Metody probabilistyczne i statystyka

wykład 1

zadania

str. 8 zad. 1

Zbiór podstawowy składa się z 8 elementów.

ad a)
Zdarzeniami sprzyjającymi są: *OOR*, *ORO*, *ROO*, gdzie *O* oznacza wypadnięcie orła, a *R* – reszki. Szukane prawdopodobieństwo jest więc równe

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

ad b)
Zdarzenia sprzyjające: *OOO*, *OOR*, *ORO*, *ROO*. Zatem

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

ad c)
Zdarzeniami sprzyjającymi są: *OOR*, *ORO*, *ROO*, *ORR*, *ROR*, *RRO*, *RRR*, a więc mamy

$$P(C) = \frac{7}{8}.$$

str. 8 zad. 2

Zbiór podstawowy składa się z 20 elementów, bo za pierwszym razem możemy wybrać jedną z pięciu cyfr, a za drugim razem – jedną z czterech pozostałych cyfr.

ad a)
Zdarzeń sprzyjających jest 12, bo wybory odpowiadające warunkowi zadania są następujące: 1 i 2, 1 i 3, 1 i 4, 1 i 5, 3 i 1, 3 i 2, 3 i 4, 3 i 5, 5 i 1, 5 i 2, 5 i 3, 5 i 4. Zatem

$$P(A) = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

ad b)
Zdarzeń sprzyjających jest też 12, ale wybory odpowiadające warunkowi zadania są tym razem następujące: 1 i 3, 1 i 5, 2 i 1, 2 i 3, 2 i 5, 3 i 1, 3 i 5, 4 i 1, 4 i 3, 4 i 5, 5 i 1, 5 i 3. Mamy więc

$$P(B) = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

ad c)
Na zdarzenia sprzyjające składają się wszystkie zdarzenia z p. a) i z p. b), czyli

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}6 + 0{,}6 = 0{,}3.$$

str. 9 zad. 3

Wprowadźmy następujące oznaczenia zdarzeń:
B_1 – wylosowanie kuli białej z urny I,
C_1 – wylosowanie kuli czarnej z urny I,
B_2 – wylosowanie kuli białej z urny II,
C_2 – wylosowanie kuli czarnej z urny II.
Jest oczywiste, że

$$P(B_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad P(C_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(B_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(C_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

ad a)

$$P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0{,}44.$$

ad b)

$$P(C_1 \cdot C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \approx 0{,}11.$$

ad c)

$$P(B_2 \cdot B_2 \cdot B_2) = P(B_2) \cdot P(B_2) \cdot P(B_2) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \approx 0{,}064.$$

ad d)

$$P(C_2 \cdot C_2 \cdot C_2) = P(C_2) \cdot P(C_2) \cdot P(C_2) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0{,}216.$$

ad e)
Zdarzeniami sprzyjającymi są: $B_1B_1C_1$, $B_1C_1B_1$, $C_1B_1B_1$. Są to zdarzenia wykluczające się. Zatem

$$P(B_1B_1C_1 + B_1C_1B_1 + C_1B_1B_1) = P(B_1B_1C_1) + P(B_1C_1B_1) + P(C_1B_1B_1)$$
$$= P(B_1) \cdot P(B_1) \cdot P(C_1) + P(B_1) \cdot P(C_1) \cdot P(B_1) + P(C_1) \cdot P(B_1) \cdot P(B_1)$$
$$= 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

ad f)
Mogą zdarzyć się dwa przypadki: najpierw wyciągniemy kulę białą z urny I, a następnie kulę czarną z urny II lub na odwrót. Mamy więc

$$P(B_1C_2 + B_2C_1) = P(B_1C_2) + P(B_2C_1) = P(B_1) \cdot P(C_2) + P(B_2) \cdot P(C_1)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15} \approx 0{,}53.$$

ad g)
Prawdopodobieństwo wylosowania każdej urny jest takie same i wynosi 1/2. Z każdej urny możemy najpierw wylosować kulę białą, po czym czarną lub na odwrót. Mamy zatem

$$p = \frac{1}{2} \cdot P(B_1C_1 + C_1B_1) + \frac{1}{2} \cdot P(B_2C_2 + C_2B_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[P(B_1C_1) + P(C_1B_1) \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[P(B_2C_2) + P(C_2B_2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[P(B_1) \cdot P(C_1) + P(C_1) \cdot P(B_1) \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[P(B_2) \cdot P(C_2) + P(C_2) \cdot P(B_2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{104}{225} \approx 0{,}46.$$

ad h)
Zdarzenia $B_1C_1C_1$, $C_1B_1C_1$ i $C_1C_1B_1$ wykluczają się, więc

$$p = P(B_1C_1C_1 + C_1B_1C_1 + C_1C_1B_1) = P(B_1C_1C_1) + P(C_1B_1C_1) + P(C_1C_1B_1)$$

$$= 3 \cdot P(B_1) \cdot \left[P(C_1) \right]^2 = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0{,}22.$$

ad i)
Prawdopodobieństwo wylosowania każdej urny wynosi 1/2, więc mamy

$$p = \ldots = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot P(B_1) \cdot \left[P(C_1) \right]^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot P(B_2) \cdot \left[P(C_2) \right]^2 = \ldots = \frac{368}{1125} \approx 0{,}32.$$

str. 9 zad. 10

Oznaczmy przez O zdarzenie polegające na wyrzuceniu orła, a przez R – reszki.

ad a)
Zdarzenie A może zajść na skutek realizacji jednego z następujących wykluczających się zdarzeń:
A_2 – wystąpienie tylko dwóch rzutów, tj. przypadku OO lub RR,
A_3 – wystąpienie tylko trzech rzutów, tj. przypadku ORR lub ROO,
A_4 – wystąpienie tylko czterech rzutów, tj. przypadku $OROO$ lub $RORR$ itd..
Mamy:

$$P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2},$$

$$P(A_4) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = 2 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(A_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zatem

$$P(A) = P(A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + \ldots + P(A_n)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Korzystając z wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego, tj.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

gdzie a_1 oznacza pierwszy wyraz tego ciągu, a q – stosunek wyrazu następnego do poprzedniego, otrzymujemy (w naszym postępie wyrazy są ponumerowane od 2 i jest ich $n - 1$)

$$S_{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

czyli

$$P(A) = 1 - 2^{1-n}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n \to \infty} P(A) = 1.$$

ad b)

$$P(B) = P(A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n} + \ldots)$$
$$= P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) + \ldots + P(A_{2n}) + \ldots$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ldots.$$

Otrzymaliśmy ciąg geometryczny nieskończony (szereg geometryczny), w który $a_1 = 1/2$ oraz $q = 1/2$. Korzystając z wzoru na sumę wyrazów takiego ciągu, tj.

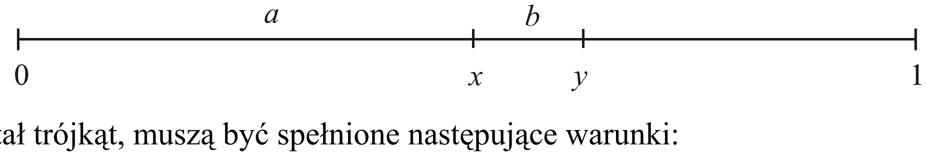
$$S = \frac{a_1}{1 - q},$$

mamy ostatecznie

$$P(B) = \frac{2}{3}.$$

str. 15 zad. 1

Aby można zbudować trójkąt, suma dwóch odcinków musi być większa od trzeciego. Rozważmy odcinek [0, 1] i niech punkty dzielące mają współrzędne x i y.



Aby powstał trójkąt, muszą być spełnione następujące warunki:

$$a+b>1-(a+b),$$
$$a+[1-(a+b)]>b,$$
$$b+[1-(a+b)]>a,$$

czyli

$$a+b>\frac{1}{2},$$
$$b<\frac{1}{2},$$
$$a<\frac{1}{2}.$$

Stąd, po podstawieniu współrzędnych, mamy

$$y>\frac{1}{2},$$
$$y<x+\frac{1}{2},$$
$$x<\frac{1}{2}.$$

Jest oczywiste, że muszą być także spełnione nierówności

$$y<1 \quad \text{i} \quad x>0,$$

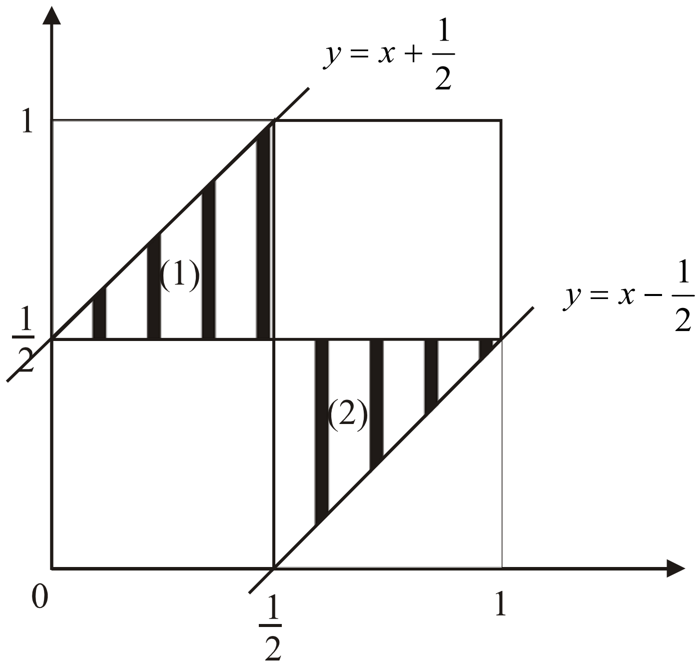
a więc otrzymujemy

$$\begin{aligned} &0<x<\frac{1}{2},\\ &\frac{1}{2}<y<1, \qquad (1)\\ &y<x+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ponieważ wielkości x i y mogą być dobrane symetrycznie, więc po ich zamianie uzyskamy analogiczne nierówności

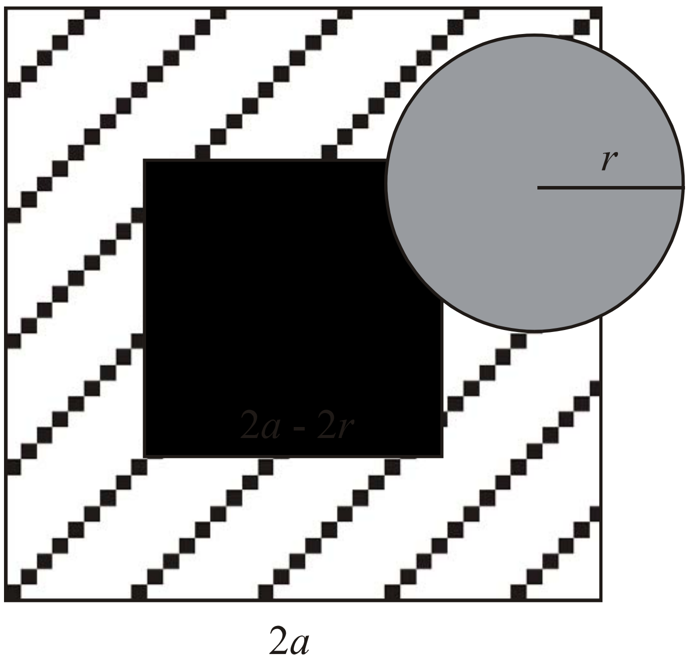
$$\begin{aligned} &0<y<\frac{1}{2},\\ &\frac{1}{2}<x<1, \qquad (2)\\ &x<y+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nierówności (1) i (2) wyznaczają obszary zakreślone na rysunku. Stąd szukane prawdopodobieństwo jest równe (*pole zakreślone*) / (*pole kwadratu*) = 1/4.



str. 15 zad. 2

Aby moneta przykryła częściowo co najmniej dwa kwadraty, jej środek nie może upaść w czarnym kwadracie zaznaczonym na poniższym rysunku.



Bok tego kwadratu jest równy $2a - 2r$. Szukane prawdopodobieństwo jest równe stosunkowi pola całego kwadratu o boku $2a$ pomniejszonemu o pole czarnego kwadratu do pola całego kwadratu, czyli

$$p = \frac{4a^2 - (2a - 2r)^2}{4a^2} = \frac{r(2a - r)}{a^2}.$$