

XXV. OBWODY ELEKTRYCZNE

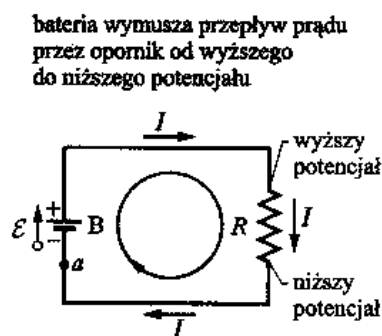
25.1. Obwody elektryczne o jednym oczku

Aby wytworzyć stały przepływ ładunku, jest potrzebne urządzenie, które wykonując pracę nad nośnikami ładunku, utrzymuje różnicę potencjałów między parą swych zacisków. Urządzenie takie nazywamy *źródłem siły elektromotorycznej (źródłem SEM)*. Powszechnie stosowanym źródłem SEM jest *ogniwo elektryczne (bateria elektryczna)*.

Źródło SEM wykonuje pracę nad ładunkami. Jeśli przez dW oznaczmy pracę wykonaną przez źródło przy przesuwaniu dodatniego ładunku dq od ujemnego do dodatniego bieguna, to siła elektromotoryczna źródła jest określona wzorem

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq}. \quad (25.1)$$

Doskonałym źródłem SEM jest źródło, które nie ma żadnego oporu wewnętrznego podczas ruchu ładunku przez ogniwo. Różnica potencjałów między biegunami doskonałego źródła SEM jest równa SEM źródła. Rzeczywiste źródło SEM ma opór wewnętrzny. Różnica potencjałów między biegunami źródła jest równa SEM tylko wtedy, gdy nie płynie przez nie prąd.



Rys. 25.1. Obwód o jednym oczku

Zgodnie ze wzorem $P = I^2R$ (P oznacza moc), w przedziale czasu dt w oporniku z rys. 25.1 energia I^2R zamienia się w energię termiczną. W tym samym czasie ładunek o wartości $dq = Idt$ przepłynie przez baterię B i praca wykonana przez baterię nad tym ładunkiem wynosi (zgodnie ze wzorem (25.1))

$$dW = \mathcal{E}dq = \mathcal{E}Idt.$$

Z zasady zachowania energii wynika, że praca wykonana przez baterię musi być równa energii termicznej wytworzonej w oporniku, czyli

$$\mathcal{E}Idt = I^2 Rdt,$$

skąd

$$\mathcal{E} = IR. \quad (25.2)$$

Wielkość IR jest energią przypadającą na jednostkę ładunku, przekazaną w oporniku przez poruszające się ładunki na rzecz energii wewnętrznej.

Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez opornik R w kierunku przepływu prądu wynosi $-IR$, a w przeciwnym kierunku $+IR$. Jest to tzw. *reguła oporu*. Z kolei zmiana potencjału przy przechodzeniu przez doskonałe źródło SEM w kierunku strzałki SEM (od $-$ do $+$) wynosi $+\mathcal{E}$, a w przeciwnym $-\mathcal{E}$. Sformułowanie to jest znane pod nazwą *reguła SEM*.

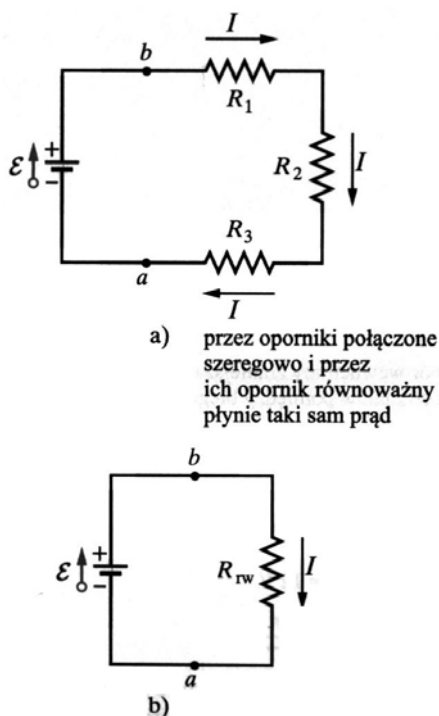
Z obwodami elektrycznymi są związane dwa prawa Kirchhoffa. Z zasady zachowania energii wynika drugie prawo Kirchhoffa.

Drugie prawo Kirchhoffa. Algebraiczna suma zmian potencjałów przy pełnym obejści dowolnego oczka musi być równa zero.

Z zasady zachowania ładunku wynika pierwsze prawo Kirchhoffa

Pierwsze prawo Kirchhoffa. Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

Rozważmy oporniki połączone szeregowo tak, jak przedstawiono na rys. 25.2. Różnica potencjałów między punktami a i b jest utrzymywana przez źródło prądu. Różnice potencjałów, które istnieją na oporach w szeregu wytwarzają w nich prądy o jednakowym natężeniu.



Rys. 25.2. Trzy oporniki połączone szeregowo

Jeżeli różnica potencjałów U jest przyłożona do oporników połączonych szeregowo, to przez oporniki płyną prądy o jednakowym natężeniu I . Suma różnic potencjałów na opornikach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów U . Oporniki połączone szeregowo można zastąpić równoważnym opornikiem R_{rw} , w którym płynie prąd o takim samym natężeniu I przy takiej samej całkowitej różnicy potencjałów U , jak w rozważanych opornikach.

Aby wyprowadzić wzór na opór R_{rw} , zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa i wzór (25.2). Na rys. 25.2 a), zaczynając od punktu a i przechodząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół obwodu, otrzymujemy

$$\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0,$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (25.3)$$

Na rys. 25.2 b) w obwodzie, w którym trzy oporniki zastąpiono jednym równoważnym opornikiem R_{rw} , mamy

$$\mathcal{E} - IR_{rw} = 0,$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{rw}}. \quad (25.4)$$

Porównanie wzorów (25.3) i (25.4) prowadzi do zależności

$$R_{rw} = R_1 + R_2 + R_3,$$

którą można uogólnić na przypadek n oporników następująco:

$$R_{rw} = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Jeśli bateria (lub inne źródło SEM) wykonuje pracę nad nośnikami ładunku, wytwarzając prąd o natężeniu I , to przekazuje nośnikom ładunku energię ze źródła energii. Rzeczywiste źródło SEM ma opór wewnętrzny r , a więc energia jest w nim także zamieniana na wewnętrzną energię termiczną, czyli ulega rozproszeniu na oporze wewnętrznym. Połączymy te zmiany energii.

Jak pamiętamy (zob. p. 24.3), wypadkowa szybkość P (moc) procesu przekazywania energii ze źródła SEM nośnikom ładunku jest dana wzorem

$$P = IU, \quad (25.6)$$

gdzie U oznacza różnicę potencjałów między biegunami źródła SEM. Dla rzeczywistej baterii mamy

$$U = \mathcal{E} - Ir,$$

gdzie r oznacza opór wewnętrzny baterii. Podstawiając tę wielkość do wzoru (25.6) otrzymujemy

$$P = I(\mathcal{E} - Ir) = I\mathcal{E} - I^2r.$$

Człon I^2r w tym wzorze jest szybkością zamiany energii na energię termiczną w źródle SEM:

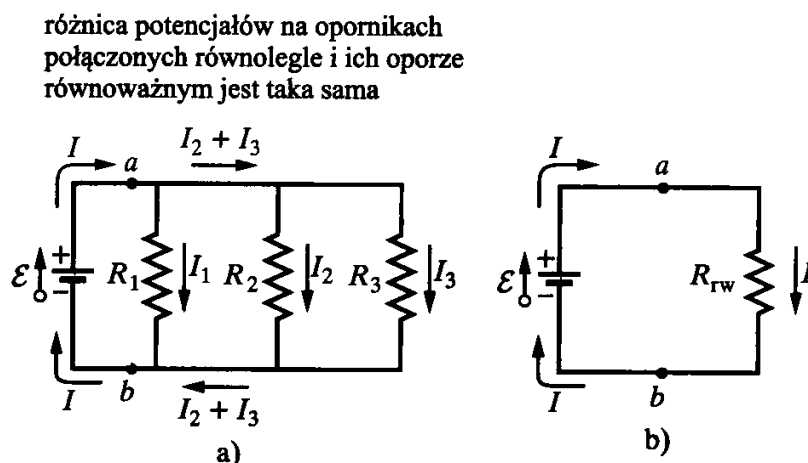
$$P_r = I^2r,$$

a człon $I\mathcal{E}$ jest mocą P_{SEM} przekazu energii przez źródło zarówno nośnikom ładunku, jak i na rzecz wewnętrznej energii termicznej, czyli

$$P_{SEM} = I\mathcal{E}.$$

25.2. Obwody elektryczne o wielu oczkach

Rozpatrzmy oporniki połączone równolegle, jak na rys. 25.3, które są podłączone do doskonałego źródła o SEM równej \mathcal{E} . Różnica potencjałów U jest przyłożona do każdej pary połączonych końcówek, a więc na wszystkich trzech opornikach mamy taką samą różnicę potencjałów U , która wytwarza prąd w każdym z oporników. Oporniki połączone równolegle można zastąpić równoważnym opornikiem R_{rw} , do którego końców jest przyłożona taka sama różnica potencjałów U i przez który przepływa prąd o natężeniu I równym sumie natężeń prądów w opornikach połączonych równolegle.



Rys. 25.3. Trzy oporniki połączone równolegle

Aby wyprowadzić wzór na opór R_{rw} , zapiszmy najpierw wartości natężeń prądu w każdym z oporników. Mamy

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3},$$

gdzie U oznacza różnicę potencjałów między punktami a i b . Jeżeli zastosujemy pierwsze prawo Kirchhoffa w punkcie a z rys. 25.3 a) i podstawimy te wartości, to otrzymamy

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (25.7)$$

Gdybyśmy zastąpili oporniki połączone równolegle opornikiem równoważnym R_{rw} (jak na rys. 25.3 b)), to mielibyśmy

$$I = \frac{U}{R_{rw}}. \quad (25.8)$$

Przez porównanie wzorów (25.7) i (25.8) otrzymujemy

$$\frac{1}{R_{rw}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Uogólnienie tego wzoru na przypadek n oporników ma postać

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

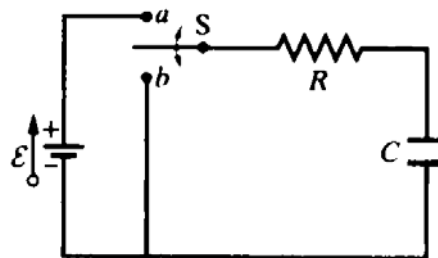
Do pomiarów w obwodach elektrycznych można wykorzystać trzy przyrządy:

- amperomierz, który służy do pomiaru natężenia prądu,
- woltomierz stosowany do pomiaru napięcia, czyli różnicy potencjałów,
- multimetr, który stosuje się do pomiaru natężenia prądu, napięcia i oporu.

25.3. Obwody RC

Dotychczas zajmowaliśmy się obwodami, w których płyną prądy stałe, czyli prądy o natężeniach nie ulegających zmianie w czasie. Rozważmy teraz prądy zmienne.

Kondensator o pojemności C na rys. 25.4 jest początkowo nienaładowany. Aby go naładować, należy klucz S przesunąć do punktu a . Powstaje wówczas *obwód szeregowy RC*, który składa się z kondensatora, doskonałego źródła o SEM równej \mathcal{E} i opornika o oporze R .



Rys. 25.4. Obwód szeregowy RC

Z chwilą zamknięcia obwodu zaczyna przepływać ładunek między okładką kondensatora i biegunem baterii po każdej stronie kondensatora. Ten prąd zwiększa ładunek q na okładkach i różnicę potencjałów $U_C = q/C$ na kondensatorze. Gdy ta różnica potencjałów stanie się równa różnicy potencjałów na źródle (równej tu SEM o wartości \mathcal{E}), natężenie prądu stanie się równe zero. Zgodnie ze wzorem $q = CU$ stacjonarny (końcowy) ładunek na całkowicie wtedy naładowanym kondensatorze wynosi $C\mathcal{E}$.

Chcemy zbadać proces ładowania, czyli wiedzieć, jak podczas tego procesu zmieniają się w czasie: ładunek $q(t)$ na okładkach kondensatora, różnica potencjałów $U_C(t)$ na kondensatorze i natężenie prądu $I(t)$ w obwodzie. Z drugiego prawa Kirchhoffa, przechodząc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (od ujemnego bieguna baterii) otrzymujemy

$$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0. \quad (25.9)$$

Ostatni wyraz po lewej stronie równania przedstawia różnicę potencjałów na kondensatorze. Wyraz ten jest ujemny, ponieważ górna okładka kondensatora, połączona z dodatnim biegunem baterii, ma większy potencjał niż okładka dolna. Zmienne I oraz q są ze sobą powiązane zależnością

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do wzoru (25.9) otrzymujemy równanie

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}, \quad (25.10)$$

którego rozwiązaniem jest

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}). \quad (25.11)$$

Funkcja $q = q(t)$ dana wzorem (25.11) określa ładowanie kondensatora. W chwili $t = 0$ wyraz $e^{-t/RC}$ ma wartość 1 i otrzymujemy wówczas $q = 0$. Przy $t \rightarrow \infty$ mamy $e^{-t/RC} \rightarrow 0$ i wzór (25.11) daje poprawną wartość końcowego (stacjonarnego) ładunku na kondensatorze $q = C\mathcal{E}$.

Pochodna funkcji $q(t)$ względem czasu jest równa natężeniu prądu $I(t)$ ładującego kondensator. Mamy

$$I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right) e^{-t/RC}.$$

Ze wzoru tego wynika, że wartość początkowa natężenia prądu wynosi \mathcal{E}/R i że natężenie maleje do zera, gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

Ze wzorów $q = CU$ i (25.11) możemy wyznaczyć różnicę potencjałów $U_C(t)$ na kondensatorze podczas ładowania. Otrzymamy

$$U_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$$

Ze wzoru tego widać, że $U_C = 0$ dla $t = 0$ oraz $U_C \rightarrow \mathcal{E}$ przy $t \rightarrow \infty$, czyli gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

Iloczyn RC występujący w podanych wzorach ma wymiar czasu (bo $1 \Omega \cdot 1 \text{ F} = 1 \text{ s}$). Nazywamy go *pojemnościową stałą czasową* obwodu i oznaczamy symbolem τ .

Załóżmy teraz, że kondensator na rys. 25.4 jest całkowicie naładowany do różnicy potencjałów U_0 równej SEM o wartości \mathcal{E} źródła i w chwili $t = 0$ klucz S przestawiamy z punktu a do punktu b . Kondensator może więc rozładowywać się przez opornik R .

Równanie różniczkowe opisujące funkcję $q(t)$ jest identyczne z równaniem (25.10), lecz z powodu braku źródła należy przyjąć $\mathcal{E} = 0$, czyli mamy

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$q = q_0 e^{-t/RC}, \quad (25.12)$$

gdzie $q_0 = CU_0$ oznacza początkowy ładunek na kondensatorze.

Ze wzoru (25.12) wynika, że ładunek q maleje wykładniczo w czasie z szybkością zależną od pojemnościowej stałej czasowej $\tau = RC$. Zauważmy, że większa stała τ oznacza dłuższy czas rozładowania.

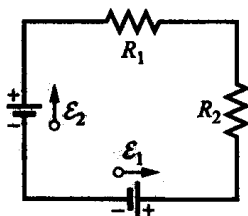
Jeżeli zróżniczkujemy funkcję $q(t)$ daną wzorem (25.12) względem czasu, to otrzymamy natężenie prądu $I(t)$:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/RC}.$$

Ze wzoru tego wynika, że natężenie prądu także maleje wykładniczo w czasie z szybkością określoną przez pojemnościową stałą czasową τ . Znak minus oznacza, że prąd rozładowania kondensatora płynie w kierunku przeciwnym niż prąd jego ładowania.

Zadania

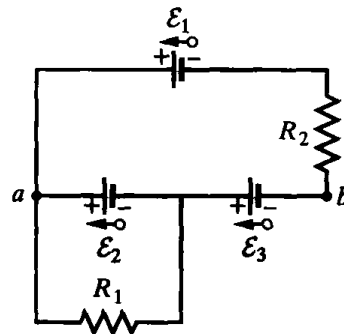
- Siły elektromotoryczne doskonałych źródeł na rys. 25.5 wynoszą $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$ i $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ V}$. Znaleźć:
 - natężenie prądu w obwodzie,
 - moc, z jaką energia jest zamieniana na energię termiczną w oporniku 1 (4Ω),
 - oporniku 2 (8Ω),
 - moc źródła 1,
 - moc źródła 2.
 Czy energia jest dostarczana, czy absorbowana przez
 - źródło 1,
 - źródło 2?



Rys. 25.5. Zadanie 1

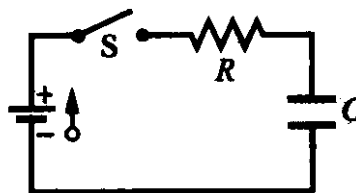
- Akumulator samochodowy o SEM równej 12 V i oporze wewnętrznym $0,04 \Omega$ jest ładowany prądem o natężeniu 50 A .
 - Ile wynosi różnica potencjałów na jego biegunach?

- b) Ile wynosi moc P_r , z jaką energia zmienia się na energię termiczną w akumulatorze?
 c) Ile wynosi moc P_{SEM} przekształcania energii elektrycznej w energię chemiczną?
3. Przewodnik o oporze 5Ω jest połączony ze źródłem, którego SEM wynosi 2 V , a opór wewnętrzny 1Ω .
- a) Ile energii przekształca się z chemicznej w elektryczną w ciągu 2 minut?
 b) Ile energii wydziela się w przewodniku w postaci energii termicznej w tym samym czasie?
4. Dołączając do opornika o oporze $R = 12 \Omega$ opornik o nieznanym oporze, chcemy uzyskać opór zastępczy, który wynosi 3Ω .
- a) Ile musi wynosić opór tego nieznanego opornika?
 b) Czy opornik powinien być połączony szeregowo, czy równoległe?
5. Cztery oporniki o oporach 18Ω połączono równoległe i dołączono do doskonałego źródła o SEM równej 25 V . Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez źródło?
6. Na rys. 25.6 mamy $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 6 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}$ i $\mathcal{E}_3 = 4 \text{ V}$. Znaleźć:
- a) natężenie prądu płynącego przez opornik 1,
 b) natężenie prądu płynącego przez opornik 2,
 c) różnicę potencjałów między punktami a i b .



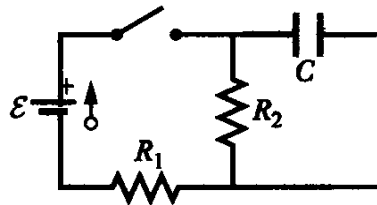
Rys. 25.6. Zadanie 6

7. Przełącznik S na rys. 25.7 jest w chwili $t = 0$ zamknięty, aby rozpocząć ładowanie początkowo rozładowanego kondensatora o pojemności $C = 15 \mu\text{F}$ przez opornik o oporze $R = 20 \Omega$. Po jakim czasie różnica potencjałów na okładkach kondensatora będzie równa różnicy potencjałów na końcach opornika?



Rys. 25.7. Zadanie 7

8. Jaka wielokrotnością pojemnościowej stałej czasowej τ jest czas, po jakim początkowo nienaładowany kondensator w szeregowym obwodzie RC naładuje się do 99 % swojego końcowego ładunku?
9. Opornik o oporze $15\text{ k}\Omega$ i kondensator zostały połączone szeregowo i następnie nagle przyłożono do nich różnicę potencjałów 12 V . Różnica potencjałów na kondensatorze wzrosła do 5 V w ciągu $1,3\text{ }\mu\text{s}$.
 - a) Obliczyć pojemnościową stałą czasową obwodu.
 - b) Znaleźć pojemność kondensatora.
10. Na rys. 25.8 mamy $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 15\text{ k}\Omega$, $C = 0,4\text{ }\mu\text{F}$, a SEM doskonałej baterii wynosi $\mathcal{E} = 20\text{ V}$. Na początku przełącznik był bardzo długo zamknięty, aż osiągnięto stan równowagi. Następnie w chwili $t = 0$ przełącznik został otwarty. Jakie było natężenie prądu płynącego przez opornik 2 w chwili $t = 4\text{ }\mu\text{s}$?



Rys. 25.8. Zadanie 10

XXVI. POLE MAGNETYCZNE

26.1. Pole magnetyczne i definicja indukcji magnetycznej

Jak już wiemy, pole elektryczne jest wytwarzane przez ładunek elektryczny. Można by oczekiwać, że pole magnetyczne jest wytwarzane przez ładunek magnetyczny, ale istnienie takich ładunków nie zostało jeszcze potwierdzone. Pole magnetyczne można wytworzyć dwoma sposobami. Pierwszy sposób polega na użyciu poruszających się cząstek naładowanych elektrycznie do zbudowania elektromagnesu. Drugi sposób wykorzystuje pewną właściwość cząstek elementarnych, takich jak elektron, które mają wewnętrzne właściwości magnetyczne i wytwarzają wokół siebie pole magnetyczne. Pola magnetyczne elektronów w niektórych materiałach sumują się i wytwarzają wokół nich wypadkowe pole magnetyczne. Takie zjawisko występuje w magnesach trwałych.

Wielkością charakterystyczną pola magnetycznego jest wektor \vec{B} , który nazywa się *indukcją magnetyczną* danego pola. Jest on skierowany wzdłuż osi odpowiadającej kierunkowi prędkości cząstek, dla których siła na nie działająca jest równa zeru. Mierząc wartość tej siły \vec{F}_B , gdy wektor prędkości \vec{v} jest skierowany prostopadłe do wspomnianej osi, możemy zdefiniować wartość bezwzględną B :

$$B = \frac{F_B}{|q|v},$$

gdzie q oznacza ładunek cząstki. Podane wyniki mogą być zebrane w postaci równania wektorowego

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (26.1)$$

zgodnie z którym siła \vec{F}_B działająca na cząstkę jest równa ładunkowi cząstki pomnożonemu przez iloczyn wektorowy jej prędkości \vec{v} i indukcji magnetycznej \vec{B} . Z określenia iloczynu wektorowego można zapisać wartość siły F_B jako

$$F_B = |q|vB \sin \phi,$$

gdzie ϕ oznacza kąt między kierunkami wektorów prędkości \vec{v} i indukcji magnetycznej \vec{B} .

Niezależnie od znaku ładunku siła \vec{F}_B działająca na naładowaną cząstkę, która porusza się z prędkością \vec{v} w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , jest zawsze prostopadła do wektorów \vec{v} i \vec{B} . Siła ta nie ma nigdy składowej równoległej do wektora \vec{v} , co oznacza, że siła \vec{F}_B nie może zmienić wartości prędkości v cząstki (siła ta może zmienić tylko kierunek prędkości cząstki).

Jednostką indukcji magnetycznej \vec{B} w układzie SI jest niuton na kolumb razy metr na sekundę. Jednostkę tę nazwano *teslą* (T):

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot (\text{m/s})} = 1 \frac{\text{N}}{(\text{C/s}) \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

Starszą, ale wciąż jeszcze używaną jednostką indukcji magnetycznej (spoza układu SI) jest *gauss* (Gs), przy czym

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs.}$$

Pole magnetyczne można zilustrować za pomocą linii pola, podobnie jak pole elektryczne. Obowiązują przy tym podobne zasady: kierunek stycznej do linii pola magnetycznego jest kierunkiem indukcji magnetycznej \vec{B} w tym punkcie oraz odległość między liniami określa wartość tego wektora – pole magnetyczne jest silniejsze tam, gdzie linie przebiegają bliżej siebie. Zamknięte linie pola są skierowane do magnesu z jednego końca i od magnesu z drugiego końca. Koniec magnesu, z którego linie wychodzą nazywa się *biegunem północnym*, a koniec, do którego linie wchodzi nazywa się *biegunem południowym*. Ponieważ magnes ma dwa bieguny, mówimy, że jest on *dipolem magnetycznym*. Należy pamiętać, że różnoimienne bieguny magnetyczne przyciągają się, a jednoimienne bieguny magnetyczne odpychają się.

26.2. Ruch cząstek naładowanych po okręgu w polu magnetycznym

Cząstka naładowana o masie m i ładunku $|q|$ poruszająca się z prędkością \vec{v} prostopadłą do jednorodnego pola magnetycznego \vec{B} będzie poruszać się po okręgu. Z drugiej zasady dynamiki Newtona zastosowanej do jednostajnego ruchu po okręgu wynika, że

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r},$$

skąd można wyznaczyć promień okręgu

$$r = \frac{mv}{|q|B}.$$

Częstotliwość ν , częstotliwość kołowa ω i okres T ruchu po okręgu spełniają związki

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}.$$

Ruch cząstek po okręgu w polu magnetycznym został wykorzystany w cyklotronie, gdzie cząstki są przyspieszane siłami elektrycznymi. Aby przyspieszać cząstki do prędkości zbliżonych do prędkości światła, korzysta się z synchrotronów (opis tych urządzeń pomijamy).

26.3. Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

Na prostoliniowy przewodnik z prądem o długości L i o natężeniu I znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym działa skierowana prostopadle do przewodnika siła

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}. \quad (26.2)$$

Siła działająca na element $d\vec{L}$ przewodnika z prądem ma postać

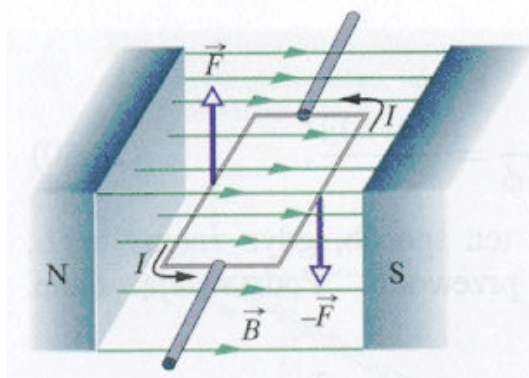
$$d\vec{F}_B = Id\vec{L} \times \vec{B}.$$

Wektory \vec{L} i $d\vec{L}$ opisujące ustawienie przewodnika z prądem są skierowane zgodnie z kierunkiem przepływu prądu.

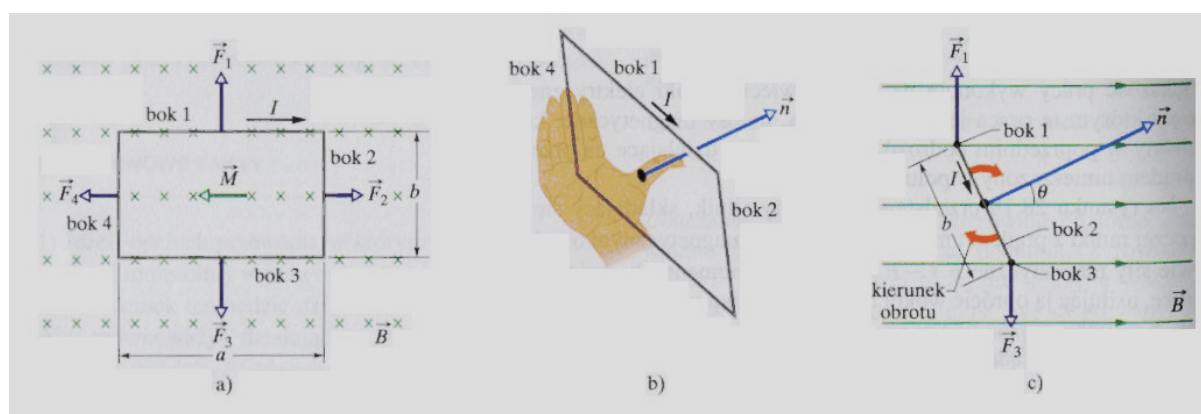
26.4. Moment siły działający na ramkę z prądem

Większość pracy na świecie wykonują silniki elektryczne. Siły, dzięki którym ta praca jest wykonywana, to siły magnetyczne, czyli siły działające na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym.

Prosty silnik, składający się z pojedynczej ramki z prądem umieszczonej w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , przedstawiono na rys. 26.1. Dwie siły magnetyczne \vec{F} i $-\vec{F}$ wytwarzają moment siły, który działa na ramkę, usiłując ją obrócić wokół osi.



Rys. 26.1. Części składowe silnika elektrycznego



Rys. 26.2. Prostokątna ramka, w której płynie prąd, umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym

Na rys. 26.2 a) przedstawiono w rzucie prostokątnym ramkę o bokach a i b , w której płynie prąd o natężeniu I . Ramka jest umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} w taki sposób, że jej dłuższe boki, oznaczone jako 1 i 3, są prostopadłe do kierunku wektora indukcji. Do określenia ustawienia ramki w polu magnetycznym używamy wektora normalnego \vec{n} , który jest prostopadły do płaszczyzny ramki. Jego kierunek ustalamy na podstawie reguły

prawej dłoni, w której palce ustawiamy w kierunku płynięcia prądu (zob. rys. 26.2 b)). Na rys. 26.2 c) przedstawiono ramkę, której wektor normalny jest skierowany pod pewnym kątem θ do kierunku wektora indukcji magnetycznej \vec{B} i dla takiego ustawienia ramki wyznaczamy wypadkową siłę i wypadkowy moment siły, które działają na ramkę.

Wypadkowa siła działająca na ramkę jest sumą wektorową sił działających na jej cztery boki. Dla boku 2 kierunek wektora \vec{L} w równaniu (26.2) jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu, a jego długość wynosi b . Kąt między wektorami \vec{L} i \vec{B} wynosi $90^\circ - \theta$, a więc wartość siły działającej na ten bok jest równa

$$F_2 = IbB \sin(90^\circ - \theta) = IbB \cos \theta.$$

Siła \vec{F}_4 działająca na bok 4 ma taką samą wartość, jak siła \vec{F}_2 , ale jest przeciwnie skierowana. Zatem siły \vec{F}_2 i \vec{F}_4 równoważą się, co oznacza, że ich wypadkowa jest równa zero. Działają one wzdłuż tej samej prostej przechodzącej przez środek ramki i dlatego związany z nimi wypadkowy moment siły jest równy zero.

W przypadku boków 1 i 3 jest inaczej. Wektor \vec{L} jest tu prostopadły do wektora \vec{B} , a siły \vec{F}_1 i \vec{F}_3 mają taką samą wartość IaB . Siły te są skierowane przeciwnie, a więc nie powodują przesunięcia ramki ani w górę, ani w dół. Jednak siły te nie działają wzdłuż tej samej prostej (zob. rys. 26.2 c)), co powoduje, że powstaje wypadkowy moment siły. Moment ten usiłuje obrócić ramkę tak, by ustawić jej wektor normalny \vec{n} wzdłuż kierunku wektora indukcji magnetycznej \vec{B} . Ramiona tych sił względem osi obrotu ramki wynoszą $(b/2)\sin \theta$. Wartość momentu siły M' wywołanego działaniem sił \vec{F}_1 i \vec{F}_3 wynosi zatem

$$M' = \left(IaB \frac{b}{2} \sin \theta \right) + \left(IaB \frac{b}{2} \sin \theta \right) = IabB \sin \theta.$$

Jeśli pojedynczą ramkę zastąpimy cewką złożoną z N zwojów, to powyższy moment siły działa na każdy zwoj i mamy

$$M = NM' = NIabB \sin \theta = (NIS)B \sin \theta, \quad (26.3)$$

gdzie $S = ab$ oznacza pole powierzchni objętej przez cewkę. Wielkości w nawiasach (NIS) występują razem, bo opisują właściwości cewki: liczbę zwojów, natężenie prądu i pole powierzchni. Równanie (26.3) jest słuszne dla wszystkich płaskich cewek pod warunkiem, że pole magnetyczne jest jednorodne. Na przykład dla cewki o przekroju kołowym i promieniu r mamy

$$M = (NI\pi r^2)B \sin \theta.$$

26.5. Dipolowy moment magnetyczny

Moment siły działający na cewkę w polu magnetycznym można wyrazić wprowadzając pojęcie *magnetycznego momentu dipolowego* cewki, który będziemy oznaczać $\vec{\mu}$. Kierunek tego wektora wybieramy zgodnie z kierunkiem wektora normalnego \vec{n} prostopadłego do płaszczyzny cewki, a jego wartość definiujemy jako

$$\mu = NIS,$$

gdzie N oznacza liczbę zwojów cewki, I – natężenie prądu płynącego przez cewkę, a S – pole powierzchni objętej przez każdy zwoj cewki. Ze wzoru tego wynika, że jednostką momentu magnetycznego jest amper razy metr kwadratowy ($A \cdot m^2$).

Za pomocą dipolowego momentu magnetycznego równanie (26.3) można zapisać w postaci

$$M = \mu B \sin \theta,$$

gdzie θ oznacza kąt między wektorami $\vec{\mu}$ i \vec{B} . Równanie to można zapisać także w postaci wektorowej:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

które przypomina równanie dla momentu siły wywieranego przez pole elektryczne na dipol elektryczny, czyli równanie

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Dipol magnetyczny ma w zewnętrznym polu magnetycznym pewną energię, która zależy od ustawienia dipola w polu magnetycznym. Przez analogię do odpowiedniego wzoru dla dipola elektrycznego definiujemy tzw. energię orientacji dipola magnetycznego następująco:

$$E_p(\theta) = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (26.4)$$

(dla dipola elektrycznego wzór ma postać $E_p(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$).

Jeśli siły zewnętrzne powodują obrót dipola magnetycznego, zmieniając jego początkową orientację opisaną kątem θ_{pocz} na orientację opisaną kątem θ_{konc} , to praca sił zewnętrznych wykonana nad tym dipolem jest równa

$$W_{zewn} = \Delta E_p = E_{p\ konc} - E_{p\ pocz},$$

gdzie obie energie są wyznaczone z równania (26.4).

Zadania

- Na proton, który porusza się pod kątem 23° do kierunku wektora indukcji o wartości 2,6 mT, działa siła magnetyczna o wartości $6,5 \cdot 10^{-17}$ N. Obliczyć:
 - prędkość protonu,
 - jego energię kinetyczną w elektronowoltach.
- W wyniku niektórych reakcji jądrowych powstają cząstki α składające się z dwóch protonów i dwóch elektronów. Mają one ładunek $+2e$ i masę $4,00 \mu$, gdzie μ oznacza jednostkę masy atomowej równą $1,661 \cdot 10^{-27}$ kg. Dla cząstki α poruszającej się po okręgu o promieniu 4,5 cm w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 1,2$ T obliczyć:
 - prędkość cząstki,
 - okres w ruchu po okręgu,
 - energię kinetyczną w elektronowoltach,
 - różnicę potencjałów, która przyspieszyłaby cząstkę aż do osiągnięcia przez nią takiej samej energii, jak w przypadku ruchu po okręgu.
- Elektron o energii kinetycznej 1,2 keV krąży w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wektora indukcji w jednorodnym polu magnetycznym. Promień orbity jest równy 25 cm. Obliczyć:
 - prędkość elektronu,
 - indukcję magnetyczną,
 - częstotliwość,

- d) okres ruchu po okręgu.
4. Jaka powinna być wartość indukcji jednorodnego pola magnetycznego przyłożonego prostopadle do wiązki elektronów, które poruszają się z prędkością $1,3 \cdot 10^6$ m / s, aby elektrony krążyły po łuku okręgu o promieniu 0,35 m?
 5. W poziomej linii przesyłowej płynie z południa na północ prąd o natężeniu 5000 A. Ziemskie pole magnetyczne ($60 \mu\text{T}$) jest skierowane na północ i nachylone w dół pod kątem 70° do poziomu. Wyznaczyć:
 - a) wartość,
 - b) kierunek siły magnetycznej, która działa na 100 m przewodu linii w ziemskim polu magnetycznym.
 6. Pojedyncza ramka, przez którą płynie prąd o natężeniu 4 A, ma kształt trójkąta prostokątnego o bokach 50, 120 i 130 cm. Ramka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 75 mT, a kierunek wektora indukcji jest równoległy do kierunku prądu w boku ramki o długości 130 cm. Jaka jest wartość siły magnetycznej działającej na:
 - a) bok o długości 130 cm,
 - b) bok o długości 50 cm,
 - c) bok o długości 120 cm?
 - d) Jaka jest wartość wypadkowej siły działającej na ramkę?
 7. Okrągła cewka o 160 zwojach ma promień 1,9 cm.
 - a) Obliczyć natężenie prądu, który wytwarza dipolowy moment magnetyczny o wartości $2,3 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.
 - b) Obliczyć wartość maksymalnego momentu siły działającej na cewkę, w której płynie prąd o tym natężeniu w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 35 mT.
 8. Ramka, przez którą płynie prąd o natężeniu 5 A, ma kształt trójkąta prostokątnego o bokach 30, 40 i 50 cm. Ramka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 80 mT, której kierunek jest równoległy do kierunku prądu przepływającego przez bok trójkąta o długości 50 cm. Wyznaczyć wartości:
 - a) dipolowego momentu magnetycznego ramki,
 - b) momentu siły działającego na ramkę.

XXVII. POLE MAGNETYCZNE WYWOŁANE PRZEPLYWEM PRĄDU

27.1. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu

Pole magnetyczne wytwarzane w otoczeniu przewodu, w którym płynie prąd, może być wyznaczone na podstawie prawa Biota-Savarta. Prawo to stwierdza, że przyczynk $d\vec{B}$ do indukcji magnetycznej wytwarzany przez element prądu $I d\vec{s}$ w punkcie P w odległości r od tego elementu jest równy

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}.$$

We wzorze tym \hat{r} oznacza wektor jednostkowy wyznaczający kierunek od elementu prądu do punktu P . Wielkość μ_0 nazywa się przenikalnością magnetyczną próżni i ma wartość

$$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}.$$

Dla długiego prostoliniowego przewodu, przez który płynie prąd, prawo Biota-Savarta pozwala wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej w punkcie, którego odległość od przewodu jest równa R :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (27.1)$$

Wartość indukcji magnetycznej w wierzchołku łuku o kącie środkowym ϕ i promieniu R utworzonego przez przewód, przez który płynie prąd o natężeniu I , wynosi (pomijamy wyprowadzenie tego wzoru)

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi R}.$$

27.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem

Dwa równoległe przewody, w których płyną prądy, działają na siebie siłami. Załóżmy, że przewody te, oznaczone przez a i b , są odległe od siebie o d i niech w nich płyną prądy o natężeniach I_a i I_b . Prąd płynący w przewodzie a wytwarza pole magnetyczne o indukcji \vec{B}_a i pole to powoduje powstanie siły działającej na przewód b . Aby wyznaczyć siłę, musimy znać wartość i kierunek wektora indukcji \vec{B}_a w miejscu, w którym znajduje się przewód b . Ze wzoru (27.1) wynika, że wartość \vec{B}_a w każdym punkcie przewodu b jest równa

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}.$$

Zgodnie ze wzorem (26.2) siła \vec{F}_{ba} wytworzona przez zewnętrzne pole o indukcji \vec{B}_a i działająca na odcinek przewodu b o długości L jest równa

$$\vec{F}_{ba} = I_b \vec{L} \times \vec{B}_a,$$

gdzie \vec{L} oznacza wektor długości przewodu. Wektory \vec{L} i \vec{B}_a są prostopadłe, więc

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}.$$

Z reguły prawej dłoni zastosowanej do wektorów \vec{L} i \vec{B}_a wynika, że wektor \vec{F}_{ba} jest skierowany w stronę przewodu a .

Odnotujmy, że przewody, w których płyną prądy równoległe przyciągają się, a te, w których płyną prądy antyrównoległe, odpychają się.

27.3 Prawo Ampère'a

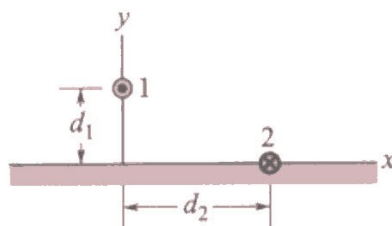
Prawo Ampère'a ma postać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p,$$

gdzie I_p oznacza wypadkowe natężenie prądu przepływającego przez powierzchnię ograniczoną konturem całkowania, a $d\vec{s}$ – element konturu (iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ma być całkowany wzdłuż zamkniętego konturu).

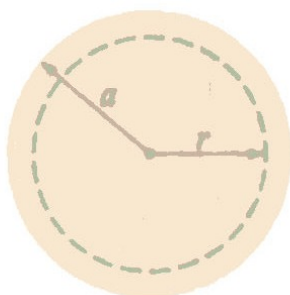
Zadania

- Geodeta używa kompasu w miejscu znajdującym się 6,1 m poniżej linii energetycznej, w której płynie prąd o natężeniu 100 A.
 - Jakie pole magnetyczne wytwarza linia energetyczna w miejscu, w którym znajduje się geodeta?
 - Czy to pole będzie w sposób istotny zakłócało wskazania kompasu?
Pozioma składowa indukcji magnetycznej ziemskiego pola w tym miejscu jest równa $20 \mu\text{T}$.
- W pewnym miejscu na Filipinach ziemskie pole magnetyczne o indukcji $39 \mu\text{T}$ jest poziome i skierowane na północ. Przypuśćmy, że wypadkowa indukcja pola jest równa zeru dokładnie 8 cm nad długim, prostoliniowym i poziomym przewodem, w którym płynie prąd stały. Wyznaczyć:
 - natężenie prądu,
 - kierunek prądu.
- Na rys. 27.1 przedstawiono przekrój poprzeczny przez układ składający się z dwóch długich prostoliniowych przewodów z prądem. Przez przewód 1, leżący w odległości $d_1 = 2,4$ cm od pewnej płaszczyzny, płynie prąd o natężeniu 4 mA skierowany przed płaszczyznę rysunku. Przez przewód 2, równoległy do przewodu 1 i leżący na tej płaszczyźnie w odległości $d_2 = 5$ cm od rzutu prostopadłego przewodu 1 na płaszczyznę, płynie prąd o natężeniu 6,8 mA skierowany za płaszczyznę rysunku. Wyznaczyć składową x siły magnetycznej działającej na przewód 2 wskutek przepływu prądu w przewodzie 1.



Rys. 27.1. Zadanie 3

4. Na rys. 27.2 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego walcowego przewodnika o promieniu $a = 2$ cm, w którym płynie prąd o natężeniu 170 A. Wyznaczyć wartość indukcji pola magnetycznego
- na osi walca, w odległości
 - 1 cm od osi walca,
 - 2 cm od osi walca (czyli na jego powierzchni),
 - 4 cm od osi walca.



Rys. 27.2. Zadanie 4

XXVIII. ZJAWISKO INDUKCYJNOŚCI I INDUKCYJNOŚĆ

28.1. Prawo Faradaya i reguła Lenza

Wiemy już, że przepływ prądu wytwarza pole magnetyczne. Okazuje się, że pole magnetyczne może być źródłem pola elektrycznego powodującego przepływ prądu. Związek między polem magnetycznym i wytwarzanym (czyli *indukowanym*) przez nie polem elektrycznym jest opisany przez prawo Faradaya.

O wytwarzaniu prądu przez pole magnetyczne można przekonać się za pomocą prostego doświadczenia. Jeżeli utworzymy przewodzącą pętlę połączoną z czułym amperomierzem, to po przesunięciu magnesu sztabkowego w kierunku pętli w obwodzie pojawi się prąd (zob. rys. 28.1). Prąd znika, gdy magnes przestaje poruszać się. Przy odsuwaniu magnesu prąd znowu popłynie, ale w przeciwnym kierunku. Z podobną sytuacją będziemy mieć do czynienia, gdy obok pętli z amperomierzem ustawimy obwód, przez który płynie prąd (będzie on wytwarzać pole magnetyczne).



Rys. 28.1. Wzbudzanie prądu przez przesuwanie magnesu

Aby zdefiniować prawo Faradaya, musimy obliczyć „ilość” pola magnetycznego przechodzącego przez pętlę. W podobny sposób, jak zdefiniowaliśmy strumień elektryczny (zob. p. 21.1), definiujemy strumień magnetyczny:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (28.1)$$

gdzie $d\vec{S}$ oznacza wektor o wartości dS i kierunku prostopadłym do elementu powierzchni dS , a \vec{B} oznacza indukcję pola magnetycznego. Jeśli pętla leży w pewnej płaszczyźnie, a linie pola

magnetycznego są prostopadłe do tej płaszczyzny, to iloczyn skalarny w tym równaniu jest równy $BdS \cos 0^\circ = BdS$. Ponadto, gdy pole magnetyczne jest jednorodne, to wielkość B można wyłączyć przed znak całki i wówczas pozostała całka przedstawia pole powierzchni S pętli. W tym przypadku mamy zatem

$$\Phi_B = BS. \quad (28.2)$$

Z równania tego, a także z równania (28.1) wynika, że w układzie SI jednostką strumienia jest tesla razy metr kwadratowy. Jednostkę tę nazwano *weberem* (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2.$$

Stosując pojęcie strumienia magnetycznego, prawo Faradaya można sformułować następująco: wartość SEM indukowanej w przewodzącej pętli jest równa szybkości, z jaką strumień magnetyczny przechodzący przez tę pętlę zmienia się w czasie, czyli

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (28.3)$$

gdzie znak minus oznacza przeciwdziałanie. Jeżeli zmieniamy strumień pola magnetycznego w cewce złożonej z N zwojów, to indukowana SEM pojawia się w każdym zwoju. Wówczas

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Po odkryciu przez Faradaya prawa indukcji Lenz sformułował regułę umożliwiającą wyznaczenie kierunku prądu indukowanego w obwodzie. Reguła ta mówi, że prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje. Ponadto kierunek indukowanej SEM jest taki sam, jak kierunek prądu indukowanego.

28.2. Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

Występowanie prądów indukowanych wskutek zmiany strumienia magnetycznego oznacza, że takiemu prądowi jest przekazywana pewna energia. Energia ta może następnie przybrać inne formy, na przykład może zostać przekształcona w energię termiczną.

Jeżeli zamkniętą ramkę będziemy przesuwac ze stałą prędkością \vec{v} w polu magnetycznym, to należy do niej przyłożyć siłę \vec{F} , która będzie przeciwstawiała się sile magnetycznej o takiej samej wartości działającej w przeciwnym kierunku. Szybkość, z jaką wykonywana jest praca, czyli moc, jest równa

$$P = Fv,$$

gdzie F oznacza wartość przyłożonej siły. Naszym celem jest znalezienie wyrażenia opisującego moc P w zależności od wartości indukcji magnetycznej B , rozmiaru ramki L (jej szerokości) i oporu R stawianego prądowi.

Jeżeli przez x oznaczymy długość tej części ramki, która wciąż znajduje się w polu magnetycznym, to pole powierzchni tej części jest równe Lx . Zgodnie z równaniem (28.2) mamy

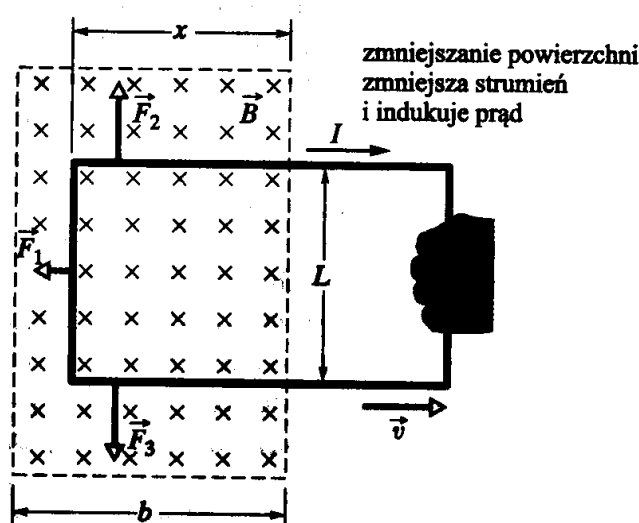
$$\Phi_B = BS = BLx.$$

Gdy wartość x maleje, to maleje również strumień magnetyczny. Zgodnie z prawem Faradaya zmniejszenie się strumienia indukuje SEM w pętli. Pomijając znak minus w równaniu (28.3), możemy zapisać

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BLx) = BL \frac{dx}{dt} = BLv, \quad (28.4)$$

gdzie v oznacza prędkość poruszania się ramki. Aby wyznaczyć natężenie prądu indukowanego, stosujemy równanie $I = \mathcal{E} / R$, skąd po uwzględnieniu zależności (28.4) mamy

$$I = \frac{BLv}{R}. \quad (28.5)$$



Rys. 28.2. Ramka w polu magnetycznym

Trzy odcinki ramki (zob. rys. 28.2), przez które płynie prąd, znajdują się w polu magnetycznym, więc na odcinki te będą działały siły do nich prostopadłe. Siły te mogą być zapisane w postaci (zob. wzór (26.2))

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}. \quad (28.6)$$

Na rys. 28.2 siły te są oznaczone jako \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 . Siły \vec{F}_2 i \vec{F}_3 mają jednakowe wartości i są przeciwnie skierowane, a więc równoważą się. Pozostaje tylko siła \vec{F}_1 , która jest skierowana przeciwnie do siły \vec{F} , z jaką działamy na ramkę, czyli mamy $\vec{F} = -\vec{F}_1$.

Kąt między wektorem \vec{B} i wektorem długości \vec{L} jest równy 90° dla odcinka po lewej stronie ramki. Posługując się równaniem (28.6) do wyznaczenia wartości siły \vec{F}_1 , mamy

$$F = F_1 = ILB \sin 90^\circ = ILB.$$

Podstawiając do tej zależności równanie (28.5), otrzymujemy

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R}.$$

Ponieważ wielkości B , L i R są stałymi, więc prędkość v też będzie stała, o ile wartość siły, z jaką działamy na ramkę, będzie też stała.

Jeżeli ostatnie równanie podstawimy do pierwotnej zależności $P = Fv$, to otrzymamy

$$P = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}.$$

Szybkość wydzielania się energii termicznej w ramce podczas wyciągania jej ze stałą prędkością z obszaru pola magnetycznego obliczymy z równania $P = I^2 R$. Mamy

$$P = \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R},$$

czyli dokładnie takie samo wyrażenie. Oznacza to, że praca wykonywana podczas przesuwania ramki w polu magnetycznym ulega w całości przekształceniu w energię termiczną w ramce.

28.3. Indukowane pole elektryczne

Zmiana strumienia magnetycznego indukuje SEM nawet wtedy, gdy powierzchnia, dla której wyznaczamy strumień, nie jest ograniczona pętlą przewodzącą, ale dowolną linią. Zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne \vec{E} w każdym punkcie takiej linii, a indukowana SEM jest związana z polem \vec{E} zależnością

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Używając pola elektrycznego, prawo Faradaya można zapisać w ogólnej postaci następująco:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

i krótko wyrazić je zdaniem: *zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne \vec{E} .*

28.4. Cewki i indukcyjność

Cewka jest urządzeniem pozwalającym na wytworzenie ustalonego pola magnetycznego w określonym obszarze przestrzeni. Gdy przez każdy z N zwojów cewki płynie prąd o natężeniu I , to prąd wytworzy strumień magnetyczny Φ_B . Indukcyjność cewki definiujemy wówczas za pomocą tego strumienia wzorem

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}.$$

Jednostką indukcyjności jest henr (H) określany jako

$$1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 / \text{A}.$$

Jeśli przez cewkę płynie prąd o zmiennym w czasie natężeniu I , to w cewce pojawia się SEM samoindukcji równa

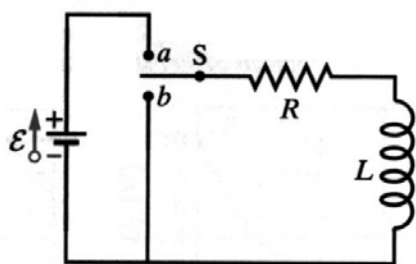
$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (28.7)$$

gdzie L oznacza indukcyjność cewki. Kierunek tej siły można wyznaczyć z reguły Lenza: SEM samoindukcji przeciwdziała zmianom, w wyniku których powstaje.

28.5. Obwody RL

Jak już wiemy (por. p. 25.3.), jeśli nagle przyłożymy SEM o wartości \mathcal{E} do obwodu o jednym oczku, który zawiera opornik R i kondensator C , to ładunek będzie zmierzał do wartości $C\mathcal{E}$ w stanie równowagi w sposób wykładniczy. Szybkość gromadzenia się ładunku jest określona pojemnościową stałą czasową τ_C . Podobnie, gdy nagle odłączymy od tego przewodu SEM, to ładunek nie zniknie natychmiast, ale będzie zmierzał do zera także w sposób wykładniczy.

Podobne opóźnienie wzrostu (lub spadku) natężenia prądu pojawi się podczas włączania (lub wyłączania) SEM o wartości \mathcal{E} w obwodzie o jednym oczku, który zawiera opornik R i cewkę L . Rozważmy rys. 28.3. Gdy klucz S zamyka obwód w punkcie a , natężenie prądu w oporniku zaczyna rosnąć. Gdyby nie było cewki, natężenie prądu bardzo szybko wzrosłoby do stałej wartości \mathcal{E}/R . Jednak ze względu na obecność cewki, w obwodzie pojawi się SEM samoindukcji \mathcal{E}_L . Zgodnie z regułą Lenza będzie ona przeciwstawiała się wzrostowi natężenia, co oznacza, że jest przeciwnie skierowana niż SEM źródła. Zaobserwujemy, że początkowo cewka przeciwdziała zmianom natężenia płynącego przez nią prądu, a po dłuższym czasie cewka działa jak zwykły przewód łączący elementy obwodu.



Rys. 28.3. Obwód RL

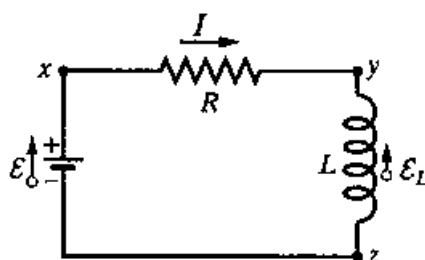
Jeżeli klucz na rys. 28.3 zamyka obwód w punkcie a , to obwód jest równoważny obwodowi przedstawionemu na rys. 28.4. Zastosujemy do tego obwodu drugie prawo Kirchhoffa (algebraiczna suma zmian potencjałów napotkanych przy pełnym obejści dowolnego oczka jest równa zero), wychodząc od punktu x na rysunku i poruszając się zgodnie z kierunkiem prądu o natężeniu I . Przechodząc przez opornik R , potencjał maleje o wielkość IR . Między punktami x i y jest więc różnica potencjałów $-IR$. W cewce L natężenie prądu I ulega zmianie, więc pojawia się w niej SEM samoindukcji \mathcal{E}_L . Z równania (28.7) możemy obliczyć jej wartość. Ponieważ siła ta przeciwdziała kierunkowi prądu, więc między punktami y i z obserwujemy zmianę potencjału

równą $-L \, dI / dt$. Po powrocie do punktu x obserwujemy zmianę potencjału równą $+\mathcal{E}$. Zatem z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E} = 0,$$

czyli

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}. \quad (28.8)$$



Rys. 28.4. Obwód z rys. 28.3 z kluczem w pozycji a

Równanie (28.8) jest równaniem różniczkowym. Aby je rozwiązać, poszukujemy takiej funkcji $I(t)$, która spełnia to równanie i warunek początkowy $I(0) = 0$. Rozwiązanie ma postać

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}),$$

co można też zapisać w postaci

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}),$$

gdzie τ_L oznacza indukcyjną stałą czasową równą

$$\tau_L = \frac{L}{R}.$$

Jeżeli klucz S zamykający obwód przedstawiony na rys. 28.3 znajduje się w punkcie a dostatecznie długo, to natężenie prądu osiągnie stan ustalony \mathcal{E} / R . Gdy przestawimy teraz klucz w położenie b , to źródło zostanie odłączone od obwodu. Bez źródła natężenie prądu płynącego przez opornik będzie zmniejszało się. Równanie opisujące to zmniejszanie się można wyprowadzić z równania (28.8) podstawiając $\mathcal{E} = 0$. Mamy wówczas

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0.$$

Przy warunku początkowym $I(0) = I_0 = \mathcal{E} / R$ rozwiązaniem tego równania jest

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} = I_0 e^{-t/\tau_L}.$$

Jeżeli obie strony równania (28.8) pomnożymy przez I , to otrzymamy

$$\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} + I^2 R.$$

Równanie to ma następującą interpretację fizyczną dotyczącą pracy i energii:

- jeżeli ładunek dq przepływa przez źródło SEM o wartości \mathcal{E} w czasie dt , to źródło wykonuje nad tym ładunkiem pracę $\mathcal{E}dq$, a to oznacza, że szybkość, z jaką źródło wykonuje pracę, wynosi $(\mathcal{E}dq)/dt$, tj. $\mathcal{E}I$, czyli lewa strona równania wyraża szybkość, z jaką źródło SEM dostarcza energię do pozostałych części obwodu,
- ostatni składnik po prawej stronie równania wyraża szybkość, z jaką energia wydziela się na oporniku w postaci energii termicznej,
- z zasady zachowania energii wynika, że energia, która jest dostarczona do obwodu, ale nie wydziela się w postaci energii termicznej, musi być zmagazynowana w polu magnetycznym cewki, a to oznacza, że pierwszy składnik po prawej stronie równania wyraża szybkość dE_B/dt , z jaką energia magnetyczna E_B jest gromadzona w polu magnetycznym.

Mamy zatem

$$\frac{dE_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}.$$

Równanie to możemy zapisać w postaci

$$dE_B = LI dI,$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy

$$\int_0^{E_B} dE_B = \int_0^I LI dI,$$

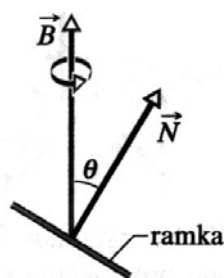
czyli

$$E_B = \frac{LI^2}{2}. \quad (28.9)$$

Jest to wyrażenie określające całkowitą energię zmagazynowaną w cewce L , w której płynie prąd o natężeniu I .

Zadania

1. Kołowa ramka o średnicy 10 cm (widziana z boku na rys. 28.5) jest umieszczona w taki sposób, że wektor \vec{N} normalny do płaszczyzny ramki tworzy z nią kąt $\theta = 30^\circ$ z kierunkiem jednorodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 0,5 T. Ramka jest obracana w taki sposób, że wektor \vec{N} zakreśla powierzchnię stożka wokół kierunku pola ze stałą szybkością 100 obrotów / min, kąt θ pozostaje zaś stały podczas tego ruchu. Jaka jest SEM indukowana w ramce?
2. Na rys. 28.6 przedstawiono zamkniętą przewodzącą ramkę w kształcie okręgu o promieniu $R = 2$ m. Ramka ma opór 4Ω , a środek okręgu znajduje się w punkcie, przez który przechodzi długi prosty izolowany przewód. W chwili $t = 0$ prąd w przewodzie płynie w prawo, a jego natężenie jest równe 5 A. Później natężenie prądu zmienia się zgodnie z zależnością $I = 5 \text{ A} - (2 \text{ A} / \text{s}^2) t^2$. Jakie jest natężenie prądu indukowanego w ramce dla $t > 0$?

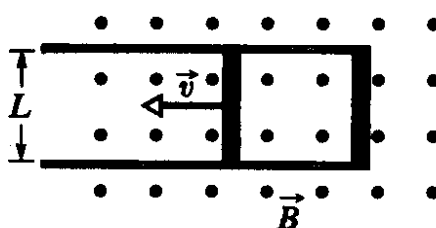


Rys. 28.5. Zadanie 1



Rys. 28.6. Zadanie 2

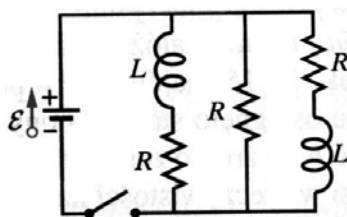
3. Na rys. 28.7 przedstawiono metalowy pręt przesuwany z prędkością \vec{v} po dwóch metalowych szynach połączonych na jednym końcu metalowym paskiem. Pole magnetyczne o wartości indukcji $B = 0,35 \text{ T}$ jest skierowane przed płaszczyznę rysunku.
- Jaka SEM jest indukowana w obwodzie, jeśli szyny są oddalone o 25 cm, a prędkość pręta jest równa 55 cm / s?
 - Ile wynosi natężenie prądu płynącego w pręcie, jeśli ma on opór 18Ω , a opór szyn i paska jest znikomo mały?
 - Z jaką szybkością energia jest przekształcana w energię termiczną?



Rys. 28.7. Zadanie 3

- Odcinek drutu miedzianego o długości 50 cm i średnicy 1 mm tworzy kołową ramkę umieszczoną prostopadle do kierunku wektora indukcji, którego wartość rośnie ze stałą szybkością 10 mT / s . Z jaką szybkością wydzielą się w ramce energia termiczna?
- Okrągła cewka o promieniu 10 cm składa się z 30 ciasno nawiniętych zwojów. Zewnętrzne pole magnetyczne o wartości indukcji $2,6 \text{ mT}$ jest skierowane prostopadle do płaszczyzny cewki.
 - Jaki strumień magnetyczny przenika przez zwoje cewki, jeżeli nie płynie w niej prąd?

- b) Gdy w cewce płynie w pewnym kierunku prąd o natężeniu 3,8 A, to wypadkowy strumień przenikający przez cewkę jest równy zero. Ile wynosi indukcyjność cewki?
6. Na rys. 28.8 przedstawiono obwód składający się z trzech identycznych oporników o oporze $R = 9 \Omega$, dwóch identycznych cewek o indukcyjności $L = 2 \text{ mH}$ i źródła doskonałego o SEM o wartości $\mathcal{E} = 18 \text{ V}$.
- a) Jakie będzie natężenie prądu I , który popłynie przez źródło tuż po zamknięciu klucza?
- b) Jakie będzie natężenie prądu I płynącego przez źródło po długim czasie od zamknięcia klucza?



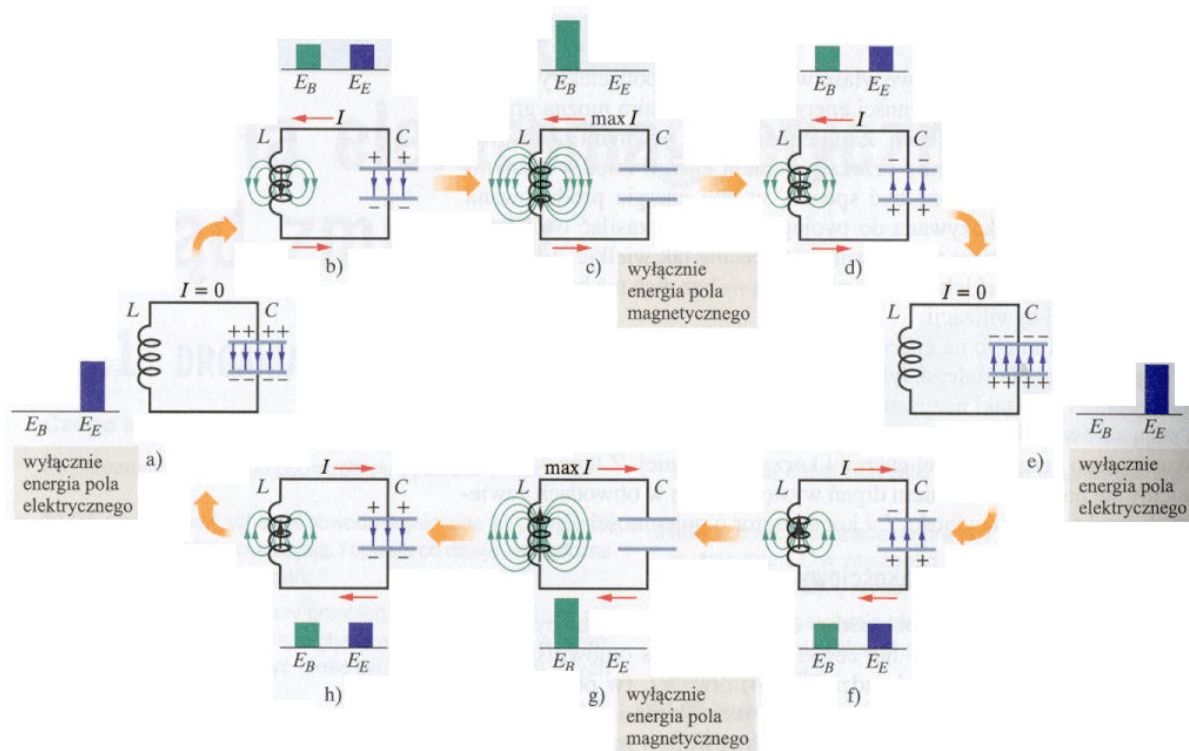
Rys. 28.8. Zadanie 6

7. Natężenie prądu w obwodzie RL zmniejsza się od 1 A do 10 mA w ciągu pierwszej sekundy po odłączeniu źródła od obwodu. Obliczyć opór R w obwodzie jeśli indukcyjność L jest równa 10 H.
8. W chwili $t = 0$ do szeregowego obwodu RL podłączono źródło prądu. Wyznaczyć, po jakim czasie wyrażonym przez wielokrotność indukcyjnej stałej czasowej τ_c prąd płynący w obwodzie będzie o 0,1 % mniejszy od wartości w stanie ustalonym.

XXIX. DRGANIA ELEKTROMAGNETYCZNE I PRĄD ZMIENNY

29.1. Drgania elektromagnetyczne w obwodach LC

Spośród dwuelementowych obwodów elektrycznych rozważyliśmy połączenie szeregowe RC oraz RL . Okazało się, że wartości ładunku, natężenia prądu i różnicy potencjałów występujących w tych obwodach rosną lub maleją wykładniczo. W tym punkcie zbadamy kombinację LC . Okazuje się, że ładunek, natężenie prądu i różnica potencjałów zmieniają się w tym przypadku sinusoidalnie. Powstające w wyniku tego drgania pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w cewce nazywamy *drzganiami elektromagnetycznymi*, a obwód elektryczny LC nazywa się *obwodem drgającym*.



Rys. 29. Osiem faz jednego cyklu drgań w obwodzie LC

Na rys. 29 przedstawiono kolejne fazy drgań w prostym układzie LC . Energia zgromadzona w polu elektrycznym kondensatora w dowolnej chwili jest równa (zob. p. 23.3)

$$E_E = \frac{q^2}{2C}, \quad (29.1)$$

gdzie q oznacza ładunek, a energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki wynosi (zob. wzór (28.9))

$$E_B = \frac{LI^2}{2}, \quad (29.2)$$

gdzie I oznacza natężenie prądu płynącego przez cewkę. Całkowita energia $E = E_E + E_B$ pozostaje stała. Oznacza to, że pochodna dE/dt musi równać się zero, co prowadzi do zależności

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0.$$

Ponieważ $I = dq/dt$ oraz $dI/dt = d^2q/dt^2$, więc z powyższego równania otrzymujemy równanie różniczkowe postaci

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (29.3)$$

Rozwiązanie ogólne równania (29.3) ma postać

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi), \quad (29.4)$$

gdzie q_{\max} oznacza amplitudę zmian ładunku, ω – częstość kołową drgań elektromagnetycznych, a ϕ – fazę początkową. Różniczkując to równanie względem czasu, otrzymujemy wyrażenie opisujące natężenie prądu

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \phi). \quad (29.5)$$

Amplituda I_{\max} zmieniającego się sinusoidalnie natężenia prądu wynosi

$$I_{\max} = \omega q_{\max}$$

i możemy równanie (29.5) przepisać w postaci

$$I = -I_{\max} \sin(\omega t + \phi).$$

Przez podstawienie wyrażenia (29.4) i jego pochodnej drugiego rzędu względem czasu do równania (29.3) otrzymujemy

$$-L\omega^2 q_{\max} \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C} q_{\max} \cos(\omega t + \phi) = 0,$$

skąd po skróceniu i prostych przekształceniach dostajemy

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (29.6)$$

Zatem częstość kołowa ma stałą wartość. Faza początkowa ϕ jest określona przez warunki, które występują w pewnej chwili, np. $t = 0$.

Z równań (29.1) i (29.4) wynika, że energia elektryczna zmagazynowana w obwodzie LC w dowolnej chwili t jest równa

$$E_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi).$$

Z kolei z równań (29.2) i (29.5) dla energii magnetycznej mamy

$$E_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\omega^2 q_{\max}^2}{2} \sin^2(\omega t + \phi),$$

skąd po uwzględnieniu zależności (29.6) otrzymujemy

$$E_B = \frac{q_{\max}^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi).$$

Zauważmy, że:

- wartości maksymalne energii E_E i E_B są jednakowe i wynoszą $q_{\max}^2 / 2C$,
- w dowolnej chwili suma energii E_E i E_B ma stałą wartość $q_{\max}^2 / 2C$,
- gdy energia elektryczna E_E osiąga maksymalną wartość, to energia magnetyczna E_B jest równa zero i na odwrót.

29.2. Drgania tłumione w obwodzie RLC

Jeśli do obwodu LC dołączymy rozpraszający energię opór R , to drgania w takim obwodzie są tłumione. Zachodzi wówczas równanie

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0,$$

którego rozwiązaniem jest

$$q = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi),$$

gdzie

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}.$$

Drgania w obwodzie RLC nie będą zanikać, jeśli zewnętrzne źródło SEM dostarczy dostatecznie dużo energii, aby uzupełnić straty spowodowane rozpraszaniem energii w oporniku R . Instalacje elektryczne w mieszkaniach, biurach i fabrykach, zawierające niezliczone obwody RLC, pobierają energię z lokalnych elektrowni. Energia ta jest dostarczana przy użyciu napięć i prądów zmieniających się w czasie – taki prąd nazywamy *prądem zmiennym*. Te zmienne napięcia i natężenia prądu zależą sinusoidalnie od czasu, zmieniając kierunek (w Europie 100 razy na sekundę, co odpowiada częstotliwości 50 Hz; w Ameryce Północnej częstotliwość zmian napięcia i natężenia prądu w sieci elektrycznej wynosi 60 Hz).

Podstawową korzyścią ze stosowania prądu zmiennego jest to, że zmiany natężenia prądu powodują zmiany pola magnetycznego otaczającego przewodnik. Dzięki temu jest możliwe zastosowanie prawa indukcji Faradaya, co oznacza między innymi, że możemy dowolnie podwyższyć (zwiększyć) lub obniżyć (zmniejszyć) amplitudę napięcia zmiennego, korzystając z urządzenia zwanego transformatorem. Dodatkową korzyścią jest to, że prąd zmienny jest łatwiejszy do stosowania w obrotowych urządzeniach elektrycznych, takich jak prądnice i silniki.

Zadania

1. Obwód drgający LC składa się z cewki o indukcyjności 75 mH i kondensatora o pojemności $3,6 \text{ }\mu\text{F}$. Obliczyć:
 - a) całkowitą energię w obwodzie,
 - b) maksymalne natężenie prądu, jeśli maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy $2,9 \text{ }\mu\text{C}$.
2. W pewnym obwodzie LC energia zmienia się z energii elektrycznej na kondensatorze na energię magnetyczną w cewce w ciągu $1,5 \text{ }\mu\text{s}$. Ile wynoszą:
 - a) okres drgań,
 - b) częstotliwość drgań.
 - c) Po jakim czasie od chwili, w której energia magnetyczna miała wartość maksymalną, osiągnie ona znów maksimum?
3. W obwodzie drgającym LC mamy $L = 1,1 \text{ mH}$ i $C = 4 \text{ }\mu\text{F}$. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy $3 \text{ }\mu\text{C}$. Oblicz maksymalną wartość natężenia prądu.
4. W obwodzie drgającym LC zawierającym cewkę o indukcyjności $1,25 \text{ H}$ energia jest równa $5,7 \text{ }\mu\text{J}$. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora wynosi $175 \text{ }\mu\text{C}$. Dla układu klocek-sprężyna o tym samym okresie drgań i maksymalnej prędkości klocka równej $3,02 \text{ mm / s}$ obliczyć:
 - a) masę klocka,
 - b) współczynnik sprężystości sprężyny,
 - c) maksymalne przemieszczenie.
5. W obwodzie drgającym LC zawierającym $L = 50 \text{ mH}$ i $C = 4 \text{ }\mu\text{F}$ w chwili początkowej natężenie prądu ma maksymalną wartość. Po jakim czasie kondensator zostanie po raz pierwszy naładowany?
6. Jaki opór R należy połączyć szeregowo z indukcyjnością $L = 220 \text{ mH}$ i pojemnością $C = 12 \text{ }\mu\text{F}$, aby maksymalny ładunek na kondensatorze zmniejszył się do 99% swojej początkowej wartości w czasie 50 cykli drgań (przyjąć $\omega' \approx \omega$).

XXX. RÓWNANIA MAXWELLA

Wszystkie prawa fizyki podane w poprzednich jedenastu rozdziałach (XIX – XXIX) można zebrać w postaci zaledwie czterech równań Maxwella. Zanim je podamy, przedstawimy uogólnione prawo Ampère’a.

W rozdziale XXVIII dowiedzieliśmy się, że zmienny strumień magnetyczny indukuje pole elektryczne i zapisaliśmy prawo Faradaya w postaci (zob. p. 28.3)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Wektor \vec{E} oznacza tutaj natężenie pola elektrycznego indukowanego wzdłuż zamkniętego konturu przez zmienny strumień magnetyczny Φ_B objęty tym konturem. Z kolei zmienny strumień pola elektrycznego wytwarza pole magnetyczne \vec{B} . Odpowiednie prawo możemy zapisać w postaci

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (30.1)$$

gdzie μ_0 oznacza przenikalność magnetyczną próżni (stałą magnetyczną), a ε_0 – przenikalność elektryczną próżni (stałą elektryczną). Wektor \vec{B} oznacza w tym wzorze indukcję pola magnetycznego, które jest indukowane wzdłuż zamkniętego konturu przez zmienny strumień elektryczny Φ_E objęty tym konturem.

Całka występująca w równaniu (30.1) pojawiła się również w prawie Ampère’a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p, \quad (30.2)$$

w którym I_p oznacza natężenie prądu objętego konturem całkowania. Równania (30.1) i (30.2) można połączyć i napisać razem w postaci

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p. \quad (30.3)$$

Gdy istnieje prąd, a nie ma zmiany strumienia elektrycznego, pierwszy składnik po prawej stronie jest równy zero. Gdy zmienia się strumień elektryczny, ale nie płynie prąd, drugi składnik po prawej stronie jest równy zero.

Równanie (30.3) jest ostatnim spośród czterech podstawowych równań elektromagnetyzmu, nazywanych równaniami Maxwella. Zostały one zebrane w tabeli 30 przy założeniu, że nie występują materiały dielektryczne i magnetyczne.

Tabela 30. Równania Maxwella

Nazwa	Równanie	Znaczenie
Prawo Gaussa dla elektryczności	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{wewn} / \epsilon_0$	wiąże wypadkowy strumień elektryczny z wypadkowym ładunkiem elektrycznym objętym powierzchnią Gaussa
Prawo Gaussa dla magnetyzmu	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	wiąże wypadkowy strumień magnetyczny z wypadkowym ładunkiem magnetycznym objętym powierzchnią Gaussa
Prawo Faradaya	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	wiąże indukowane pole elektryczne ze zmiennym strumieniem magnetycznym
Uogólnione prawo Ampère'a	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p$	wiąże indukowane pole magnetyczne ze zmiennym strumieniem elektrycznym oraz z prądem