Metody probabilistyczne i statystyka

wykład 2

zadania

str. 23 zad. 1 (por. str. 9 zad. 3)

Oznaczmy przez B_i zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej z i-tej urny, a przez C_i zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej z i-tej urny.

ad a)
Wylosowania dwóch kul białych polega na wylosowaniu kuli białej za pierwszym razem i wylosowaniu kuli białej za drugim razem pod warunkiem otrzymania kuli białej w pierwszym losowaniu. Zatem

$$P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_1|B_1) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12} \approx 0{,}42.$$

ad b)

$$P(C_1 \cdot C_1) = P(C_1) \cdot P(C_1|C_1) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{12} \approx 0{,}08.$$

ad c)

$$P(B_2 \cdot B_2 \cdot B_2) = P(B_2) \cdot P(B_2|B_2) \cdot P(B_2|B_2 \cdot B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30} \approx 0{,}03.$$

ad d)

$$P(C_2 \cdot C_2 \cdot C_2) = P(C_2) \cdot P(C_2|C_2) \cdot P(C_2|C_2 \cdot C_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

ad e)
Kula czarna może zostać wylosowana jako pierwsza, jako druga lub jako trzecia kula i są to zdarzenia niezależne. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\begin{aligned}
&P(B_1B_1C_1 + B_1C_1B_1 + C_1B_1B_1) = P(B_1B_1C_1) + P(B_1C_1B_1) + P(C_1B_1B_1) \\
&= P(B_1) \cdot P(B_1|B_1) \cdot P(C_1|B_1B_1) + P(B_1) \cdot P(C_1|B_1) \cdot P(B_1|B_1C_1) \\
&\quad + P(C_1) \cdot P(B_1|C_1) \cdot P(B_1|C_1B_1) \\
&= \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28} \approx 0{,}54.
\end{aligned}$$

ad f)
Jak w p. f) w zad. 3 ze str. 9.

ad g)
Podane kule mogą być wylosowane z urny I lub z urny II. Ponadto najpierw można wylosować kulę białą, po czym czarną lub na odwrót. Jeśli oznaczymy przez U_i zdarzenie polegające na wyborze i-tej urny, to szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$
\begin{aligned}
&P(U_1(BC+CB)+U_2(BC+CB)) \\
&= P(U_1)\cdot P(BC+CB|U_1)+P(U_2)\cdot P(BC+CB|U_2) \\
&= P(U_1)\cdot P(B_1C_1+C_1B_1)+P(U_2)\cdot P(B_2C_2+C_2B_2) \\
&= P(U_1)\cdot (P(B_1C_1)+P(C_1B_1))+P(U_2)\cdot (P(B_2C_2)+P(C_2B_2)) \\
&= P(U_1)\cdot (P(B_1)\cdot P(C_1|B_1)+P(C_1)\cdot P(B_1|C_1)) \\
&\quad + P(U_2)\cdot (P(B_2)\cdot P(C_2|B_2)+P(C_2)\cdot P(B_2|C_2)) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\right)=\ldots=\frac{1}{4}+\frac{4}{15}=\frac{31}{60}\approx 0{,}52.
\end{aligned}
$$

ad h)

$$
\begin{aligned}
&P(B_1C_1C_1+C_1B_1C_1+C_1C_1B_1)=P(B_1C_1C_1)+P(C_1B_1C_1)+P(C_1C_1B_1) \\
&= P(B_1)\cdot P(C_1|B_1)\cdot P(C_1|B_1C_1)+P(C_1)\cdot P(B_1|C_1)\cdot P(C_1|C_1B_1) \\
&\quad + P(C_1)\cdot P(C_1|C_1)\cdot P(B_1|C_1C_1) \\
&=\ldots=\frac{3}{14}\approx 0{,}22..
\end{aligned}
$$

ad i)

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych i jednej białej w przypadku losowania z urny I obliczyliśmy w p. h). Dla urny II mamy

$$
\begin{aligned}
&P(B_2C_2C_2+C_2B_2C_2+C_2C_2B_2)=P(B_2C_2C_2)+P(C_2B_2C_2)+P(C_2C_2B_2) \\
&= P(B_2)\cdot P(C_2|B_2)\cdot P(C_2|B_2C_2)+P(C_2)\cdot P(B_2|C_2)\cdot P(C_2|C_2B_2) \\
&\quad + P(C_2)\cdot P(C_2|C_2)\cdot P(B_2|C_2C_2) \\
&=\ldots=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{14}\approx 0{,}36..$$

str. 23 zad. 2

Oznaczmy zdarzenia:
A_1 – wylosowanie kuli (obojętnie jakiej) z urn pierwszej serii,
A_2 – wylosowanie kuli (obojętnie jakiej) z urn drugiej serii,
B – wylosowanie kuli białej.
Zdarzenie B może zajść łącznie ze zdarzeniem A_1 lub łącznie ze zdarzeniem A_2, czyli

$$B = A_1B + A_2B.$$

Zdarzenia A_1B i A_2B są rozłączne. Zatem

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 B + A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) \\
&= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) = \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{10} + \frac{8}{13}\cdot\frac{9}{16} = \ldots = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

str. 23 – 24 zad. 4

Niech zdarzenia będą oznaczone następująco:
D_i – wylosowanie damy z i-tej talii (i = 1, 2, 3),
$\overline{D_i}$ – zdarzenie przeciwne.
Mamy

$$D_3 = D_1 D_2 D_3 + D_1 \overline{D}_2 D_3 + \overline{D}_1 D_2 D_3 + \overline{D}_1 \overline{D}_2 D_3,$$

skąd

$$
\begin{aligned}
P(D_3) &= P(D_1 D_2 D_3 + D_1 \overline{D}_2 D_3 + \overline{D}_1 D_2 D_3 + \overline{D}_1 \overline{D}_2 D_3) \\
&= P(D_1 D_2 D_3) + P(D_1 \overline{D}_2 D_3) + P(\overline{D}_1 D_2 D_3) + P(\overline{D}_1 \overline{D}_2 D_3) \\
&= P(D_1)\cdot P(D_2|D_1)\cdot P(D_3|D_1 D_2) + P(D_1)\cdot P(\overline{D}_2|D_1)\cdot P(D_3|D_1\overline{D}_2) \\
&\quad + P(\overline{D}_1)\cdot P(D_2|\overline{D}_1)\cdot P(D_3|\overline{D}_1 D_2) + P(\overline{D}_1)\cdot P(\overline{D}_2|\overline{D}_1)\cdot P(D_3|\overline{D}_1\overline{D}_2) \\
&= \frac{4}{52}\cdot\frac{5}{53}\cdot\frac{5}{53} + \frac{4}{52}\cdot\frac{48}{53}\cdot\frac{4}{53} + \frac{48}{52}\cdot\frac{4}{53}\cdot\frac{5}{53} + \frac{48}{52}\cdot\frac{49}{53}\cdot\frac{4}{53} = \ldots = \frac{1}{13}.
\end{aligned}
$$

str. 24 zad. 5

Oznaczmy zdarzenia:
E_1 – otrzymanie jednego asa przy dwukrotnym losowaniu,
E_2 – otrzymanie dwóch asów przy dwukrotnym losowaniu,
E_0 – brak asa przy dwukrotnym losowaniu,
Z – wylosowanie asa z pozostałego zbioru 50 kart.
Zdarzenie Z może zajść jednocześnie z jednym ze zdarzeń E_1, E_2 lub E_0, czyli

$$Z = E_1 Z + E_2 Z + E_0 Z.$$

Jeżeli przez A oznaczymy zdarzenie polegające na wylosowaniu asa, a przez $\overline{A}$ – zdarzenie przeciwne, to

$$E_1 = A\overline{A} + \overline{A}A, \quad E_2 = AA, \quad E_0 = \overline{A}\overline{A}$$

i mamy

$$
\begin{aligned}
P(E_1) &= P(A\overline{A} + \overline{A}A) = P(A\overline{A}) + P(\overline{A}A) \\
&= P(A) \cdot P(\overline{A}|A) + P(\overline{A}) \cdot P(A|\overline{A}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}, \\
P(E_2) &= P(AA) = P(A) \cdot P(A|A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}, \\
P(E_0) &= P(\overline{A}\overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}|\overline{A}) = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51}.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
P(Z) &= P(E_1 Z + E_2 Z + E_0 Z) = P(E_1 Z) + P(E_2 Z) + P(E_0 Z) \\
&= P(E_1) \cdot P(Z|E_1) + P(E_2) \cdot P(Z|E_2) + P(E_0) \cdot P(Z|E_0) \\
&= \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}\right) \cdot \frac{3}{50} + \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} + \frac{48}{51} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{4}{50} = \ldots = \frac{1}{13}.
\end{aligned}
$$