Akademia Kaliska, Wydział Politechniczny
Katedra Informatyki
II rok informatyki (studia niestacjonarne I stopnia)

Kolokwium zaliczeniowe z ćwiczeń do przedmiotu *Metody probabilistyczne i statystyka*

22 stycznia 2022 roku

Zestaw 1

1 (2 pkt.). W urnie znajdują się 4 kule białe, 3 czarne i 5 zielonych. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania białej lub czarnej kuli

2 (3 pkt.). Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawia się następująco: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III 17 studentek i 5 studentów. Z listy zawierającej alfabetyczny spis całego roku wybrano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrana studentka należy do grupy III.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa skokowa X podlega rozkładowi danemu w tablicy

x_k	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Obliczyć wartość oczekiwaną, modę, medianę i wariancję.

4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 100 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 100 metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0{,}048$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0{,}95$.

Zestaw 2

1 (2 pkt.). W urnie znajdują się kartki oznaczone liczbami 12, 13, 14, 15, 18, 25 i 30. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 5.

2 (3 pkt.). Na pewnym kierunku studiów skład grup studenckich przedstawia się następująco: w grupie I jest 14 studentek i 11 studentów, w grupie II jest 12 studentek i 12 studentów, a w grupie III 17 studentek i 5 studentów. Z trzech list, z których każda jest listą jednej z wymienionych grup, losowano jedną osobę, która okazała się studentką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że należy ona do grupy III.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa skokowa podlega rozkładowi danemu w następującej tablicy:

x_k	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe.

4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano pięciu niezależnych pomiarów i otrzymano wyniki (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych): $4{,}781\cdot 10^{-10}$; $4{,}795\cdot 10^{-10}$; $4{,}769\cdot 10^{-10}$; $4{,}792\cdot 10^{-10}$; $4{,}779\cdot 10^{-10}$. Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,95, zakładając, że wynik pomiaru jest obarczony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 3

1 (3 pkt.). W urnie są kule ponumerowane od 1 do 5. Losujemy z urny dwie kule bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tych kolejnych losowaniach numer pierwszej kuli będzie większy od numeru drugiej kuli.

2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w serii 1000 wyprodukowanych igieł znajdą się co najmniej 2 braku, jeżeli wiadomo, że przeciętny procent braków wynosi 4 promile.

3 (2 pkt.). Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ dla } -\infty < x \le 0,\\ x^2 \text{ dla } 0 < x \le 1,\\ 1 \text{ dla } 1 < x < \infty.\end{cases}$$

4 (3 pkt.). Przeprowadzono 15 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,99.

Zestaw 4

1 (2 pkt.). Urna zawiera 5 kul białych i 4 kule czarne. Losujemy trzy razy, zwracając kulę za każdym razem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane kule będą czarne.

2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w paczce igieł zawierających 1000 sztuk znajdą się co najwyżej 2 igły wybrakowane, jeżeli wiadomo, że przeciętna liczba braków wynosi 3 promile.

3 (3 pkt.). Czy funkcja $f(x)$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & \text{dla } 0\le x\le \pi,\\ 0 & \text{dla innych } x\end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Jeśli tak, to obliczyć $P\left(1\le X\le \frac{1}{2}\pi\right)$.

4 (3 pkt.). Przeprowadzono 10 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,99.

Zestaw 5

1 (2 pkt.). Mamy dwie urny: urnę *A* zawierającą 2 białe i 8 czarnych kul i urnę *B* z 4 białymi i 6 czarnymi kulami. Losujemy jedną kulę z urny *A* oraz jedną kulę z urny *B*. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna kula będzie biała.

2 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 500 ludzi dokładnie 2 osoby będą miały urodziny w dniu Nowego Roku.

3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości *C* funkcja

$$f(x)=\begin{cases}Cx^2 & \text{dla } 0\le x\le 3,\\ 0 & \text{dla innych } x\end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Obliczyć $P(1\le X\le 4)$.

4 (3 pkt.). W celu wyznaczenia błędu standardowego pewnego przyrządu pomiarowego (odchylenia standardowego tego przyrządu) dokonano sześciu pomiarów pewnej wielkości i otrzymano wyniki: 8,15; 8,20; 8,04; 8,14; 8,22; 8,11. Oszacować wariancję wskazań przyrządu i wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego tego przyrządu przy poziomie ufności 0,95.

Zestaw 6

1 (2 pkt.). Mamy 8 urn typu *A* i 6 urn typu *B*. Każda z urn typu *A* zawiera 4 kule czarne i 5 białych, a każda z urn typu *B* zawiera 7 kul czarnych i 2 białe. Losujemy urnę i z niej kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania kuli białej.

2 (2 pkt.). Prządka obsługuje 1000 wrzecion. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zerwania się nici na jednym z wrzecion w ciągu minuty jest równe 0,004. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu jednej minuty nastąpią zrywy co najwyżej na 3 wrzecionach.

3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości *C* funkcja

$$f(x)=\begin{cases}0 & dla\ |x|\ge 1,\\ \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}} & dla\ |x|<1\end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Obliczyć wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe, modę i medianę.

4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w n wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych n metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego" wynosi $\sigma = 0{,}048$. Jaka powinna być liczebność próbki (wartość n), aby na poziomie ufności $Q = 0{,}99$ przedział ufności był nie dłuższy niż 0,01 (przedział ten określa plon w kg/m^2).

Zestaw 7

1 (2 pkt.). Mamy 4 urny typu A zawierające 7 białych i 3 czarne kule oraz 16 urn typu B o składzie: 4 białe i 6 czarnych kul. Losujemy jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy kulę białą.

2 (2 pkt.). Trzy fabryki produkują ten sam towar. Pierwsza fabryka zaopatruje rynek w 50%, a druga w 30%. Średni procent braków w produkcji pierwszej fabryki wynosi 3%, drugiej fabryki 4%, a trzeciej 5%. Kupiono sztukę towaru, która okazała się brakiem. Z której fabryki jest najbardziej prawdopodobny zakup tego braku?

3 (3 pkt.). Dla jakiej wartości a funkcja

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

Jest gęstością prawdopodobieństwa. Obliczyć $P(X < 1)$.

4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 100 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 100 metrów kwadratowych wynoszący 16,38 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego" wynosi $\sigma = 0{,}048$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0{,}95$.

Zestaw 8

1 (2 pkt.). Pobieramy losowo dwie karty z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jedna karta będzie koloru czerwonego, a druga czarnego?

2 (2 pkt.). W urnie znajduje się 25 kul białych i 45 kul czarnych. Losujemy 20 razy według schematu Pólya dodając po każdym losowaniu 2 kule odpowiedniego koloru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 7 razy kulę białą.

3 (3 pkt.). Zmienna losowa X przyjmuje wartości $-2, 2, 3$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$ oraz obliczyć wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe, medianę i modę zmiennej losowej Y.

4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano sześciu niezależnych pomiarów. Otrzymano następujące wyniki: $4{,}783 \cdot 10^{-10}$; $4{,}781 \cdot 10^{-10}$; $4{,}795 \cdot 10^{-10}$; $4{,}769 \cdot 10^{-10}$; $4{,}792 \cdot 10^{-10}$; $4{,}779 \cdot 10^{-10}$ (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych). Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,95, zakładając, że wynik pomiaru jest obarczony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 9

1 (2 pkt.). Z talii 32 kart losujemy dwa razy po jednej karcie (losowanie bezzwrotne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że ca najmniej jedna z tych kart będzie waletem?

2 (3 pkt.). Rzucamy kostką 20 razy. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę rzutów, w których pojawi się „piątka”.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(2, 5)$. Obliczyć $P(X > 10)$.

4 (3 pkt.). Szacowano plon pszenicy w pewnym powiecie. W tym celu pobrano próbkę wycinając w 50 wylosowanych punktach tego powiatu po metrze kwadratowym pszenicy i otrzymano łączny ciężar ziarna z tych 50 metrów kwadratowych wynoszący 16,35 kg. Na podstawie wielu doświadczeń i porównań na rozmaitych glebach z różnymi odmianami pszenicy stwierdzono, że odchylenie standardowe zmiennej losowej „ilość ziarna z jednego metra kwadratowego” wynosi $\sigma = 0{,}051$. Znaleźć przedział ufności dla wartości oczekiwanej tej zmiennej na poziomie ufności $Q = 0{,}95$.

Zestaw 10

1 (2 pkt.). Z talii 32 kart losujemy bez zwrotu 6 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna z nich przedstawia dziesiątkę?

2 (3 pkt.). Mamy 2 urny typu B zawierające 3 białe i 7 czarnych kul oraz 8 urn typu A zawierające po 4 kule białe i 8 czarnych. Losowano 4 razy po jednej kuli ze zwracaniem. Obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę kul białych i prawdopodobieństwo wylosowania tej liczby kul.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(2, 5)$. Obliczyć $P(| X - 2 | < 10)$.

4 (3 pkt.). Dla ustalenia ładunku elektronu dokonano pięciu niezależnych pomiarów i otrzymano wyniki (w absolutnych jednostkach elektrostatycznych): $4{,}781 \cdot 10^{-10}$; $4{,}795 \cdot 10^{-10}$; $4{,}769 \cdot 10^{-10}$; $4{,}792 \cdot 10^{-10}$; $4{,}779 \cdot 10^{-10}$. Oszacować ładunek elektronu i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,99, zakładając, że wynik pomiaru jest obarczony błędem losowym o rozkładzie normalnym.

Zestaw 11

1 (2 pkt.). Z talii 52 kart wyciągnięto losowo dwa razy po jednej karcie i, nie oglądając ich, włożono do drugiej takiej samej talii, po czym karty potasowano. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania asa z tak utworzonego zbioru 54 kart.

2 (3 pkt.). W urnie znajduje się 6 kul białych i 14 czarnych. Losujemy 5 razy po trzy kule jednocześnie, zwracając je po każdym takim losowaniu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwa razy otrzymamy wśród takich trójek wylosowanych kul jedną kulę białą.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -\infty < x < 1, \\ \frac{1}{4}x \text{ dla } 1 \le x \le 3, \\ 0 \text{ dla } 3 < x < \infty. \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę oraz obliczyć $P(1{,}4 \le X \le 2)$.

4 (3 pkt.). Przeprowadzono 15 doświadczeń z nowym typem samolotu sportowego i otrzymano następujące wyniki pomiaru jego maksymalnej prędkości: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0 (w m/s). Oszacować wartość oczekiwaną i wariancję maksymalnej prędkości. Zakładając, że maksymalna prędkość jest zmienną losową o rozkładzie normalnym podać przedział ufności oszacowania wartości oczekiwanej z poziomem ufności 0,95.

Zestaw 12

1 (2 pkt.). Z talii 52 kart wyjęto losowo kartę i, nie oglądając jej, włożono do drugiej talii 32 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania króla z otrzymanego zbioru kart?

2 (3 pkt.). Z urny zawierającej 8 kul białych i 12 kul czarnych losujemy 5 razy po dwie kule tak, że po każdym wylosowaniu 2 kul zwracamy je do urny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzy razy wylosujemy parę kul różnych kolorów.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi według gęstości danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -\infty < x < 0, \\ \sin x \text{ dla } 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi, \\ 0 \text{ dla } \frac{1}{2}\pi < x < \infty. \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę oraz obliczyć $P\left(\frac{1}{6}\pi \le X \le \frac{1}{3}\pi\right)$.

4 (3 pkt.). Badano zużycie węgla na wyprodukowanie 1 kWh w pewnej siłowni. Dokonano 10 pomiarów. Otrzymano średnią 463 g/kWh i odchylenie standardowe w próbce równe 30 g/kWh. Oszacować zużycie węgla na 1 kWh i podać przedział ufności tego oszacowania na poziomie ufności 0,95.

Zestaw 13

1 (2 pkt.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzynastka kart wylosowana jednocześnie z talii 52 kart składa się z pięciu pików, czterech kierów, trzech kar i jednego trefla.

2 (3 pkt.). W urnie są 4 kule białe i 8 kul czarnych. Losujemy 4 razy po 5 kul i po każdym wylosowaniu piątki kul wrzucamy je do urny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że 2 razy wylosujemy piątkę takich kul, wśród których będą 3 kule czarne.

3 (2 pkt.). Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(2, 5)$. Obliczyć $P(| X + 2 | > 10)$.

4 (3 pkt.). W celu wyznaczenia błędu standardowego pewnego przyrządu pomiarowego (odchylenia standardowego tego przyrządu) dokonano pięciu pomiarów pewnej wielkości i otrzymano wyniki: 8,15; 8,20; 8,04; 8,14; 8,22. Oszacować wariancję wskazań przyrządu i wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego tego przyrządu przy poziomie ufności 0,90.

Zestaw 14

1 (2 pkt.). Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na obu kostkach otrzymamy tę samą liczbę oczek.

2 (2 pkt.). Dwaj gracze posiadający jednakowe zdolności do gry w szachy mają rozegrać 10 partii. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jeden z nich wygra 5 razy.

3 (3 pkt.). Zmienna losowa podlega rozkładowi $N(3, 4)$. Wyznaczyć wartość a tak, aby $P(| X - 3 | \geq a)= 0,1$.

4 (3 pkt.). Z dużej partii słupków betonowych wybrano próbkę losową o liczebności n sztuk. Średnia wytrzymałość na ściskanie osiowe obliczona w tej próbce wyniosła 248,31 (w kG/cm^2), a odchylenie standardowe 2 (też w kG /cm^2). Jak duża powinna być próbka (wartość n), aby na poziomie ufności 0,99 przedział ufności był krótszy od 0,5 kG/cm^2?