

4 (3 pkt.). Przeprowadzono 15 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,95.

Zestaw 7

1 (3 pkt.). W urnie są kule ponumerowane od 1 do 5. Losujemy z urny dwie kule bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tych kolejnych losowaniach numer pierwszej kuli będzie większy od numeru drugiej kuli.

2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w serii 1000 wyprodukowanych igieł znajdą się co najmniej 2 braku, jeżeli wiadomo, że przeciętny procent braków wynosi 4 promile.

3 (2 pkt.). Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\infty < x \leq 0, \\ x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

4 (3 pkt.). Przeprowadzono 15 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,99.

Zestaw 8

1 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzynastka kart wylosowana jednocześnie z talii 52 kart składa się z pięciu pików, czterech kierów, trzech kar i jednego trefla.

2 (3 pkt.). W urnie są 4 kule białe i 8 kul czarnych. Losujemy 4 razy po 5 kul i po każdym wylosowaniu piątki kul wrzucamy je do urny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że 2 razy wylosujemy piątkę takich kul, wśród których będą 3 kule czarne.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(2, 5)$. Obliczyć $P(|X + 2| > 10)$.

- 4 (3 pkt.). W celu wyznaczenia błędu standardowego pewnego przyrządu pomiarowego (odchylenia standardowego tego przyrządu) dokonano pięciu pomiarów pewnej wielkości i otrzymano wyniki: 8,15; 8,20; 8,04; 8,14; 8,22. Oszacować wariancję wskaźników przyrządu i wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego tego przyrządu przy poziomie ufności 0,90.

Zestaw 9

- 1 (2 pkt.). Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wartość bezwzględna różnicy liczby oczek nie będzie przekraczać liczby 2 (napisać wszystkie sprzyjające przypadki).
- 2 (2 pkt.). Dwaj gracze posiadający jednakowe zdolności do gry w szachy mają rozegrać 10 partii. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jeden z nich wygra 3 razy.
- 3 (3 pkt.). Zmienna losowa podlega rozkładowi $N(3, 4)$. Wyznaczyć wartość k tak, aby $P(|X - 3| \geq 4k) = 0,2$.
- 4 (3 pkt.). Z dużej partii słupków betonowych wybrano próbkę losową o liczebności 50 sztuk. Średnia wytrzymałość na ściskanie osiowe obliczona w tej próbce wyniosła 248,31 (w kG/cm^2), a odchylenie standardowe 2 (też w kG/cm^2). Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny oszacować wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej za pomocą przedziału ufności na poziomie ufności 0,95.

Zestaw 10

- 1 (2 pkt.). Z talii 32 kart losujemy dwa razy po jednej karcie (losowanie bezzwrotne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna z tych kart będzie waletem?
- 2 (3 pkt.). Rzucamy kostką 20 razy. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę rzutów, w których pojawi się „piątka”.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(2, 5)$. Obliczyć $P(X > 10)$.
- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 50 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 50 metrów kwadratowych wynoszący 16,35 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,051$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0,95$.

Zestaw 11

- 1 (3 pkt.). Zapotrzebowanie rynku na ubiory ochronne pokrywają trzy fabryki: fabryka A w 45%, B w 20% i C w 35%. Jakość produkcji kształtuje się następująco: fabryka A – I gatunku 80%, II gatunku 15%, III gatunku 5%, w fabryce B – I gatunku 65%, II gatunku 25%, III gatunku 10%, w fabryce C – I gatunku 85%, II gatunku 12% i III gatunku 3%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kupione na rynku dwa ubiory będą I gatunku.

- 2 (2 pkt.). Rzucamy pięć razy dwiema monetami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwukrotnie otrzymamy na obu monetach orły.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\infty < x < 2, \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } 2 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{dla } 4 < x < \infty. \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę oraz obliczyć $P(2,4 \leq X \leq 3)$.

- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 100 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 100 metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0,99$.

Zestaw 12

- 1 (2 pkt.). Z talii 32 kart losujemy bez zwrotu 6 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna z nich przedstawia dziesiątkę?
- 2 (3 pkt.). Mamy 2 urny typu B zawierające 3 białe i 7 czarnych kul oraz 8 urn typu A zawierające po 4 kule białe i 8 czarnych. Losowano 4 razy po jednej kuli ze zwracaniem. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę kul białych i prawdopodobieństwo wylosowania tej liczby kul.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(2, 5)$. Obliczyć $P(|X - 2| < 10)$.
- 4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano pięciu niezależnych pomiarów i otrzymano wyniki (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych): $4,781 \cdot 10^{-10}$; $4,795 \cdot 10^{-10}$; $4,769 \cdot 10^{-10}$; $4,792 \cdot 10^{-10}$; $4,779 \cdot 10^{-10}$. Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,99, zakładając, że wynik pomiaru jest obciążony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 13

- 1 (2 pkt.). Urna zawiera 5 kul białych i 4 kule czarne. Losujemy trzy razy, zwracając kulę za każdym razem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane kule będą czarne.
- 2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w paczce igieł zawierających 1000 sztuk znajdują się co najwyżej 2 igły wybrakowane, jeżeli wiadomo, że przeciętna liczba braków wynosi 3 promile.

3 (3 pkt.). Czy funkcja $f(x)$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Jeśli tak, to obliczyć $P\left(1 \leq X \leq \frac{1}{2}\pi\right)$.

4 (3 pkt.). Przeprowadzono 10 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,99.

Zestaw 14

1 (3 pkt.). Zapotrzebowanie rynku na ubiory ochronne pokrywają trzy fabryki: fabryka A w 45%, B w 20% i C w 35%. Jakość produkcji kształtuje się następująco: fabryka A – I gatunku 80%, II gatunku 15%, III gatunku 5%, w fabryce B – I gatunku 65%, II gatunku 25%, III gatunku 10%, w fabryce C – I gatunku 85%, II gatunku 12% i III gatunku 3%. Obliczyć prawdopodobieństwo zakupu na rynku ubioru poniżej I gatunku.

2 (2 pkt.). Prawdopodobieństwo celnego pojedynczego strzału wynosi 0,25. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w co najwyżej trzech strzałach cel zostanie trafiony dwa razy

3 (2 pkt.). Zmienna losowa podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\infty < x < 0, \\ \cos x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{2}\pi < x < \infty. \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę oraz obliczyć $P\left(\frac{1}{3}\pi \leq X \leq \frac{1}{2}\pi\right)$.

4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w n wylotowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych n metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Jaka powinna być liczebność próbki (wartość n), aby na poziomie ufności $Q = 0,95$ przedział ufności był nie dłuższy niż 0,01 (przedział ten określa plon w kg/m^2).

Zestaw 15

1 (2 pkt.). Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma oczek nie przekracza 4 przy założeniu, że wartość bezwzględna różnicy nie przekracza 2.

- 2 (2 pkt.). Jeżeli prawdopodobieństwo trafienia do celu jest równe 0,2 i oddano sześć strzałów, to jakie jest prawdopodobieństwo, że cel został trafiony co najmniej dwa razy?
- 3 (3 pkt.). Zmienna losowa podlega rozkładowi $N(4, 5)$. Wyznaczyć wartość k tak, aby $P(|X - 4| \geq 5k) = 0,1$.
- 4 (3 pkt.). Z dużej partii słupków betonowych wybrano próbkę losową o liczebności 50 sztuk. Średnia wytrzymałość na ściskanie osiowe obliczona w tej próbce wyniosła 248,31 (w kG/cm^2), a odchylenie standardowe 2 (też w kG/cm^2). Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny oszacować wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej za pomocą przedziału ufności na poziomie ufności 0,99.

Zestaw 16

- 1 (2 pkt.). Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na obu kostkach otrzymamy tę samą liczbę oczek.
- 2 (2 pkt.). Dwaj gracze posiadający jednakowe zdolności do gry w szachy mają rozegrać 10 partii. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jeden z nich wygra 5 razy.
- 3 (3 pkt.). Zmienna losowa podlega rozkładowi $N(3, 4)$. Wyznaczyć wartość a tak, aby $P(|X - 3| \geq a) = 0,1$.
- 4 (3 pkt.). Z dużej partii słupków betonowych wybrano próbkę losową o liczebności n sztuk. Średnia wytrzymałość na ściskanie osiowe obliczona w tej próbce wyniosła 248,31 (w kG/cm^2), a odchylenie standardowe 2 (też w kG/cm^2). Jak duża powinna być próbka (wartość n), aby na poziomie ufności 0,99 przedział ufności był krótszy od $0,5 \text{ kG/cm}^2$?

Zestaw 17

- 1 (2 pkt.). Mamy 8 urn typu A i 6 urn typu B . Każda z urn typu A zawiera 4 kule czarne i 5 białych, a każda z urn typu B zawiera 7 kul czarnych i 2 białe. Losujemy urnę i z niej kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania kuli białej.
- 2 (2 pkt.). Prządka obsługuje 1000 wrzecion. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zerwania się nici na jednym z wrzecion w ciągu minuty jest równe 0,004. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu jednej minuty nastąpią zrywy co najwyżej na 3 wrzecionach.
- 3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości C funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 1, \\ \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Obliczyć wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe, modę i medianę.

- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w n wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych n metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi

odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Jaka powinna być liczebność próbki (wartość n), aby na poziomie ufności $Q = 0,99$ przedział ufności był nie dłuższy niż $0,01$ (przedział ten określa plon w kg/m^2).

Zestaw 18

- 1 (2 pkt.). Z talii 52 kart wyjęto losowo kartę i , nie oglądając jej, włożono do drugiej talii 32 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania króla z otrzymanego zbioru kart?
- 2 (3 pkt.). Z urny zawierającej 8 kul białych i 12 kul czarnych losujemy 5 razy po dwie kule tak, że po każdym wylosowaniu 2 kul zwracamy je do urny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzy razy wylosujemy parę kul różnych kolorów.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\infty < x < 0, \\ \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi, \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{2}\pi < x < \infty. \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę oraz obliczyć $P\left(\frac{1}{6}\pi \leq X \leq \frac{1}{3}\pi\right)$.

- 4 (3 pkt.). Badano zużycie węgla na wyprodukowanie 1 kWh w pewnej siłowni. Dokonano 10 pomiarów. Otrzymano średnią 463 g/kWh i odchylenie standardowe w próbkę równe 30 g/kWh . Oszacować zużycie węgla na 1 kWh i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności $0,95$.

Zestaw 19

- 1 (2 pkt.). W urnie znajdują się 4 kule białe, 3 czarne i 5 zielonych. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania białej lub czarnej kuli
- 2 (3 pkt.). Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawia się następująco: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III 17 studentek i 5 studentów. Z listy zawierającej alfabetyczny spis całego roku wybrano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrana studentka należy do grupy III.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa skokowa X podlega rozkładowi danemu w tablicy

x_k	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Obliczyć wartość oczekiwaną, modę, medianę i wariancję.

- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 100 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 100 metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0,95$.

Zestaw 20

- 1 (2 pkt.). W urnie znajdują się kartki oznaczone liczbami 12, 13, 14, 15, 18, 25 i 30. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 5.
- 2 (3 pkt.). Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawia się następująco: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III 17 studentek i 5 studentów. Z trzech list, z których każda jest listą jednej z wymienionych grup, losowano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że należy ona do grupy III.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa skokowa podlega rozkładowi danemu w następującej tabelicy:

x_k	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe.

- 4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano pięciu niezależnych pomiarów i otrzymano wyniki (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych): $4,781 \cdot 10^{-10}$; $4,795 \cdot 10^{-10}$; $4,769 \cdot 10^{-10}$; $4,792 \cdot 10^{-10}$; $4,779 \cdot 10^{-10}$. Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,95, zakładając, że wynik pomiaru jest obarczony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 21

- 1 (3 pkt.). W urnie są kule ponumerowane od 1 do 5. Losujemy z urny dwie kule bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tych kolejnych losowaniach numer pierwszej kuli będzie większy od numeru drugiej kuli.
- 2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w serii 1000 wyprodukowanych igieł znajdą się co najmniej 2 braku, jeżeli wiadomo, że przeciętny procent braków wynosi 4 promile.
- 3 (2 pkt.). Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\infty < x \leq 0, \\ x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

- 4 (3 pkt.). Przeprowadzono 15 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,99.

Zestaw 22

- 1 (2 pkt.). Urna zawiera 5 kul białych i 4 kule czarne. Losujemy trzy razy, zwracając kulę za każdym razem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane kule będą czarne.
- 2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w paczce igieł zawierających 1000 sztuk znajdą się co najwyżej 2 igły wybrakowane, jeżeli wiadomo, że przeciętna liczba braków wynosi 3 promile.
- 3 (3 pkt.). Czy funkcja $f(x)$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Jeśli tak, to obliczyć $P\left(1 \leq X \leq \frac{1}{2}\pi\right)$.

- 4 (3 pkt.). Przeprowadzono 10 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,99.

Zestaw 23

- 1 (2 pkt.). Mamy dwie urny: urnę A zawierającą 2 białe i 8 czarnych kul i urnę B z 4 białymi i 6 czarnymi kulami. Losujemy jedną kulę z urny A oraz jedną kulę z urny B . Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna kula będzie biała.
- 2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 500 ludzi dokładnie 2 osoby będą miały urodziny w dniu Nowego Roku.
- 3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości C funkcja

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{dla innych } x \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Obliczyć $P(1 \leq X \leq 4)$.

- 4 (3 pkt.). W celu wyznaczenia błędu standardowego pewnego przyrządu pomiarowego (odchylenia standardowego tego przyrządu) dokonano sześciu pomiarów pewnej wielkości i otrzymano wyniki: 8,15; 8,20; 8,04; 8,14; 8,22; 8,11. Oszacować wariancję

wskazań przyrządu i wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego tego przyrządu przy poziomie ufności 0,95.

Zestaw 24

- 1 (2 pkt.). Mamy 8 urn typu A i 6 urn typu B . Każda z urn typu A zawiera 4 kule czarne i 5 białych, a każda z urn typu B zawiera 7 kul czarnych i 2 białe. Losujemy urnę i z niej kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania kuli białej.
- 2 (2 pkt.). Prządka obsługuje 1000 wrzecion. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zerwania się nici na jednym z wrzecion w ciągu minuty jest równe 0,004. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu jednej minuty nastąpią zrywy co najwyżej na 3 wrzecionach.
- 3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości C funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 1, \\ \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Obliczyć wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe, modę i medianę.

- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w n wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych n metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Jaka powinna być liczebność próbki (wartość n), aby na poziomie ufności $Q = 0,99$ przedział ufności był nie dłuższy niż 0,01 (przedział ten określa plon w kg/m^2).

Zestaw 25

- 1 (2 pkt.). Mamy 4 urny typu A zawierające 7 białych i 3 czarne kule oraz 16 urn typu B o składzie: 4 białe i 6 czarnych kul. Losujemy jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy kulę białą.
- 2 (2 pkt.). Trzy fabryki produkują ten sam towar. Pierwsza fabryka zaopatruje rynek w 50%, a druga w 30%. Średni procent braków w produkcji pierwszej fabryki wynosi 3%, drugiej fabryki 4%, a trzeciej 5%. Kupiono sztukę towaru, która okazała się brakiem. Z której fabryki jest najbardziej prawdopodobny zakup tego braku?
- 3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości a funkcja

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

jest gęstością prawdopodobieństwa. Obliczyć $P(X < 1)$.

- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 100 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 100 metrów kwadratowych wynoszący

16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,048$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0,95$.

Zestaw 26

- 1 (2 pkt.). Pobieramy losowo dwie karty z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jedna karta będzie koloru czerwonego, a druga czarnego?
- 2 (2 pkt.). W urnie znajduje się 25 kul białych i 45 kul czarnych. Losujemy 20 razy według schematu Pólya dodając po każdym losowaniu 2 kule odpowiedniego koloru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 7 razy kulę białą.
- 3 (3 pkt.). Zmienna losowa X przyjmuje wartości $-2, 2, 3$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$ oraz obliczyć wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe, medianę i modę zmiennej losowej Y .
- 4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano sześciu niezależnych pomiarów. Otrzymano następujące wyniki: $4,783 \cdot 10^{-10}$; $4,781 \cdot 10^{-10}$; $4,795 \cdot 10^{-10}$; $4,769 \cdot 10^{-10}$; $4,792 \cdot 10^{-10}$; $4,779 \cdot 10^{-10}$ (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych). Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,95, zakładając, że wynik pomiaru jest obarczony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 27

- 1 (2 pkt.). Z talii 32 kart losujemy dwa razy po jednej karcie (losowanie bezzwrotne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna z tych kart będzie waletem?
- 2 (3 pkt.). Rzucamy kostką 20 razy. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę rzutów, w których pojawi się „piątka”.
- 3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(2, 5)$. Obliczyć $P(X > 10)$.
- 4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 50 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 50 metrów kwadratowych wynoszący 16,35 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0,051$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0,95$.