XIX. PRAWO COULOMBA

19.1. Prawo Coulomba

Wielkość oddziaływania cząstki z otaczającymi ją obiektami zależy od jej ładunku elektrycznego, zwykle oznaczanego przez q. Ładunek elektryczny może być dodatni lub ujemny. Cząstki mające ładunki o takich samych znakach odpychają się, a cząstki z ładunkami o przeciwnych znakach przyciągają się. Ciało z jednakową ilością ładunku dodatniego i ujemnego jest obojętne elektrycznie. Ciało, w którym wielkości tych ładunków nie są równe, jest naładowane elektrycznie i ma ładunek nadmiarowy.

Materiały, w których znaczna liczba elektronów może poruszać się swobodnie nazywamy *przewodnikami*. Jeśli cząstki w materiale nie mogą swobodnie poruszać się, to materiał taki nazywamy *izolatorem*. Właściwości przewodników i izolatorów wynikają z budowy atomów oraz właściwości ich składników. Atomy są zbudowane z dodatnio naładowanych *protonów*, ujemnie naładowanych *elektronów* i elektrycznie obojętnych *neutronów*. Protony i elektrony są upakowane ściśle w jądrze znajdującym się w środku atomu. Ładunek pojedynczego elektronu i pojedynczego protonu są sobie równe co do wartości bezwzględnej, ale mają przeciwny znak.

Jeśli dwie naładowane cząstki zbliżają się do siebie, to każda z nich działa na drugą *siłą elektrostatyczną*. Kierunek wektorów tej siły zależy od znaku ładunków. Jeśli cząstki mają ładunki o jednakowych znakach, to odpychają się, a to oznacza, że wektor siły działającej na każdą cząstkę jest skierowany przeciwnie do wektora wskazującego na drugą cząstkę. Gdy ładunki mają przeciwne znaki, to cząstki przyciągają się, czyli wektor siły działającej na każdą cząstkę jest skierowany ku drugiej cząstce.

Równanie opisujące siły elektrostatyczne działające na naładowane cząstki podał w 1785 roku Charles Augustin Coulomb, który doszedł do niego doświadczalnie. Równanie to, zwane *prawem Coulomba*, ma postać

$$\vec{F} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}, \tag{19.1}$$

gdzie q_1 oznacza ładunek cząstki 1, q_2 – ładunek cząstki 2, k – stałą elektrostatyczną, a r oznacza odległość między cząstkami, przy czym $\hat{r}$ oznacza wektor jednostkowy skierowany od cząstki 2 wzdłuż prostej łączącej obie cząstki. Przy tym założeniu (odnośnie wektora $\hat{r}$) równanie (19.1) przedstawia siłę elektrostatyczną działająca na cząstkę 1. Zauważmy, że postać wzoru (19.1) jest taka sama, jak postać wzoru Newtona dla siły grawitacyjnej.

Jednostką ładunku w układzie SI jest kulomb. Ze względów praktycznych jest on pochodną jednostki natężenia prądu elektrycznego I w układzie SI definiowanego jako stosunek ładunku dq przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu dt, czyli

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Ponieważ jednostką natężenia prądu w układzie SI jest amper, wynika stąd, że

$$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{s}.$$

Stałą elektrostatyczną k we wzorze (19.1) zapisuje się zwykle jako $1/4\pi\varepsilon_0$, gdzie ε_0 oznacza tzw. *przenikalność elektryczną próżni*. Wówczas wartość siły elektrostatycznej opisanej prawem Coulomba wynosi

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \tag{19.2}$$

Stałe występujące we wzorach (19.1) i (19.2) mają następujące wartości:

$$k = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 / \mathrm{C}^2,$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2 / (\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2).$$

Siła elektrostatyczna spełnia zasadę superpozycji. Jeśli mamy n naładowanych cząstek, to oddziałują one niezależnie w parach i siła wypadkowa działająca na którąkolwiek z nich jest równa sumie wektorowej. Oznacza to, że w przypadku cząstki 1 mamy

$$\vec{F}_{1,\,wyp} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n}.$$

W elektrostatyce istnieją odpowiedniki twierdzenia o powłoce dotyczącego grawitacji. Przypomnijmy, że ciało w kształcie powłoki kulistej przyciąga cząstkę znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jak gdyby cała masa powłoki była skupiona w jej środku. W elektrostatyce mamy następujące twierdzenia:

- jednorodne naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę znajdującą się na zewnątrz tej powłoki tak, jakby cały ładunek tej powłoki był skupiony w jej środku,
- jeśli cząstka naładowana znajduje się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa zeru.

19.2. Kwantowość i zachowawczość ładunku

Każdy ładunek q (dodatni lub ujemny) można zapisać w postaci

$$q = ne, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

gdzie *ładunek elementarny* e ma wartość

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}.$$

Ładunek elektryczny nie może przyjmować dowolnych wartości, ale tylko takie, które należą do dyskretnego zbioru wartości. O takiej wielkości mówimy, że jest *skwantowana*.

Całkowity ładunek elektryczny w dowolnym odosobnionym układzie fizycznym jest zawsze zachowany. Dwie cząstki ulegające anihilacji muszą mieć ładunki o przeciwnych znakach i jednakowej wartości bezwzględnej. Na przykład proces anihilacji elektronu e^- (o ładunku $-e$) i jego antycząstki, pozytonu e^+ (o ładunku $+e$), prowadzi do przekształcenia w dwa kwanty γ (promieniowania elektromagnetycznego o wielkiej energii):

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

W procesie tym wypadkowy ładunek układu jest równy zeru zarówno przed, jak i po anihilacji. Podobnie jest w przypadku kreacji pary. W takim procesie kwant γ przekształca się w elektron i pozyton:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+.$$

Zadania

1. Z cienkiej powłoki kulistej naładowanej początkowo ładunkiem Q przeniesiono ładunek q na inną powłokę kulistą znajdującą się w pobliżu. Obie powłoki unieruchomione w pewnej odległości od siebie można traktować jak cząstki. Dla jakiego stosunku q / Q siła elektrostatyczna działająca między tymi powłokami będzie największa?
2. W jakiej odległości od siebie muszą znajdować się ładunki punktowe $q_1 = 26\ \mu\text{C}$ i $q_2 = -47\ \mu\text{C}$, aby siła elektrostatyczna działająca między nimi była równa 5,7 N?
3. Ładunek punktowy o wartości $+3 \cdot 10^{-6}$ C jest odległy o 12 cm od drugiego ładunku punktowego o wartości $-1{,}5 \cdot 10^{-6}$ C. Obliczyć wartość siły działającej na każdy ładunek.
4. Wartość siły elektrostatycznej działającej między dwoma identycznymi jonami znajdującymi się w odległości $5 \cdot 10^{-10}$ m wynosi $3{,}7 \cdot 10^{-9}$ N.
   a) Jaki jest ładunek każdego z jonów?
   b) Ile elektronów „brakuje” w każdym z jonów (powodując niezrównoważony ładunek jonu)?

XX. POLE ELEKTRYCZNE

20.1. Pole elektryczne

Naładowana cząstka wytwarza w otaczającej przestrzeni pole elektryczne, które jest polem wektorowym. Jeśli w tej przestrzeni znajduje się inna cząstka naładowana, to będzie na nią działać siła elektrostatyczna zgodna z wartością i kierunkiem tego pola. Pole wektorowe odpowiada rozkładowi wektorów natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$. Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$, wytworzonego w punkcie P przez naładowane ciało definiuje się wzorem

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

gdzie q_0 oznacza ładunek dodatni, zwany *ładunkiem próbnym*.

Linie pola elektrycznego pomagają wizualizować kierunek i wartość pola elektrycznego. Wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola elektrycznego. Gęstość linii pola w tym punkcie jest proporcjonalna do wartości natężenia pola elektrycznego, czyli gęstsze linie odpowiadają silniejszemu polu. Linie pola elektrycznego wychodzą od ładunku dodatniego (gdzie zaczynają się) i są skierowane ku ładunkowi ujemnemu (gdzie kończą się).

Aby znaleźć pole naładowanej cząstki (nazywanej *ładunkiem punktowym*), umieszczamy w dowolnym punkcie, w odległości r od tego ładunku punktowego, dodatni ładunek próbny q_0. Z prawa Coulomba wiadomo, że wartość siły elektrostatycznej, która działa na ten ładunek ze strony cząstki o ładunku q_0 wynosi

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}.$$

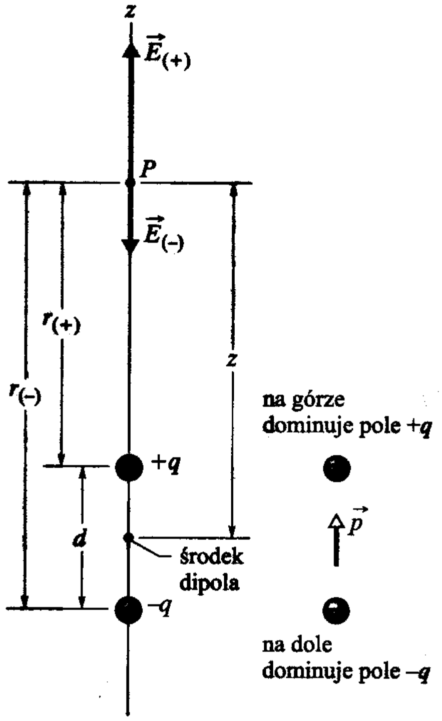
Stąd

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}. \tag{20.1}$$

Natężenie $\vec{E}$ jest skierowane tak samo, jak siła działająca na dodatni ładunek próbny, czyli od ładunku punktowego, gdy ładunek q jest ładunkiem dodatnim i do niego, gdy ładunek q jest ujemny. Ze wzoru (20.1) wynika, że wartość natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie odległym od tego ładunku o wielkość r można zapisać w postaci

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \tag{20.2}$$

Układ dwóch cząstek mających ładunki o przeciwnych znakach i jednakowych wartościach bezwzględnych q, które znajdują się w niewielkiej odległości d od siebie, nazywamy *dipolem* *elektrycznym*. Oś przechodzącą przez obie cząstki nazywa się osią dipola. Jest ona osią symetrii układu.



Rys. 20.1. Dipol elektryczny

Rozważmy punkt P, który znajduje się w odległości z od środkowego punktu dipola (zob. rys. 20.1). Bliższa cząstka o ładunku $+q$ wytwarza pole o natężeniu $E_{(+)}$ skierowane w stronę dodatnich wartości osi z. Dalsza cząstka o ładunku $-q$ wytwarza pole o natężeniu $E_{(-)}$ skierowane w stronę ujemnych wartości osi z. Poszukujemy wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie P. Zgodnie ze wzorem (20.2) i uwzględniając zasadę superpozycji mamy

$$E = E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z+\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right].$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i pomnożeniu jego czynników dochodzimy do wzoru

$$E = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\left(1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^{-2}.$$

Ponieważ zwykle jesteśmy zainteresowani polem elektrycznym dipola tylko w odległościach dużych w porównaniu z wymiarami dipola, czyli dla $z >> d$, więc możemy zaniedbać wyraz $d\,/\,(2z)$, przez co otrzymujemy

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3}. \tag{20.3}$$

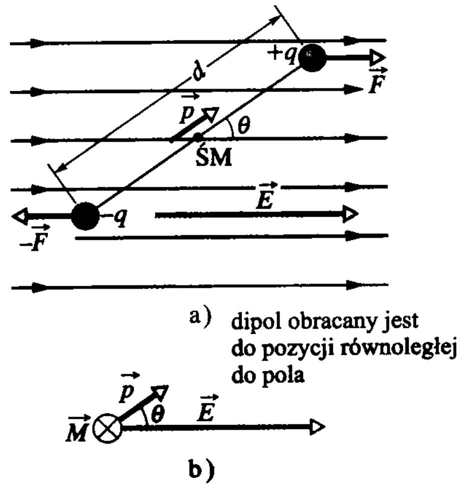
Iloczyn qd jest wartością p wielkości wektorowej $\vec{p}$ zwanej *elektrycznym momentem dipolowym*. Moment dipolowy $\vec{p}$ jest skierowany od ujemnego do dodatniego ładunku dipola (zob. rys. 20.1).

20.2. Ładunek punktowy i dipol w polu elektrycznym

Gdy cząstka o ładunku q znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$, to działa na nią siła elektrostatyczna

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Jeśli ładunek q jest dodatni, to wektor siły jest skierowany tak samo, jak wektor natężenia pola elektrycznego. Gdy ładunek q jest ujemny, to wektor siły jest skierowany przeciwnie do wektora natężenia.



Rys. 20.2. Dipol elektryczny w jednorodnym polu elektrycznym

Rozważmy teraz dipol elektryczny umieszczony w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$. Zakładamy, że dipol składa się z dwóch przeciwnie naładowanych kulek, każda o ładunku q, które znajdują w odległości d od siebie oraz, że moment dipolowy $\vec{p}$ tworzy kąt θ z kierunkiem natężenia pola $\vec{E}$ (zob. rys. 20.2 a)).

Na naładowane cząstki dipola działają siły elektrostatyczne. Pole elektryczne jest jednorodne, a więc siły działają w przeciwnych kierunkach i mają wartość $F = qE$. W jednorodnym polu elektrycznym wypadkowa siła oddziaływania pola na dipol jest więc równa zeru i środek masy dipola nie porusza się. Jednak siły działające na naładowane końce wytwarzają wypadkowy moment siły $\vec{M}$ względem środka masy dipola. Środek masy leży na prostej, łączącej naładowane końce, w pewnej odległości x od jednego końca i w odległości $d - x$ od drugiego. Wartość wypadkowego momentu siły $\vec{M}$ wynosi

$$M = Fx \sin\theta + F(d - x)\sin\theta = Fd \sin\theta.$$

Podstawiając w tym wzorze qE za F oraz p / q za d mamy

$$M = pE \sin\theta,$$

co można te zapisać w postaci wektorowej następująco:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Wektory $\vec{p}$ i $\vec{E}$ są przedstawione na rys. 20.2 b). Moment siły działający na dipol dąży do obrócenia wektora $\vec{p}$ (a stąd i dipola) w kierunku natężenia pola $\vec{E}$, czyli do zmniejszenia kąta θ. Na rys. 20.2 obrót taki jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jeśli włączymy znak minus do wartości momentu, to wartość momentu siły z tego rysunku należy zapisać w postaci

$$M = -pE \sin\theta.$$

Dipol ma najmniejszą energię potencjalną, gdy jest w stanie równowagi, czyli gdy jego moment $\vec{p}$ jest skierowany zgodnie z kierunkiem natężenia pola $\vec{E}$ (wówczas $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$). Okazuje się, że wyrażenie na energię potencjalną dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym jest najprostsze, gdy wybierzemy zerową wartość energii potencjalnej dla kąta θ równego 90°. Wówczas energię potencjalną E_p dipola przy dowolnej innej wartości kąta θ możemy znaleźć obliczając pracę W wykonaną przez pole przy obróceniu dipola od ustawienia odpowiadającego 90° do wartości θ. Mamy

$$E_p = -W = -\int_{90°}^{\theta} M d\theta = \int_{90°}^{\theta} pE \sin\theta d\theta = -pE \cos\theta,$$

co można też zapisać w postaci wektorowej następująco:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \tag{20.4}$$

Ze wzorów tych wynika, że energia potencjalna jest największa, gdy $\theta = 180°$, czyli gdy wektory $\vec{p}$ i $\vec{E}$ są skierowane przeciwnie.

Gdy dipol obraca się od początkowego ustawienia θ_p do innego θ_k, to praca W wykonana przez pole elektryczne wynosi

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p,k} - E_{p,p}),$$

gdzie wielkości $E_{k,p}$ i $E_{p,p}$ można obliczyć ze wzoru (20.4). Jeśli zmiana ustawienia jest spowodowana przez zewnętrzny moment siły, to praca W_{zewn} wykonana nad dipolem przez ten moment siły różni się znakiem od pracy wykonanej nad dipolem przez pole, czyli

$$W_{zewn} = -W = E_{k,p} - E_{p,p}.$$

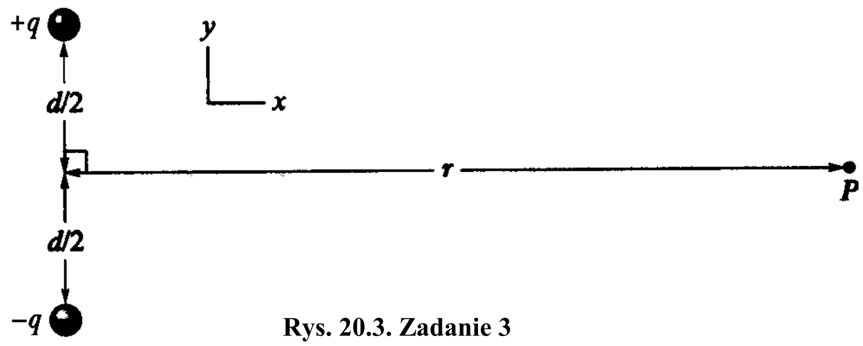
Zadania

1. Jądro atomu plutonu-239 zawiera 94 protony. Załóżmy, że jądro to ma promień równy 6,64 fm, a ładunek dodatni jest równomiernie rozłożony w obszarze jądra. Wyznaczyć:
   a) wartość,

b) kierunek wektora natężenia pola elektrycznego wytworzonego na powierzchni jądra przez ten dodatni ładunek.

2. Jaka jest wartość ładunku punktowego, który w odległości 50 cm wytwarza pole elektryczne o natężeniu 2 N / C?

3. Na rys. 20.3 przedstawiono dipol elektryczny. Znaleźć:
   a) wartość,
   b) kierunek natężenia pola elektrycznego (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) wytwarzanego przez ten dipol w punkcie P. Punkt P znajduje się w odległości $r >> d$ od dipola.



Rys. 20.3. Zadanie 3

4. Naładowana chmura wytwarza pole elektryczne w powietrzu nad Ziemią. Na cząstkę o ładunku $-2 \cdot 10^{-12}$ C, znajdującą się w tym polu, działa siła elektrostatyczna o wartości $3 \cdot 10^{-6}$ N, skierowana w dół.
   a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego?
   Jakie są:
   b) wartość,
   c) kierunek siły elektrostatycznej $\vec{F}_e$ działającej na proton umieszczony w tym polu?
   d) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej $\vec{F}_g$ działającej na proton?
   e) Ile wynosi stosunek wartości siły elektrostatycznej do wartości siły grawitacyjnej F_e / F_g działającej na proton?

5. Spoczywający początkowo elektron znalazł się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $2 \cdot 10^4$ N / C. Obliczyć przyspieszenie elektronu (pominąć siłę ciężkości).

6. Dipol elektryczny składający się z ładunków o wartości 1,5 nC, które znajdują się w odległości 6,2 μm od siebie, umieszczono w polu elektrycznym o natężeniu 1100 N / C.
   a) Jaka jest wartość elektrycznego momentu dipolowego tego dipola?
   b) Jaka jest różnica między energiami potencjalnymi odpowiadającymi równoległemu i antyrównoległemu ustawieniu dipola względem natężenia pola $\vec{E}$?

XXI. PRAWO GAUSSA

21.1. Strumień pola elektrycznego

Strumień elektryczny Φ przenikający przez powierzchnię odpowiada „ilości" pola elektrycznego przenikającego przez tę powierzchnię.Wektor powierzchni $d\vec{S}$ dla elementu powierzchni jest wektorem prostopadłym do tego elementu, którego wartość jest równa polu powierzchni ds tego elementu. Strumień elektryczny $d\Phi$ przenikający przez element powierzchni o wektorze powierzchni $d\vec{S}$ jest równy iloczynowi skalarnemu

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Całkowity strumień elektryczny przenikający przez powierzchnię wynosi

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

gdzie całkowanie odbywa się po powierzchni.

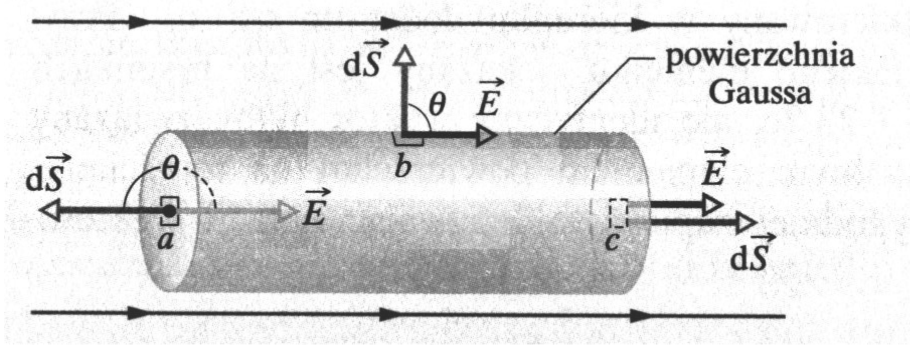
Pole przenikające do wnętrza objętości otoczonej przez powierzchnię oznacza ujemny strumień. Pole wypływające z wnętrza objętości otoczonej przez powierzchnię odpowiada strumieniowi dodatniemu. Wektor natężenia styczny do powierzchni to strumień równy zeru. Aby znaleźć wypadkowy strumień przenikający przez powierzchnię, wystarczy znaleźć strumienie przenikające przez każdy kwadrat, na która podzielono całą powierzchnię, a następnie zsumować te wyniki z uwzględnieniem znaków algebraicznych. Obliczenia byłyby ogromne i dlatego zmniejszamy powierzchnie kwadratów, zastępując je elementami powierzchni o wektorach powierzchni $d\vec{S}$, a następnie całkujemy:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}. \tag{21.1}$$

kółeczko na całce oznacza, że aby uzyskać wypadkowy strumień przenikający przez powierzchnię, całkowanie musimy wykonać po całej zamkniętej powierzchni.

Przykład 21.1

Rozważmy powierzchnię walca o promieniu R (jest to przykład powierzchni Gaussa) przedstawioną na rys. 21.1, który jest umieszczony w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$, przy czym oś walca jest równoległa do kierunku natężenia pola. Strumień elektryczny przenikający przez powierzchnię możemy znaleźć przez scałkowanie iloczynu $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po całej powierzchni Gaussa, czyli walcu. Nie można jednak tego zrobić obliczając pojedynczą całkę – trzeba powierzchnię walca podzielić na trzy części, dla których obliczenie całki staje się możliwe. Wypadkowy strumień przedstawiamy jako sumę trzech całek: po lewym denku a, po powierzchni bocznej b i po prawym denku c:



Rys. 21.1. Walcowa powierzchnia Gaussa

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Wybierzmy element powierzchni na lewym denku. Wektor powierzchni $d\vec{S}$ musi być prostopadły do tego elementu i skierowany na zewnątrz walca. Oznacza to, że kąt między wektorem powierzchni i wektorem natężenia pola elektrycznego wynosi 180°. Zauważmy też, że wartość E natężenia pola na tym denku jest stała, a więc można ją wyłączyć przed znak całki. Zatem mamy

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 180°)dS = -E\int dS = -ES,$$

gdzie $\int dS$ oznacza pole powierzchni denka $S = \pi R^2$. Podobnie mamy dla prawego denka, gdzie dla wszystkich punktów jest $\theta = 0°$:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 0°)dS = ES.$$

Dla powierzchni bocznej walca, gdzie we wszystkich punktach $\theta = 90°$, mamy

$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 90°)dS = 0.$$

Zatem

$$\Phi = -ES + 0 + ES.$$

Wypadkowy strumień jest równy zeru, gdyż wszystkie linie reprezentujące pole elektryczne całkowici przechodzą przez powierzchnię Gaussa, wchodząc przez lewe denko i wychodząc przez prawe. ■

21.2. Prawo Gaussa

Prawo Gaussa opisuje związek między wypadkowym strumieniem Φ pola elektrycznego przenikającym przez zamkniętą powierzchnię (powierzchnię Gaussa) i wypadkowym ładunkiem q_{wewn}, który jest zawarty wewnątrz objętości otoczonej tą powierzchnią. Zgodnie z tym prawem

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{wewn}.$$

Po podstawieniu do tego równania wzoru (21.1), prawo Gaussa można także zapisać w postaci

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{wewn}.$$

Wzory te są słuszne tylko wtedy, gdy ładunek znajduje się w próżni lub w powietrzu. W innych materiałach, takich jak mika, olej lub szkło, powyższe wzory są zmodyfikowane.

Jednym z przypadków, do którego można zastosować prawo Gaussa, jest wyznaczenie pola elektrycznego naładowanej cząstki. Pole to ma symetrię sferyczną, w związku z czym natężenie pola zależy tylko od odległości r od cząstki, a nie zależy od kierunku. Kąt θ między wektorami $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ jest równy zeru, a więc prawo Gaussa można zapisać w postaci

$$\varepsilon_0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint EdS = q_{wewn},$$

gdzie $q_{wewn} = q$. Ponieważ natężenie pola E ma taką samą wartość na całej powierzchni sferycznej, więc wartość natężenia można wyłączyć przed znak całki, czyli mamy

$$\varepsilon_0 E \oint dS = q.$$

pozostała całka jest tylko sumą pól powierzchni elementów sfery i jest równa jej polu powierzchni $4\pi r^2$, a więc otrzymujemy

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q,$$

skąd

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Jest to ten sam wzór, który uzyskaliśmy w p. 20.1 korzystając z prawa Coulomba (zob. (20.3)).

Prawo Gaussa pozwala udowodnić ważne twierdzenie o izolowanych (odosobnionych) przewodnikach, które mówi, że jeśli nadmiarowy ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku, to ten ładunek przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika, a w jego wnętrzu nie ma żadnego nadmiarowego ładunku.

Natężenie wewnętrznego pola elektrycznego w naładowanym izolowanym przewodniku jest równe zeru. Natężenie zewnętrznego pola elektrycznego (w pobliżu tego przewodnika) jest skierowane prostopadle do jego powierzchni, a jego wartość zależy od powierzchniowej gęstości ładunku σ (ładunku przypadającego na jednostkę powierzchni) i wynosi

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Natężenie pola elektrycznego w punkcie znajdującym się w pobliżu naładowanej linii prostej (lub pręta o nieskończonej długości) o gęstości liniowej ładunku λ jest prostopadłe do tej linii i ma wartość

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

gdzie r oznacza odległość punktu od tej linii.

Natężenie pola elektrycznego nieskończonej nieprzewodzącej płaszczyzny naładowanej jednorodnie o gęstości powierzchniowej ładunku σ jest prostopadłe do tej płaszczyzny i ma wartość

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Natężenie pola elektrycznego przy zewnętrznej powierzchni przewodnika naładowanego jednorodnie o gęstości powierzchniowej ładunku σ jest prostopadłe do tej powierzchni i ma wartość

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Wewnątrz przewodnika natężenie pola elektrycznego jest równe zeru.

Natężenie pola elektrycznego na zewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej o promieniu R i całkowitym ładunku q jest skierowane radialnie (do środka lub na zewnątrz w zależności od znaku ładunku) i ma wartość

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

gdzie r oznacza odległość od środka powłoki do punktu, w którym wartość E jest wyznaczana. Natężenie pola jest takie samo jak dla układu, w którym cały ładunek byłby skupiony w środku sfery. Natężenie pola wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki jest równe zeru.

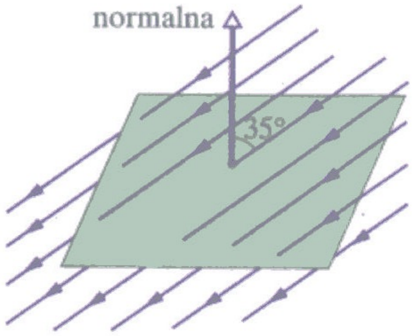
Natężenie pola elektrycznego wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli jest skierowane radialnie i ma wartość

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r,$$

gdzie q oznacza całkowity ładunek, R – promień kuli, a r oznacza odległość od środka powłoki, w którym wartość E jest wyznaczana.

Zadania

1. Długość boku kwadratu przedstawionego na rys. 21.2 wynosi 3,2 mm. Kwadrat znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym. Wartość natężenia tego pola wynosi E = 1800 N / C. Linie pola tworzą kąt $\theta = 35°$ z normalną do powierzchni kwadratu. Przyjmując, że ta normalna jest skierowana „na zewnątrz”, obliczyć strumień elektryczny przenikający przez tę powierzchnię.
2. Ładunek punktowy o wartości 1,8 μC znajduje się w środku sześciennej powierzchni Gaussa. Jaki jest wypadkowy strumień elektryczny przenikający przez tę powierzchnię, jeśli długość krawędzi sześcianu wynosi 55 cm?
3. Jednorodnie naładowana przewodząca kula o średnicy 1,2 m ma gęstość powierzchniową ładunku 8,1 μC / m^2.
   a) Znaleźć wypadkowy ładunek na kuli.
   b) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przenikający przez powierzchnię kuli?



Rys. 21.2. Zadanie 1

4. Pojazdy kosmiczne przez ziemskie pasy promieniowania mogą zbierać dużą liczbę elektronów. Załóżmy, że kulisty metalowy satelita o średnicy 1,3 m zgromadził w czasie jednego obiegu satelity ładunek 2,4 μC.
   a) Znaleźć powstałą gęstość powierzchniową ładunku.
   b) Obliczyć wartość natężenia pola elektrycznego (wytworzonego przez ten ładunek powierzchniowy) tuż na zewnątrz satelity.
5. Na kwadratowej płycie o boku długości 8 cm i zaniedbywalnej grubości znajduje się ładunek $6 \cdot 10^{-6}$ C.
   a) Oszacować natężenie pola elektrycznego E tuż (powiedzmy 0,5 mm) ponad środkiem tej płyty zakładając, że ładunek jest rozłożony równomiernie na obu jej powierzchniach.
   b) Oszacować natężenie pola elektrycznego E w odległości 30 m (dużej w porównaniu z rozmiarami płyty) od środka tej płyty, traktując płytę jak naładowaną cząstkę.
6. Dwie naładowane współśrodkowe sfery mają promienie 10 cm i 15 cm. Ładunek na wewnętrznej sferze wynosi $4 \cdot 10^{-8}$ C, a na zewnętrznej sferze $2 \cdot 10^{-8}$ C. Znaleźć natężenie pola elektrycznego w odległości
   a) $r = 12$ cm,
   b) $r = 20$ cm od środka sfer.

XXII. POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY

22.1. Potencjał elektryczny

Potencjał elektryczny V w punkcie P w polu elektrycznym naładowanego ciała definiuje się wzorem

$$V = \frac{-W_\infty}{q_0} = \frac{E_p}{q_0},$$

gdzie W_∞ oznacza pracę, którą wykonałaby siła elektrostatyczna działająca na dodatni ładunek próbny q_0 przy przeniesieniu go z nieskończoności do punktu P, a E_p oznacza elektryczną energię potencjalną, która zostałaby w takim przypadku zmagazynowana w układzie ładunek próbny - ciało.

Jeśli cząstka o ładunku q znajduje się w punkcie, w którym potencjał pola elektrycznego wytwarzanego przez naładowane ciało jest równy V, to elektryczna energia potencjalna E_p układu cząstka - ciało wynosi

$$E_p = qV.$$

Jeżeli cząstka pokonuje różnicę potencjałów ΔV, to odpowiednia zmiana elektrycznej energii potencjalnej wynosi

$$\Delta E_p = q\Delta V = q(V_k - V_p).$$

Gdy cząstka, na którą nie działa żadna siła zewnętrzna pokonuje różnicę potencjałów ΔV, to zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej pozwala określić zmianę energii kinetycznej tej cząstki jako

$$\Delta E_k = -q\Delta V.$$

Jeśli natomiast na cząstkę działa siła zewnętrzna, która wykonuje przy tym pracę W_{zew}, to odpowiednia zmiana energii kinetycznej wynosi

$$\Delta E_k = -q\Delta V + W_{zew}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $\Delta E_k = 0$, praca wykonana przez siłę zewnętrzną odpowiada wyłącznie pokonaniu przez cząstkę różnicy potencjałów

$$W_{zew} = q\Delta V.$$

22.2. Powierzchnie ekwipotencjalne a pole elektryczne

Sąsiadujące ze sobą punkty, które mają jednakowy potencjał elektryczny, tworzą *powierzchnię ekwipotencjalną*. Praca wykonana nad ładunkiem próbnym przy przenoszeniu go z jednej powierzchni na drugą nie zależy od położenia tych punktów na odpowiednich powierzchniach i nie zależy od toru, po jakim przenosi się ten ładunek. Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ jest zawsze skierowane prostopadle do odpowiednich powierzchni ekwipotencjalnych.

Różnica potencjałów elektrycznych między dwoma punktami p i k wynosi

$$V_k - V_p = -\int_p^k \vec{E} \cdot d\vec{s}, \tag{22.1}$$

gdzie całkowanie następuje wzdłuż dowolnej drogi łączącej te punkty. Jeśli przyjmiemy $V_p = 0$, to potencjał w konkretnym punkcie wynosi

$$V = -\int_p^k \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

W jednorodnym polu elektrycznym kąt pomiędzy wektorami $\vec{E}$ i $d\vec{s}$ jest równy zeru i wartość E jest stała. Ze wzoru (22.1) otrzymujemy wówczas

$$V_k - V_p = -\int_p^k E ds \cos 0 = -E \int_p^k ds$$

i jeśli powierzchnie ekwipotencjalne są od siebie odległe o Δx, to mamy

$$\Delta V = -E\Delta x.$$

22.3. Potencjał pola cząstki i dipola elektrycznego

Zastosujemy wzór (22.1) do wyprowadzenia wyrażenia na potencjał elektryczny V w przestrzeni wokół cząstki naładowanej względem potencjału zerowego w nieskończoności. Rozważmy punkt P w odległości R od nieruchomej cząstki o dodatnim ładunku q (zob. rys. 22.1). Wyobraźmy sobie, że przesuwamy dodatni ładunek próbny q_0 z punktu P do nieskończoności. Musimy obliczyć iloczyn skalarny

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos\theta \, ds$$

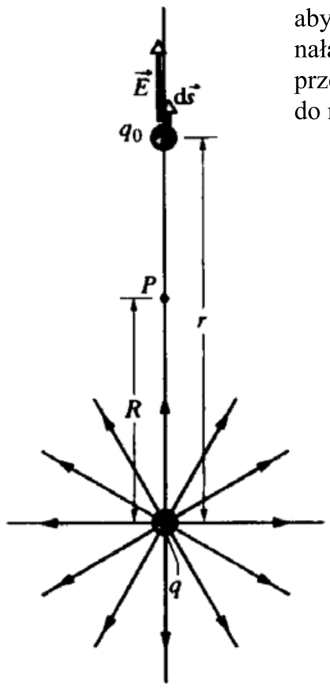
Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ jest skierowane radialnie od cząstki. Stąd przesunięcie $d\vec{s}$ cząstki próbnej ma ten sam kierunek co wektor $\vec{E}$. Oznacza to, że kąt $\theta = 0°$ i cos $\theta = 1$. Tor cząstki próbnej jest radialny, a więc możemy napisać $ds = dr$. Następnie podstawiając granice R i ∞ możemy wzór (22.1) napisać w postaci

$$V_k - V_p = -\int_R^\infty E dr.$$

Przyjmijmy, że $V_k = 0$ (w nieskończoności) i $V_p = V$ (w odległości R). Zgodnie ze wzorem (20.2), natężenie pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbny, jest równe

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Uwzględniając powyższe zależności i założenia, możemy wzór (22.1) zapisać w postaci



Rys. 22.1. Potencjał pola naładowanej cząstki

$$0 - V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2 dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\bigg|_R^{\infty} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}.$$

Stąd, po zamianie R na r, otrzymujemy

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{22.2}$$

Jest to wzór na potencjał V pola wytworzonego przez cząstkę o ładunku q w dowolnej odległości r od cząstki.

Wzór (22.2) został wyprowadzony dla cząstki naładowanej dodatnio, ale pozostaje słuszny także dla cząstki naładowanej ujemnie. Można zauważyć, że znak potencjału V jest taki sam, jak znak ładunku q, co oznacza, że cząstka naładowana dodatnio wytwarza dodatni potencjał elektryczny, a cząstka naładowana ujemnie – ujemny.

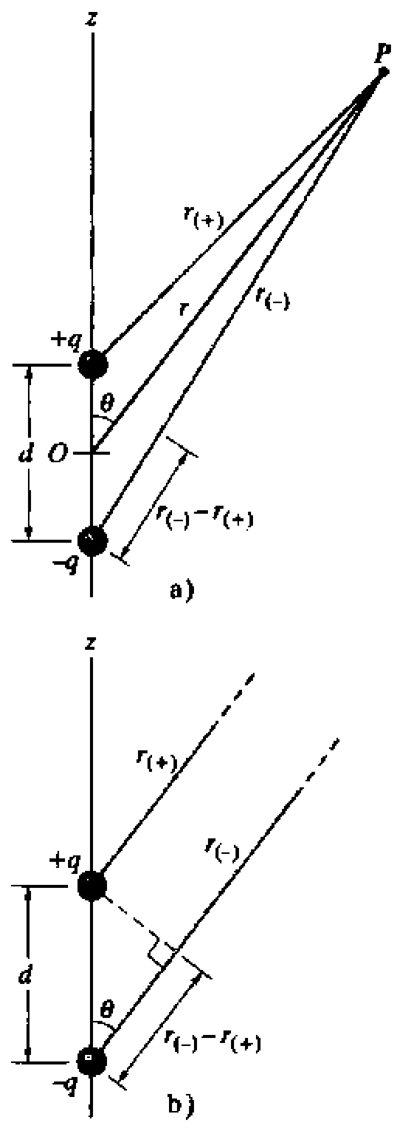
Wypadkowy potencjał układu ładunków punktowych w jakimś punkcie można obliczyć korzystając z zasady superpozycji. Dla układu n ładunków wypadkowy potencjał wynosi

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}, \tag{22.3}$$

gdzie q_i oznacza ładunek i-tej cząstki, a r_i – odległość danego punktu od i-tego ładunku.

Wzór (22.3) można zastosować do obliczenia potencjału dipola elektrycznego w dowolnym punkcie P (zob. rys. 22.2). W punkcie tym dodatni ładunek punktowy, który znajduje się w odległości $r_{(+)}$, wytwarza potencjał $V_{(+)}$, a ujemny ładunek punktowy, znajdujący się w odległości $r_{(-)}$, wytwarza potencjał $V_{(-)}$. Wypadkowy potencjał wynosi zatem

$$V = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}. \tag{22.4}$$



Rys. 22.2. Potencjał pola dipola elektrycznego

Na ogół mamy $r >> d$, gdzie d oznacza odległość między ładunkami, a r – odległość od środka dipola do punktu P. W takim przypadku można przyjąć, że dwa odcinki łączące punkt P z ładunkami dipola są równoległe, a ich różnica jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej d (zob. rys. 22.2 b)). Różnica ta jest na tyle mała, że iloczyn ich długości można przybliżyć przez r^2. Oznacza to, że

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta \quad \text{oraz} \quad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$$

i po podstawieniu tych zależności do wzoru (22.4) otrzymujemy

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2},$$

gdzie kąt θ jest mierzony od osi dipola. Powyższy wzór można także zapisać w postaci

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2},$$

gdzie $p = qd$ oznacza wartość elektrycznego momentu dipolowego $\vec{p}$.

22.4. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

Okazuje się, że (pomijamy szczegóły) składowa natężenia $\vec{E}$ w dowolnym kierunku jest wziętym ze znakiem minus stosunkiem zmiany potencjału elektrycznego przy przemieszczeniu w tym kierunku do wartości tego przemieszczenia, co można zapisać wzorem

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{22.5}$$

Jeśli jako oś s wybierzemy kolejno osie x, y i z prostokątnego układu współrzędnych, to odpowiadające im składowe natężenia $\vec{E}$ wynoszą

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

W przypadku, gdy pole jest jednorodne, wzór (22.5) przybiera postać

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}.$$

Należy dodać, że natężenie pola elektrycznego w kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnej jest równe zeru.

22.5. Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek

Rozważmy układ składający się z nieruchomej cząstki 2 i znajdującej się w nieskończoności cząstki 1. Początkowa energia potencjalna takiego układu dwóch cząstek jest równa $E_{p,p}$. Następnie przenieśmy cząstkę 1 w jej położenie końcowe, co spowoduje, że energia potencjalna układu będzie wynosiła $E_{p,k}$. Praca jaką wykonujemy nad układem zmienia jego energię potencjalną o $\Delta E_p = E_{p,k} - E_{p,p}$. Korzystając ze wzoru

$$\Delta E_p = q\Delta V = q(V_k - V_p)$$

możemy powiązać zmianę energii z różnicą potencjałów, przez którą przenosimy cząstkę 1. Mamy

$$E_{p,k} - E_{p,p} = q(V_k - V_p). \tag{22.6}$$

Początkowa energia potencjalna $E_{p,p}$ jest równa zeru, gdyż cząstki znajdują się w położeniu odniesienia. Dwa potencjały w powyższym wzorze są związane z cząstką 2 i dane są wzorem (22.2), czyli

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}.$$

Oznacza to, że gdy cząstka 1 znajduje się początkowo w nieskończoności, potencjał w tym punkcie wynosi $V_p = 0$. Gdy przenosimy ją w położenie końcowe w odległości r, potencjał w tym punkcie jest równy

$$V_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}.$$

Po podstawieniu tych wyników do zależności (22.6) i opuszczając indeks k mamy

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}.$$

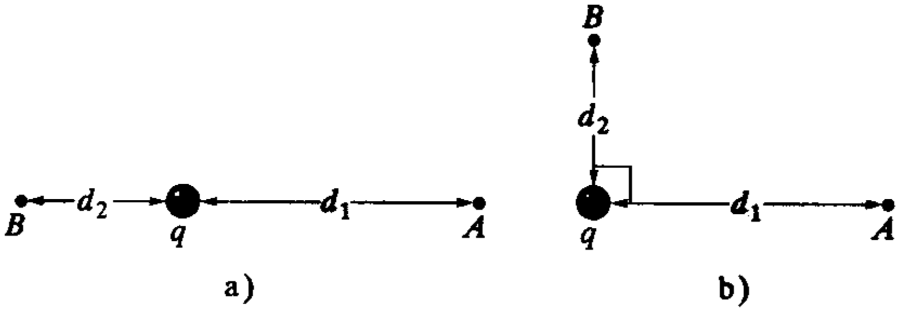
Powyższy wzór przedstawia energię potencjalną w końcowej konfiguracji. Zawiera on znaki obu ładunków. Jeśli oba ładunki mają ten sam znak, to energia potencjalna jest dodatnia, a gdy ładunki mają przeciwne znaki, to energia ta jest ujemna.

Jeśli do układu dodamy trzecią cząstkę o ładunku q_3, to można powtórzyć całe rozumowanie zaczynając od położenia cząstki 3 w nieskończoności, a następnie przenosząc ją do jej końcowego położenia w odległości r_{31} od cząstki 1 i r_{32} od cząstki 2. W tym końcowym położeniu potencjał V_k w punkcie gdzie znajduje się cząstka 3 jest sumą algebraiczną potencjału związanego z cząstką 1 i potencjału zwianego z cząstką 2. Po wykonaniu rachunków okazuje się, że całkowita energia potencjalna układu cząstek jest sumą energii potencjalnych dla każdej pary cząstek tworzących ten układ.

Zadania

1. Rozważmy akumulator samochodowy o różnicy potencjałów 12 V, który może przesłać całkowity ładunek 84 Ah przez obwód z jednego bieguna do drugiego.
   a) Ilu kulombom jest równy ten ładunek?
   b) Jeśli różnica potencjałów jest cały czas równa 12 V, to jak duża energia jest związana z przejściem tego ładunku?
2. Różnica potencjałów pomiędzy Ziemią i chmurą w przypadku pewnej błyskawicy wynosiła $1 \cdot 10^9$ V, a wartość przepływającego ładunku była równa 30 C.
   a) O ile zmieniła się energia tego ładunku?
   b) Gdyby można było wykorzystać całą tę energię do przyspieszenia spoczywającego początkowo samochodu o masie 1000 kg, to jaka byłaby końcowa prędkość samochodu?
3. Na obu powierzchniach nieskończonej nieprzewodzącej płyty jest umieszczony ładunek o gęstości powierzchniowej 0,10 μC / m^2. W jakiej odległości od siebie znajdują się powierzchnie ekwipotencjalne, których potencjały różnią się o 50 V?

4. Rozważmy cząstkę o ładunku $q = 1\ \mu C$, punkt A znajdujący się w odległości $d_1 = 2$ m od ładunku q i punkt B w odległości $d_2 = 1$ m.
   a) Jeśli te punkty znajdują się po przeciwnych stronach cząstki (rys. 22.3 a)), to jaka jest różnica potencjałów elektrycznych $V_A - V_B$?
   b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych, jeśli punkty A i B są położone tak, jak na rys. 24.3 b) ?

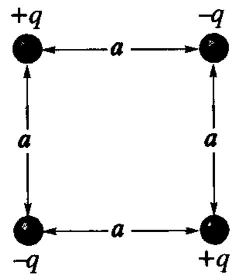


Rys. 22.3. Zadanie 4

5. Cząsteczka amoniaku NH_3 ma trwały elektryczny moment dipolowy równy 1,47 D, gdzie 1 D (debaj) = $3{,}34 \cdot 10^{-30}$ C · m. Obliczyć potencjał pola elektrycznego wytworzonego przez cząsteczkę amoniaku na osi dipola w punkcie odległym o 52 nm (przyjąć $V = 0$ w nieskończoności).
6. Potencjał pola elektrycznego w punktach na płaszczyźnie xy jest dany wzorem

$$V = (2\ \mathrm{V/m^2})x^2 - (3\ \mathrm{V/m^2})y^2.$$

   Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie o współrzędnych (3 m, 2 m) wyrażone w notacji wektorowej?
7. Początkowo unieruchomiona cząstka o ładunku +7,5 μC znajdująca się na osi x w punkcie $x = 60$ cm zostaje uwolniona. Cząstka zaczyna się poruszać pod wpływem siły elektrycznej wytwarzanej przez ładunek Q, który pozostał nieruchomy w początku układu współrzędnych. Ile wynosi energia kinetyczna tej cząstki w chwili, w której przebędzie odległość 40 cm, jeśli
   a) $Q = +20\ \mu C$,
   b) $Q = -20\ \mu C$?
8. Znaleźć pracę potrzebną do utworzenia konfiguracji czterech ładunków z rys. 22.4, jeśli $q = 2{,}3$ pC, $a = 64$ cm przy założeniu, że początkowo ładunki są od siebie nieskończenie odległe.



Rys. 22.4. Zadanie 8

XXIII. POJEMNOŚĆ ELEKTRYCZNA

23.1. Pojemność elektryczna

Kondensator składa się z dwóch izolowanych przewodników (okładek) z ładunkami $+q$ i $-q$. Jego pojemność jest zdefiniowana wzorem

$$q = CU, \tag{23.1}$$

gdzie U oznacza różnicę potencjałów (zwaną *napięciem*) pomiędzy okładkami kondensatora, a C oznacza stałą proporcjonalności zwaną *pojemnością* kondensatora. Jednostką pojemności w układzie SI jest kulomb na wolt. Jednostce tej nadano specjalną nazwę *farad* (F). Farad jest dużą jednostką i w praktyce posługujemy się mikrofaradami (1 μF = 10^{-6} F) lub pikofaradami (1 pF = 10^{-12} F).

Jedną z metod ładowania kondensatora jest umieszczenie go w obwodzie elektrycznym zawierającym źródło prądu. Obwód elektryczny stanowi drogę, wzdłuż której może przepływać ładunek. Źródło prądu jest urządzeniem, które utrzymuje stałą różnicę potencjałów między biegunami źródła.

Pojemność konkretnego kondensatora wyznaczamy w następujący sposób:
- przyjmujemy, że na okładkach znajduje się ładunek q,
- obliczamy odpowiadające temu ładunkowi natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ między okładkami,
- obliczamy różnicę potencjałów U między okładkami,
- obliczamy pojemność C ze wzoru (23.1).

Do powiązania natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ między okładkami kondensatora z ładunkiem q na każdej z okładek stosujemy prawo Gaussa

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q, \tag{23.2}$$

gdzie q oznacza ładunek obejmowany przez powierzchnię Gaussa, a całka jest wypadkowym strumieniem elektrycznym przenikającym przez tę powierzchnię. We wszystkich rozważanych dalej przypadkach powierzchnia Gaussa będzie taka, że jeśli przechodzi przez nią strumień elektryczny, to natężenie $\vec{E}$ ma na niej jednakową wartość oraz wektory $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ są równoległe. Wzór (23.2) przybiera wówczas prostszą postać

$$q = \varepsilon_0 ES, \tag{23.3}$$

gdzie S oznacza pole tej części powierzchni Gaussa, przez którą przenika strumień.

Różnica potencjałów między okładkami kondensatora jest związana z natężeniem pola elektrycznego $\vec{E}$ wzorem

$$V_{konc} - V_{pocz} = -\int_{pocz}^{konc} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \qquad (23.4)$$

gdzie całkę należy obliczyć po dowolnej drodze, która zaczyna się na jednej okładce i kończy na drugiej. Będziemy zawsze wybierać drogę wzdłuż linii pola elektrycznego od okładki ujemnej do okładki dodatniej. Dla takiej drogi wektory $\vec{E}$ i $d\vec{s}$ będą miały przeciwne kierunki i iloczyn skalarny występujący w całce będzie równy $-Eds$. Wzór (23.4) przyjmie wówczas postać

$$U = \int_{-}^{+} Eds. \qquad (23.5)$$

Rozważymy dokładniej trzy rodzaje kondensatorów: płaski, walcowy i kulisty.

W przypadku kondensatora płaskiego zakładamy, że jego okładki są tak duże i umieszczone tak blisko siebie, że można zaniedbać zakrzywienie linii pola przy krawędziach okładek i traktować natężenie $\vec{E}$ jako stałe w całym obszarze między okładkami. Jeśli przez S oznaczymy pole powierzchni okładki (powierzchni Gaussa), to (zgodnie ze wzorem (23.3)) mamy

$$q = \varepsilon_0 ES.$$

Przy odległości d między okładkami ze wzoru (23.5) otrzymujemy

$$U = \int_{-}^{+} Eds = E\int_{0}^{d} ds = Ed.$$

Po podstawieniu tych wielkości do wzoru (23.1) mamy

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Ze wzoru tego wynika, że pojemność kondensatora płaskiego zależy tylko od wielkości geometrycznych (od pola powierzchni okładki S i odległości d między okładkami). Pojemność jest tym większa, im pole powierzchni okładki jest większe i im mniejsza jest odległość d.

W kondensatorze walcowym o długości L załóżmy, że ma on dwie współosiowe powierzchnie walcowe o promieniach a (powierzchnia wewnętrzna z dodatnim ładunkiem q) i b (powierzchnia zewnętrzna z ujemnym ładunkiem q) i niech $L >> b$. Jako powierzchnię Gaussa wybieramy powierzchnię walca (zamkniętego denkami) o długości L i promieniu r, która zwiera w sobie wewnętrzną powierzchnię walcową. Ze wzoru (23.3) mamy

$$q = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 E(2\pi rL),$$

gdzie wielkość $2\pi rL$ jest polem zakrzywionej części powierzchni walca. Strumień elektryczny przenikający przez denka jest równy zeru. Wyznaczając stąd natężenie E otrzymujemy

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$$

i po podstawieniu do wzoru (23.5) mamy

$$U = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

przy czym uwzględniliśmy tu, że $ds = -dr$, gdyż całkowaliśmy w kierunku malejących wartości r. Ze związku $C = q / U$ otrzymujemy ostatecznie

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}.$$

Podobnie jak w przypadku kondensatora płaskiego, pojemność kondensatora walcowego zależy wyłącznie od wielkości geometrycznych – w tym przypadku od długości L oraz promieni a i b.

Kondensator kulisty składa się z dwóch współśrodkowych powłok sferycznych o promieniach a i b. Jako powierzchnię Gaussa wybieramy sferę o promieniu r, współśrodkową z tymi powłokami i ze wzoru (23.3) otrzymujemy

$$q = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 E(4\pi r^2),$$

gdzie wielkość $4\pi r^2$ jest polem sferycznej powierzchni Gaussa. Stąd

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

i po podstawieniu do wzoru (23.5) otrzymujemy

$$U = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}.$$

Wstawiając tę zależność do wzoru (23.1) i wyznaczając następnie pojemność C mamy

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \tag{23.6}$$

Pojemność można te przypisać pojedynczej izolowanej kuli (lub sferze) przewodzącej o promieniu R zakładając, że druga okładka kondensatora jest sferą przewodzącą o nieskończonym promieniu. W tym celu wystarczy wzór (23.6) zapisać w postaci

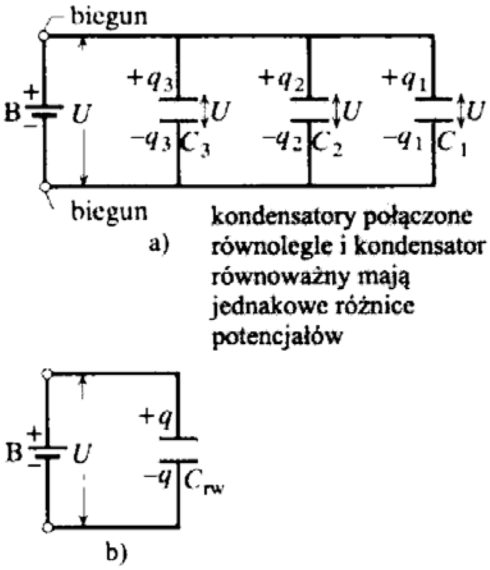
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b},$$

skąd po przejściu do granicy przy $b \to \infty$ i podstawieniu R za a otrzymamy

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

23.2. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

Połączenie *równoległe* oznacza, że połączono przewodami bezpośrednio jedne okładki kondensatorów i podobnie drugie okładki oraz że różnica potencjałów U jest przyłożona do tych dwóch połączonych przewodami okładek (zob. rys. 23.1).



Rys. 23.1. Kondensatory połączone równolegle

Jeśli różnica potencjałów jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych równolegle, to taka sama różnica potencjałów występuje na każdym kondensatorze. Całkowity ładunek q zgromadzony w układzie jest sumą ładunków zgromadzonych na poszczególnych kondensatorach. Kondensatory połączone równolegle można zastąpić kondensatorem równoważnym o takim samym całkowitym ładunku q i takiej samej różnicy potencjałów U, jak dla kondensatorów układu.

Aby wyprowadzić wzór na pojemność kondensatora równoważnego C_{rw}, zastosujemy najpierw wzór (23.1) w celu obliczenia ładunku na każdym z trzech kondensatorów na rys. 23.1 a). Mamy

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad q_3 = C_3 U.$$

Całkowity ładunek w układzie wynosi więc

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Równoważna pojemność o takim samym ładunku i takiej samej przyłożonej różnicy potencjałów wynosi zatem

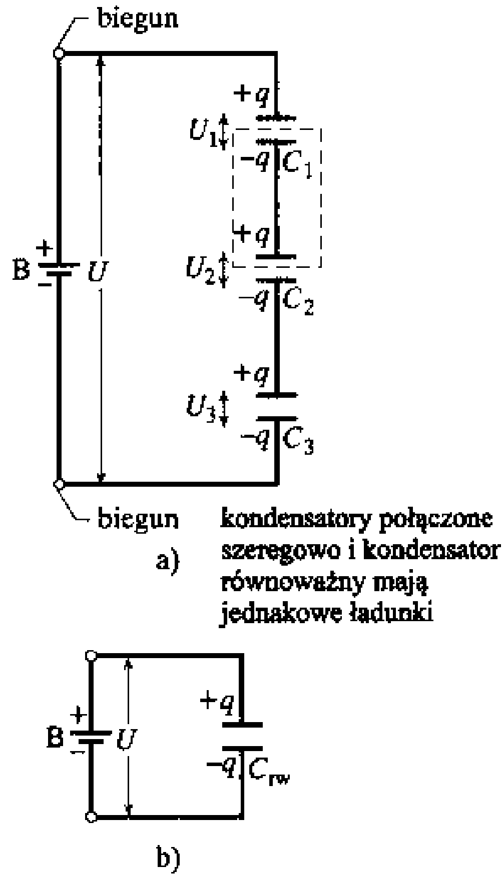
$$C_{rw} = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Wzór ten można rozszerzyć na dowolną liczbę n kondensatorów:

$$C_{rw} = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Połączenie *szeregowe* oznacza, e kondensatory są łączone ze sobą w szereg (jeden za drugim) oraz że różnica potencjałów U jest przyłożona do dwóch końców szeregu (zob. rys. 23.2).

Jeśli różnica potencjałów jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych szeregowo, to kondensatory mają identyczne ładunki q. Suma różnic potencjałów na wszystkich kondensatorach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów. Kondensatory połączone szeregowo można zastąpić kondensatorem, który ma taki sam ładunek q i taką samą całkowitą różnicę potencjałów, jak kondensatory połączone szeregowo.



Rys. 23.2. Kondensatory połączone szeregowo

Dla każdego z trzech kondensatorów na rys. 23.2 a) mamy

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}, \quad U_3 = \frac{q}{C_3}.$$

Całkowita różnica potencjałów U wytworzona przez źródło jest sumą tych trzech różnic potencjałów, czyli

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

Równoważna pojemność wynosi więc

$$C_{rw} = \frac{q}{U} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

czyli

$$\frac{1}{C_{rw}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

co można uogólnić na dowolną liczbę n kondensatorów:

$$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

23.3. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym

Aby naładować kondensator, należy wykonać pracę przez siłę zewnętrzną. Jeżeli w pewnej chwili ładunek przeniesiony z jednej pytki kondensatora na drugą wynosił q' i różnica potencjałów U' była wtedy równa $q'/C,$ to po przeniesieniu dodatkowego ładunku dq' wykonano pracę

$$dW = U'dq' = \frac{q'}{C}dq'.$$

Praca potrzebna do przeniesienia całkowitego ładunku q kondensatora jest równa

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int_0^q q'dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

Praca ta jest zmagazynowana jako energia potencjalna E_p w kondensatorze i stąd

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2.$$

Wzór ten jest prawdziwy bez względu na geometrię kondensatora.

Energia potencjalna naładowanego kondensatora jest zmagazynowana w polu elektrycznym między okładkami kondensatora.

23.4. Kondensator z dielektrykiem

Dielektryk to materiał izolujący lub plastik. Jeżeli przestrzeń pomiędzy okładkami kondensatora jest całkowicie wypełniona materiałem dielektrycznym, to pojemność tego kondensatora C zwiększa się w stosunku do jego pojemności w próżni (lub w powietrzu) o czynnik równy względnej przenikalności ε_r tego materiału, który jest liczbą większą od 1.

W obszarze całkowicie wypełnionym dielektrykiem wszystkie równania elektrostatyki zawierające stałą elektryczną ε_0 muszą być zmodyfikowane przez zamianę ε_0 na wielkość $\varepsilon_r\varepsilon_0$.

Gdy materiał dielektryczny jest umieszczony w zewnętrznym polu elektrycznym, powstaje w nim wewnętrzne pole elektryczne, które jest skierowane przeciwnie do pola zewnętrznego, co redukuje wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz tego materiału.

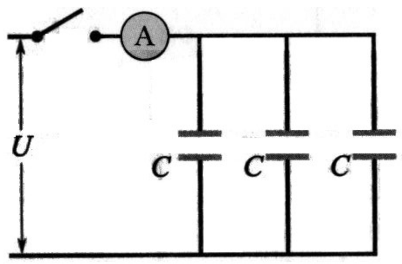
Wstawienie dielelektryka do kondensatora powoduje pojawienie się na jego powierzchni indukowanego ładunku i zmniejszenie natężenia pola elektrycznego istniejącego pomiędzy jego okładkami. Ładunek indukowany jest mniejszy niż ładunek swobodny na okładkach kondensatora. W obecności dielektryka prawo Gaussa można uogólnić do postaci

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q,$$

gdzie q oznacza ładunek swobodny. Indukowany ładunek powierzchniowy jest uwzględniony przez wstawienie przenikalności elektrycznej ε_r pod znak całki.

Zadania

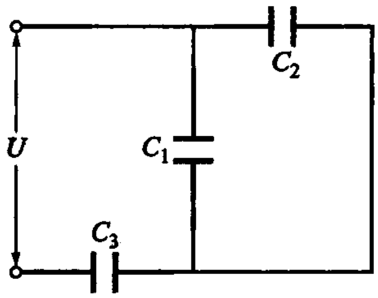
1. Dwa metalowe przedmioty mają całkowite ładunki +70 pC i −70 pC, co prowadzi do różnicy potencjałów 20 V między nimi.
   a) Jaka jest pojemność układu?
   b) Jeśli ładunki zmienimy na +200 pC i −200 pC, to jaka będzie pojemność?
   c) Jaka będzie wówczas różnica potencjałów?
2. Kondensator płaski ma kołowe okładki o promieniu 8,2 cm umieszczone w odległości 1,3 mm od siebie.
   a) Obliczyć jego pojemność.
   b) Jaki ładunek znajdzie się na okładkach, jeżeli przyłożymy do nich różnicę potencjałów 120 V?
3. Jaka jest pojemność elektryczna kropli powstałej przez połączenie dwóch kropli rtęci o promieniu R = 2mm?
4. Ile kondensatorów o pojemności 1 μF trzeba połączyć równolegle, aby po przyłożeniu różnicy potencjałów 110 V zmagazynować ładunek 1 C?
5. Każdy z nienaładowanych kondensatorów na rys. 23.3 ma pojemność 25 μF. Po zamknięciu klucza pojawiła się na nich różnica potencjałów 4200 V. Jaki ładunek przepłynął przez amperomierz A?



Rys. 23.3. Zadanie 5

6. Znaleźć pojemność równoważną układu kondensatorów przedstawionego na rys. 23.4. Przyjąć C_1 = 10 μF, C_2 = 5 μF i C_3 = 4 μF.
7. Na rys. 23.4 różnica potencjałów U = 100 V jest przyłożona do układu kondensatorów o pojemnościach C_1 = 10 μF, C_2 = 5 μF i C_3 = 4 μF. Jeśli kondensator 3 doznaje przebicia elektrycznego i staje się równoważny przewodowi elektrycznemu, to jaki jest wzrost
   a) ładunku na kondensatorze 1,

b) różnicy potencjałów na kondensatorze 1?



Rys. 23.4. Zadanie 6 i 7

8. Jaka pojemność jest potrzebna do zmagazynowania energii 10 kWh, gdy różnica potencjałów wynosi 1000 V?
9. Kondensatory o pojemnościach 2 μF i 4 μF są połączone równolegle i jest do nich przyłożona różnica potencjałów 300 V. Obliczyć całkowitą energię zmagazynowaną w kondensatorach.
10. Kabel koncentryczny (współosiowy) używany w linii przesyłowej ma promień wewnętrzny 0,1 mm i promień zewnętrzny 0,6 mm. Obliczyć pojemność kabla przypadającą na metr jego długości. Założyć, że przestrzeń między przewodnikami jest wypełniona polistyrenem o przenikalności elektrycznej względnej $\varepsilon_r = 2{,}6$.
11. Mając kondensator powietrzny o pojemności 7,4 pF, chcemy go przekształcić w kondensator mogący zmagazynować energię 7,4 μJ przy maksymalnej różnicy potencjałów 652 V. Jaka powinna być przenikalność elektryczna względna ε_r użytego dielektryka?
12. Kondensator płaski ma pojemność 100 pF, pole powierzchni okładek 100 cm^2 i szczelinę między okładkami wypełnioną całkowicie miką ($\varepsilon_r = 5{,}4$). Dla różnicy potencjałów 50 V obliczyć:
    a) wartość natężenia pola elektrycznego E w mice,
    b) wartość ładunku swobodnego na okładkach,
    c) wartość indukowanego ładunku powierzchniowego w mice.

XXIV. PRĄD ELEKTRYCZNY I OPÓR ELEKTRYCZNY

24.1. Prąd elektryczny

Natężenie prądu elektrycznego I płynącego w przewodniku jest zdefiniowane jako stosunek

$$I = \frac{dq}{dt},$$

gdzie dq oznacza ilość dodatniego ładunku, który przepływa w czasie dt. Kierunek płynącego prądu zgodnie z przyjętą umową jest kierunkiem przepływu ładunku dodatniego, chociaż zwykle tylko elektrony przewodnictwa mogą poruszać się.

Natężenie prądu I (wielkość skalarna) jest związane z gęstością prądu $\vec{J}$ (wielkością wektorową) relacją

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

gdzie $d\vec{S}$ oznacza wektor prostopadły do elementu powierzchni o polu ds, a całka jest obliczana po powierzchni dowolnego przekroju przez przewodnik. Gęstość prądu $\vec{J}$ ma taki sam kierunek jak prędkość poruszających się nośników, jeśli są one dodatnie, a w przypadku nośników naładowanych ujemnie kierunek przeciwny.

Gdy w przewodniku jest wytwarzane pole elektryczne o natężeniu $\vec{E}$, to nośniki ładunku (w założeniu dodatnie) nabierają prędkości (zwanej prędkością unoszenia) v_d w kierunku wektora $\vec{E}$. Prędkość ta jest zwiana z gęstością prądu zależnością

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d,$$

gdzie iloczyn ne oznacza gęstość ładunku nośników (n oznacza liczbę nośników na jednostkę objętości, a e – wspólny ładunek nośników).

24.2. Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy

Opór elektryczny (rezystancja) R przewodnika zdefiniowany jest wzorem

$$R = \frac{U}{I},$$

gdzie U oznacza różnicę potencjałów na końcach przewodnika, a I – natężenie prądu.

Opór właściwy (rezystywność) ρ i przewodność właściwa (konduktywność) σ materiału są związane relacją

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J},$$

gdzie E oznacza wartość natężenia przyłożonego pola elektrycznego, a J – wartość gęstości prądu. Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądu są zwiane z oporem właściwym zależnością

$$\vec{E} = \rho\vec{J}. \tag{26.1}$$

Opór R przewodnika o długości L i jednorodnym przekroju poprzecznym wynosi

$$R = \rho\frac{L}{S},$$

gdzie S oznacza pole przekroju poprzecznego.

Opór właściwy ρ dla większości materiałów zmienia się wraz z temperaturą. Dla wielu materiałów, także dla metali, związek między oporem właściwym i temperaturą T ma w przybliżeniu postać

$$\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha(T - T_0),$$

gdzie T_0 oznacza temperaturę odniesienia, ρ_0 – opór właściwy w temperaturze T_0, a α oznacza współczynnik oporu właściwego materiału.

Mówimy, że dane ciało (przewodnik, opornik lub inny element obwodu) spełnia *prawo Ohma*, jeśli natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do różnicy potencjałów przyłożonych do ciała, co można też wypowiedzieć, że jego opór $R = U / I$ jest niezależny od przyłożonej różnicy potencjałów U. Istotą prawa Ohma jest to, że wykres zależności natężenia I od różnicy potencjałów U jest liniowy.

Prawo Ohma można uogólnić dla materiałów przewodzących korzystając ze wzoru (26.1): materiał przewodzący spełnia prawo Ohma, gdy opór właściwy materiału nie zależy od wartości i kierunku przyłożonego pola elektrycznego.

24.3. Moc w obwodach elektrycznych, półprzewodniki i nadprzewodniki

Moc elektryczna P, czyli ilość energii przenoszonej w jednostce czasu w danym przewodniku, na którym utrzymuje się przyłożona różnica potencjałów U, wynosi

$$P = IU.$$

Dla opornika wzór ten można też zapisać w postaci

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Półprzewodniki są materiałami z małą liczbą elektronów przewodnictwa, ale mogą stać się przewodnikami, gdy są domieszkowane z innymi atomami, które dostarczają swobodnych elektronów. Z kolei *nadprzewodniki* są materiałami, dla których opór elektryczny zanika w niskich temperaturach.

Zadania

1. Ile
   a) kulombów ładunku,
   b) elektronów przewodnictwa

przepływa w ciągu 4 minut przez każdy przekrój przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu 5 A?

2. Bezpiecznik w obwodzie elektrycznym jest drutem, który dobiera się tak, aby stopił się i otworzył obwód, gdy natężenie prądu przekroczy pewną określoną wartość. Załóżmy, że materiał zastosowany w bezpieczniku topi się, gdy gęstość prądu wynosi 440 A / cm^2. Jaka powinna być średnica walcowego drutu dla bezpiecznika, który ogranicza prąd o natężeniu 0,5 A?
3. W drucie chromonikielolinowym (czyli wykonanym ze stopu nikiel-chrom-żelazo używanego powszechnie w elementach grzejnych) o długości 1 m i polu przekroju poprzecznego 1 mm^2 przy różnicy potencjałów 2 V przyłożonej do jego końców płynie prąd o natężeniu 4A. Obliczyć przewodność właściwą σ chromonikieliny.
4. Ile wynosi opór właściwy przewodu o średnicy 1 mm, długości 2 m i oporze 50 mΩ?
5. Do ogrzewacza pokojowego, którego opór (gdy jest gorący) wynosi 14 Ω, przyłożono różnicę potencjałów 120 V.
   a) Z jaką mocą energia elektryczna jest zamieniana na energię termiczną?
   b) Jaki jest koszt działania ogrzewacza w ciągu 5 h, gdy cena wynosi 0,3 zł / kWh?
6. Nieznany opornik podłączono do biegunów źródła prądu o różnicy potencjałów 3 V. Energia rozprasza się w nim z szybkością 0,54 W. Ten sam opornik podłączono następnie do biegunów źródła prądu o różnicy potencjałów 1,5 V. Z jaką szybkością rozprasza się teraz energia?