Fizyka

wykład 5

zadania

str. 106 zad. 1
Dla ruchu harmonicznego zachodzą następujące równania (zob. wykład 5 wzory (14.1) i (14.2)):

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$
$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi),$$

gdzie x_m oznacza amplitudę drgań, ω – częstość kołową, a ϕ – fazę początkową. W zadaniu możemy przyjąć $\phi = 0$. Z warunków zadania mamy

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos \omega t, \\ x + 0{,}36 &= x_m \cos \omega (t + 0{,}25), \\ -\omega x_m \sin \omega t &= 0, \\ -\omega x_m \sin \omega (t + 0{,}25) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

bo zerowa prędkość następuje co 0,25 s, a odległość między dwoma takimi punktami wynosi 36 cm.
Ad a)
Jeżeli dla każdej wartości ω i x_m mają zachodzić dwa ostatnie równania (1), to

$$\omega t = k\pi$$

i

$$\omega (t + 0{,}25) = k\pi,$$

dla każdej wartości $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Wynika stąd, że

$$\omega \cdot 0{,}25 = \pi,$$

skąd

$$\omega = 4\pi \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Ponieważ częstość kołowa ω jest związana z okresem T wzorem

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

więc

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

i po podstawieniu wyznaczonej wartości ω mamy

$$T = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5 \text{ s}.$$

Ad b)
Ponieważ okres ruchu T jest to czas, w jakim jest wykonywane jedno pełne drganie, więc

$$T = \frac{1}{\nu},$$

gdzie ν oznacza częstotliwość drgań. Stąd

$$\nu = \frac{1}{T}$$

i po podstawieniu wyznaczonej wartości T mamy

$$\nu = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ Hz}.$$

Ad c)
Dla $t = 0$ z pierwszych dwóch równań (1) mamy

$$x = x_m,$$
$$x + 0{,}36 = x_m \cos(0{,}25\omega),$$

czyli

$$x_m + 0{,}36 = x_m \cos(0{,}25\omega),$$

skąd

$$x_m[1 - \cos(0{,}25\omega)] = -0{,}36,$$

czyli

$$x_m = \frac{-0{,}36}{1 - \cos(0{,}25\omega)}.$$

Po podstawieniu obliczonej wartości ω otrzymujemy

$$x_m = \frac{-0{,}36}{1 - \cos(0{,}25 \cdot 4\pi)} = \frac{-0{,}36}{1 - \cos\pi} = \frac{-0{,}36}{1 - (-1)} = \frac{-0{,}36}{2} = -0{,}18.$$

Amplituda to odległość, na jaką cząstka odbiega od początku osi, a więc jest to bezwzględna wartość x_m. Zatem mamy $|x_m| = 0{,}18$ m.

str. 107 zad. 4
Porównując podane równanie z podstawowym równaniem ruchu harmonicznego (zob. wykład 5 wzór (14.1) mamy

$$x_m = 6 \text{ m}, \quad \omega = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

Ad a)
Ponieważ mamy wyznaczyć prędkość w chwili $t = 2$ s, więc po podstawieniu danych do wzoru na prędkość w ruchu harmonicznym (zob. wykład 5 wzór (14.2)) otrzymujemy

$$v = -3\pi \cdot 6 \cdot \sin\left(3\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{3}\right) \approx -3 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{19 \cdot 3{,}14}{3}\right) \approx -56{,}52 \cdot 0{,}86 \approx -48{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ad b)
Dla $t = 2$ s po podstawieniu danych do wzoru na przyspieszenie w ruchu harmonicznym, czyli do wzoru

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi),$$

mamy

$$a \approx -(3 \cdot 3{,}14)^2 \cdot 6\cos\left(3 \cdot 3{,}14 \cdot 2 + \frac{3{,}14}{3}\right)$$

$$\approx -532{,}4 \cdot \cos(19{,}89) \approx -532{,}4 \cdot 0{,}5087 \approx -270{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ad c)
Faza jest to argument funkcji cosinus w podstawowym wzorze na ruch harmoniczny (zob. wykład 5 wzór (14.1)), czyli wyrażenie $\omega t + \phi$. Uwzględniając dane mamy

$$\omega t + \phi = 3\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{3} \approx 3 \cdot 3{,}14 \cdot 2 + \frac{3{,}14}{3} \approx 19{,}9 \text{ rad}.$$

Ad d)
Mamy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

skąd

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Po podstawieniu obliczonej wcześniej wartości ω otrzymujemy

$$\nu = \frac{3\pi}{2\pi} = 1{,}5 \text{ Hz}.$$

Ad e)
Ponieważ

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

więc po podstawieniu wartości ω mamy

$$T = \frac{2\pi}{3\pi} \approx 0{,}67 \text{ s}.$$

str. 107 zad. 10
Dla wahadła matematycznego i małej amplitudy mamy wzór (zob. wykład 5 wzór (14.9))

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \tag{2}$$

gdzie L oznacza odległość ciężarka od punktu zawieszenia wahadła. W zadaniu podano wartość $T = 8{,}85$ s, a pytamy się o okres T' punktu zawieszenia $L - 35$ cm $= L - 0{,}35$ m, tj.

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L - 0{,}35}{g}}. \tag{3}$$

We wzorze tym nie jest znana wartość L, ale z zależności (2) mamy

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g},$$

skąd

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

i po podstawieniu do wzoru (3) otrzymujemy

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{T^2 g}{4\pi^2} - 0{,}35}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{T^2 g - 0{,}35 \cdot 4\pi^2}{4\pi^2 g}} = \sqrt{T^2 - \frac{1{,}4\pi^2}{g}}.$$

Uwzględniając w powyższym wzorze wartość T daną w zadaniu mamy

$$T' \approx \sqrt{8{,}85^2 - \frac{1{,}4 \cdot (3{,}14)^2}{9{,}8}} \approx 8{,}77 \text{ s}.$$

str. 118 zad. 3

Ad a)

Okres fali jest to czas pomiędzy dwoma takimi samymi położeniami fali. Ponieważ fala jest sinusoidalna, a czas od maksymalnego położenia punktów do zera wynosi $t = 0{,}17$ s, więc takie same są czasy uzyskania minimalnego położenia od zera, zera od minimalnego położenia i ponownego maksymalnego położenia od zera. Zatem $T = 4t = 4 \cdot 0{,}17 = 0{,}68$ s.

Ad b)

Ponieważ

$$\nu = \frac{1}{T},$$

więc po podstawieniu wartości T wyznaczonej w punkcie a) mamy

$$\nu = \frac{1}{0{,}68} \approx 1{,}48 \text{ Hz}.$$

Ad c)

Prędkość fali jest dana wzorem (zob. wykład 5 str. 111)

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

i po podstawieniu danych otrzymujemy

$$v = \frac{1{,}4}{0{,}68} \approx 2{,}06 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

str. 119 zad. 7

Ponieważ fale są identyczne i tylko przesunięte w fazie o $\pi/2$ rad, więc (zob. wykład 5 str. 116) jeśli dla pierwszej fali zachodzi równanie

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t),$$

to druga fala jest opisana równaniem

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi),$$

gdzie $\phi = \frac{\pi}{2}$ rad. Dla fali wypadkowej mamy równanie (po dodaniu $y_1(x,t)$ i $y_2(x,t)$ – zob. wykład 5 wzór (15.11))

$$y(x,t) = \left(2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right),$$

w którym pierwszy człon (ujęty w nawiasy okrągłe) oznacza amplitudę $\bar{y}_m$ fali wypadkowej. Uwzględniając podaną wartość ϕ przesunięcia w fazie mamy

$$\bar{y}_m = 2y_m \cos\frac{\pi}{2} \approx 2y_m \cdot 0{,}7074 \approx 1{,}41 y_m,$$

gdzie y_m oznacza wspólną częstotliwość danych fal.