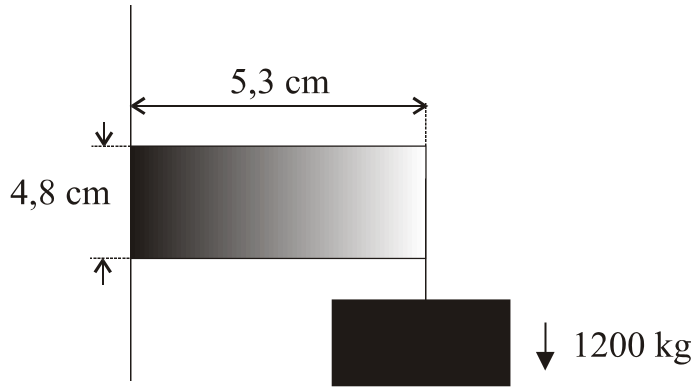
Fizyka

wykład 4

zadania

str. 83 zad. 4



Podstawowy wzór wiążący odkształcenie z naprężeniem ścinającym ma postać (zob. wykład 4 str. 81)

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{L}, \tag{1}$$

gdzie F oznacza wartość siły powodującej odkształcenie, S – pole przekroju prostopadłego do kierunku siły, Δx – przemieszczenie jednego końca w kierunku działania siły $\vec{F}$, L – długość próbki, a G oznacza moduł ścinania materiału.

Ad a)

Naprężenie to stosunek F do S. W zadaniu siłą powodującą odkształcenie jest ciężar zawieszonego przedmiotu. Wartość tej siły jest więc równa $F = mg$, gdzie g oznacza przyciąganie ziemskie. Pole przekroju to pole przekroju pręta , czyli $S = \pi r^2$, gdzie r oznacza promień pręta. Zatem

$$\frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi r^2}. \tag{2}$$

Ponieważ $g = 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a w zadaniu mamy podane m = 1200 kg i $2r$ = 4,8 cm, czyli r = 2,4 cm = $2{,}4 \cdot 10^{-2}$ m, więc po podstawieniu tych danych do wzoru (2) otrzymujemy

$$\frac{F}{S} = \frac{1200 \cdot 9{,}8}{3{,}14 \cdot (2{,}4 \cdot 10^{-2})^2} \approx 6{,}5 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2} = 6{,}5 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Ad b)

Z wzoru (1) mamy

$$\Delta x = \frac{F}{S} \cdot \frac{L}{G}.$$

Uwzględniając wynik otrzymany w p. a) oraz pozostałe dane (L = 5,3 cm = 5,3 · 10^{-2} m, $G = 3{,}0 \cdot 10^{10}\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$) otrzymujemy

$$\Delta x = 6{,}5 \cdot 10^6 \cdot \frac{5{,}3 \cdot 10^{-2}}{3{,}0 \cdot 10^{10}} \approx 11{,}5 \cdot 10^{-6} = 1{,}15 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}.$$

str. 90 zad. 1

Mamy (zob. wykład 4 wzór (12.1))

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdzie $m_1 = m$ i $m_2 = M - m$, czyli

$$F = G\frac{m(M-m)}{r^2}.$$

Jeżeli oznaczymy $\alpha = \dfrac{m}{M}$, to $m = \alpha M$ i mamy

$$F = G\frac{\alpha M(M - \alpha M)}{r^2} = \frac{GM}{r^2}\alpha(1-\alpha).$$

Pytanie sprowadza się zatem do znalezienia maksimum funkcji $F = F(\alpha)$. Obliczamy pochodną tej funkcji. Mamy

$$F'(\alpha) = \frac{GM}{r^2}(1 - 2\alpha).$$

Warunek ekstremum, tj. $F'(\alpha) = 0$, prowadzi do równania

$$1 - 2\alpha = 0,$$

skąd $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Na razie wiemy, że dla takiej wartości α dana funkcja ma ekstremum. Aby rozstrzygnąć, czy jest to maksimum, czy minimum, wystarczy sprawdzić wartości funkcji $F'(\alpha)$ dla $\alpha < \dfrac{1}{2}$ i dla $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Okazuje się, że dla $\alpha < \dfrac{1}{2}$ funkcja $F'(\alpha)$ jest dodatnia, a więc rosnąca, a dla $\alpha > \dfrac{1}{2}$ funkcja ta jest ujemna, a więc malejąca. Punkt $\alpha = \dfrac{1}{2}$ jest więc maksimum danej funkcji.

str. 90 zad. 3

Oznaczmy masę Słońca przez M, masę Ziemi przez m_Z, a masę sondy kosmicznej przez m. Siła grawitacyjna działająca na sondę ze strony Słońca wynosi

$$F_S = G\frac{Mm}{r_1^2},$$

a ze strony Ziemi –

$$F_Z = G\frac{m_Z m}{r^2},$$

gdzie r oznacza odległość sondy od środka Ziemi, a $r_1 = R - r$ – od środka Słońca, przy czym R oznacza odległość od Ziemi do Słońca w przybliżeniu równą $150 \cdot 10^6$ km. Z warunków zadania powinno zachodzić $F_S = F_Z$, czyli

$$G\frac{Mm}{(R-r)^2} = G\frac{m_Z m}{r^2},$$

skąd po podzieleniu przez Gm otrzymujemy

$$\frac{M}{(R-r)^2} = \frac{m_Z}{r^2}.$$

Równanie to można zapisać w postaci

$$Mr^2 - m_Z(R-r)^2 = 0,$$

tj.

$$Mr^2 - m_Z(R^2 - 2Rr + r^2) = 0,$$

skąd po uporządkowaniu wyrazów względem niewiadomej r mamy

$$(M - m_Z)r^2 + 2m_Z Rr - m_Z R^2 = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na wielkość r. Po podstawieniu danych (masa Słońca $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, masa Ziemi $m_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg) otrzymujemy

$$(1{,}99 \cdot 10^{30} - 5{,}98 \cdot 10^{24})r^2 + 2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 150 \cdot 10^6 r - 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot (150 \cdot 10^6)^2 = 0,$$

czyli

$$1{,}99 \cdot 10^{30} r^2 + 1794 \cdot 10^{30} r - 13{,}45 \cdot 10^{40} = 0,$$

skąd (dzielimy przez 10^{30})

$$1{,}99 r^r + 1794 r - 13{,}45 \cdot 10^{10} = 0.$$

Wyróżnik tego równania jest równy

$$\Delta = 1794^2 + 4 \cdot 1{,}99 \cdot 13{,}45 \cdot 10^{10} \approx 107 \cdot 10^{10},$$

skąd $\sqrt{\Delta} \approx 10{,}35 \cdot 10^5$. Ponieważ wyróżnik jest dodatni, formalnie otrzymujemy dwa rozwiązania. Jednak jedno z rozwiązań jest ujemne i musimy je odrzucić (odległość jest wielkością dodatnią). Ostatecznie mamy

$$r \approx \frac{-1794 + 10{,}35 \cdot 10^5}{2 \cdot 1{,}99} \approx 2{,}6 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

str. 90 zad. 5

Z jednej strony siła grawitacyjna jest dana wzorem (12.1) (zob. wykład 4), a z drugiej –

$$F = ma_g,$$

gdzie a_g oznacza przyciąganie ziemskie, a m – masę pewnej cząstki w pobliżu Ziemi. Z porównania tych wzorów mamy

$$ma_g = G\frac{Mm}{r^2},$$

skąd

$$a_g = \frac{GM}{r^2},$$

gdzie G oznacza stałą grawitacji, M – masę Ziemi, a r – odległość od środka Ziemi. Z ostatniego wzoru otrzymujemy

$$r = \sqrt{\frac{GM}{a_g}}.$$

Jest to wzór na odległość od środka Ziemi, gdzie przyspieszenie grawitacyjne ma wartość a_g. W celu otrzymania wysokości h nad powierzchnią Ziemi (zakładamy, że Ziemia jest jednorodną kulą) musimy od tej odległości odjąć promień Ziemi R, czyli mamy

$$h = r - R = \sqrt{\frac{GM}{a_g}} - R.$$

Po podstawieniu danych ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$, $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m) otrzymujemy

$$h = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4{,}9}} - 6{,}4 \cdot 10^6 \approx \sqrt{8{,}14 \cdot 10^{13}} - 6{,}4 \cdot 10^6$$
$$= \sqrt{81{,}4 \cdot 10^{12}} - 6{,}4 \cdot 10^6 \approx 9{,}02 \cdot 10^6 - 6{,}4 \cdot 10^6 \approx 2{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 2600\ \mathrm{km}.$$

str. 91 zad. 11

Znajdźmy najpierw okres T obiegu komety wokół Słońca. Mamy

$$T = \text{maj } 1994 - \text{kwiecien } 574 = \left(1994\frac{5}{12} - 574\frac{4}{12}\right) \text{ lat} = 1420{,}083 \text{ lat}$$
$$= 1420{,}083 \cdot 365{,}25\ \mathrm{d} = 1420{,}083 \cdot 3{,}16 \cdot 10^7\ \mathrm{s} \approx 4487{,}46 \cdot 10^7\ \mathrm{s} \approx 4{,}5 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s}.$$

Ad a)

Z wzoru określającego trzecie prawo Keplera, tj.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3,$$

wynika, że

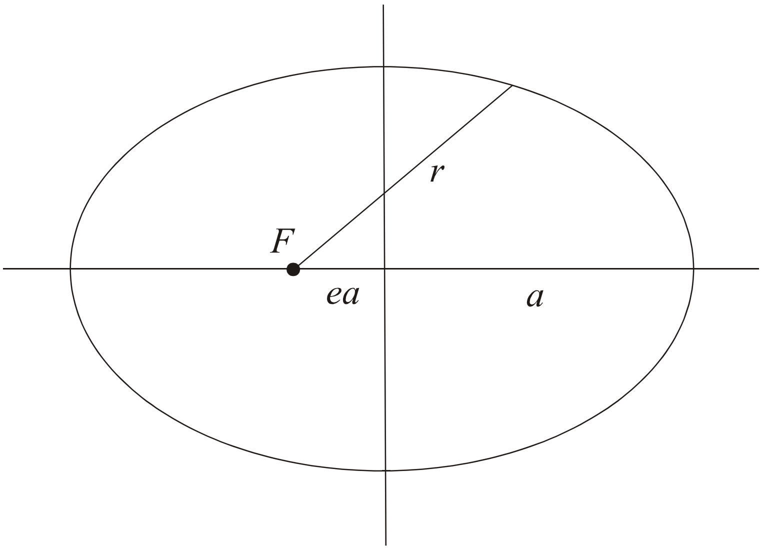
$$a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}.$$

Uwzględniając wyznaczony okres T oraz pozostałe dane

$\left(G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}},\ M = 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\right)$ otrzymujemy

$$a = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot (4{,}5 \cdot 10^{10})^2}{4 \cdot (3{,}14)^2}} \approx \sqrt[3]{\frac{270{,}135 \cdot 10^{39}}{39{,}4384}} \approx \sqrt[3]{6{,}85} \cdot 10^{13} \approx 1{,}9 \cdot 10^{13}\ \mathrm{m}.$$

Ad b)



Słońce znajduje się w ognisku F orbity eliptycznej o półosi wielkiej a. Odległość ogniska od środka elipsy jest równa ea. Maksymalna odległość komety od Słońca wynosi

$$r_{\max} = ea + a = (1 + e)a.$$

Uwzględniając wynik z p. a) oraz podaną w zadaniu wartość e mamy

$$r_{\max} = (1 + 0{,}9932) \cdot 1{,}9 \cdot 10^{13} \approx 3{,}787 \cdot 10^{13}\ \mathrm{m}.$$

str. 96 zad. 3

Ciśnienie p na głębokości h w płynie jest równe (zob. p. 13.2 z wykładu 4)

$$p = p_0 + \rho g h,$$

gdzie p_0 oznacza ciśnienie na poziomie odniesienia (w zadaniu: na powierzchni oceanu), a ρ – gęstość płynu (w zadaniu: gęstość wody morskiej). Ponieważ na powierzchni oceanu mamy $p_0 = 1$ atm, więc podstawiając dane do powyższego wzoru otrzymujemy

$$p = 1\ \mathrm{atm} + 1024\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 10{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \approx 1\ \mathrm{atm} + 109383{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{Pa}$$

$$\approx 1\ \mathrm{atm} + 1093{,}8 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{atm} + \frac{1093{,}8 \cdot 10^5}{1{,}01 \cdot 10^5}\ \mathrm{atm} \approx (1 + 1083)\ \mathrm{atm} \approx 1{,}08 \cdot 10^3\ \mathrm{atm}.$$

str. 97 zad. 8

Aby tratwa z dziećmi utrzymała się na wodzie, siła wyporu $\vec{F}_w$ musi być równa sile ciężkości $\vec{F}_g$ i siły te muszą mieć takie same wartości, czyli

$$F_w = F_g. \tag{3}$$

Wartość siły wyporu wynosi

$$F_w = m_p g = \rho_w V g, \tag{4}$$

gdzie m_p oznacza masę wody równą gęstości wody ρ_w (= 998 kg/m^3) pomnożonej przez jej objętość V, a g oznacza przyspieszenie ziemskie. Na wartość siły ciężkości składa się ciężar trójki dzieci i ciężar pni, tj.

$$F_g = 3F_{dz} + m_d g = 3F_{dz} + \rho_d V g, \tag{5}$$

gdzie F_{dz} oznacza ciężar jednego dziecka, a m_d – masę drewna, która jest równa jego gęstości ρ_d pomnożonej przez jego objętość V. Objętość jednego pnia drewna jest równa $\pi r^2 l$, gdzie r oznacza promień pnia, a l – jego długość. Stąd objętość n pni wynosi $n\pi r^2 l$. Uwzględniając ten fakt we wzorze (5) mamy

$$F_g = 3F_{dz} + \rho_d n\pi r^2 lg. \tag{6}$$

Oczywiście objętość wypartej wody, występująca we wzorze (4), musi być równa objętości pni drewna. Zatem na podstawie wzorów (3), (4) i (6) otrzymujemy równanie

$$\rho_w n\pi r^2 lg = 3F_{dz} + \rho_d n\pi r^2 lg,$$

czyli

$$n(\rho_w - \rho_d)\pi r^2 lg = 3F_{dz},$$

skąd

$$n = \frac{3F_{dz}}{(\rho_w - \rho_d)\pi r^2 lg}.$$

Podstawiając do tego wzoru dane występujące w zadaniu otrzymujemy

$$n = \frac{3 \cdot 356}{(998 - 800) \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{0{,}3}{2}\right)^2 \cdot 1{,}8 \cdot 9{,}8} \approx \frac{1068}{198 \cdot 1{,}246} \approx 4{,}33.$$

Oczywiście liczba pni powinna być całkowita, więc ostatecznie mamy $n = 5$.