XIV. DRGANIA

14.1. Ruch harmoniczny

Świat jest pełen ciał, które wykonują drgania, czyli poruszają się na przemian w jedną stronę i z powrotem. Drgania te mierzy się za pomocą częstotliwości. Częstotliwość drgań ν jest to liczba pełnych drgań (cykli) wykonywanych w ciągu każdej sekundy. Jej jednostką w układzie SI jest herc (Hz), przy czym

$$1\ \text{Hz} = 1\ \text{pełne drganie na sekundę} = 1\ \text{s}^{-1}.$$

Okres ruchu T jest to czas, w jakim jest wykonywane jedno pełne drganie:

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Każdy ruch powtarzający się w regularnych odstępach czasu nazywamy ruchem okresowym. Będziemy rozważać ruch, w którym zależność przemieszczenia x ciała od czasu jest opisana wzorem

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi), \tag{14.1}$$

w którym wielkości x_m, ω i ϕ oznaczają pewne stałe. Ruch okresowy, opisany tym równaniem, nazywamy ruchem harmonicznym. Ponieważ funkcja cosinus zmienia okresowo swe wartości między +1 a −1, więc wartość x_m wyznacza odległość, na jaką cząstka odbiega od początku osi. Wielkość tę nazywamy *amplitudą* drgań.

Stałą ω nazywa się *częstością kołową* ruchu. Aby poznać jej znaczenie, przyjmijmy we wzorze (14.1) $\phi = 0$. Przemieszczenie $x(t)$ musi osiągnąć swą początkową wartość po czasie równym jednemu okresowi drgań T, czyli wartość $x(t)$ musi być równa $x(t + T)$ dla każdej wartości t, co oznacza, że

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega (t + T).$$

Wartości funkcji cosinus będą ponownie takie same, gdy jej argument (*faza drgań*) wzrośnie o 2π radianów, czyli

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi,$$

skąd

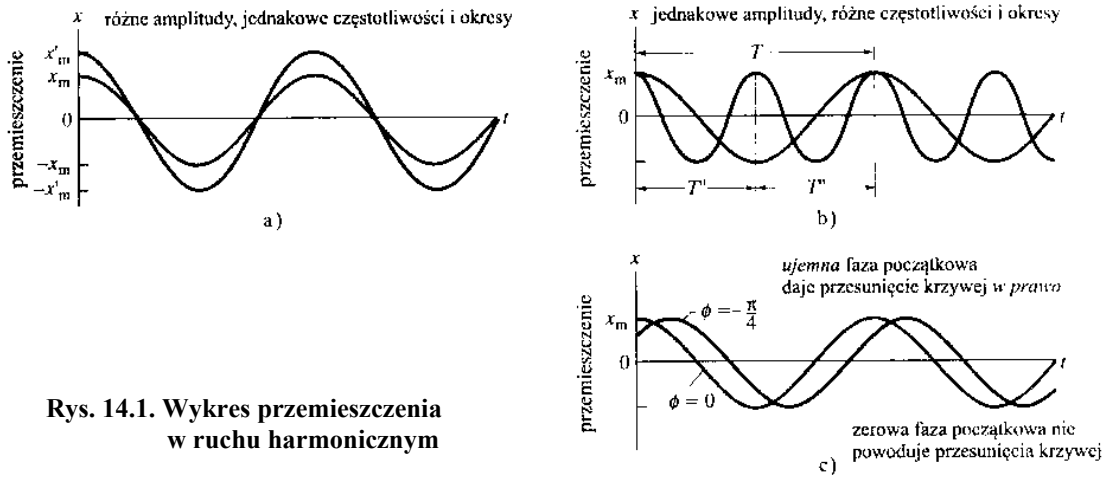
$$\omega T = 2\pi,$$

a więc

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Jednostką częstości kołowej w układzie SI jest radian na sekundę.

Ostatnia stała ϕ nazywa się *fazą początkową*. Jej ujemna wartość daje przesunięcie wykresu przemieszczenia w lewo, a dodatnia – w prawo (zob. rys. 14.1).



Rys. 14.1. Wykres przemieszczenia w ruchu harmonicznym

Różniczkując wzór (14.1) otrzymujemy wyrażenie na prędkość ciała wykonującego ruch harmoniczny:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)],$$

czyli

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi). \tag{14.2}$$

Wielkość stojąca przed funkcją sinus wyznacza zakres zmian prędkości – zmienia się ona w granicach od $+\omega x_m$ do $-\omega x_m$.

Znając prędkość w ruchu harmonicznym i wykonując ponowne różniczkowanie, otrzymamy wzór na przyspieszenie drgającego ciała:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)],$$

czyli

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi),$$

skąd po uwzględnieniu zależności (14.1) dostajemy

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \tag{14.3}$$

Z drugiej zasady dynamiki Newtona można obliczyć siłę działającą na ciało, by nadać mu przyspieszenie wyrażone wzorem (14.3). Mamy

$$F = ma = m(-\omega^2 x) = -(m\omega^2)x.$$

Znak minus oznacza, że kierunek siły działającej na cząstkę jest przeciwny do kierunku jej przemieszczenia. Oznacza to, że siła powodująca ruch harmoniczny jest siłą zwrotną, która stara się zawrócić poruszającą się cząstkę do punktu równowagi $x = 0$. Możemy zatem powiedzieć, że

ruch harmoniczny jest to ruch, jaki wykonuje ciało o masie m, na które działa siła proporcjonalna do przemieszczenia, ale o przeciwnym znaku.

Zauważmy, że z podobną sytuacją mieliśmy do czynienia przy opisywaniu układu składającego się z klocka i sprężyny. Zgodnie z prawem Hooke'a siła związana z przemieszczeniem klocka ma postać

$$F = -kx.$$

Porównując oba te wzory, możemy powiązać stałą sprężystości k z masą klocka i częstością kołową jego ruchu harmonicznego:

$$k = m\omega^2.$$

Znając więc masę drgającego klocka, można obliczyć częstość kołową jego ruchu harmonicznego:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.4}$$

i okres drgań:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Układ klocek-sprężyna opisany tymi równaniami tworzy tzw. liniowy oscylator harmoniczny, przy czym słowo *liniowy* oznacza, że siła F jest proporcjonalna do przemieszczenia x.

14.2. Energia w ruchu harmonicznym

Energia oscylatora liniowego zmienia się nieustannie z energii kinetycznej w potencjalną i na odwrót, podczas gdy ich suma, czyli energia mechaniczna E, pozostaje stała. Energia potencjalna oscylatora liniowego w całości jest związana ze sprężyną. Jej wartość zależy od stopnia rozciągnięcia lub ściśnięcia sprężyny, czyli od wielkości $x(t)$. Jak pamiętamy (zob. p. 7.1), energia potencjalna układu klocek-sprężyna jest dana wzorem

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2,$$

skąd po uwzględnieniu zależności (14.1) otrzymujemy

$$E_p = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi). \tag{14.5}$$

Energia kinetyczna układu klocek-sprężyna w całości jest związana z klockiem. Jej wartość zależy od tego, jak szybko porusza się klocek, czyli od prędkości $v(t)$. Uwzględniając wzór (14.2) mamy

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x_m^2\sin^2(\omega t + \phi).$$

Na podstawie wzoru (14.4) zamiast ω^2 możemy podstawić k / m, a stąd

$$E_k = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t + \varphi). \tag{14.6}$$

Sumując wyrażenia (14.5) i (14.6) mamy

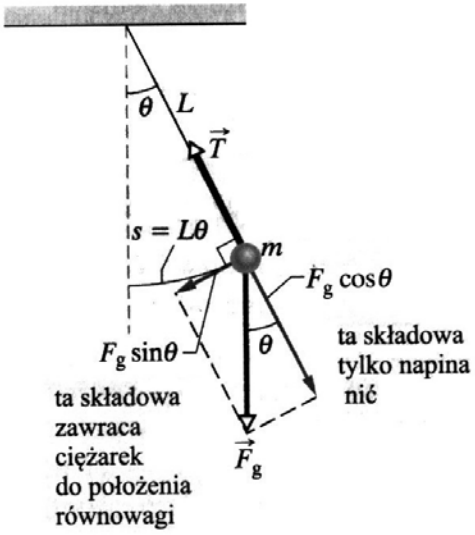
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t + \phi)$$
$$= \frac{1}{2}kx_m^2[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

Ze wzoru tego wynika, że energia mechaniczna oscylatora liniowego jest stała i nie zależy od czasu.

14.3. Wahadła i ruch po okręgu

W tym punkcie zajmiemy się oscylatorami harmonicznymi, w których „sprężystość" jest związana z siłą grawitacyjną, a nie ze sprężystymi właściwościami rozciąganej sprężyny.

Rozważmy wahadło matematyczne mające postać ciała (ciężarka) o masie m zawieszonego na jednym końcu nierozciągliwej linki o znikomo małej masie i o długości L, której drugi koniec jest umocowany. Ciężarek kołysze się swobodnie w płaszczyźnie rysunku (zob. rys. 14.2). Jeżeli linka jest odchylona od pionu o kąt θ, na ciężarek działa naprężenie linki $\vec{T}$ i siła ciężkości $\vec{F}_g$. Siłę $\vec{F}_g$ rozkładamy na składową radialną $F_g\cos\theta$ i składową styczną do toru zakreślanego przez ciężarek $F_g\sin\theta$. Składowa styczna powoduje powstanie przywracającego stan równowagi momentu siły względem punktu zawieszenia wahadła, gdyż zawsze działa przeciwnie do wychylenia ciężarka i wymusza jego powrót do centralnego położenia. Położenie to nazywa się *położeniem równowagi*, gdyż nieruchome wahadło pozostawałoby w nim w spoczynku.



Rys. 14.2. Wahadło matematyczne

Jak pamiętamy (zob. p. 10.2), moment siły $M = r \perp F$ możemy zapisać w postaci

$$M = -L(F_g \sin\theta),$$

gdzie znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta θ, a L oznacza ramię składowej stycznej siły $F_g \sin\theta$ względem punktu zawieszenia wahadła. Ponieważ z drugiej strony $M = I\alpha$, gdzie I oznacza moment bezwładności, a α – przyspieszenie kątowe względem tego punktu, więc

$$-L(mg\sin\theta) = I\alpha,$$

przy czym siłę ciężkości zastąpiliśmy wyrażeniem mg. Jeżeli założymy, że kąt θ jest mały, to funkcję $\sin\theta$ można przybliżyć przez kąt θ wyrażony w radianach. Korzystając z tego przybliżenia otrzymujemy

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta. \tag{14.7}$$

Powyższy wzór oznacza, że przyspieszenie kątowe α wahadła jest proporcjonalne do jego przemieszczenia kątowego θ, ale ma przeciwny znak. Tak więc ciężarek wahadła porusza się w prawo (jak na rys. 14.2), jego przyspieszenie skierowane w lewo wzrasta, dopóki ciężarek nie zatrzyma się i nie zacznie poruszać się w lewo.

Przez porównanie wyrażeń (14.3) i (14.7) otrzymamy wzór na częstość kołową wahadła:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}.$$

Jeśli następnie podstawimy to wyrażenie do wzoru $\omega = 2\pi / T$, to możemy wyznaczyć okres drgań wahadła. Mamy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}. \tag{14.8}$$

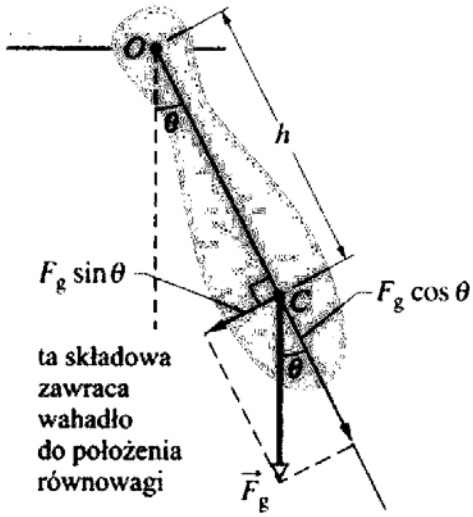
Cała masa wahadła matematycznego jest skupiona w ciężarku o masie m znajdującym się w odległości L od punktu zawieszenia. Ponieważ moment bezwładności $I = mr^2$, więc dla rozważanego wahadła mamy $I = mL^2$. Po podstawieniu tego wyrażenia do zależności (14.8) otrzymujemy ostatecznie prosty wzór na okres drgań wahadła matematycznego poruszającego się w zakresie małych kątów:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{14.9}$$

Rzeczywiste wahadło, zwane wahadłem fizycznym, może mieć skomplikowany rozkład masy. Na rys. 14.3 przedstawiono pewne wahadło fizyczne odchylone w jedną stronę o kąt θ. Siła ciężkości $\vec{F}_g$ działa na środek masy C, który znajduje się w odległości h od punktu zawieszenia O. Pomiędzy wahadłem matematycznym i fizycznym jest tylko jedna istotna różnica. W wahadle fizycznym moment siły związany ze składową siły ciężkości $F_g \sin\theta$ ma ramię o długości h względem punktu zawieszenia, a nie ramię równe długości linki L. Jeśli zatem we wzorze (14.8) zastąpimy L przez h, to otrzymamy wzór na okres ruchu wahadła fizycznego postaci

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}. \tag{14.10}$$

Podobnie jak w wahadle matematycznym, I oznacza moment bezwładności wahadła względem punktu O, ale w tym przypadku nie wyraża się on prostym wzorem mL^2, gdyż zależy od kształtu wahadła fizycznego (choć nadal jest proporcjonalny do masy m).



Rys. 14.3 Wahadło fizyczne

Każdemu wahadłu fizycznemu, drgającemu wokół danego punktu zawieszenia O z okresem T, odpowiada wahadło matematyczne o długości L_O, drgające z tym samym okresem T. Wielkość L_O nazywa się *długością zredukowaną wahadła fizycznego* i można ją wyznaczyć ze wzoru (14.9). Punkt znajdujący się w odległości L_O od punktu zawieszenia O nazywamy *środkiem wahań wahadła fizycznego* dla danego punktu zawieszenia.

Wahadło fizyczne można wykorzystać do pomiaru przyspieszenia ziemskiego g w różnych punktach na powierzchni Ziemi. Rozważmy przypadek wahadła w postaci jednorodnego pręta o długości L, który jest unieruchomiony na jednym końcu. Dla takiego wahadła odległość h od punktu zawieszenia do środka masy wynosi $L / 2$. Moment bezwładności tego wahadła względem prostopadłej osi przechodzącej przez środek masy jest równy $mL^2 / 12$. Korzystając z twierdzenia Steinera (zob. p. 9.4) mamy

$$I = I_{SM} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2 .$$

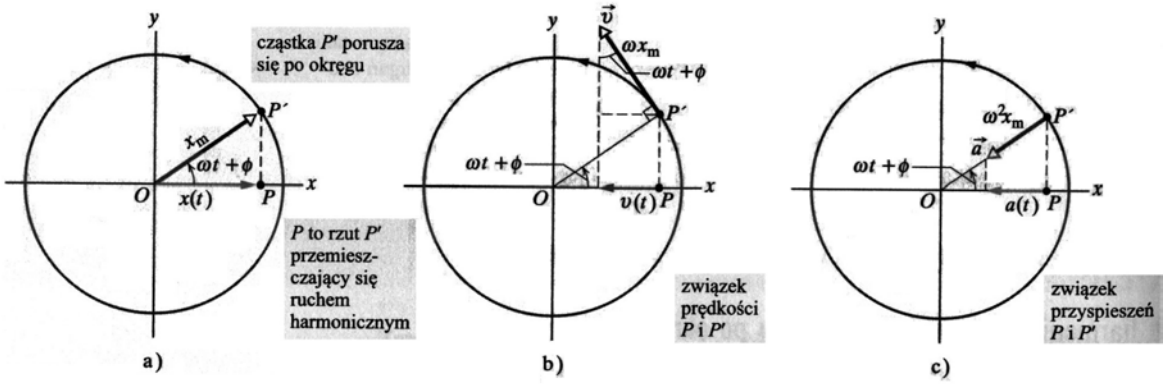
Jeśli wyrażenie to podstawimy do równania (14.10) i uwzględnimy podaną wartość h, a następnie rozwiążemy to równanie względem g, to otrzymamy

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2} .$$

Ze wzoru tego wynika, że do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego w miejscu, w którym znajduje się wahadło, wystarczy zmierzyć długość L i okres T.

Okazuje się, że ruch harmoniczny jest związany z ruchem jednostajnym po okręgu. Pierwszy zauważył to Galileusz, który w 1610 roku, posługując się skonstruowanym przez siebie teleskopem, odkrył cztery główne księżyce Jowisza. Zauważył on, iż wydaje się, że każdy księżyc porusza się tam i z powrotem względem planety w sposób harmoniczny (dysk planety był centralnym punktem ruchu). Obecnie formułuje się to nieco ściślej, a mianowicie, że ruch harmoniczny

można opisać jako ruch rzutu punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na średnicę okręgu, po którym ten ruch odbywa się.



Rys. 14.4. Związki między ruchem harmonicznym i ruchem jednostajnym po okręgu

Zilustrowano to na rys. 14.4, na którym przedstawiono cząstkę P' poruszającą się po okręgu ruchem jednostajnym ze stałą prędkością kątową ω. Promień x_m okręgu jest równy długości wektora położenia cząstki. W dowolnej chwili położenie kątowe cząstki jest równe $\omega t + \phi$, gdzie ϕ oznacza położenie kątowe w chwili $t = 0$.

Rzutem położenia cząstki P' na oś x jest punkt P, którego ruch będziemy analizować. Rzut wektora położenia cząstki P' na oś x daje współrzędną $x(t)$ punktu P. Mamy

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

czyli wzór (14.1). Oznacza to, że jeżeli cząstka P' porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to rzut jej położenia P przemieszcza się ruchem harmonicznym wzdłuż średnicy okręgu.

Na rys. 14.4 b) przedstawiono prędkość $\vec{v}$ cząstki P'. Jak pamiętamy (zob. p. 9.3), długość wektora prędkości wynosi ωx_m, a jego rzut na oś x opisuje wyrażenie

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi),$$

czyli wzór (14.2). Znak minus wziął się stąd, że prędkość punktu P na rys. 14.4 b) jest skierowana w lewo, a więc przeciwnie do kierunku osi x.

Przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}$ cząstki P' jest przedstawione na rys. 14.4 c). Długość wektora przyspieszenia dośrodkowego wynosi $\omega^2 x_m$, a jego rzut na oś x opisuje wyrażenie

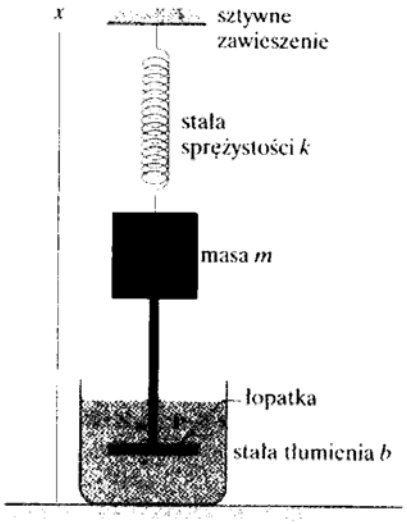
$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi),$$

czyli wzór (14.3).

14.4. Ruch harmoniczny tłumiony

Jeżeli ruch oscylatora słabnie na skutek działania sił zewnętrznych, to taki oscylator nazywamy *oscylatorem tłumionym*, a jego drgania nazywamy *tłumionymi*. Prosty oscylator tłumiony

przedstawiono na rys. 14.5. Składa się on z klocka o masie m, który drga w pionie zawieszony na sprężynie o stałej sprężystości k. Do klocka jest przyczepiony pręt zakończony łopatką zanurzoną w cieczy (zakładamy, że elementy te mają znikomo małą masę). Gdy łopatka porusza się w górę i w dół, ciecz wywiera na nią (i na cały układ) siłę oporu.



Rys. 14.5. Prosty oscylator tłumiony

Załóżmy, że siła oporu $\vec{F}_o$, jaką działa ciecz, jest proporcjonalna do wartości prędkości $\vec{v}$ łopatki i klocka. Dla składowej wzdłuż kierunku x mamy zatem

$$F_o = -bv,$$

gdzie b oznacza stałą tłumienia, która zależy od właściwości łopatki i cieczy. Znak minus wskazuje, że siła $\vec{F}_o$ przeciwdziała ruchowi.

Sprężyna działa na klocek siłą $F_s = -kx$. Jeżeli założymy, że siła ciężkości jest znikomo mała w porównaniu z siłami F_o i F_s, to drugą zasadę dynamiki Newtona dla składowej wzdłuż osi x można zapisać w postaci

$$-bv - kx = ma.$$

Po podstawieniu $v = dx / dt$ i $a = d^2x / dt^2$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$x(t) = x_m \exp(-bt / 2m)\cos(\omega' t + \phi), \tag{14.11}$$

gdzie x_m oznacza amplitudę, a ω' – częstość kołową oscylatora tłumionego daną wzorem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

Zauważmy, że gdy $b = 0$ (brak tłumienia), wzór ten określa częstość kołową oscylatora nietłumionego, a wzór (14.11) sprowadza się do wzoru (14.1). Ponadto jeśli stała tłumienia jest mała, czyli $b << \sqrt{km}$, to $\omega' \approx \omega$.

Energia mechaniczna oscylator nietłumionego jest stała i wynosi (zob. p. 14.2)

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2.$$

W przypadku oscylatora tłumionego energia mechaniczna nie jest stała i maleje z czasem. Jeśli tłumienie jest słabe, to możemy znaleźć zależność $E(t)$, zastępując w powyższym wzorze wielkość x_m amplitudą drgań tłumionych $x_m \exp(-bt / 2m)$. Otrzymujemy przybliżony wzór

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 \exp(-bt / m),$$

z którego wynika, że energia, podobnie jak amplituda, maleje wykładniczo z czasem.

14.5. Drgania wymuszone i rezonans

Gdy na układ drgający o częstości kołowej drgań własnych ω działa siła zewnętrzna wymuszająca drganie z częstością kołową ω_{wym}, to układ wykonuje drgania z częstością kołową ω_{wym}.

Wartość amplitudy drgań x_m w skomplikowany sposób zależy od częstości kołowych ω_{wym} i ω. Amplituda zmian prędkości drgań v_m jest największa, gdy jest spełniony warunek *rezonansu*

$$\omega_{wym} = \omega.$$

Wyrażenie to jest również przybliżonym warunkiem tego, by amplituda drgań x_m była największa.

Zadania

1. Ciało drgające ruchem harmonicznym potrzebuje 0,25 s na przejście z punktu, w którym ma zerową prędkość do następnego takiego punktu. Odległość między tymi punktami jest równa 36 cm. Wyznaczyć:
   a) okres,
   b) częstotliwość,
   c) amplitudę drgań.
2. Wyznaczyć maksymalne przyspieszenie platformy drgającej z amplitudą 2,2 cm i częstotliwością 6,6 Hz.
3. Głośnik wytwarza dźwięk za pomocą drgającej membrany. Amplituda jej drgań nie może być większa niż 1 μm. Dla jakiej częstotliwości wartość przyspieszenia membrany a jest równa g? Czy dla większych częstotliwości wartość a jest większa, czy mniejsza niż g?

4. Położenie ciała drgającego ruchem harmonicznym jest opisane wzorem

$$x = (6\ \mathrm{m})\cos[(3\pi\ \mathrm{rad}/\mathrm{s})t + \pi/3\ \mathrm{rad}\}.$$

   Wyznaczyć:
   a) prędkość,
   b) przyspieszenie,
   c) fazę ruchu w chwili $t = 2$s.
   Wyznaczyć również:
   d) częstotliwość,
   e) okres drgań.

5. Oscylator ma postać klocka o masie 0,5 kg umocowanego na sprężynie. Po wprawieniu w drgania o amplitudzie 35 cm oscylator powtarza swój ruch co 0,5 s. Wyznaczyć:
   a) okres,
   b) częstotliwość,
   c) częstość kołową,
   d) stałą sprężystości,
   e) maksymalną prędkość,
   f) wartość maksymalnej siły, jaką sprężyna wywiera na klocek.

6. Określić, jaka część całkowitej energii ma postać:
   a) energii kinetycznej,
   a jaka
   b) energii potencjalnej,
   gdy przemieszczenie w ruchu harmonicznym jest równe połowie amplitudy x_m.
   c) Znaleźć przemieszczenie, przy którym energia układu jest równo podzielona między energię kinetyczną i potencjalną (wyrazić je w postaci ułamka amplitudy).

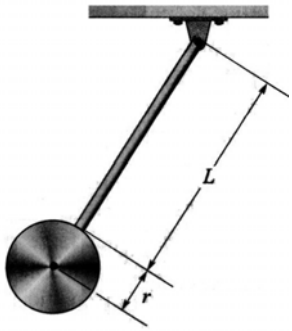
7. Wyznaczyć energię mechaniczną układu klocek-sprężyna, wiedząc, że stała sprężystości wynosi 1,3 N / cm, a amplituda drgań jest równa 2,4 cm.

8. Znajdujące się na poziomej, idealnie gładkiej powierzchni ciało o masie 5 kg doczepiono do sprężyny o stałej sprężystości $k = 1000$ N / m. Ciało odsunięto poziomo od położenia równowagi na odległość 50 cm i nadano mu prędkość początkową 10 m / s w kierunku położenia równowagi. Wyznaczyć:
   a) częstotliwość ruchu,
   b) początkową energię potencjalną układu ciało-sprężyna,
   c) początkową energię kinetyczną,
   d) amplitudę drgań.

9. Wahadło składa się z jednorodnego krążka o promieniu $r = 10$ cm i masie 500 g oraz jednorodnego pręta o długości $L = 500$ mm i masie 270 g (zob. rys. 14.6).
   a) Obliczyć moment bezwładności wahadła względem punktu zawieszenia.
   b) Wyznaczyć odległość między punktem zawieszenia i środkiem masy wahadła.
   c) Obliczyć okres drgań wahadła.

10. Akrobata siedzący na trapezie wykonuje wahania tam i z powrotem z okresem 8,85 s. Jeżeli wstanie, to środek układu trapez-akrobata podniesie się o 35 cm. Jaki będzie wówczas okres drgań układu? Potraktować układ trapez-akrobata jak wahadło matematyczne.

11. Amplituda słabo tłumionego oscylatora maleje w każdym cyklu drgań o 3%. Jaka część energii mechanicznej jest tracona w każdym cyklu drgań?



Rys. 14.6. Zadanie 9

12. W układzie przedstawionym na rys. 14.5 masa klocka wynosi 1,5 kg, a stała sprężystości jest równa 8 N / m. Siłę tłumiącą opisuje wyrażenie $-b(dx / dt)$, gdzie $b = 230$ g / s. Początkowo klocek został pociągnięty na odległość 12 cm i puszczony swobodnie.
    a) Wyznaczyć czas, po którym amplituda drgań spadnie do jednej trzeciej wartości początkowej.
    b) Ile okresów drgań wykona klocek w tym czasie?

XV. FALE

15.1. Fale poprzeczne

Wyróżniamy trzy główne rodzaje fal:

- *fale mechaniczne* (np. fale na wodzie, fale dźwiękowe, dale sejsmiczne), które mogą istnieć wyłącznie w ośrodku materialnym (np. w wodzie, w powietrzu, w skale),
- *fale elektromagnetyczne*, do których zaliczamy światło widzialne i nadfioletowe, fale radiowe i telewizyjne, mikrofale, promieniowane rentgenowskie oraz fale radarowe; fale te nie potrzebują żadnego ośrodka materialnego i poruszają się w próżni z tą samą prędkością równą prędkości światła (c = 299 792 458 m / s),
- *fale materii*, które są związane z elektronami, protonami i innymi cząstkami elementarnymi.

Fale mechaniczne podlegają zasadom dynamiki Newtona. Wyróżniamy wśród nich fale poprzeczne i podłużne. Poprzeczne fale mechaniczne są to fale, w których cząstki drgają w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali (przykładem mogą być fale na napiętej lince). Fale, w których cząstki drgają w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fali nazywa się falami podłużnymi.

Aby opisać falę, potrzebujemy funkcji opisującej jej kształt, czyli zależności postaci

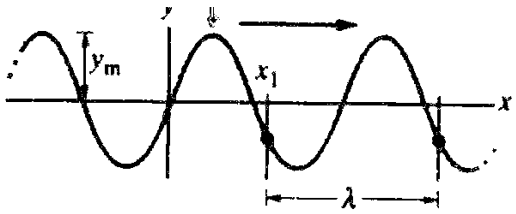
$$y = h(x, t).$$

Funkcja taka opisuje poprzeczne przemieszczenie y elementu fali zależne od czasu t i położenia x tego elementu. W ogólności sinusoidalny kształt fali może być opisany zarówno za pomocą funkcji sinus, jak i cosinus, bo obie dają ten sam kształt. Dalej będziemy posługiwać się funkcją sinus.

W chwili t przemieszczenie y elementu znajdującego się w punkcie x dane jest wzorem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \tag{15.1}$$

Wielkość y_m nazywamy *amplitudą fali* (zob. rys. 15.1). Określa ona bezwzględną wartość maksymalnego przemieszczenia elementu względem jego położenia równowagi.



Rys. 15.1 Fala sinusoidalna

Argument $kx - \omega t$ nazywa się *fazą fali*. Gdy fala przechodzi przez pewien element znajdujący się w punkcie x, faza zmienia się liniowo wraz z czasem t. Oznacza to, że wartość funkcji sinus również zmienia się, oscylując w granicach od +1 do − 1. Funkcja ta i zależna od czasu faza fali odpowiadają drganiom elementu.

Długością fali λ nazywamy odległość (mierzoną równolegle do kierunku rozchodzenia się fali) między kolejnymi powtórzeniami kształtu fali. Ze wzoru (15.1) dla $t = 0$ otrzymujemy

$$y(x, 0) = y_m \sin kx.$$

Ponieważ przemieszczenie y musi być takie samo na obu końcach odcinka odpowiadającego długości fali, czyli w punktach $x = x_1$ oraz $x = x_1 + \lambda$,, więc z powyższego wzoru mamy

$$y_m \sin kx_1 = y_m \sin k(x_1 + \lambda) = y_m \sin(kx_1 + k\lambda).$$

Wartości funkcji sinus powtarzają się co 2π rad, a więc z powyższej zależności otrzymujemy $k\lambda = 2\pi$, czyli

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{15.2}$$

Wielkość k nazywamy *liczbą falową*. Jej jednostką w układzie SI jest radian na metr.

Pojedynczy element fali porusza się w górę i w dół ruchem harmonicznym, opisanym wzorem (15.1) przy założeniu $x = 0$, czyli

$$y(0, t) = y_m \sin(-\omega t) = -y_m \sin \omega t.$$

Okres T fali definiujemy jako czas, w ciągu którego dowolny element wykona jedno pełne drganie. Na podstawie powyższego wyrażenia mamy

$$-y_m \sin \omega t_1 = -y_m \sin \omega(t_1 + T) = -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T).$$

Zależność ta może być spełniona tylko wtedy, gdy $\omega T = 2\pi$, czyli

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{15.3}$$

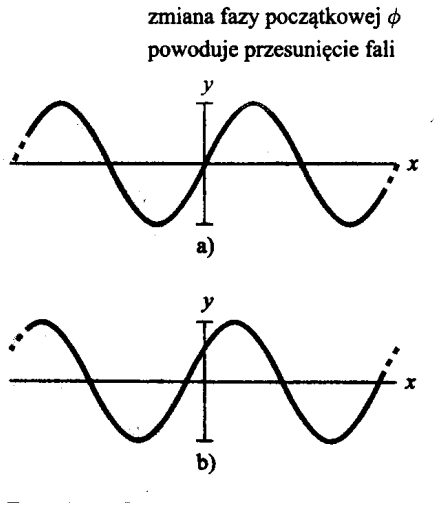
Wielkość ω nazywa się *częstością kołową*. Jej jednostką w układzie SI jest radian na sekundę. Z częstością kołową jest związana *częstotliwość fali* ν, którą definiujemy jako $1 / T$. Mamy

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Biegnąca fala sinusoidalna opisana równaniem (15.1) ma w otoczeniu punktu $x = 0$ kształt pokazany na rys. 15.2 a). Dla $x = 0$ przemieszczenie wynosi $y = 0$, a nachylenie krzywej jest maksymalne. Równaniu temu można nadać postać ogólniejszą, wprowadzając tzw. *fazę początkową* ϕ, czyli przesunięcie wzdłuż osi x (zob. rys. 15.2 b)):

$$y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi).$$

Dodatnia faza ϕ oznacza przesunięcie wykresu w ujemnym kierunku osi x, a ujemna – w kierunku dodatnim tej osi.



Rys. 15.2. Zmiana fazy początkowej

W ciągu czasu Δt fala przesuwa się na odległość Δx. Iloraz różnicowy $\Delta x / \Delta t$ (w granicy pochodna dx / dt) jest *prędkością fali*. W celu jej wyznaczenia zauważmy, że punktowi o ustalonej fazie odpowiada co chwila inny element fali. Z równania (15.1) otrzymujemy jako warunek stałości fazy wyrażenie

$$kx - \omega t = \text{const.} \tag{15.4}$$

Różniczkując to wyrażenie mamy

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0,$$

czyli

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Uwzględniając zależności (15.2) i (15.3) możemy zapisać wzór na prędkość fali następująco:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu.$$

Wzór (15.1) opisuje falę biegnącą w dodatnim kierunku osi x. Fale biegnąca w kierunku przeciwnym jest opisana równaniem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t).$$

Dla takiej fali warunek (15.4) ma postać

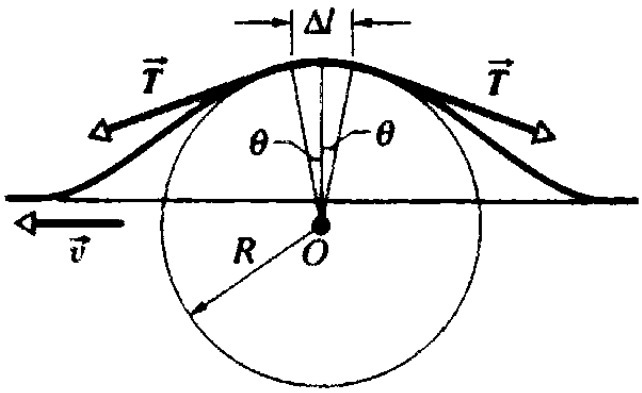
$$kx + \omega t = \text{const},$$

skąd dostaniemy

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}.$$

Znak minus potwierdza, że fala rzeczywiście porusza się w ujemnym kierunku osi x.

Okazuje się, że prędkość fali w napiętej linie zależy od właściwości liny, a nie od właściwości fali (jak na przykład częstotliwości czy amplitudy). W celu wyprowadzenia wzoru na tę prędkość rozważmy pojedynczy symetryczny impuls biegnący wzdłuż liny. Dla wygody wybieramy układ odniesienia, w którym impuls jest stacjonarny, czyli poruszamy się razem z impulsem w taki sposób, by był on niezmienny. W takim układzie odniesienia lina przesuwa się względem nas z prawa na lewo z prędkością v (zob. rys. 15.3).



Rys. 15.3. Symetryczny impuls w układzie odniesienia, w którym impuls jest stacjonarny

Rozważmy mały odcinek liny o długości Δl, znajdujący się wewnątrz impulsu, tworzący łuk okręgu o promieniu R i obejmujący kąt 2θ wokół środka tego okręgu. Rozważany odcinek liny jest rozciągany stycznie na obu jego końcach przez siły równe co do wartości naprężeniu liny $\vec{T}$. Poziome składowe tych sił znoszę wzajemnie, a suma składowych pionowych daje siłę radialną $\vec{F}$ o wartości

$$F = 2(T\sin\theta) \approx T(2\theta) = T\frac{\Delta l}{R},$$

przy czym przybliżyliśmy tu $\sin\theta$ przez θ (co jest słuszne dla małych kątów θ) oraz skorzystaliśmy ze związku $2\theta = \Delta l / R$.

Masa elementu liny jest dana wzorem

$$\Delta m = \mu\Delta l,$$

gdzie μ oznacza liniową gęstość liny.

W chwili przedstawionej na rys. 15.3 element Δl liny porusza się po łuku okręgu. Ma on zatem przyspieszenie dośrodkowe skierowane do środka tego okręgu, które jest dane wzorem

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona (siła = masa · przyspieszenie) mamy zatem

$$\frac{T\Delta l}{R} = (\mu\Delta l)\frac{v^2}{R}.$$

Rozwiązując to równanie względem prędkości v otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

co oznacza, że prędkość fali w idealnej naprężonej linie zależy wyłącznie od naprężenia i gęstości liniowej liny, a nie zależy od częstotliwości fali.

15.2 Energia i moc fali biegnącej w linie

Gdy wytwarzamy falę w naciągniętej linie, musimy dostarczyć energię niezbędną do ruchu liny. Fala biegnąca przenosi tę energię w postaci energii kinetycznej i potencjalnej.

Energia kinetyczna dE_k, jaką ma element liny o masie dm, jest dana wzorem

$$dE_k = \frac{1}{2} dmu^2, \tag{15.5}$$

gdzie u oznacza prędkość poprzeczną drgającego elementu liny. Aby wyznaczyć wielkość u, różniczkujemy równanie (15.1) względem czasu przy stałej wartości x:

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t).$$

Korzystając z tej zależności i podstawiając $dm = \mu dx$, przekształcamy wzór (15.5) do postaci

$$dE_k = \frac{1}{2}(\mu dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

Dzieląc to wyrażenie przez dt, otrzymujemy szybkość zmian energii kinetycznej elementu liny, czyli szybkość, z jaką energia kinetyczna jest przenoszona przez falę. Mamy

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t),$$

gdzie $v = dx / dt$. Średnia szybkość, z jaką jest przenoszona energia kinetyczna, wynosi

$$\left(\frac{dE_k}{dt}\right)_{sr} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 [\cos^2(kx - \omega t)]_{sr} = \frac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2, \tag{15.6}$$

przy czym uwzględniliśmy tu, że średnia wartość kwadratu funkcji cosinus wzięta po całkowitej liczbie okresów jest równa 1/2.

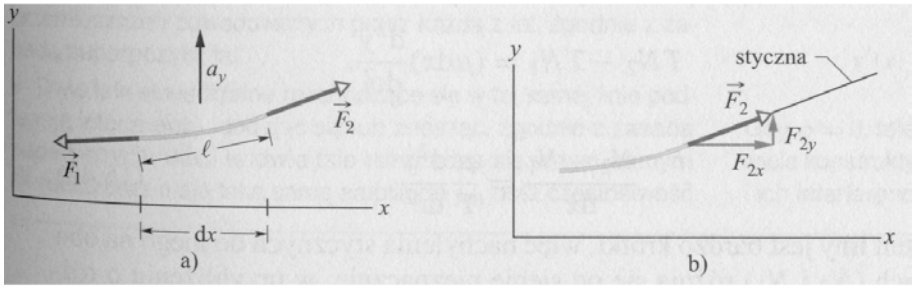
Energia potencjalna sprężystości jest również przenoszona przez falę z taką samą szybkością, daną wzorem (15.6). Średnia moc, czyli średnia szybkość, z jaką oba rodzaje energii są przenoszone przez falę, wynosi zatem

$$P_{sr} = 2\left(\frac{dE_k}{dt}\right)_{sr} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2.$$

Czynniki μ oraz v w tym wyrażeniu zależą od materiału i naprężenia liny, a czynniki ω oraz y_m – od sposobu powstawania fali.

15.3. Równanie falowe

Gdy fala przechodzi przez jakikolwiek element napiętej liny, element ten porusza się w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Wykorzystując drugą zasadę dynamiki Newtona, można wyprowadzić równanie różniczkowe, które opisuje fale biegnące dowolnego rodzaju.



Rys. 15.4. Element napiętej liny i działająca siła

Na rys. 15.4 a) przedstawiono element liny o masie *dm* i długości *l* w pewnej chwili, gdy fala rozchodzi się wzdłuż osi *x* w napiętej w tym kierunku linie o gęstości liniowej μ. Siła $\vec{F}_2$ działająca na prawy koniec elementu ma wartość równą naprężeniu liny *T* i jest skierowana ku górze. Siła $\vec{F}_1$ działająca na lewy koniec elementu ma także wartość równą naprężeniu liny *T*, ale jest skierowana nieznacznie ku dołowi. Kierunki tych sił są więc przeciwne. Ich wypadkowa ma składową skierowaną ku górze, a więc jest źródłem skierowanego w górę przyspieszenia a_y. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że

$$F_{2y} - F_{1y} = dm \cdot a_y. \tag{15.7}$$

Masę elementu *dm* można wyrazić przez gęstość liniową liny μ i długość elementu *l*, czyli $dm = \mu l$. Element jest nachylony względem osi *x* nieznacznie, wobec czego można przyjąć, że $l \approx dx$. Mamy więc

$$dm = \mu dx.$$

Przyspieszenie a_y jest równe pochodnej drugiego rzędu przemieszczenia *y* względem czasu, czyli

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Z rys. 15.4 b) wynika, że siła $\vec{F}_2$ jest styczna do elementu liny na jego prawym końcu. Stosunek składowych siły jest równy nachyleniu elementu na tym końcu (współczynnikowi kierunkowemu stycznej), które oznaczymy przez N_2. Mamy zatem

$$N_2 = \frac{F_{2y}}{F_{2x}}. \tag{15.8}$$

Długość wektora można wyrazić przez jego składowe:

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2},$$

czyli

$$T = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2},$$

bo $F_2 = T$. Ponieważ założyliśmy, że element liny jest nieznacznie nachylony, to $F_2y << F_2x$ i możemy ostatnie równanie napisać w postaci

$$T = F_{2x}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (15.8) znajdujemy, że

$$F_{2y} = TN_2.$$

Podobne rozumowanie dla lewego końca elementu liny daje

$$F_{1y} = TN_1.$$

Jeśli wzory te podstawimy do równania (15.7), to otrzymamy

$$TN_2 - TN_1 = (\mu dx)\frac{d^2y}{dt},$$

czyli

$$\frac{N_2 - N_1}{dx} = \frac{\mu}{T}\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{15.9}$$

Element liny jest bardzo krótki, więc nachylenia stycznych do niego na obu końcach (N_2 i N_1) różnią się nieznacznie, w przybliżeniu o różniczkę dN, przy czym N oznacza nachylenie stycznej w dowolnym punkcie, czyli

$$N = \frac{dy}{dx}.$$

Jeśli w równaniu (15.9) zastąpimy $N_2 - N_1$ przez dN i skorzystamy z powyższego równania, to otrzymamy

$$\frac{dN}{dx} = \frac{\mu}{T}\frac{d^2y}{dt^2},$$

czyli

$$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{\mu}{T}\frac{d^2y}{dt^2},$$

skąd

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Przeszliśmy tu do pochodnych cząstkowych, gdyż po lewej stronie równania mamy różniczkować tylko względem x, a po prawej – wyłącznie względem t. Uwzględniając, że $v = \sqrt{T/\mu}$ (zob. p. 15.1), otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{15.10}$$

Równanie to nazywa się *równaniem falowym* i opisuje rozchodzenie się fal dowolnego rodzaju.

15.4. Interferencja fal

Gdy w tym samym ośrodku rozchodzą się dwie (lub więcej) fale, przemieszczenie każdej cząstki tego ośrodka jest sumą przemieszczeń powodowanych przez każdą z fal, zgodnie z zasadą superpozycji.

Załóżmy, że dwie fale biegną równocześnie wzdłuż tej samej napiętej liny. Niech $y_1(x, t)$ i $y_2(x, t)$ oznaczają przemieszczenia tej liny spowodowane przez każdą z fal osobno. Przemieszczenie liny w sytuacji, gdy fale nakładają się, będzie ich sumą algebraiczną, tj.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t).$$

Sumowanie przemieszczeń wzdłuż liny oznacza, że nakładające się fale dodają się algebraicznie tworząc *falę wypadkową*. Jest to przykład *zasady superpozycji*, Gdy impulsy fal nakładają się, wypadkowy impuls stanowi ich sumę, a nakładające się fale w żaden sposób nie wpływają na siebie wzajemnie.

Załóżmy, że wysyłamy dwie fale o takiej samej długości fali i amplitudzie, biegnące w tym samym kierunku wzdłuż napiętej liny. Wypadkowa fala zależy od tego, jaka jest względna *faza* obu fal, czyli od tego, o ile jedna fala jest przesunięta względem drugie. Niech pierwsza fala będzie opisana równaniem

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t),$$

a druga, przesunięta względem pierwszej, wzorem

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi).$$

Obie fale różnią się jedynie w fazie o stały kąt ϕ, który nazywa się *przesunięciem fazowym*.

Zgodnie z zasadą superpozycji, fala wypadkowa jest sumą algebraiczną dwóch interferujących (nakładających się na siebie) fal, a jej przemieszczenie wynosi

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

Ponieważ sumę sinusów dwóch kątów α i β można przedstawić w postaci

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

otrzymujemy stąd

$$y(x,t) = \left(2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right). \tag{15.11}$$

Jak widać z tego wzoru, fala wypadkowa jest również falą sinusoidalną biegnącą w dodatnim kierunku osi x.

Fala wypadkowa różni się od fal interferujących pod dwoma względami:

- jej przesunięcie fazowe jest równe $\phi / 2$,
- jej amplituda jest równa wartości bezwzględnej wyrażenia w nawiasach przed funkcją sinus we wzorze (15.11), czyli

$$\bar{y}_m = \left| 2y_m \cos\frac{\phi}{2} \right|.$$

Analiza tego wzoru prowadzi do trzech ciekawych przypadków:

- $\phi = 0$ – interferencja, która daje największą wartość amplitudy (interferencję taką nazywamy *interferencją całkowicie konstruktywną*),
- $\phi = \pi$ (180°) – amplituda fali wypadkowej jest równa zeru, czyli nie obserwujemy żadnego ruchu (interferencję taką nazywamy *interferencją całkowicie destruktywną*),
- $\phi = 2\pi / 3$ (120°) – amplituda fali wypadkowej jest równa amplitudzie fal interferujących.

15.5. Fale stojące i rezonans

Wynikiem interferencji dwóch jednakowych fal sinusoidalnych rozchodzących się w przeciwnych kierunkach jest fala stojąca. Dla takich fal mamy

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

i

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t),$$

skąd (z zasady superpozycji)

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) \\ &= (2y_m \sin kx)\cos\omega t. \end{aligned}$$

Wyrażenie to nie opisuje fali biegnącej,a właśnie falę stojącą.

Bezwzględną wartość wielkości w nawiasie możemy uważać za amplitudę drgań elementu liny znajdującego się w punkcie x. W przypadku biegnącej fali sinusoidalnej amplituda fali jest taka sama dla wszystkich elementów liny. Tutaj amplituda zmienia się wraz z położeniem. Na przykład amplitudę o wartości zero mamy dla takich wartości kx, dla których $\sin kx = 0$, czyli dla wartości spełniających warunek

$$kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Podstawiając do tego wyrażenia $k = 2\pi / \lambda$, otrzymujemy położenia punktów o zerowej amplitudzie (punkt takie nazywamy *węzłami*)

$$x = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Zauważmy, że sąsiednie węzły są oddalone o $\lambda / 2$, czyli o połowę długości fali.

Amplituda fali stojącej osiąga maksimum równe $2y_m$ dla takich wartości kx, dla których $|\sin kx| = 1$. Są to wartości spełniające warunek

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Po podstawieniu $k = 2\pi / \lambda$, otrzymujemy położenia punktów o największej amplitudzie (punkty takie nazywa się *strzałkami*)

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Strzałki są oddalone o $\lambda / 2$ i znajdują się w połowie odległości między węzłami.

Rozważmy teraz strunę rozpiętą między dwoma zaciskami. W wyniku wytworzenia ciągłej fali sinusoidalnej o pewnej częstotliwości następuje ciągłe odbijanie się fal od zacisków i wiele fal nakłada się na siebie. Przy pewnych częstotliwościach w wyniku interferencji powstaje fala stojąca o bardzo dużej amplitudzie. O takiej fali mówimy, że powstaje ona w wyniku rezonansu, a o strunie – że rezonuje przy pewnych częstotliwościach zwanych częstotliwościami rezonansowymi.

Załóżmy, że struna ma długość L. Aby znaleźć wzór na częstotliwości rezonansowe, zauważmy, że na obu końcach struny muszą znajdować się węzły, gdyż końce struny są umocowane i nie mogą drgać. Najprostszy możliwy kształt zawiera jedną pętlę ze strzałką znajdującą się w połowie długości struny. Zatem w tym przypadku długość fali wynosi $\lambda = 2L$. Druga prosta fala stojąca, spełniająca warunek, by na końcach struny fala miała węzły, jest fala o długości $\lambda = L$, która ma strzałki w odległości $L / 2$ od lewego zacisku i $L / 2$ od prawego zacisku itd. Fala stojąca w strunie o długości L może być zatem utworzona przez fale o długości równej jednej z następujących wartości:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Częstotliwości rezonansowe odpowiadające tym długościom fali wynoszą

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdzie v oznacza prędkość fali biegnącej w strunie.

Zadania

1. Wzdłuż liny rozchodzi się fala

$$y(x, t) = (6\ \text{mm})\sin[kx + (600\ \text{rad / s})t + \phi].$$

W jakim czasie dowolny punkt tej liny zmienia swe przemieszczenie z $y = +2$ mm na $y = -2$ mm?

2. Fala ma częstość kołową 110 rad / s i długość fali 1,8 m. Obliczyć:
   a) liczbę falową,
   b) prędkość fali.
3. Sinusoidalna fala biegnie wzdłuż liny. Czas, w jakim poszczególne punkty przechodzą od swojego maksymalnego położenia do zera, wynosi 0,17 s. Wyznaczyć:
   a) okres,
   b) częstotliwość.
   Długość fali jest równa 1,4 m.
   c) Wyznaczyć prędkość fali.

4. Masa przypadająca na jednostkę długości napiętej liny wynosi 5 g / cm, a naprężenie liny jest równe 10 N. W linie wzbudzona falę sinusoidalną o amplitudzie 0,12 mm i częstotliwości 100 Hz, biegnącą w kierunku ujemnych wartości x. Wyznaczyć:
   a) y_m,
   b) k,
   c) ω,
   d) znak przed ω.
5. Liniowa gęstość liny wynosi $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ kg / m. Fala poprzeczna w linie jest opisana wzorem

$$y = (0{,}021\ \mathrm{m}) \sin[(2\ \mathrm{m}^{-1})x + (30\ \mathrm{s}^{-1})t].$$

   Podać:
   a) prędkość fali,
   b) naprężenie liny.
6. Korzystając z równania falowego, obliczyć prędkość fali o równaniu

$$y(x, t) = (2\ \mathrm{mm}) \sin \sqrt{(20\ \mathrm{m}^{-1})x - (4\ \mathrm{s}^{-1})t}.$$

7. Dwie identyczne fale biegnące w tym samym kierunku są przesunięte w fazie o $\pi / 2$ rad. Znaleźć amplitudę fali wypadkowej i wyrazić ją za pomocą amplitudy y_m fal składowych.
8. Zamocowana na obu końcach lina ma długość 8,4 m i masę 0,12 kg. Lina została naciągnięta siłą 96 N i wprawiona w drgania.
   a) Określić prędkość fal w linie.
   b) Wyznaczyć największą możliwą długość fali stojącej.
   c) Podać częstotliwość tej fali.
9. Podać trzy najmniejsze częstotliwości fal stojących w drucie o długości 10 m i masie 100 g, którego naprężenie wynosi 250 N.
10. Lina rozpięta między dwoma sztywnymi wspornikami, znajdującymi się w odległości 75 cm od siebie, ma częstotliwości rezonansowe 420 Hz i 315 Hz, przy czym żadna pośrednia częstotliwość nie jest rezonansowa. Określić:
    a) najmniejszą częstotliwość rezonansową,
    b) prędkość fali.