Metody probabilistyczne i statystyka

wykład 7

zadania

str. 82 zad. 1

W przykładzie 4.1 (zob. wkład 7) wykazaliśmy, że podana funkcja jest gęstością dwuwymiarowe zmiennej losowej (*X*, *Y*). Zgodnie z definicją 4.6 gęstości rozkładów brzegowych określone są wzorami

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \text{i} \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Rozpatrzmy pierwszą całkę. Z warunku $|y| \le x$ wynika, że $-x \le y \le x$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_{-x}^{x} f(x,y)dy = \frac{1}{8}\int_{-x}^{x}(x^2 - y^2)\mathrm{e}^{-x}dy = \frac{1}{8}\left(\int_{-x}^{x} x^2\mathrm{e}^{-x}dy - \int_{-x}^{x} y^2\mathrm{e}^{-x}dy\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(x^2\mathrm{e}^{-x}\int_{-x}^{x} dy - \mathrm{e}^{-x}\int_{-x}^{x} y^2 dy\right) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 \cdot y\Big|_{-x}^{x} - \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-x}^{x}\right) \\
&= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}\left\{x^2\left[x-(-x)\right] - \frac{1}{3}\left[x^3 - (-x)^3\right]\right\} \\
&= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}\left(2x^3 - \frac{2}{3}x^3\right) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{4}{3}x^3 = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}x^3,
\end{aligned}$$

przy czym $x \in (0, \infty)$. Dla $x \le 0$ mamy $f_1(x) = 0$. Ponieważ $|y| \le x$, więc dla drugiej całki otrzymujemy

$$f_2(y) = \frac{1}{8}\int_{|y|}^{\infty}(x^2 - y^2)\mathrm{e}^{-x}dx = \frac{1}{8}\left(\int_{|y|}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}dx - y^2\int_{|y|}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}dx\right). \tag{1}$$

W celu obliczenia pierwszej z powyższych całek wykonujemy całkowanie przez części. Przyjmując $u = x^2$ i $dv = \mathrm{e}^{-x}dx$, mamy $du = 2x$ i $v = -\mathrm{e}^{-x}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\int x^2\mathrm{e}^{-x}dx &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - \int\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot 2xdx = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}dx \\
&= -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\left[-x\mathrm{e}^{-x} - \int\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)dx\right] = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\left(-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= -\mathrm{e}^{-x}(x^2 + 2x + 2),
\end{aligned}$$

przy czym ponownie zastosowaliśmy tu całkowanie przez części. Dla drugiej całki we wzorze (1) mamy

$$\int \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x}.$$

Podstawiając uzyskane wyniki do tego wzoru, otrzymujemy

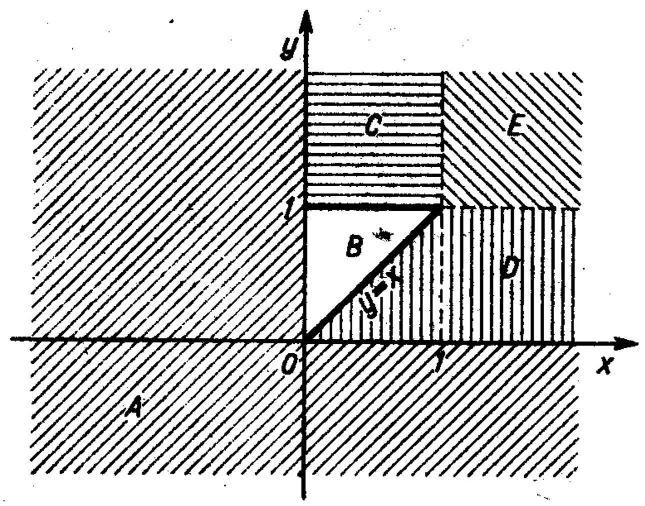
$$f_2(y) = \frac{1}{8}\left[-\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2)\Big|_{|y|}^{\infty} + y^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_{|y|}^{\infty} \right] = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}(y^2-x^2-2x-2)\Big|_{|y|}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-|y|}\left(y^2-|y|^2-2|y|-2\right)) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-|y|}\left(|y|+1\right),$$

gdzie $y \in (-\infty, \infty)$.

str. 82 zad. 2

W przykładzie 4.2 wyznaczyliśmy dystrybuantę $F(X, Y)$ zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) kolejno dla obszarów A, B, C. D i E przedstawionych na poniższym rysunku.



Wzory dystrybuanty wyznaczone w tym przykładzie dla obszarów C oraz D, w których są spełnione nierówności odpowiednio $0 < x \leq 1$ i $1 < y < \infty$ oraz $0 < x < \infty$ i $1 < y < \infty$, miały postacie odpowiednio

$$F(x, y) = 2\sqrt{x} - x \text{ oraz } F(x, y) = y.$$

Okazuje się, że wzory te przedstawiają także dystrybuanty odpowiednich rozkładów brzegowych. Mamy bowiem

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{xy}}dy = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{y}\,\Big|_x^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1,$$

przy czym $x \in (0, 1]$,

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{xy}}dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^y \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x}\,\Big|_0^y = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y} = 1,$$

gdzie $y \in (0, 1]$, a stąd

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int_0^x dx$$
$$= 2\sqrt{x}\,\Big|_0^x - x\,\Big|_0^x = 2\sqrt{x} - x, \quad x \in (0,1])$$

oraz

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy = \int_0^y dy = y\,\Big|_0^y = y, \quad y \in (0,1].$$

Poza obszarami C i D gęstości brzegowe przyjmują wartość 0, bo $f(x, y) = 0$. Dystrybuanty brzegowe $F_1(x)$ i $F_2(y)$ dla zmiennych x i y o wartościach mniejszych od 1 mają wartość 0, a dla wartości większych od 1 – wartość 1.

str. 82 zad. 3

Zgodnie z definicją 4.6 (zob. wykład 7) i podaną w zadaniu gęstością zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) mamy

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-y}dy = -\,\mathrm{e}^{-y}\,\Big|_x^{\infty} = -(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}$$

dla $0 \le x < \infty$,

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^y \mathrm{e}^{-y}dx = \mathrm{e}^{-y}\int_0^y dx = \mathrm{e}^{-y}\cdot x\,\Big|_0^y = y\mathrm{e}^{-y}$$

dla $0 \le y < \infty$. Dla dystrybuant brzegowych otrzymujemy

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx = \int_0^x \mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-x}\,\Big|_0^x = -(\mathrm{e}^{-x} - 1) = 1 - \mathrm{e}^{-x}, \quad 0 \le x < \infty,$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy = \int_0^y y\mathrm{e}^{-y}dy, \quad 0 \le y < \infty.$$

Wykonując całkowanie przez części, mamy

$$\int y\mathrm{e}^{-y}dy = -y\mathrm{e}^{-y} - \int \mathrm{e}^{-y}dy = -y\mathrm{e}^{-y} - (-\mathrm{e}^{-y}) = \mathrm{e}^{-y}(1-y),$$

a więc

$$F_2(y) = \mathrm{e}^{-y}(1 - y)\Big|_0^y = \mathrm{e}^{-y}(1 - y) - 1, \quad 0 \le y < \infty.$$

Dla pozostałych wartości x i y gęstości brzegowe i dystrybuanty brzegowe mają wartość 0.