XI. RÓWNOWAGA I SPRĘŻYSTOŚĆ

11.1. Równowaga

Ciało sztywne pozostające w spoczynku jest w równowadze statycznej. Jak wiemy, ruch postępowy ciała opisuje druga zasada dynamiki Newtona, którą za pomocą pędu ciała można zapisać w postaci równania

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Jeśli ciało jest w równowadze z uwagi na ruch postępowy, to pęd $\vec{P}$ jest stały i prawa strona powyższego równania jest równa zeru, czyli

$$\vec{F}_{wyp} = 0. \tag{11.1}$$

W przypadku ruchu obrotowego druga zasada dynamiki ma postać

$$\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

gdzie $\vec{L}$ oznacza moment pędu. W przypadku równowagi moment ten jest stały, co prowadzi do równania

$$\vec{M}_{wyp} = 0. \tag{11.2}$$

Równania (11.1) i (11.2) określają dwa warunki równowagi:

- suma wektorowa wszystkich sił zewnętrznych działających na ciało musi być równa zeru,
- suma wektorowa wszystkich działających na ciało zewnętrznych momentów sił, mierzonych względem dowolnego punktu odniesienia, musi być równa zeru.

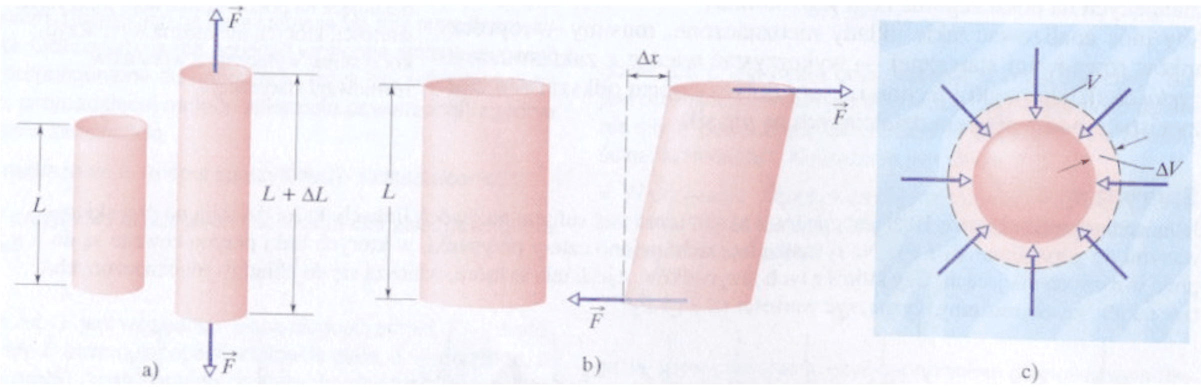
Warunki te są spełnione, gdy ciało znajduje się w równowadze statycznej ($\vec{P} = 0$ i $\vec{L} = 0$) oraz w przypadku ogólniejszym, gdy wektory pędu i momentu pędu są stałe, choć niekoniecznie równe zeru.

Siła ciężkości działa z osobna na wszystkie elementy ciała rozciągłego. Sumaryczne działanie tych sił jest równoważne przyłożeniu całkowitej siły ciężkości ciała $\vec{F}_g$ w środku ciężkości tego ciała. Jeśli dla wszystkich elementów ciała przyspieszenie grawitacyjne $\vec{g}$ jest jednakowe, to środek ciężkości ciała i jego środek masy znajdują się w tym samym punkcie.

11.2. Sprężystość

Pod wpływem działających sił ciało może zmienić swoje rozmiary na trzy sposoby – może rozciągnąć się (ścisnąć), zostać ścięte lub zmienić swoją objętość. Wspólną cechą tych przypadków jest to, że względne odkształcenie ciała zależy od wartości siły odkształcającej ciało, jaka przypada na jednostkę jego pola powierzchni. Wielkość tę nazywamy naprężeniem. Na rys. 11.1 przedstawiono naprężenie rozciągające (rys. 11.1 a)), naprężenie ścinające (rys. 11.1 b)) i naprężenie objętościowe, zwane też hydrostatycznym (rys. 11.1 c)). W każdym z tych przypadków naprężenie i odkształcenie są do siebie proporcjonalne, a współczynnik proporcjonalności nazywa się modułem sprężystości. Mamy zatem

$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot (\text{odkształcenie}). \tag{11.3}$$



Rys. 11. Rodzaje naprężeń

Po przekroczeniu przez naprężenie pewnej wartości, zwanej granic sprężystości materiału, próbka ulega odkształceniu trwałemu. Przy dalszym zwiększaniu naprężenia można doprowadzić do pęknięcia próbki, co zachodzi dla naprężenia zwanego naprężeniem niszczącym.

Gdy ciało jest rozciągane lub ściskane, naprężenie definiuje się przez iloraz F / S, gdzie F oznacza wartość siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ma pole S przekroju prostopadłego do kierunku działania siły. Za miarę odkształcenia przyjmuje się wielkość bezwymiarową $\Delta L / L$, czyli względną zmianę długości próbki. Moduł sprężystości związany z odkształceniem przy rozciąganiu lub ściskaniu nazywa się *modułem Younga* i oznacza symbolem E. Równanie (11.3) ma w tym przypadku postać

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}.$$

Moduł Younga ma zwykle dla danego materiału taką samą wartość przy rozciąganiu i ściskaniu, ale naprężenie niszczące może być zupełnie różne dla tych dwóch rodzajów naprężeń. Na przykład beton jest bardzo odporny na ściskanie, a bardzo kruchy przy rozciąganiu.

W przypadku odkształcenia poprzecznego (ścinania) naprężenie mierzy się także za pomocą siły na jednostkę powierzchni, ale siła działa teraz nie prostopadle do tej powierzchni, lecz równolegle do niej. Odkształcenie wyraża bezwymiarowy parametr $\Delta x / L$ (zob. rys. 11.1 b)). Odpowiedni moduł sprężystości nazywa się *modułem ścinania* i oznacza literą G. Równanie (11.3) ma wówczas postać

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{L}.$$

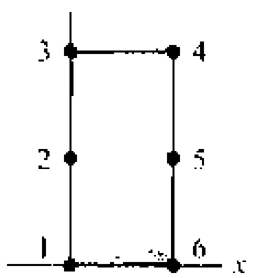
W naprężeniu objętościowym miarą odkształcenia jest stosunek $\Delta V / V$, gdzie V oznacza pierwotną objętość próbki, a ΔV – wartość bezwzględną zmiany objętości. Moduł sprężystości oznacza się literą K i nazywa *modułem sprężystości objętościowej* lub *modułem ściśliwości* materiału. Równania (11.3) ma w tym przypadku postać

$$p = K\frac{\Delta V}{V}.$$

Ciała stałe są na ogół mniej ściśliwe niż ciecze, w których atomy i cząsteczki są znacznie luźniej związane ze swymi sąsiadami.

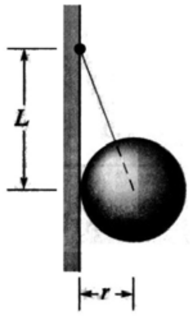
Zadania

1. Przyspieszenie ziemskie g zmienia się nieznacznie w obrębie budowli, tak że środek ciężkości budowli jest zwykle w tym samym miejscu, co środek masy. Na rys. 11.2 przedstawiono wymyślony układ sześciu cząstek, każda o masie m, w którym przyspieszenie ziemskie jest różne dla różnych cząstek i wynosi: cząstka 1 – 8,0; 2 – 7,8; 3 – 7,6; 4 – 7,4; 5 – 7,6 i cząstka 6 – 7,8 (w m / s^2). Odległość sąsiednich cząstek wzdłuż boku konstrukcji wynosi 2 m. Podać
   a) współrzędne x i y środka masy,
   b) współrzędne x i y środka ciężkości układu tych sześciu cząstek.



Rys. 11.2. Zadanie 1

2. Jak pokazano na rys. 11.3, jednorodna kula o masie $m = 0{,}85$ kg i promieniu $r = 4{,}2$ cm jest zawieszona na linie o znikomo małej masie, przymocowanej do haka odległego w pionie od środka kuli o $L = 8$ cm. Zakładając, że między kulą i ścianą nie występuje tarcie, wyznaczyć
   a) naprężenie liny,
   b) siłę działającą na kulę ze strony ściany.
3. Metrowy pręt mierniczy jest poziomy i znajduje się w równowadze, gdy jest podparty na ostrzu znajdującym się przy kresce oznaczającej 50 cm. Gdy w punkcie oznaczającym 12 cm położono na pręcie dwie monety o masie 5 g każda, do zachowania równowagi pręta trzeba było przesunąć ostrze do kreski oznaczającej 45,5 cm. Ile wynosi masa tego pręta?



Rys. 11. 3. Zadanie 2

4. Poziomy pręt aluminiowy o średnicy 4,8 cm wystaje ze ściany na długość 5,3 cm. Na końcu tego pręta zawieszono przedmiot o masie 1200 kg. Moduł ścinania wynosi dla aluminium $3{,}0 \cdot 10^{10}$ N / m^2. Pomijając masę pręta, wyznaczyć
   a) naprężenie ścinające działające na pręt,
   b) odkształcenie pionowe końca pręta.

XII. GRAWITACJA

12.1. Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia zostało sformułowane w 1665 roku przez Izaaka Newtona. Dokonał on niezwykłego odkrycia wykazując, że siła utrzymująca Księżyc na orbicie wokół Ziemi to ta sama siła, która powoduje, że jabłko spada z drzewa na ziemię. W ogólności prawo to mówi, że każda cząstka we Wszechświecie przyciąga każdą inną cząstkę siłą grawitacji, której wartość wynosi

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{12.1}$$

gdzie m_1 i m_2 oznaczają masy cząstek, r – odległość między nimi, a G oznacza stałą grawitacji, której wartość wynosi

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\cdot s^2}}.$$

Siła grawitacyjna, która działa na cząstkę 2 ze strony cząstki 1 ma taką samą wartość, jak siła działająca na cząstkę 1 ze strony cząstki 2, lecz jest skierowana przeciwnie. Te dwie siły stanowią parę akcja-reakcja.

Prawo powszechnego ciążenia Newtona obowiązuje dla cząstek, ale może być także stosowane w odniesieniu do ciał rzeczywistych, o ile ich rozmiary są małe w porównaniu z odległością między nimi. Newton wykazał, że ciało w kształcie jednorodnej powłoki kulistej przyciąga cząstkę znajdującą się na zewnątrz tej powłoki tak, jak gdyby cała masa powłoki była skupiona w jej środku.

Siła grawitacji podlega zasadzie superpozycji, zgodnie z którą w przypadku, gdy oddziałuje ze sobą n cząstek, to wypadkowa $\vec{F}_{1,\,wyp}$ sił działających na cząstkę 1 jest sumą sił działających na tę cząstkę ze strony pozostałych cząstek, tj.

$$\vec{F}_{1,\,wyp} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}. \tag{12.2}$$

W przypadku ciała rozciągłego można podzielić to ciało na nieskończenie małe elementy masy dm, z których każdy działa na cząstkę siłą $d\vec{F}$. Sumę w równaniu (12.2) można wówczas zapisać jako całkę

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}.$$

12.2. Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

Załóżmy, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie M. Z równania (12.1) wynika, że wartość siły grawitacyjnej, z jaką Ziemia działa na cząstkę o masie m, która znajduje się poza Ziemią w odległości r od jej środka, wynosi

$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Jeśli tę cząstkę puścimy swobodnie, to pod wpływem siły grawitacyjnej będzie ona spadać na Ziemię wzdłuż prostej skierowanej do środka Ziemi z przyspieszeniem $\vec{a}_g$. Przyspieszenie to nazywa się *przyspieszeniem grawitacyjnym* lub *przyspieszeniem ziemskim*. Związek wartości F i a_g wynika z drugiej zasady dynamiki, tj.

$$F = ma_g.$$

Z ostatnich dwóch równań wynika, że

$$a_g = \frac{GM}{r^2},$$

z czego wynika, że przyspieszenie ziemskie maleje wraz ze wzrostem odległości od środka Ziemi (poprzednio przyspieszenie ziemskie oznaczaliśmy przez g i przyjmowaliśmy dla niego stałą wartość 9,8 m / s^2).

Ziemia nie jest jednak ciałem idealnym. W wielu przypadkach praktycznych należy uwzględnić, że:

- masa Ziemi nie jest rozłożona równomiernie, wobec czego w różnych miejscach na powierzchni Ziemi wartość g przyjmuje nieco inne wartości (na tej samej wysokości),
- Ziemia nie jest kulista i w przybliżeniu ma kształt elipsoidy obrotowej (promień Ziemi na równiku jest o 21 km większy od jej promienia na biegunie), co powoduje, że przyspieszenie swobodnego spadku g ciała rośnie w miarę przemieszczania tego ciała (na poziomie morza) z równika na biegun,
- Ziemia obraca się, co powoduje, że ciało umieszczone na powierzchni Ziemi gdziekolwiek poza biegunami wykonuje ruch po okręgu z przyspieszeniem dośrodkowym skierowanym do środka tego okręgu (źródłem tego przyspieszenia jest siła dośrodkowa skierowana także ku środkowi okręgu).

Ruch obrotowy Ziemi powoduje, że druga zasada dynamiki dla ciała na powierzchni Ziemi ma postać

$$F_N - ma_g = m(-\omega^2 R),$$

gdzie F_N oznacza wartość siły normalnej (równej mg), ω^2 – prędkość kątową Ziemi, a R oznacza promień okręgu, po którym porusza się ciało. Mamy zatem

$$mg = ma_g - m(\omega^2 R),$$

co oznacza, że

(zmierzony ciężar) = (wartość siły grawitacyjnej) − (masa razy przyspieszenie dośrodkowe).

Z równania tego wynika, że ciężar wskazany przez wagę jest mniejszy od wartości działającej na ciało siły grawitacyjnej. Z równania tego wynika też, że

$$g = a_g - \omega^2 R,$$

co oznacza, że

(przyspieszenie spadku ciała) = (przyspieszenie grawitacyjne) − (przyspieszenie dośrodkowe),

czyli, że mierzone przyspieszenie jest mniejsze od przyspieszenia grawitacyjnego.

12.3. Grawitacja wewnątrz Ziemi

Twierdzenie Newtona o powłoce obowiązuje również w przypadku, gdy cząstka znajduje się wewnątrz tej powłoki. Można je wypowiedzieć następująco: wypadkowa siła grawitacyjna, z jaką ciało w kształcie powłoki kulistej działa na cząstkę znajdującą się wewnątrz tej powłoki, jest równa zeru. Nie oznacza to, że siły grawitacyjne działające na cząstkę ze strony różnych elementów powłoki znikają, ale że suma wektorowa sił działających na cząstkę ze strony wszystkich elementów powłoki jest równa zeru.

Siła grawitacyjna $\vec{F}$, jak działa na cząstkę umieszczoną wewnątrz jednorodnej kuli w odległości r od jej środka, pochodzi wyłącznie od masy M_{wewn} tej części kuli, która jest zawarta w „kuli wewnętrznej" o promieniu r:

$$M_{wewn} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{R^3} r,$$

gdzie ρ oznacza gęstość kuli, R – jej promień, a M oznacza jej masę. Masę tej „kuli wewnętrznej" można uznać za skupioną w jej środku i wykorzystać prawo powszechnego ciążenia, co daje

$$F = \frac{GmM}{R^3} r,$$

gdzie m oznacza masę cząstki.

12.4. Grawitacyjna energia potencjalna

W celu wyznaczenia grawitacyjnej energii potencjalnej w odległości R od środka Ziemi, wyznaczmy najpierw pracę W, wykonaną przez siłę grawitacyjną, przy przemieszczaniu ciała z odległości R do nieskończoności. Siła grawitacyjna $\vec{F}(r)$ jest siłą zmienną (jej wartość zależy od odległości r), a zatem mamy

$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}. \tag{12.3}$$

Całka ta zawiera iloczyn skalarny siły $\vec{F}(r)$ i wektora różniczkowego przemieszczenia $d\vec{r}$, który jest równy

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = F(r) dr \cos\varphi,$$

gdzie φ oznacza kąt między wektorami $\vec{F}(r)$ i $d\vec{r}$. Do wzoru tego podstawiamy $\varphi = 180°$ i korzystamy z prawa powszechnej grawitacji, co daje

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr,$$

gdzie M oznacza masę Ziemi, a m – mas cząstki. Po podstawieniu tej zależności do wzoru (12.3) otrzymujemy

$$W = -GMm \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \left. \frac{GMm}{r} \right|_R^\infty = 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R}.$$

W równaniu tym W oznacza pracę potrzebną do przeniesienia cząstki z punktu znajdującego się w odległości R od środka Ziemi do nieskończoności. Pracę tę można też zapisać jako różnicę energii potencjalnej:

$$E_{p,\infty} - E_p = -W$$

i ponieważ energia potencjalna w nieskończoności $E_{p,\infty}$ jest równa zeru, więc ostatecznie mamy

$$E_p = W = -\frac{GMm}{r}, \tag{12.4}$$

przy czym zamieniliśmy tu R na r.

Gdy badany układ składa się z więcej niż dwóch cząstek, to rozważamy każdą parę cząstek z osobna, obliczając energię potencjalną tej pary z równania (12.4), po czym dodajemy do siebie otrzymane wyniki. Dla układu trzech cząstek odpowiedni wzór miałby postać

$$E_p = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right).$$

Minimalną prędkość, jaka jest potrzebna do opuszczenia przez ciało obszaru przyciągania przez inne ciało, nazywamy *prędkością ucieczki*. Rozważmy cząstkę (np. pocisk) o masie m opuszczającą powierzchnię planety z prędkością v. Ma ona energię kinetyczną

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

i energię potencjalną

$$E_p = -\frac{GMm}{R},$$

gdzie M oznacza masę planety, a R – jej promień.

Pocisk ma zatrzymać się w nieskończoności, a zatem ma tam mieć energię kinetyczną równą zeru. Jego energia potencjalna będzie wówczas także równa zeru, co oznacza, że całkowita energia pocisku w nieskończoności jest równa zeru. Z zasady zachowania energii wynika, że całkowita energia musi być równa zeru także na powierzchni planety. Mamy zatem

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \left(-\frac{GMm}{R} \right) = 0,$$

skąd

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Prędkość ucieczki v nie zależy od kierunku, w jakim pocisk opuszcza planetę. W praktyce, z uwagi na ruch obrotowy planety wokół jej osi, kierunek wystrzału pocisku jest nieco odchylony od pionu. Na przykład start rakiety z wyrzutni na przylądku Canaveral odbywa się w kierunku nieco odchylonym na wschód od pionu. Dla Ziemi prędkość ucieczki wynosi 11,2 km / s, dla Księżyca – 2,38 km / s, a dla Słońca – 618 km / s.

12.5. Prawa Keplera

Prawa empiryczne opisujące ruch planet podał Johannes Kepler (1571–1630) po badaniach, które zajęły mu całe życie. Kepler posłużył się m. in. danymi obserwacyjnymi Tycho Brahe (1546–1601). Izaak Newton (1642–1727) wykazał później, że prawa Keplera wynikają z jego prawa powszechnego ciążenia.

Prawa Keplera są następujące:

- (pierwsze prawo) wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisku znajduje się Słońce,
- (drugie prawo) linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity, czyli

$$\frac{dS}{dt} = \text{const},$$

gdzie S oznacza pole powierzchni zakreślonej przez tę linię,
- (trzecie prawo) kwadrat okresu ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej tej orbity.

Aby wyprowadzić wzór określający trzecie prawo Keplera, rozważmy (dla prostoty) orbitę kołową o promieniu r. Z drugiej zasady dynamiki ($F = ma$) mamy

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r,$$

przy czym po lewej stronie występuje wartość siły z prawa powszechnej grawitacji, a po prawej stronie masa jest pomnożona przez przyspieszenie dośrodkowe. Jeśli ruch odbywa się po orbicie kołowej, to $\omega = 2\pi / T$, gdzie T oznacza okres ruchu po orbicie. Stąd

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3, \tag{12.5}$$

przy czym wielkość w nawiasie jest stałą, której wartość zależy tylko od masy M ciała, wokół którego krąży planeta. Równanie (12.5) obowiązuje także dla orbit eliptycznych, przy czym zamiast promienia r należy w nim podstawić półoś wielką elipsy a.

Dla orbit planet Układu Słonecznego stosunek T^2 / a^3 przedstawiono w tabeli 11.

Tabela 11. Trzecie prawo Keplera dla planet Układu Słonecznego

Planeta	*Półoś wielka a* [10^{10} m]	*Okres T* [a]	T^2 / a^3 [10^{-34} a^2 / m^3]
Merkury	5,79	0,241	2,99
Wenus	10,8	0,615	3,00
Ziemia	15,0	1,00	2,96
Mars	22,8	1,88	2,98
Jowisz	77,8	11,9	3,01
Saturn	143	29,5	2,98
Uran	287	84,0	2,98
Neptun	450	165	2,99

12.6. Satelity – orbity i energia

Gdy satelita obiega Ziemię po orbicie eliptycznej, okresowo zmienia się zarówno jego prędkość, od której zależy jego energia kinetyczna E_k, jak i jego odległość od środka Ziemi, od której zależy jego energia potencjalna E_p. Energia mechaniczna satelity E pozostaje jednak stała (przy założeniu, że masa satelity jest mała w porównaniu z masą Ziemi).

Energia potencjalna układu jest dana równaniem

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \tag{12.6}$$

gdzie M i m oznaczają masy Ziemi i satelity, a r – promień orbity kołowej (zakładamy, że energia potencjalna $E_p = 0$ dla nieskończenie odległych ciał).

Z drugiej zasady dynamiki dla orbity kołowej mamy

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

gdzie wyrażenie v^2 / r przedstawia przyspieszenie dośrodkowe satelity. Wyznaczając z tego równania v^2 i podstawiając do wzoru na energię kinetyczną E_k otrzymujemy

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}. \tag{12.7}$$

Porównując wzory (12.6) i (12.7) widzimy, że

$$E_k = -\frac{E_p}{2}.$$

Całkowita energia mechaniczna satelity na orbicie jest zatem równa

$$E = E_k + E_p = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMn}{r} = -\frac{GMm}{2r},$$

czyli całkowita energia kinetyczna satelity jest równa jego energii kinetycznej wziętej ze znakiem przeciwnym ($E = -E_k$).

W przypadku orbity eliptycznej mamy

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

Z równania tego wynika, że całkowita energia satelity na orbicie zależy wyłącznie od półosi wielkiej tej orbity (a nie zależy od jej mimośrodu).

Zadania

1. Pewne ciało o masie M dzieli się na dwie części o masach m i $M - m$, które następnie oddalają się od siebie. Dla jakiej wartości stosunku m / M wartość siły grawitacyjnej działającej między tymi częściami jest największa?
2. W jakiej odległości od siebie muszą znajdować się dwie cząstki o masach 5,2 kg oraz 2,4 kg, aby ich siła przyciągania grawitacyjnego miała wartość $2{,}3 \cdot 10^{-12}$ N?
3. Chcemy umieścić sondę kosmiczną na prostej łączącej Ziemię i Słońce, aby obserwować rozbłyski słoneczne. W jakiej odległości od środka Ziemi musi znajdować się ta sonda, aby siły przyciągania grawitacyjnego działające na nią ze strony Ziemi i Słońca równoważyły się?
4. a) Ile będzie ważyło na powierzchni Księżyca ciało, które na powierzchni Ziemi waży 100 N?
   b) W jakiej odległości od środka Ziemi, mierzonej w jednostkach promienia Ziemi, należałoby umieścić to ciało, aby jego ciężar był równy ciężarowi na Księżycu?
5. Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi przyspieszenie grawitacyjne jest równe $4{,}9\ \mathrm{m/s^2}$?
6. Średnica Marsa wynosi w przybliżeniu $6{,}9 \cdot 10^3$ km, a średnica Ziemi – $1{,}3 \cdot 10^4$ km. Masa Marsa stanowi 0,11 masy Ziemi.
   a) Ile wynosi stosunek średnich gęstości Marsa i Ziemi?
   b) Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na Marsie?
   c) Ile wynosi prędkość ucieczki na Marsie?
7. Obliczyć energię potrzebną do ucieczki ciała:
   a) z Księżyca,
   b) z Jowisza, wyrażając ją w jednostkach energii potrzebnej do ucieczki z Ziemi.
8. a) Ile wynosi prędkość liniowa satelity Ziemi na orbicie kołowej odległej od powierzchni Ziemi o 160 km?
   b) Ile wynosi okres obiegu Ziemi przez tego satelitę?
9. Satelita Marsa Phobos obiega planetę po orbicie niemal kołowej. Znając promień tej orbity, równy $9{,}4 \cdot 10^6$ m oraz okres obiegu, wynoszący 7 h 39 min, wyznaczyć masę Marsa.
10. Słońce, którego masa wynosi $2 \cdot 10^{30}$ kg, obiega środek Drogi Mlecznej, odległy od nas o $2{,}2 \cdot 10^{20}$ m, przy czym okres tego ruchu wynosi $2{,}5 \cdot 10^8$ lat. Przyjmując, że wszystkie gwiazdy w Galaktyce mają masy równe masie Słońca, że są rozłożone równomiernie w kuli

o środku w centrum Galaktyki oraz że Słońce znajduje się na skraju tej kuli, oszacować liczbę gwiazd w naszej Galaktyce.

11. Pewna kometa, zaobserwowana przez astronomów chińskich w kwietniu 574 roku, została ponownie zauważona na niebie w maju 1994 roku. Przyjmując czas, który upłynął między tymi obserwacjami za okres obiegu tej komety wokół Słońca i zakładając, że mimośród orbity jest równy 0,9932, obliczyć:
    a) półoś wielką orbity tej komety,
    b) największą odległość komety od Słońca.
12. Satelita poruszający się wokół Ziemi po orbicie eliptycznej znajduje się na wysokości 360 km nad powierzchnią Ziemi, gdy jest najdalej od Ziemi, a na wysokości 180 km, gdy jest najbliżej Ziemi. Obliczyć:
    a) półoś wielką,
    b) mimośród jego orbity.
13. a) Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi energia potrzebna do wyniesienia satelity na tę wysokość jest równa energii kinetycznej potrzebnej satelicie do ruchu po orbicie na tej wysokości?
    b) Co jest większe na wysokości większej niż ta z punktu a): energia potrzebna do wyniesienia na nią satelity czy energia kinetyczna w ruchu po orbicie?
14. Satelita krąży wokół planety o nieznanej masie po orbicie o promieniu $2 \cdot 10^7$ m. Wartość siły grawitacyjnej, jaką działa planeta na satelitę, wynosi $F = 80$ N.
    a) Ile wynosi energia kinetyczna satelity na orbicie?
    b) Jaka byłaby wartość siły F, gdyby promień tej orbity zwiększył się do wartości $3 \cdot 10^7$ m?

XIII. PŁYNY

13.1. Płyny, gęstość i ciśnienie

Płyny (ciecze i gazy) to substancje zdolne do przepływu. Do ich opisu stosuje się wielkości, które mogą mieć różną wartość w różnych punktach ciała (z uwagi na rozciągłość substancji). Zamiast posługiwać się masą i siłą, w przypadku płynów używamy pojęcia gęstości i ciśnienia.

Gęstość ρ dowolnego ciała jest zdefiniowana jako masa jednostkowej objętości ciała, czyli

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Ściślej: gęstość płynu w danym punkcie jest równa granicy tego ilorazu, gdy objętość ΔV dąży do zera. W praktyce zakładamy zwykle, że badana próbka cieczy jest „gładka" (tzn. o stałej gęstości), a nie złożona z „ziaren" atomowych. Założenie to umożliwia nam wyrażenie gęstości przez masę m i objętość V próbki:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{13.1}$$

Gęstość jest wielkością skalarną, a jej jednostką w układzie SI jest kilogram na metr sześcienny.

Płyn przyjmuje kształt naczynia, ponieważ nie może przeciwstawić się naprężeniu ścinającemu (sile stycznej do jego powierzchni). Może jednak działać siłą prostopadłą do swej powierzchni. Siłę tę wyrażamy za pomocą ciśnienia:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

gdzie ΔF oznacza siłę działającą na element powierzchni ΔS. Jeśli siła działa równomiernie na całą płaską powierzchnię, to można ciśnienie wyrazić wzorem

$$p = \frac{F}{S}. \tag{13.2}$$

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest niuton na metr kwadratowy. Jednostkę tę nazywa się paskalem (oznaczenie: Pa). Paskal jest związany z innymi, wciąż często spotykanymi jednostkami zależnością

$$1 \text{ atm} = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Tr}.$$

Atmosfera (atm) jest to przybliżona wartość ciśnienia atmosferycznego na poziomie morza. Tor (Tr), nazwany tak na część Evangelisty Toricellego, który wynalazł barometr rtęciowy w 1647 roku, jest określany również jako milimetr słupa rtęci (mm Hg).

13.2. Płyny w spoczynku

Gdy płyn jest w spoczynku, ciśnienie w każdym jego punkcie zależy od położenia tego punktu w pionie y. Gdy oś y jest skierowana w górę, mamy

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2), \tag{13.3}$$

gdzie p_i oznacza ciśnienie na poziomie y_i. Aby wyprowadzić ten wzór wyobraźmy sobie walec wody, którego podstawy mają powierzchnię S. Na górną powierzchnię walca działa siła $\vec{F}_1$ ze strony znajdującej się nad nią wody. Na dolną powierzchnię działa siła $\vec{F}_2$ ze strony znajdującej się pod nią wody. Na wodę działa też siła ciężkości $m\vec{g}$, gdzie m oznacza masę wody zawartej w objętości walca. Siły te równoważą się, czyli

$$F_2 = F_1 + mg.$$

Z równania (13.2) mamy

$$F_1 = p_1 S \;\text{ i }\; F_2 = p_2 S,$$

a z równania (13.1) wynika, że $m = \rho V$. Stąd

$$p_2 S = p_1 S + \rho S g(y_1 - y_2)$$

i po podzieleniu przez S dostajemy równanie (13.3).

Jeśli przez h oznaczymy głębokość w próbce płynu, mierzoną w dół od poziomu odniesienia, na którym panuje ciśnienie p_0, to podstawiając w równaniu (13.3)

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0, \quad y_2 = -h, \quad p_2 = p,$$

otrzymamy

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Ze wzoru tego wynika, że ciśnienie w pewnym punkcie w płynie znajdującym się w równowadze statycznej zależy od głębokości tego punktu pod powierzchnią płynu, a nie zależy od poziomych rozmiarów płynu ani zbiornika, w którym płyn jest zawarty.

Do pomiaru ciśnienia atmosferycznego stosuje się barometr rtęciowy, a do pomiaru nadciśnienia gazu zamkniętego w naczyniu – manometr otwarty.

13.3. Prawo Pascala

Prawo Pascala, sformułowane w 1652 roku, mówi, że w zamkniętej objętości nieściśliwego płynu zmiana ciśnienia jest przenoszona bez zmiany wartości do każdego miejsca w płynie i do ścian zbiornika.

W celu uzasadnienia prawa Pascala wyobraźmy sobie, że nieściśliwym płynem jest ciecz zawarta w cylindrze. Cylinder jest od góry zamknięty tłokiem, na którym umieszczono pewien ciężar. Na tłok, a zatem i na ciecz, działa ciśnienie atmosferyczne oraz ciśnienie związane z siłą, jaką działa na tłok ten ciężar. Jeżeli oznaczymy sumę tych wszystkich ciśnień przez p_{zewn}, to ciśnienie p w dowolnym punkcie cieczy wynosi

$$p = p_{zewn} + \rho g h.$$

Jeśli zwiększymy ciężar na tłoku, to ciśnienie p_{zewn} wzrośnie o Δp_{zewn}. Wielkości ρ, g i h są stałe w powyższym równaniu, a zatem zmiana ciśnienia w dowolnym punkcie cieczy wynosi

$$\Delta p = \Delta p_{zewn}.$$

Ten przyrost ciśnienia nie zależy od h, a więc musi być taki sam w każdym punkcie cieczy.

13.4. Prawo Archimedesa i równanie ciągłości

Prawo Archimedesa mówi, że na ciało całkowicie lub częściowo zanurzone w płynie działa ze strony płynu siła wyporu $\vec{F}_w$. Jest ona skierowana pionowo do góry, a jej wartość jest równa ciężarowi $m_p g$ płynu wypartego przez to ciało, czyli

$$F_w = m_p g. \tag{13.4}$$

Gdy ciało pływa w płynie, to wartość działającej na nie siły wyporu F_w jest równa wartości działającej na nie siły ciężkości F_g. Z uwagi na równanie (13.4) zdanie to można też wypowiedzieć następująco: gdy ciało pływa w płynie, to wartość działającej na nie siły ciężkości F_g jest równa ciężarowi płynu wypartego przez to ciało $m_p g$.

Ciało stałe umieszczone w płynie ma ciężar pozorny, który jest związany z działającą na to ciało siłą wyporu. Mamy

ciężar pozorny = ciężar rzeczywisty − wartość siły wyporu.

Ruch płynów rzeczywistych jest bardzo złożony i ciągle jeszcze nie umiemy go w pełni opisać. Za płyn doskonały uważa się płyn nieściśliwy, który nie ma lepkości, a jego przepływ jest ustalony i bezwirowy. Przy przepływie płynu doskonałego przez dowolną rurę jest spełnione równanie ciągłości postaci

$$R_V = Sv = \text{const},$$

gdzie R_V oznacza strumień objętościowy (szybkość przepływy objętości), S – pole przekroju poprzecznego rury w pewnym jej punkcie, a v – prędkość przepływu płynu w tym punkcie rury. Jednostką tej wielkości w układzie SI jest metr sześcienny na sekundę. Gdy gęstość płynu ρ jest stała, to po pomnożeniu stronami powyższego równania przez gęstość możemy wyznaczyć szybkość przepływu masy (tzw. strumień masy) R_m, czyli masę płynu przepływającego przez rurę w jednostkowym czasie. Otrzymamy

$$R_m = \rho R_V = \rho S v = \text{const}.$$

13.5. Równanie Bernoulliego

Wyrazem zasady zachowania energii mechanicznej przy przepływie płynu doskonałego jest równanie Bernoulliego, które jest spełnione w każdym punkcie strugi płynu. Równanie to ma postać

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{const}, \tag{13.5}$$

gdzie y oznacza poziom (współrzędną pionową). Wyrażenie $\rho v^2/2$ nazywa się *gęstością energii kinetycznej* płynu (jest to energia kinetyczna jednostki objętości płynu).

Jeżeli przez y_1, v_1 i p_1 oznaczymy poziom, prędkość i ciśnienie płynu wchodzącego do rury z jednej strony, a przez y_2, v_2 i p_2 – odpowiednie wielkości odnoszące się do płynu wychodzącego z rury z drugiej strony, to równanie (13.5) można zapisać w postaci

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \tag{13.6}$$

Najważniejszy wniosek, jaki wynika z równania Bernoulliego, otrzymamy, gdy założymy, że wielkość y jest stała (możemy dla wygody przyjąć $y = 0$), czyli że płyn nie zmienia w trakcie przepływu swego położenia. Wówczas mamy

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Oznacza to, że jeśli przy przepływie wzdłuż poziomej linii prądu prędkość elementu płynu wzrasta, to ciśnienie płynu maleje i na odwrót.

W celu wyprowadzenia równania Bernoulliego zapiszmy zasadę zachowania energii w postaci związku pracy ze zmianą energii kinetycznej, tzn.

$$W = \Delta E_k, \tag{13.7}$$

z którego wynika, że zmiana energii kinetycznej układu jest równa całkowitej pracy wykonanej nad układem.. Zmiana energii kinetycznej jest wynikiem zmiany prędkości płynu między końcami rury, czyli

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2),$$

przy czym Δm ($= \rho \Delta V$) oznacza masę płynu, który wpływa do rury na końcu wejściowym i wypływa z niej na końcu wyjściowym w przedziale czasu Δt.

Praca wykonana nad układem ma dwa źródła. Po pierwsze, siła ciężkości $(\Delta m \vec{g})$ wykonuje pracę W_g nad płynem o masie Δm, wznosząc go z poziomu wejściowego na wyjściowy. Praca ta jest równa

$$W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1) = -\rho g \Delta V (y_2 - y_1).$$

Jest ona ujemna ze względu na przeciwne kierunki przemieszczenia płynu (skierowanego w górę) i siły ciężkości (skierowanej w dół). Po drugie, praca jest też wykonywana nad układem (na wejściowym końcu rury), gdy płyn jest wtłaczany do rury, oraz przez układ (na wyjściowym końcu rury), gdy płyn jest wypychany z rury. Ogólnie można powiedzieć, że praca wykonana przez siłę o wartości F, działającą na próbkę płynu o polu poprzecznego przekroju S, przy przemieszczeniu płynu na odległość Δx jest równa

$$F\Delta x = (pS)(\Delta x) = p(S\Delta x) = p\Delta V.$$

Praca wykonan nad układem jest zatem równa $p_1\Delta V$, a praca wykonana przez układ wynosi $-p_2\Delta V$. Ich suma W_p jest równa

$$W_p = -p_2\Delta V + p_1\Delta V = -(p_2 - p_1)\Delta V.$$

Związek pracy ze zmianą energii kinetycznej, czyli równanie (13.7), można zatem zapisać następująco:

$$W = W_g + W_p = \Delta E_k.$$

Wstawiając do tego wzoru wyrażenia otrzymane wcześniej, otrzymujemy

$$-\rho g\Delta V(y_2 - y_1) - \Delta V(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2),$$

skąd po prostych przekształceniach dostajemy równanie (13.6).

Zadania

1. Obliczyć zmianę ciśnienia płynu w strzykawce, gdy pielęgniarka działa siłą o wartości 42 N na kołowy tłok strzykawki o promieniu 1,1 cm.
2. Okno w biurze ma wymiary 3,4 m × 2,1 m. Po przejściu burzy ciśnienie powietrza za oknem spada do wartości 0,96 atm, choć wewnątrz budynku nadal panuje ciśnienie 1 atm. Ile wynosi całkowita siła działająca wówczas na okno?
3. Głębia Challenger w Rowie Mariańskim na dnie Oceanu Spokojnego to największa głębia oceaniczna na świecie (10,9 km p.p.m.). W 1960 roku Donald Walsh i Jacques Piccard zdołali dotrzeć do dna tej głębi w batyskafie Triest. Obliczyć w przybliżeniu ciśnienie hydrostatyczne (w atmosferach), jakie musiał wytrzymać ten batyskaf, zakładając, że woda morska ma stałą gęstość równą 1024 kg / m^3.
4. Obliczyć nadciśnienie, jakie musi wytworzyć pompa, aby wyssać błoto o gęstości 1800 kg / m^3 z dna dołu o głębokości 1,5 m.
5. Członkowie załogi okrętu podwodnego, który uległ uszkodzeniu na głębokości 100 m pod powierzchnią wody, starają się z niego wydostać. Ile wynosi wartość siły, którą trzeba działać na pokrywę luku awaryjnego o wymiarach 1,2 m × 0,6 m, aby ją otworzyć na tej głębokości? Przyjąć, że gęstość wody w oceanie wynosi 1024 kg / m^3, a ciśnienie powietrza wewnątrz okrętu wynosi 1 atm.
6. Gdy drewniany klocek pływa w słodkiej wodzie, pod wodą znajduje się dwie trzecie jego objętości. Klocek ten może równie pływać w oleju, lecz wtedy w zanurzeniu pozostaje 90% jego objętości. Wyznaczyć gęstość:
   a) drewna,
   b) oleju.
7. Kotwica wykonana z żelaza o gęstości 7870 kg / m^3 wydaje się w wodzie lżejsza o 200 N niż w powietrzu.
   a) Ile wynosi objętość tej kotwicy?
   b) Ile wynosi jej ciężar w powietrzu?

8. Troje dzieci, każde o ciężarze równym 356 N, buduje tratwę, wiążąc ze sobą drewniane pnie o średnicy 0,3 m i długości 1,8 m. Ile takich pni trzeba ze sobą połączyć, aby tratwa utrzymała całą trójkę dzieci na słodkiej wodzie? Przyjąć, że gęstość drewna wynosi 800 kg / m^3.
9. Wąż ogrodowy o średnicy wewnętrznej równej 1,9 cm jest połączony z nieruchomym zraszaczem do trawnika zawierającym zbiornik o 24 otworach, o średnicy 0,13 każdy. Woda wpływa do zraszacza z prędkością 0,91 m / s. Ile wynosi prędkość, z jaką woda wypływa przez otwory zraszacza?
10. Ile wynosi praca, jaką wykonujemy, aby przepchnąć 1,4 m^3 wody przez rurę o średnicy wewnętrznej 13 mm, jeśli wytwarzamy na końcach rury różnicę ciśnień równą 1 atm?
11. Cylindryczny zbiornik o dużej powierzchni dna jest napełniony wodą, tak że głębokość wody wynosi $D = 0{,}3$ m. Woda wypływa ze zbiornika przez otwór w dnie o polu powierzchni równym $S = 6{,}5$ cm^2.
    a) Obliczyć strumień objętościowy wody wypływającej przez ten otwór (wyrazić go w metrach sześciennych na sekundę).
    b) W jakiej odległości od dna zbiornika pole przekroju poprzecznego strugi wody jest równe połowie pola powierzchni otworu?
12. Woda płynie początkowo z prędkością równą 5 m / s w rurze, której przekrój ma pole równe 4 cm^2. Następnie poziom, na którym znajduje się rura, obniża się stopniowo o 10 m, przy czym pole przekroju poprzecznego zwiększa się do wartości 8 cm^2.
    a) Ile wynosi prędkość wody na szerszym końcu rury?
    b) Ile wynosi ciśnienie wody na szerszym końcu rury, jeśli na jej węższym końcu jest ono równe $1{,}5 \cdot 10^5$ Pa?