V. SIŁA I RUCH

5.1. Pierwsza i druga zasada dynamiki Newtona

Siły są wielkościami wektorowymi. Ich wartości bezwzględne (moduły) mierzymy wielkością przyspieszenia, jakie te siły nadają ciału o masie jednego kilograma. Siła, która takiemu ciału nadaje przyspieszenie równe 1 m/s^2, ma moduł równy 1 N (jednemu niutonowi). Kierunkiem wektora siły jest kierunek wywoływanego przez nią przyspieszenia. Dodawanie sił odbywa się na podstawie algebry wektorowej. Wypadkowa sił działających na ciało to suma wektorowa wszystkich sił, jakie działają na to ciało.

Prędkość ciała może ulec zmianie, czyli może ono przyspieszyć, tylko w wyniku działania na nie jednej lub kilku sił ze strony innych ciał. Jest to pierwsza zasada dynamiki Newtona.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona. Jeśli na ciało nie działa żadna siła, to nie może zmienić się jego prędkość, czyli nie może ono przyspieszyć.

W praktyce na ciało działa wiele sił. Jeśli dodamy wektorowo wszystkie siły, to otrzymamy siłę wypadkową, której działanie na ciało jest takie samo, jak łączne działanie sił składowych. Używając pojęcia siły wypadkowej, podaną zasadę można sformułować bardziej poprawnie.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona. Jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zeru, to nie może zmienić się jego prędkość, czyli nie może ono przyspieszyć.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona nie obowiązuje we wszystkich układach odniesienia, ale zawsze można znaleźć taki układ, w którym zasada ta jest słuszna. Takie układy nazywa się inercjalnymi układami odniesienia lub krócej: układami inercjalnymi. Możemy powiedzieć, że inercjalny układ odniesienia to taki układ, w którym spełnione są zasady dynamiki Newtona. Za inercjalny układ odniesienia można na przykład uważać układ związany z Ziemią pod warunkiem, że pominiemy jej ruch obrotowy.

Ta sama siła może nadać różnym ciałom różne przyspieszenia. Na przykład pod działaniem tej samej siły piłka tenisowa będzie miała większe przyspieszenie niż piłka lekarska. Wynika to z faktu, że przyspieszenie jest odwrotnie proporcjonalne do masy ciała. Masa ciała jest tą jego cechą, która wiąże siłę przyłożoną do ciała z uzyskiwanym przez nie wówczas przyspieszeniem (nie da się jej prościej zdefiniować). Odwrotna proporcjonalność siły do masy prowadzi do drugiej zasady dynamiki Newtona.

Druga zasada dynamiki Newtona. Siła wypadkowa działająca na ciało jest równa iloczynowi masy tego ciała i jego przyspieszenia.

Zasadę tę można zapisać w postaci następującego równania:

$$\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}. \tag{5.1}$$

Równanie (5.1) jest równoważne trzem równaniom dla składowych wzdłuż każdej z osi układu współrzędnych *Oxyz*:

$$F_{wyp,\,x} = ma_x, \quad F_{wyp,\,y} = ma_y, \quad F_{wyp,\,z} = ma_z.$$

Każde z powyższych równań wiąże składową siły wzdłuż jednej z osi układu ze składową przyspieszenia wzdłuż tej samej osi. Składowa przyspieszenia wzdłuż danej osi układu współrzędnych jest związana z sumą składowych sił wzdłuż tej osi, a nie ze składowymi sił wzdłuż innych osi.

Z równania (5.1) wynika, że jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równo zeru, to przyspieszenie ciała $\vec{a} = 0$. Jeśli zatem ciało jest w spoczynku, to będzie spoczywać nadal, a jeśli porusza się, to będzie nadal w ruchu ze stałą prędkością. W tym przypadku siły działające na ciało równoważą się, ale nie oznacza to, że siły przestają istnieć – siły nadal działają na ciało.

Zbiór dwóch lub większej liczby ciał nazywamy *układem ciał*, a siłę działającą na dowolne z nich ze strony ciał nienależących do tego układu nazywamy *siłą zewnętrzną*. Jeśli ciała układu są ze sobą sztywno połączone, to ich układ można traktować jako jedno ciało złożone, na które działa siła wypadkowa $\vec{F}_{wyp}$, która jest sumą wektorową wszystkich sił zewnętrznych.

Jedną z ważnych sił jest *siła ciężkości* (grawitacji) $\vec{F}_g$. Jest to siła z jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało. Na Ziemi siła ciężkości jest skierowana pionowo w dół. Jeśli założymy, że układ związany z Ziemią jest inercjalny, wartość bezwzględną siły $\vec{F}_g$ można zapisać w postaci

$$F_g = mg, \tag{5.2}$$

gdzie *m* oznacza masę ciała, a *g* – przyspieszenie ziemskie. Dla siły ciężkości drugą zasadę dynamiki Newtona można zapisać w postaci wektorowej następująco:

$$\vec{F}_g = -F_g\hat{\jmath} = -mg\hat{\jmath} = m\vec{g},$$

gdzie $\hat{\jmath}$ oznacza wektor jednostkowy osi *y*, która jest skierowana pionowo w górę, a $\vec{g}$ oznacza wektor przyspieszenia ziemskiego, który jest skierowany pionowo w dół.

Wartość bezwzględną siły potrzebnej do zapobieżenia spadkowi ciała, mierzonej przez obserwatora na Ziemi, nazywamy *ciężarem* ciała. Będziemy go oznaczać przez *W*. Zatem zgodnie z równaniem (5.2) mamy

$$W = mg.$$

Równanie to wiąże ciężar ciała z jego masą, przy czym należy zauważyć, że ciężar ciała jest to wartość siły i jest to inna wielkość fizyczna niż masa ciała.

Innym, ważnym rodzajem siły jest *siła normalna* $\vec{F}_N$. Jest to siła działająca na ciało ze strony powierzchni, na którą ciało naciska. Siła normalna jest zawsze prostopadła do powierzchni. Jeśli oś y układu współrzędnych jest skierowana pionowo w górę, to ponieważ siły $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_N$ równoważą się mamy

$$F_N - F_g = ma_y,$$

skąd po uwzględnieniu wzoru (5.2) dostajemy

$$F_N - mg = ma_y.$$

Wartość siły normalnej wynosi zatem

$$F_N = mg + ma_y = m(g + a_y).$$

Gdy wprawimy ciało w ruch ślizgowy na pewnej powierzchni, ruchowi temu przeciwdziała oddziaływanie między ciałem i powierzchnią. Opory ruchu można opisać za pomocą jednej siły $\vec{f}$, którą nazywamy *siłą tarcia* lub krótko tarciem. Siła ta jest skierowana wzdłuż powierzchni, ale przeciwnie do kierunku, w którym ciało porusza się. Dalsze informacje o tarciu znajdują się w p. 5.3.

Jeszcze innym rodzajem siły jest *naprężenie* $\vec{T}$. Siła ta działa na przykład na ciało przymocowane do nici, która jest naciągnięta tak, że jest wyprostowana. Nić uważamy często za pozbawioną masy (co oznacza, że jej masę można pominąć w porównaniu z masą ciała) i nierozciągliwą.

5.2. Trzecia zasada dynamiki Newtona

Gdy dwa ciała odpychają się lub przyciągają, czyli gdy każde z nich działa na drugie z pewną siłą, to mówimy, że oddziałują one ze sobą. Jeśli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{BA}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{AB}$, przy czym

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}.$$

Jest to trzecia zasada dynamiki Newtona.

Trzecia zasada dynamiki Newtona. Gdy dwa ciała oddziałują ze sobą, to siły, jakimi działają one na siebie, mają taką samą wartość bezwzględną i przeciwne kierunki.

Siły te nazywamy *siłami akcji i reakcji*.

5.3. Tarcie

Siły tarcia występują powszechnie. Gdybyśmy nie potrafili im przeciwdziałać, zatrzymałyby każde poruszające się ciało i nie pozwoliły obracać się żadnemu wirnikowi.

Gdy siła $\vec{F}$ wprowadza ciało w ruch ślizgowy, na ciało działa ze strony podłoża siła tarcia. Jest ona równoległa do podłoża i skierowana tak, by przeciwdziałać poślizgowi. Źródłem tarcia jest wiązanie ciała z podłożem.

Jeśli ciało nie ślizga się po podłożu, to działa na nie siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$. Jest ona równa co do wartości składowej siły $\vec{F}$ równoległej do podłoża, ale jest przeciwnie skierowana. Gdy składowa siły $\vec{F}$ rośnie, to siła tarcia $\vec{f}_s$ też rośnie. Maksymalna wartość siły tarcia $\vec{f}_s$ wynosi

$$f_{s,\,\max} = \mu_s F_N\,, \tag{5.3}$$

gdzie μ_s oznacza współczynnik tarcia statycznego, a F_N – wartość siły normalnej. Gdy składowa siły $\vec{F}$ równoległa do podłoża przekracza wartość $f_{s,\,\max}$, ciało zaczyna ślizgać się po podłożu.

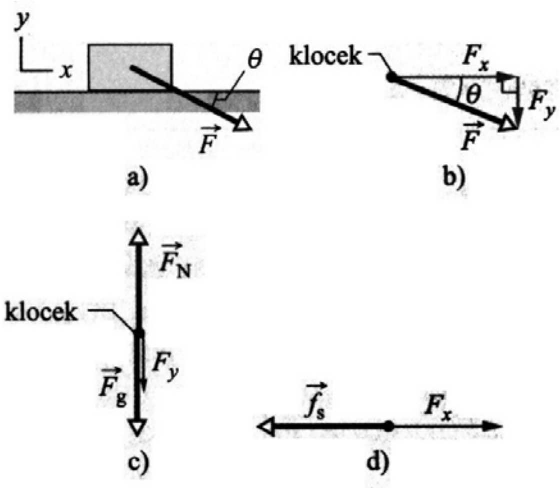
Jeśli ciało ślizga się, to działa na nie siła tarcia kinetycznego $\vec{f}_k$. Wielkość siły tarcia szybko wówczas maleje do stałej wartości

$$f_k = \mu_k F_N\,,$$

gdzie μ_k oznacza współczynnik tarcia kinetycznego.

Przykład

Do klocka o masie 8 kg przyłożono siłę o wartości $F = 12$ N pod kątem $\theta = 30°$ w dół od poziomu. Współczynnik tarcia statycznego między klockiem i podłożem wynosi $\mu_s = 0{,}7$, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy $\mu_k = 0{,}4$. Czy klocek zacznie się ślizgać, czy też pozostanie nieruchomy? Ile wynosi wartość siły tarcia działającej na klocek?



Rys. 5. Siły działające na klocek

Siły działające na klocek przedstawiono na powyższym rysunku. Aby stwierdzić, czy klocek ślizga się i następnie wyznaczyć działającą siłę tarcia, musimy najpierw porównać składową F_x siły przyłożonej i maksymalną wartość siły tarcia $f_{s,\,\max}$. Z trójkąta prostokątnego przedstawionego na rys. 5 b) mamy

$$F_x = F\cos\theta = (12\ \text{N})\cos 30° \approx (12\ \text{N})\cdot 0{,}866 \approx 10{,}4\ \text{N}.$$

Z równania (5.3) wynika, że aby wyznaczyć $f_{s,\,\max}$ musimy najpierw obliczyć wartość F_N. Siła normalna działa pionowo, więc zastosujemy drugą zasadę dynamiki dla pionowych składowych sił działających na klocek (zob. rys. 5 c)), czyli wzór $F_{wyp,\,y} = ma_y$. Siła ciężkości ma wartość mg i działa w dół. Siła przyłożona do klocka ma składową pionową równą $F_y = F\sin\theta$ i też działa w dół. Zatem dla wypadkowej składowej siły wzdłuż osi y mamy

$$F_N - mg - F\sin\theta = m\cdot 0,$$

bo $a_y = 0$. Z równania tego dostajemy

$$F_N = mg - F\sin\theta.$$

Zatem

$$\begin{aligned} f_{s,\,\max} &= \mu_s F_N = \mu_s(mg + F\sin\theta) \\ &= 0{,}7\cdot((8\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2) + (12\ \text{N})\sin 30^\circ) \\ &= 0{,}7\cdot(78{,}4\ \text{N} + 6\ \text{N}) \approx 59{,}1\ \text{N}. \end{aligned}$$

Wartość składowej siły zewnętrznej $F_x = 10{,}4$ N, która próbuje klocek wprowadzić w ruch, jest więc mniejsza niż $f_{s,\,\max}$, a to oznacza, że klocek pozostanie nieruchomy. Druga zasada dynamiki dla składowych wzdłuż osi poziomej x (zob. rys. 5 d)) ma zatem postać

$$F_x - f_s = m\cdot 0,$$

bo $a_x = 0$, skąd wynika, że $f_s = F_x = 10{,}4$ N. ■

5.4. Siła oporu i prędkość graniczna

Gdy ciało i powietrze (lub jakiś płyn) poruszają się względem siebie, to na ciało działa siła oporu $\vec{D}$ utrudniająca ten ruch względny i skierowana w kierunku przeciwnym przepływu powietrza (płynu) względem ciała. Wartość siły $\vec{D}$ jest związana z prędkością ruchu względnego v oraz wyznaczonym doświadczalnie współczynnikiem oporu aerodynamicznego C zależnością

$$D = \frac{1}{2}C\rho S v^2, \tag{5.4}$$

gdzie ρ oznacza gęstość (czyli masę jednostki objętości), a S – pole przekroju poprzecznego ciała (tzn. pole przekroju prostopadłego do kierunku wektora prędkości $\vec{v}$). Współczynnik oporu C, którego wartość jest zwykle zawarta w granicach od 0,4 do 1, jest tylko w przybliżeniu stały dla danego ciała, gdyż dla bardzo dużej zmiany prędkości v wartość C też może ulec zmianie.

Gdy ciało o obłym kształcie spada w powietrzu z prędkością początkową równą zeru, to siła oporu $\vec{D}$ jest skierowana do góry. Jej wartość wzrasta stopniowo od zera, w miarę jak ciało nabiera prędkości. Ponieważ siła $\vec{D}$ jest skierowana przeciwnie do siły ciężkości $\vec{F}_g$, po pewnym czasie siły te zrównoważą się. Związek tych sił z przyspieszeniem ciała opisuje druga zasada dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż pionowej osi y:

$$D - F_g = ma_y,$$

gdzie m oznacza masę ciała. W chwili, gdy siły zrównoważą się mamy $a_y = 0$, czyli dalej prędkość ciała nie będzie wzrastała i ciało będzie spadało ze stałą prędkością zwaną *prędkością graniczną* v_t. Aby ją wyznaczyć, korzystamy ze wzoru (5.4) i mamy

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho S}}. \tag{5.5}$$

Przykład

Kropla deszczu o promieniu R = 1,5 mm spada z chmury, która znajduje się na wysokości h = 1200 m nad ziemią. Współczynnik oporu aerodynamicznego C dla tej kropli wynosi 0,6. Załóżmy, że kropla ma kształt kuli przez cały czas lotu. Ile wynosi prędkość graniczna tej kropli wody, jeśli gęstość wody ρ_w jest równa 1000 kg/m^3, a gęstość powietrza ρ_p wynosi 1,2 kg/m^3?

Kropla osiąga prędkość graniczną v_t, gdy siła ciężkości jest równoważona przez siłę oporu powietrza, tak że przyspieszenie kropli jest równe zeru. Aby skorzystać ze wzoru (5.5), musimy znać pole przekroju poprzecznego S kropli i wartość siły ciężkości F_g. Kropla jest kulista, a więc pole przekroju S jest polem koła o takim samym promieniu, jak kula, czyli jest równe πR^2. Siła ciężkości F_g jest równa mg, a więc musimy wyznaczyć masę m. Ponieważ kropla jest kulą, więc jej objętość wynosi

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Gęstość wody w kropli jest to masa jednostkowej objętości, czyli $\rho_w = m/V$. Mamy zatem

$$F_g = mg = V\rho_w g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_w g$$

i po podstawieniu do wzoru (5.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_t &= \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho_p S}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \rho_w g}{3C\rho_p \pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\rho_w g}{3C\rho_p}} \\ &= \sqrt{\frac{8\cdot(1{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})(1000\ \mathrm{kg/m^3})(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})}{3\cdot 0{,}6\cdot(1{,}2\ \mathrm{kg/m^3})}} \\ &\approx 7{,}4\ \mathrm{m/s} \approx 27\ \mathrm{km/h}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wysokość chmury nie ma żadnego wpływu na wynik. ■

5.5. Ruch jednostajny po okręgu

Jak pamiętamy z p. 4.5, w ruchu ciała po okręgu z prędkością o stałej wartości v przyspieszenie dośrodkowe ma stałą wartość równą $a = v^2/R$, gdzie R oznacza promień okręgu. Przyspieszenie to jest skutkiem działania na ciało wypadkowej siły dośrodkowej o wartości

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

gdzie m oznacza masę ciała. Równanie to wynika z drugiej zasady dynamiki Newtona.

Ponieważ wartość prędkości v jest stała, więc stałe są również wartości przyspieszenia i siły. Kierunek przyspieszenia dośrodkowego i siły dośrodkowej nie jest jednak stały. Zmienia się on w sposób ciągły i zawsze wskazuje na środek okręgu.

Zadania

1. Na ciało o masie 3 kg leżące na podłodze, po której może ono poruszać się bez tarcia, działają tylko dwie siły poziome. Jedna z nich ma wartość 9 N i jest skierowana na wschód, a druga ma wartość 8 N i działa pod kątem 62° na północ od kierunku zachodniego. Wyznaczyć wartość przyspieszenia tego ciała.
2. Ciało wzorcowe o masie 1 kg doznaje przyspieszenia o wartości 2 m/s^2, które jest skierowane pod kątem 20° względem dodatniego kierunku osi x. Wyznaczyć:
   a) składową x,
   b) składową y siły wypadkowej działającej na to ciało.
   c) Zapisać tę siłę wypadkową za pomocą wektorów jednostkowych.
3. Salami o masie 11 kg wisi na lince połączonej z zaczepem wagi sprężynowej, która z kolei wisi na innej lince przymocowanej do sufitu. Jakie jest wskazanie wagi wyskalowanej w jednostkach ciężaru?
4. Elektron poruszający się poziomo z prędkością $1{,}2 \cdot 10^7$ m/s wchodzi w obszar, w którym działa na niego stała siła pionowa o wartości $4{,}5 \cdot 10^{-16}$ N. Masa tego elektronu wynosi $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. O ile zmieni się w pionie położenie elektronu w czasie, gdy przebędzie on w poziomie drogę 30 mm?
5. Klocek został pchnięty z prędkością początkową $v_0 = 3{,}5$ m/s w górę wzdłuż równi pochyłej, po której może poruszać się bez tarcia. Równia jest nachylona do poziomu pod kątem $\theta = 32°$.
   a) Jak daleko wzniesie się klocek wzdłuż równi?
   b) Ile czasu zajmie mu dotarcie do punktu największego wzniesienia?
   c) Jaką prędkość będzie miał klocek w chwili powrotu do podnóża równi?
6. Towarowy wagon kolejowy załadowano luźno skrzyniami o statycznym współczynniku tarcia względem podłogi wagonu równym 0,25. Pociąg jedzie z prędkością 48 km/h. Ma on zatrzymać się w taki sposób, aby skrzynie nie ślizgały się po podłodze. Jaka może być najkrótsza droga hamowania, jeśli pociąg będzie poruszał się podczas hamowania ruchem jednostajnie przyspieszonym?
7. Na podłodze stoi komoda, której masa wraz z zawartością wynosi 45 kg.
   a) Jaką minimalną siłę należy przyłożyć poziomo do tej komody, aby ruszyć ją z miejsca, jeśli współczynnik tarcia statycznego między komodą i podłogą jest równy 0,45?
   b) Jaka będzie wartość tej minimalnej siły, gdy z komody wyjmie się szuflady i ubrania o łącznej masie 17 kg?
8. Pewna osoba pcha poziomo skrzynię o masie 55 kg, działając siła 220 N, aby przesunąć ją po podłodze. Współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią i podłogą wynosi 0,35.
   a) Jaka jest wartość siły tarcia?
   b) Jaka jest wartość przyspieszenia skrzyni?

9. Klocek o masie 3,5 kg jest pchany po poziomym podłożu siłą $\vec{F}$ o wartości 15 N, która tworzy z poziomem kąt 40°. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem i podłożem wynosi 0,25. Wyznaczyć wartość:
   a) siły tarcia działającej na klocek ze strony podłoża,
   b) przyspieszenia klocka.
10. Prędkość graniczna skoczka (przed otwarciem spadochronu) wynosi 160 km/h, gdy przyjmuje on w locie pozycję orła, a jest równa 310 km/h, gdy spada głową w dół. Zakładając, że współczynnik oporu aerodynamicznego C nie zależy od pozycji skoczka, wyznaczyć stosunek przekroju poprzecznego S skoczka w pozycji wolnego i szybkiego lotu.
11. Na nieruchomej karuzeli w wesołym miasteczku, w odległości 5,4 m od jej osi drzemie kot. W pewnej chwili karuzela rusza i rozpędza się do normalnej prędkości, przy której pełny obrót zajmuje urządzeniu 6 s. Ile przynajmniej musi wynosić współczynnik tarcia statycznego między kotem i platformą karuzeli, aby kot nie ześlizgiwał się po platformie?
12. Ile wynosi najmniejszy promień krzywizny zakrętu na płaskim torze, który może pokonać rowerzysta z prędkością 29 km/h, jeśli współczynnik tarcia statycznego między oponami roweru i torem wynosi 0,32?
13. Wielbiciel ruchu po okręgu o masie 80 kg jedzie na diabelskim młynie o promieniu 10 m z prędkością o wartości 6,1 m/s.
   a) Ile wynosi okres ruchu karuzeli?
   Jaką wartość ma siła normalna działająca na pasażera ze strony siedzenia, gdy wagonik przechodzi przez:
   b) najwyższy punkt swego toru,
   c) jego punkt najniższy?

VI. ENERGIA KINETYCZNA I PRACA

6.1. Energia kinetyczna

Energia kinetyczna jest to energia związana ze stanem ruchu ciała. Im szybciej ono porusza się, tym większa jest jego energia kinetyczna. Gdy ciało pozostaje w spoczynku, jego energia kinetyczna jest równa zeru.

Energię kinetyczną ciała o masie m, poruszającego się z prędkością o wartości v, znacznie mniejszą od prędkości światła, definiujemy jako

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 . \tag{6.1}$$

Jednostką energii kinetycznej jest dżul (J), przy czym 1 J = 1 kg · m^2 / s^2, co wynika bezpośrednio z powyższego wzoru.

6.2. Praca

Praca jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na ciało siłą. Praca W wykonana przy przemieszczeniu ciała w wyniku działania na nie siłą $\vec{F}$ wynosi

$$W = F d \cos\phi = \vec{F} \cdot \vec{d}, \tag{6.2}$$

gdzie wektor $\vec{d}$ jest przemieszczeniem ciała, a ϕ oznacza kąt między wektorami $\vec{F}$ i $\vec{d}$. Jednostką pracy, podobnie jak energii kinetycznej, jest dżul. Z wzoru (6.2) wynika, że dżul może być przedstawiony jako iloczyn niutona i metra (1 J = 1 N · m). Do obliczenia pracy wykonanej przez siłę nad ciałem w czasie jego przemieszczenia potrzebna jest tylko składowa siły $\vec{F}$ w kierunku przemieszczenia ciała $\vec{d}$.

Zauważmy, że z wzoru (6.2) wynika także, że jeśli kąt ϕ jest mniejszy od 90°, to wartość cos ϕ jest dodatnia, a więc praca jest również dodatnia, a gdy kąt ϕ jest większy od 90° (ale nie większy od 180°), to wartość cos ϕ jest ujemna, a więc i praca jest ujemna. Oznacza to, że praca wykonana przez siłę jest dodatnia, gdy składowa siły w kierunku przemieszczenia jest skierowana zgodnie z wektorem przemieszczenia, jest zaś ujemna, gdy ta składowa jest skierowana przeciwnie do wektora przemieszczenia. Praca jest równa zeru, gdy siła nie ma składowej w kierunku przemieszczenia.

Gdy na ciało działają dwie siły lub większa ich liczba, to całkowita praca wykonana nad ciałem jest sumą prac wykonanych przez poszczególne siły, która jest równa pracy wykonanej przez wypadkową $\vec{F}_{wyp}$ tych sił.

Całkowita praca wykonana nad ciałem jest równa zmianie jego energii kinetycznej. Mamy

$$W = \Delta E_k = E_{k\ konc} - E_{k\ pocz},$$

gdzie $E_{k\ pocz}$ oznacza energię początkową ciała, a $E_{k\ konc}$ – jego energię końcową. Związek ten można też zapisać w postaci

$$E_{k\ konc} = E_{k\ pocz} + W.$$

Przykład

Podczas burzy skrzynia ślizga się po gładkiej, pokrytej olejem nawierzchni parkingu, doznając przemieszczenia $\vec{d} = (-3\ \mathrm{m})\hat{i}$. Przez cały czas towarzyszący burzy wiatr działa na skrzynię siłą $\vec{F} = (2\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} + (-6\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$. Ile wynosi praca wykonana przez siłę wiatru nad skrzynią podczas jej przemieszczania i ile wynosi energia kinetyczna skrzyni po przemieszczeniu jej o wektor $\vec{d}$, jeśli na początku ruchu była ona równa 10 J?

Ruch skrzyni można opisać jako ruch cząstki przy stałej sile wiatru. Z wzoru (6.2) mamy

$$\begin{aligned} W = \vec{F} \cdot \vec{d} &= [(2\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} + (-6\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}] \cdot [(-3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}}] \\ &= (2\ \mathrm{N})(-3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} \cdot \hat{\mathrm{i}} + (-6\ \mathrm{N})(-3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}} \cdot \hat{\mathrm{i}} = -6\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że siła wiatru wykonała nad skrzynią pracę ujemną o wartości 6 J, czyli zmniejszyła jej energię kinetyczną. Mamy zatem

$$E_{k\ konc} = E_{k\ pocz} + W = (10\ \mathrm{J}) + (-6\ \mathrm{J}) = 4\ \mathrm{J}.$$

Ponieważ energia kinetyczna skrzyni zmniejszyła się, więc ruch skrzyni został spowolniony.■

6.3. Praca wykonana przez siłę ciężkości

Na podstawie poprzedniego punktu możemy stwierdzić, że praca W_g wykonana przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ nad ciałem o masie m przy jego przemieszczeniu o wektor $\vec{d}$ wynosi

$$W_g = mgd\cos\phi, \tag{6.3}$$

gdzie ϕ oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{F}_g$ i $\vec{d}$.

Praca W_{zewn} wykonana przez siłę zewnętrzną nad ciałem podnoszonym lub opuszczanym jest związana z pracą W_g wykonaną przez siłę ciężkości i zmianą energii kinetycznej ciała ΔE_k równaniem

$$\Delta E_k = E_{k\ konc} - E_{k\ pocz} = W_{zewn} + W_g.$$

Jeśli $E_{k\ konc} = E_{k\ pocz}$, to powyższe równanie sprowadza się do zależności $W_{zewn} = -W_g$, co oznacza, że siła zewnętrzna dostarcza ciału tyle energii, ile siła ciężkości od niego odbiera.

Przykład

Winda o masie m = 500 kg jedzie w dół z prędkością v_{pocz} = 4 m/s, gdy nagle podtrzymująca ją lina zaczyna ześlizgiwać się z bębna, w wyniku czego winda zaczyna spadać ze stałym przyspieszeniem $\vec{a} = \vec{g} / 5$. Jaka praca W_g została wykonana nad windą przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ podczas spadku windy na drodze $d = 12$ m?

Możemy windę potraktować jako cząstkę i do obliczenia pracy W_g zastosować wzór (6.3). Kąt ϕ między kierunkami siły $\vec{F}_g$ i przemieszczenia $\vec{d}$ windy wynosi 0°, więc

$$W_g = mgd\cos 0° = (500\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(12\ \text{m}) = 5{,}88 \cdot 10^4\ \text{J} \approx 59\ \text{kJ}.$$

Ile wynosi praca W_T wykonana nad windą podczas jej spadku na drodze 12 m przez siłę $\vec{T}$, jaką lina windy ciągnie windę w górę?

Pracę tę wyznaczymy z wzoru (6.2), przy czym najpierw musimy skorzystać z drugiej zasady dynamiki Newtona zapisanej dla składowych wzdłuż osi y. Mamy

$$T - F_g = ma,$$

skąd

$$T = F_g + ma = mg + ma = m(g + a).$$

Zatem

$$W_T = Td\cos\phi = m(a + g)d\cos\phi.$$

We wzorze tym należy podstawić $a = -g/5$ (przyspieszenie jest skierowane w dół) oraz $\phi = 180°$ (kąt między kierunkami sił $\vec{T}$ i $\vec{F}_g$). Otrzymujemy

$$W_T = m\left(-\frac{g}{5} + g\right)d\cos\phi = \frac{4}{5}mgd\cos\phi$$

$$= \frac{4}{5}(500\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(12\ \text{m})\cos 180° = -4{,}7 \cdot 10^4\ \text{J} = -47\ \text{kJ}.$$

Zauważmy, że wartość W_T nie jest przeciwna do wartości W_g. Jest tak dlatego, że winda spada ruchem przyspieszonym, a zatem zmienia się jej prędkość, czyli jej energia kinetyczna te ulega zmianie.

Ile wynosi całkowita praca wykonana nad windą podczas jej spadku?

Praca całkowita jest sumą prac wykonanych przez wszystkie siły działające na windę, czyli

$$W = W_g + W_T \approx 59\ \text{kJ} - 47\ \text{kJ} = 12\ \text{kJ}.$$

Ile wynosi energia kinetyczna windy pod koniec jej spadku z wysokości 12 m?

Energia kinetyczna windy zmienia się, gdyż nad windą wykonywana jest praca. Mamy

$$E_{k\ konc} = E_{k\ pocz} + W = \frac{1}{2}mv_{pocz}^2 + W$$

$$\approx \frac{1}{2}(500\ \text{kg})(4\ \text{m/s})^2 + 12\ \text{kJ} = 4\ \text{kJ} + 12\ \text{kJ} = 16\ \text{kJ}.$$

■

6.4. Praca wykonana przez siłę sprężystości

Dla wielu sprężyn można z dobrym przybliżeniem przyjąć, że siła $\vec{F}_s$, jaką działa sprężyna, jest proporcjonalna do przemieszczenia $\vec{d}$ swobodnego końca sprężyny od jego położenia dla sprężyny nieodkształconej. Siła ta dane jest zależnością

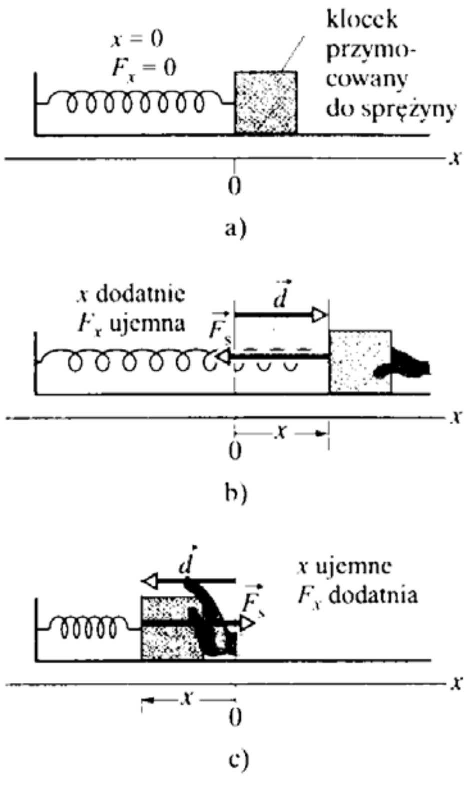
$$\vec{F}_s = -k\vec{d},$$

zwaną *prawem Hooke'a*. Znak minus oznacza, że siła sprężystości jest zawsze skierowana przeciwnie do przemieszczenia swobodnego końca sprężyny. Stała k, zwana *stałą sprężystości*, jest miarą sztywności sprężyny. Im stała ta ma większą wartość, tym sprężyna jest bardziej sztywna. Jednostką sprężystości k jest niuton na metr.

Jeśli oś x jest równoległa do długości sprężyny, a jej początkiem ($x = 0$) jest położenie swobodnego końca sprężyny nieodkształconej, to prawo Hooke'a przybiera postać

$$F_x = -kx.$$

Jeśli współrzędna x jest dodatnia (tzn. sprężyna jest rozciągnięta wzdłuż osi x w prawo), to wartość F_x jest ujemna (tzn. siła sprężystości działa w lewo), a jeśli współrzędna x jest ujemna (tzn. sprężyna jest ściśnięta w lewo), to wartość F_x jest dodatnia (tzn. siła sprężystości działa w prawo) – zob. rys. 6. Zauważmy, że siła sprężystości jest siłą zmienną, gdyż jej wielkość i kierunek zależą od położenia x swobodnego końca sprężyny. Siła ta zależy w sposób liniowy od położenia x.



Rys. 6. Sprężyna

Na każdym dostatecznie małym odcinku siła sprężystości jest stała i dlatego na każdym z nich możemy obliczyć pracę z wzoru (6.2). Mamy przy tym $\phi = 180°$, a więc $\cos\phi = -1$. Zatem praca wykonana na każdym dostatecznie małym odcinku j jest równa $-F_{xj}\Delta x$. Całkowita praca W_s wykonana przez sprężynę na odcinku od x_{pocz} do x_{konc} jest sumą tych prac, czyli

$$W_s = \sum(-F_{xj}\Delta x).$$

W granicy, przy $\Delta x \to 0$, mamy

$$W_s = \int_{x_{pocz}}^{x_{konc}}(-F_x)dx = \int_{x_{pocz}}^{x_{konc}}(-kx)dx = -k\int_{x_{pocz}}^{x_{konc}}xdx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_{pocz}}^{x_{konc}} = -\frac{1}{2}k(x_{konc}^2 - x_{pocz}^2),$$

a więc

$$W_s = \frac{1}{2}kx_{pocz}^2 - \frac{1}{2}kx_{konc}^2.$$

Z wzoru tego wynika, że praca W_s wykonana przez siłę sprężystości jest dodatnia, gdy położenie końcowe klocka jest bliższe końca sprężyny nieodkształconej ($x = 0$) niż jego położenie początkowe. Gdy położenie końcowe klocka jest dalsze punktu $x = 0$, wtedy jest ona ujemna. Praca ta jest równa zeru, gdy położenia końcowe i początkowe klocka są jednakowo odległe od punktu $x = 0$.

Jeżeli będziemy przemieszczać klocek wzdłuż osi x, to będziemy działać na niego siłą $\vec{F}_{zewn}$. Podczas ruchu klocka siła ta wykonuje nad klockiem pracę W_{zewn}, a siła sprężystości – pracę W_s. Zmiana energii kinetycznej klocka pochodząca od tych dwóch prac wynosi

$$\Delta E_k = E_{k\ konc} - E_{k\ pocz} = W_{zewn} + W_s,$$

przy czym $E_{k\ konc}$ oznacza energię kinetyczną na końcu przemieszczenia klocka, a $E_{k\ pocz}$ – na jego początku. Jeśli na początku i na końcu przemieszczenia obie energie są równe zeru, to podane równanie upraszcza się do postaci

$$W_{zewn} = -W_s.$$

Równanie to oznacza, że jeśli klocek przymocowany do sprężyny jest w spoczynku na początku i na końcu przemieszczenia, to praca wykonana nad klockiem podczas jego ruchu przez siłę zewnętrzną jest przeciwna do pracy wykonanej nad nim przez siłę sprężystości.

6.5. Moc

Moc to szybkość, z jaką siła wykonuje pracę. Jeśli w czasie Δt zostanie wykonana praca W, to moc średnia jest równa ilorazowi pracy i przedziału czasu, tj.

$$P_{sr} = \frac{W}{\Delta t}. \tag{6.4}$$

Z kolei, moc chwilowa jest to szybkość wykonywania pracy w danej chwili. Można ją zapisać jako

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Jednostką mocy jest wat (W), który jest równy dżulowi na sekundę. Czasem używa się też jednostki o nazwie koń mechaniczny (KM). Mamy przy tym 1 KM = 746 W.

Szybkość, z jaką siła wykonuje pracę nad cząstką, możemy również wyrazić przez tę siłę i prędkość cząstki. Dla cząstki poruszającej się po linii prostej, na którą działa stała siła $\vec{F}$ skierowana pod pewnym kątem ϕ do tej linii, z równania (6.4) mamy

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi\, dx}{dt} = F\cos\phi \frac{dx}{dt} = Fv\cos\phi,$$

czyli

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

Zadania

1. Proton o masie $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg porusza się w akceleratorze po linii prostej z przyspieszeniem $3{,}6 \cdot 10^{15}$ m / s^2. W chwili początkowej ma on prędkość $2{,}4 \cdot 10^7$ m / s. Obliczyć:
   a) prędkość,
   b) wzrost energii kinetycznej protonu po przebyciu przez niego drogi 3,5 cm.
2. Rakieta Saturn V i pojazd kosmiczny Apollo, który jest przez nią wynoszony w przestrzeń, mają łączną masę $2{,}9 \cdot 10^5$ kg. Ile wynosi ich energia kinetyczna po osiągnięciu prędkości o wartości 11,2 km / s?
3. Jedyna siła działająca na poruszający się w płaszczyźnie xy pojemnik o masie 2 kg ma wartość 5 N. W chwili początkowej pojemnik ma prędkość o wartości 4 m / s skierowaną w dodatnim kierunku osi x, a w pewnej chwili późniejszej jego prędkość ma wartość 6 m / s i jest skierowana w dodatnim kierunku osi y. Jaką pracę wykonała nad pojemnikiem przyłożona do niego siła między tymi dwiema chwilami?
4. Siła o wartości 12 N i stałym kierunku wykonuje pracę nad cząstką podczas przemieszczenia tej cząstki o wektor $\vec{d} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k})$ m. Wyznaczyć kąt między siłą i przemieszczeniem, jeśli zmiana energii kinetycznej cząstki wyniosła przy tym:
   a) 30 J,
   b) −30 J.
5. Śmigłowiec wyławia z oceanu astronautkę o masie 72 kg, wciągając ją za pomocą liny na wysokość 15 m. Astronautka porusza się przy tym z przyspieszeniem g / 10. Jaką pracę wykona nad astronautką:
   a) siła przyłożona ze śmigłowca,
   b) działająca na nią siła ciężkości?
   Jak będzie w chwili dotarcia astronautki do śmigłowca jej:
   c) energia kinetyczna,
   d) prędkość?
6. Prostopadłościenna bryła lodu ześlizguje się bez tarcia po równi nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 50°$, a pracownik chłodni działa na nią za pomocą liny skierowanej w górę wzdłuż równi siłą $\vec{F}$ o wartości 50 N. Gdy bryła ześlizguje się o $d = 0{,}5$ m, jej energia ki-

netyczna wzrasta o 90 J. Jaki byłby przyrost energii kinetycznej bryły na tej samej drodze, gdyby lina nie była przymocowana do bryły?

7. Klocek i sprężyna są ze sobą połączone. Jeśli przemieścimy klocek do punktu $x = 4$ cm, to do utrzymania go w tym punkcie będzie potrzebna siła o wartości 360 N. Przemieszczamy klocek do punktu $x = 11$ cm i puszczamy go swobodnie. Jaką pracę wykona sprężyna nad klockiem przy przemieszczeniu go do punktu:
   a) $x = 3$ cm,
   b) $x = -3$ cm,
   c) $x = -5$ cm,
   d) $x = -9$ cm?
8. Na ciało o masie 15 kg, znajdujące się początkowo w spoczynku, działa siła o wartości 5 N. Wyznaczyć pracę wykonaną przez tę siłę w czasie:
   a) pierwszej,
   b) drugiej,
   c) trzeciej sekundy ruchu ciała,
   d) moc chwilową,pochodzącą od tej siły, pod koniec trzeciej sekundy ruchu.
9. Siła zewnętrzna o wartości 122 N skierowana ukośnie w górę pod kątem 37° do poziomu ciągnie po poziomej podłodze kloc o masie 100 kg ze stałą prędkością o wartości 5 m / s. Jaką pracę wykonuje ta siła nad klocem w jednostce czasu?
10. Winda wraz z ładunkiem ma masę $3 \cdot 10^3$ kg. Jadąc do góry, winda pokonuje odległość 210 m w czasie 23 s, przy czym porusza się z prędkością o stałej wartości. Jaką pracę nad windą wykonuje średnio w jednostce czasu siła działająca na nią ze strony liny?

VII. ENERGIA POTENCJALNA I ZACHOWANIE ENERGII

7.1. Energia potencjalna

Energia potencjalna jest dość ogólną nazwą pewnych rodzajów energii i jest związana z konfiguracją układu ciał (wzajemnym ich położeniem), które oddziałują ze sobą (tzn. działają między nimi siły). Energia ta jest związana z tzw. *siłą zachowawczą*. Siłę nazywamy zachowawczą, gdy całkowita praca wykonana przez nią nad ciałem przebywającym drogę zamkniętą (czyli o tym samym położeniu początkowym i końcowym) jest równa zeru. Innymi słowy: siła jest zachowawcza, jeśli praca wykonana przez nią nad cząstką poruszającą się między dwoma punktami nie zależy od tego, po jakim torze się ona porusza. Przykładami sił zachowawczych są siła ciężkości i siła sprężystości. Przykładem siły niezachowawczej jest siła tarcia kinetycznego.

Energia potencjalna to energia związana z konfiguracją układu, na który działa siła zachowawcza. Gdy siła ta wykonuje nad jednym z ciał układu pracę W, to zmiana energii potencjalnej układu ΔE_p jest równa

$$\Delta E_p = -W.$$

Jeśli ciało porusza się z punktu x_{pocz} do punktu x_{konc}, a siła może zależeć od położenia, zmiana energii potencjalnej układu jest równa

$$\Delta E_p = -\int\limits_{x_{pocz}}^{x_{konc}} F(x)dx. \tag{7.1}$$

Energię potencjalną układu złożonego z Ziemi i niezbyt od niej odległego ciała nazywamy *grawitacyjną energią potencjalną*. Gdy cząstka o masie m przemieszcza się z punktu y_{pocz} do punktu y_{konc} (pionowo wzdłuż osi y o kierunku dodatnim do góry), siła ciężkości $\vec{F}_g$ wykonuje nad nią pracę. W celu wyznaczenia towarzyszącej temu zmiany energii potencjalnej, w równaniu (7.1) należy podstawić $-mg$, ponieważ siła $\vec{F}_g$ ma wartość mg i jest skierowana wzdłuż osi y w dół. Otrzymujemy

$$\Delta E_p = -\int\limits_{y_{pocz}}^{y_{konc}} (-mg)dy = mg\int\limits_{y_{pocz}}^{y_{konc}} dy = mgy\Big|_{y_{pocz}}^{y_{konc}},$$

skąd wynika, że

$$\Delta E_p = mg(y_{konc} - y_{pocz}) = mg\Delta y. \qquad (7.2)$$

Znaczenie fizyczne mają jedynie zmiany ΔE_p grawitacyjnej energii potencjalnej. Dla wygody obliczeń i rozważań przyjmuje się zwykle, że konfiguracji układu cząstka-Ziemia, w której cząstka znajduje się na wysokości y nad Ziemią, odpowiada grawitacyjna energia potencjalna E_p. Równanie (7.2) zapisuje się wówczas w postaci

$$E_p - E_{p\,pocz} = mg(y - y_{pocz})$$

i uznajemy, że energia $E_{p\,pocz}$ jest grawitacyjną energią potencjalną układu w konfiguracji odniesienia, w której cząstka znajduje się w punkcie odniesienia y_{pocz}. Zazwyczaj przyjmuje się, że $E_{p\,pocz} = 0$ i $y_{pocz} = 0$. Ostatnie równanie można wówczas zapisać w postaci

$$E_p(y) = mgy.$$

Wynika z niego, że grawitacyjna energia potencjalna układu cząstka-Ziemia zależy jedynie od położenia y cząstki w pionie, liczonego względem punktu odniesienia $y = 0$ (czyli jej wysokości), a nie zależy od jej położenia w poziomie.

W przypadku układu klocek-sprężyna, gdy klocek przemieszcza się z punktu x_{pocz} do punktu x_{konc}, działa na niego siła sprężystości $F = -kx$. Podstawiając tę wielkość do równania (7.1) otrzymujemy

$$\Delta E_p = -\int_{x_{pocz}}^{x_{konc}} (-kx)dx = k\int_{x_{pocz}}^{x_{konc}} xdx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_{pocz}}^{x_{konc}},$$

skąd

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}kx_{konc}^2 - \frac{1}{2}kx_{pocz}^2.$$

Aby powiązać energię potencjalną E_p z położeniem klocka x, wybieramy jako konfigurację odniesienia stan układu, gdy sprężyna jest nieodkształcona, a klocek znajduje się w punkcie $x_{pocz} = 0$. Otrzymujemy wówczas

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

7.2. Zachowanie energii mechanicznej

Energia mechaniczna układu jest sumą jego energii kinetycznej E_k i energii potencjalnej E_p, tj.

$$E_{mech} = E_k + E_p.$$

Układ nazywamy izolowanym, gdy żadne siły zewnętrzne nie powodują zmian energii w obrębie układu. Jeśli w układzie izolowanym pracę wykonują jedynie siły zachowawcze, to energia mechaniczna układu nie może ulegać zmianie. Jest to treść zasady zachowania energii mechanicznej, którą można przedstawić równaniem

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1},$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil w trakcie procesu wymiany energii.

Gdy siła zachowawcza wykonuje pracę W nad jednym z ciał układu, to $\Delta E_k = W$. Z drugiej strony $\Delta E_p = -W$, skąd wynika, że $\Delta E_k = -\Delta E_p$. Zasadę zachowania energii mechanicznej można zatem zapisać w postaci równania

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0.$$

7.3. Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną

Gdy na układ działa siła zewnętrzna, to praca wykonana przez tę siłę jest równa energii przekazanej układowi lub odebranej od niego. Gdy na układ działa więcej niż jedna siła, to energia przekazana układowi lub odebrana od niego jest równa pracy wykonanej przez wypadkową tych sił.

Pod nieobecność tarcia praca wykonana nad układem i zmiana jego energii mechanicznej są sobie równe, czyli

$$W = \Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p.$$

Gdy w układzie działa siła tarcia kinetycznego, to zmienia się energia termiczna układu, która jest związana z chaotycznym ruchem atomów i cząstek ciał układu. Praca wykonana nad układem jest wówczas równa

$$W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term},$$

przy czym zmiana energii termicznej ΔE_{term} jest związana z wartością siły tarcia f_k i wartością przemieszczenia d pod wpływem siły zewnętrznej zależnością

$$\Delta E_{term} = f_k d.$$

7.4. Zasada zachowania energii

Całkowita energia układu E, czyli suma jego energii mechanicznej i energii wewnętrznej, w tym termicznej, może ulec zmianie tylko wtedy, gdy energia zostanie dostarczona do układu lub od niego odebrana. Jest to *zasada zachowania energii*.

Jeśli nad układem jest wykonywana praca W, to

$$W = \Delta E = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term} + \Delta E_{wewn}.$$

Dla układu izolowanego, dla którego praca $W = 0$, mamy stąd

$$\Delta E_{mech} + \Delta E_{term} + \Delta E_{wewn} = 0$$

oraz

$$E_{mech,2} = E_{mech,1} - \Delta E_{term} - \Delta E_{wewn},$$

gdzie wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil.

Szybkość zmiany energii układu nazywa się *mocą*. Jeśli w przedziale czasu Δt energia zmienia się o ΔE, to moc średnia związana z działaniem siły jest równa

$$P_{sr} = \frac{\Delta E}{\Delta t},$$

a moc chwilowa wynosi

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

Na wykresie energii E jako funkcji czasu t moc jest równa nachyleniu krzywej w danej chwili.

Zadania

1. Ile wynosi stała sprężystości sprężyny, która ma energię potencjalną sprężystości równą 25 J po ściśnięciu jej o 7,5 cm w stosunku do jej długości w sytuacji, gdy nie jest odkształcona?
2. Osoba stojąca w oknie upuszcza podręcznik o masie 2 kg, znajdujący się początkowo na wysokości $D = 10$ m nad poziomem ulicy, tak aby mogła go złapać koleżanka stojąca na chodniku i trzymająca wyciągnięte ręce na wysokości $d = 1{,}5$ m nad poziomem ulicy.
   a) Jaką pracę W_g wykona nad podręcznikiem siła ciężkości podczas jego lotu do rąk koleżanki?
   b) Jaka będzie w czasie tego lotu zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej ΔE_p układu podręcznik-Ziemia?
   Jeśli przyjmiemy, że grawitacyjna energia potencjalna E_p układu jest równa zeru na poziomie ulicy, to ile ona wynosi, gdy:
   c) osoba wypuszcza podręcznik z rąk,
   d) podręcznik dociera do rąk koleżanki?
3. Płatek lodu o masie 2 g zostaje puszczony swobodnie na krawędzi miski o kształcie półkuli o promieniu r równym 22 cm. Płatek ześlizguje się po powierzchni miski bez tarcia.
   a) Jaką pracę wykona nad płatkiem siła ciężkości do chwili, gdy dotrze on na dno miski?
   b) Ile wyniesie zmiana energii potencjalnej układu płatek-Ziemia w czasie tego ruchu?
   c) Ile wynosi energia potencjalna płatka na krawędzi miski, jeśli przyjęto, że wynosi ona zero na dnie miski?
4. Kula kamienna o masie 5 g zostaje wystrzelona pionowo w górę z pistoletu sprężynowego. Sprężynę trzeba ścisnąć o 8 cm, jeśli kulka ma dotrzeć do tarczy znajdującej się 20 m nad położeniem kulki na ściśniętej sprężynie.
   a) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej $\Delta E_{p,g}$ układu kilka-Ziemia w czasie wznoszenia się tej kulki o 20 m?
   b) Ile wynosi zmiana energii potencjalnej $\Delta E_{p,s}$ sprężyny w czasie wystrzelenia kulki?
   c) Ile wynosi stała sprężystości sprężyny?

5. Ciężarówka mająca zepsute hamulce pędzi w dół zbocza. W chwili, gdy prędkość pojazdu osiąga wartość 130 km / h, kierowcy udaje się skierować go na drogę wznoszącą się pod kątem $\theta = 15°$, po której ciężarówka jedzie bez tarcia. Masa ciężarówki wynosi $1{,}2 \cdot 10^4$ kg.
   a) Ile musi wynosić co najmniej długość tej drogi L, aby w czasie ruchu po niej ciężarówka zwolniła aż do prędkości równej zeru?

   Czy minimalna długość drogi L wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli:
   b) zmniejszymy masę ciężarówki,
   c) zmniejszymy prędkość ciężarówki?
6. Robotnik pcha skrzynię o masie 27 kg po poziomej podłodze, działając na nią siłą skierowaną pod kątem 32° w dół od poziomu. Wiedząc, że skrzynia porusza się ze stałą prędkością i przebywa drogę 9,2 m, a współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią i podłogą wynosi 0,2, wyznaczyć:
   a) pracę wykonaną przez siłę, jaką robotnik działa na skrzynię,
   b) wzrost energii termicznej układu skrzynia-podłoga.
7. Niedźwiadek o masie 25 kg ześlizguje się po pniu sosny. Jego prędkość początkowa na wysokości 12 m nad ziemią wynosi 5,6 m / s.
   a) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu niedźwiadek-Ziemia w czasie zjazdu niedźwiadka na ziemię?
   b) Ile wynosi energia kinetyczna niedźwiadka w chwili dotarcia do ziemi?
   c) Ile wynosi średnia siła tarcia działająca na niedźwiadka w czasie jego ruchu?
8. Podczas lawiny kamiennej nieruchomy początkowo blok skalny o masie 520 kg ześlizguje się po zboczu o długości 500 m i wysokości 300 m. Współczynnik tarcia kinetycznego między blokiem i zboczem wynosi 0,25.
   a) Przyjmując, że grawitacyjna energia potencjalna E_p układu blok-Ziemia jest równa zeru u podnóża stoku, wyznaczyć wartość E_p przed ześlizgnięciem się bloku.
   b) Ile energii zostaje zamienione w energię termiczną w czasie ruchu bloku?
   c) Ile wynosi energia kinetyczna bloku u podnóża stoku?
   d) Jaką ma on wtedy prędkość?

VIII. ŚRODEK MASY I PĘD

8.1. Środek masy

Środkiem masy dla układu n cząstek nazywamy punkt o współrzędnych

$$x_{SM} = \frac{1}{m_u}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_{SM} = \frac{1}{m_u}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_{SM} = \frac{1}{m_u}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i,$$

gdzie x_i, y_i, z_i oznaczają współrzędne położenia i-tej cząstki o masie m_i, a m_u oznacza całkowitą masę układu. W zapisie wektorowym środek masy układu można przedstawić równaniem

$$\vec{r}_{SM} = \frac{1}{m_u}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i.$$

Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa układu oraz wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

8.2. Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

Ruch środka masy każdego układu cząstek jest opisany drugą zasadą dynamiki Newtona dla układu cząstek, czyli równaniem

$$\vec{F}_{wyp} = m_u \vec{a}_{SM},$$

gdzie $\vec{F}_{wyp}$ oznacza wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, jakie działają na układ, m_u – całkowitą masę układu, a $\vec{a}_{SM}$ oznacza przyspieszenie środka masy układu.

8.3. Pęd

Dla pojedynczej cząstki definiujemy pęd $\vec{p}$ jako

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Jest to wektor, który ma kierunek taki sam, jak prędkość cząstki. Korzystając z pojęcia pędu, możemy drugą zasadę dynamiki Newtona sformułować następująco: szybkość zmian pędu jest równa wypadkowej sił działających na cząstkę i ma kierunek tej siły, co można zapisać w postaci równania

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Dla układu cząstek analogiczne równania są następujące:

$$\vec{P} = m_u \vec{v}_{SM} \ \text{ i } \ \vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Pierwsze równanie oznacza, że pęd układu cząstek jest równy iloczynowi całkowitej masy układu oraz prędkości jego środka masy.

8.4. Zderzenie i popęd siły

Druga zasada dynamiki w postaci zawierającej pęd, zastosowana do ciała biorącego udział w zderzeniu, prowadzi do związku

$$\vec{p}_{konc} - \vec{p}_{pocz} = \Delta\vec{p} = \vec{J},$$

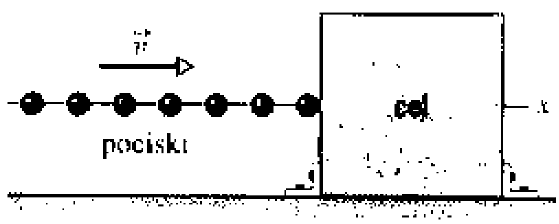
gdzie różnica $\vec{p}_{konc} - \vec{p}_{pocz} = \Delta\vec{p}$ jest zmianą pędu ciała, a $\vec{J}$ oznacza popęd siły $\vec{F}(t)$, jaka działa na ciało podczas zderzenia. Jest on zdefiniowany następująco:

$$\vec{J} = \int_{t_{pocz}}^{t_{konc}} \vec{F}(t)dt.$$

Jeśli siła $\vec{F}(t)$ ma w czasie zderzenia wartość średnią F_{sr}, a zderzenie trwa czas Δt, to w przypadku jednowymiarowym mamy

$$J = F_{sr}\Delta t. \tag{8.1}$$

Wyobraźmy sobie strumień pocisków o jednakowych pędach, który pada na stanowiące cel unieruchomione ciało (zob. rys. 8.1).



Rys. 8.1. Strumień pocisków uderzających w cel

Załóżmy, że strumień pocisków o jednakowych masach m i pędach $m\vec{v}$ porusza się wzdłuż osi x. Oznaczmy przez n liczbę pocisków zderzających się z celem w przedziale czasu Δt. Ruch pocisków zachodzi tylko w kierunku osi x, a więc możemy rozważać tylko składowe wzdłuż tej osi. W wyniku zderzenia pęd pocisków zmienia się o Δp. Łączna zmiana pędu n pocisków padających w czasie Δt wynosi $n\Delta p$. Łączny popęd siły $\vec{J}$, jakiego doznaje cel w czasie Δt ma również wartość $n\Delta p$, jest skierowany wzdłuż osi x, a jego kierunek jest przeciwny do kierunku zmiany pędu, co można zapisać jako

$$J = -n\Delta p,$$

gdzie znak minus oznacza, że wektory $\vec{J}$ i $\Delta\vec{p}$ mają przeciwne kierunki. Z równania (8.1) mamy

$$F_{sr} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v. \quad (8.2)$$

równanie to określa zależność F_{sr} od $n / \Delta t$, czyli częstości zderzeń pocisków z celem, a także od Δv, czyli zmiany prędkości tych pocisków przy zderzeniu.

Jeśli przy zderzeniu pociski zostają zatrzymane, to do równania (8.2) musimy zamiast Δv podstawić

$$\Delta v = v_{konc} - v_{pocz} = 0 - v = -v,$$

gdzie przez v_{pocz} (= v) i v_{konc} (= 0) oznaczono odpowiednio prędkość pocisku przed zderzeniem i po zderzeniu. Jeśli pociski odbijają się od celu w tył, bez zmiany wartości ich prędkości, to $v_{konc} = -v$ i otrzymujemy

$$\Delta v = v_{konc} - v_{pocz} = -v - v = -2v.$$

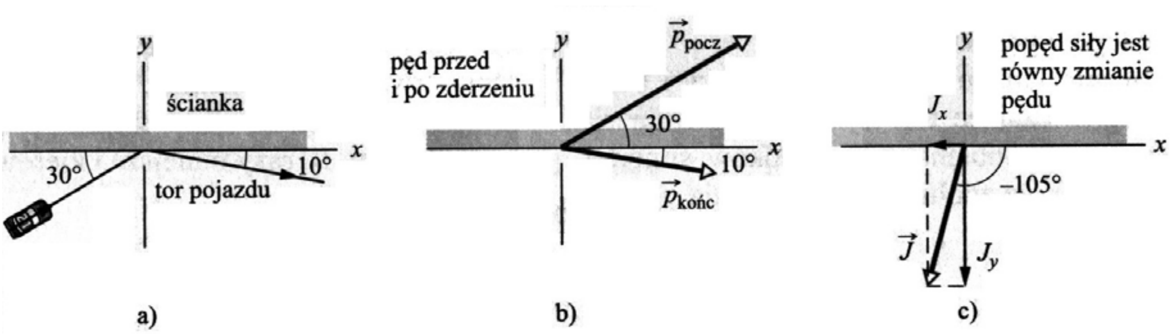
W przedziale czasu Δt do celu docierają pociski o łącznej masie $\Delta m = nm$. Korzystając z tego oznaczenia, równanie (8.2) można zapisać w postaci

$$F_{sr} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v.$$

Równanie to podaje zależność F_{sr} od $\Delta m / \Delta t$, czyli od szybkości, z jaką dociera do celu masa pocisków.

Przykład

Na rys. 8.2 a) przedstawiono widok z góry toru kierowcy samochodu wyścigowego i jego pojazdu podczas zderzenia samochodu ze ścianką ograniczającą tor wyścigowy.



Rys. 8.2. Zderzenie samochodu wyścigowego ze ścianką ograniczającą tor

Tuż przed zderzeniem pojazd jechał z prędkością v_{pocz} = 70 m / s po linii prostej tworzącej ze ścianką kąt 30°. Tuż po zderzeniu jego prędkość wynosiła v_{konc} = 50 m / s, a prosty tor pojazdu tworzył ze ścianką kąt 10°. Masa kierowcy wynosi 80 kg.

Należy wyznaczyć popęd siły $\vec{J}$ działającej na kierowcę w tym zderzeniu.

Popęd siły $\vec{J}$ możemy wyznaczyć ze zmiany pędu kierowcy $\vec{p}$ (zob. rys. 8.2 b)). Mamy

$$\vec{J} = \vec{p}_{konc} - \vec{p}_{pocz} = m\vec{v}_{konc} - m\vec{v}_{pocz} = m(\vec{v}_{konc} - \vec{v}_{pocz}).$$

Równanie to zapisujemy dla składowych x i y:

$$\begin{aligned} J_x &= m(v_{konc,x} - v_{pocz,x}) \\ &= (80\ \mathrm{kg})[(50\ \mathrm{m/s})\cos(-10°) - (70\ \mathrm{m/s})\cos 30°] \approx -910\ \mathrm{kg \cdot m/s}, \\ J_y &= m(v_{konc,y} - v_{pocz,y}) \\ &= (80\ \mathrm{kg})[(50\ \mathrm{m/s})\sin(-10°) - (70\ \mathrm{m/s})\sin 30°] \approx -3500\ \mathrm{kg \cdot m/s}. \end{aligned}$$

Popęd siły jest zatem równy

$$\vec{J} = (-910\hat{\mathrm{i}} - 3500\hat{\mathrm{j}})\mathrm{kg \cdot m/s},$$

co oznacza, że jego wartość (moduł) wynosi

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} \approx 3600 \mathrm{kg \cdot m/s},$$

a kąt tworzony przez wektor $\vec{J}$ z dodatnim kierunkiem osi x jest równy

$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{J_y}{J_x}\right) \approx 75{,}4°.$$

Taki sam jest tangens kąta o 180° większego i musimy wybrać kąt spełniający warunki zadania. Wystarczy narysować wektor $\vec{J}$ (zob. rys. 8.2 c)) i z rysunku widać, że warunki zadania spełnia kąt θ = 75,4° + 180° = 255,4°, który można także zapisać jako θ = −104,6°.

Jeśli zderzenie trwało 14 ms, to jaka była średnia wartość siły działającej w tym zderzeniu na kierowcę?

Z równania (8.2) mamy

$$F_{sr} = \frac{J}{\Delta t} \approx \frac{3600\ \mathrm{kg \cdot m/s}}{0{,}014\ \mathrm{s}} \approx 2{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{N}.$$

Korzystając z wzoru $F = ma$ i pamiętając, że m = 80 kg, możemy stwierdzić, że średnie przyspieszenie kierowcy podczas tego zderzenia wynosiło około $3{,}22 \cdot 10^3$ m / s^2, czyli 329 g, co oznacza, iż kierowca nie mógł przeżyć tego wypadku.

8.5. Zachowanie pędu

Jeśli układ jest zamknięty i izolowany, tak że wypadkowa działających na układ sił zewnętrznych jest równa zeru, to pęd układu $\vec{P}$ jest stały, nawet jeśli pędy cząstek układu zmieniają się, tzn.

$$\vec{P} = \mathrm{const.}$$

Jest to zasada zachowania pędu, którą można również zapisać w postaci zawierającej pęd początkowy i końcowy układu:

$$\vec{P}_{pocz} = \vec{P}_{konc}.$$

Podane równania są równaniami wektorowymi, a zatem każde z nich jest równoważne trzem równaniom wyrażającym zachowanie pędu wzdłuż trzech osi układu współrzędnych *Oxyz*. W zależności od tego, jakie siły działają na układ, pęd może nie być zachowany wzdłuż wszystkich trzech kierunków, a tylko wzdłuż jednego lub dwóch z nich. Prawdziwe jest jednak stwierdzenie, że jeśli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ zamknięty ma wzdłuż pewnej osi składową równą zeru, to składowa pędu układu wzdłuż tej osi nie ulega zmianie.

8.6. Pęd i energia kinetyczna w zderzeniach

W zderzeniach niesprężystych dwóch ciał energia kinetyczna tych ciał nie jest zachowana.. Jeśli układ jest zamknięty i izolowany, to całkowity moment pędu musi jednak być zachowany, co można wyrazić za pomocą równania wektorowego

$$\vec{p}_{1,\,pocz} + \vec{p}_{2,\,pocz} = \vec{p}_{1,\,konc} + \vec{p}_{2,\,konc},$$

w którym wskaźniki *pocz* i *konc* odnoszę do wielkości przed i po zderzeniu.

Jeśli ciała poruszają się wzdłuż jednej prostej, to zderzenie zachodzi w jednym wymiarze i zasadę zachowania pędu można zapisać za pomocą składowych względem tej prostej (osi):

$$m_1 v_{1,\,pocz} + m_2 v_{2,\,pocz} = m_1 v_{1,\,konc} + m_2 v_{2,\,konc}.$$

Gdy po zderzeniu ciała stykają się ze sobą, to zderzenie jest całkowicie niesprężyste i po zderzeniu ciała poruszają się z taką samą prędkością $\vec{v}$.

Zderzenie ciał układu nie wpływa na położenie środka masy układu zamkniętego i izolowanego. W szczególności w wyniku zderzenia nie zmienia się prędkość środka masy $\vec{v}_{SM}$.

8.7. Zderzenia sprężyste w jednym i dwóch wymiarach

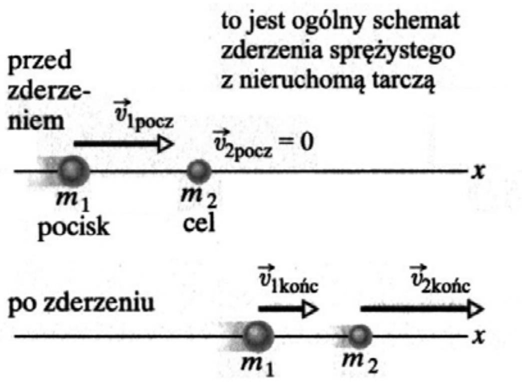
Zderzenie sprężyste to takie zderzenie, w którym energia kinetyczna układu zderzających się ciał jest zachowana. Gdy układ jest zamknięty i izolowany, to zachowany jest też pęd układu.

W przypadku jednowymiarowym możemy rozważać zderzenia sprężyste z nieruchomą lub ruchomą tarczą. Załóżmy, że mamy dwa ciała o masach odpowiednio m_1 i m_2. W pierwszym przypadku (zob. rys. 8.3) ciało o masie m_1 porusza się z prędkością początkową $\vec{v}_{1,\,pocz}$, a drugie ciało pozostaje w spoczynku ($\vec{v}_{2,\,pocz} = 0$). Jeśli założymy, że ten układ dwóch ciał jest zamknięty i izolowany, to z zasady zachowania pędu wynika, że

$$m_1 v_{1,\,pocz} = m_1 v_{1,\,konc} + m_2 v_{2,\,konc.} \tag{8.3}$$

Skoro zderzenie jest sprężyste, to jest również zachowana całkowita energia kinetyczna, czyli

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\,pocz}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\,konc}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\,konc}^2. \tag{8.4}$$



Rys. 8.3. Zderzenie sprężyste z nieruchomą tarczą

Z równań (8.3) i (8.4) możemy wyznaczyć prędkości końcowe obu ciał. Z równania (8.3) mamy

$$m_1(v_{1,\,pocz} - v_{1,\,konc}) = m_2 v_{2,\,konc},$$

a z równania (8.4) dostajemy

$$m_1(v_{1,\,pocz} - v_{1,\,konc})(v_{1,\,pocz} + v_{1,\,konc}) = m_2 v_{2,\,konc}^2.$$

Dzieląc stronami te równania, po niewielkich przekształceniach otrzymujemy

$$v_{1,\,konc} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\,pocz}$$

oraz

$$v_{2,\,konc} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\,pocz}.$$

Zauważmy, że z drugiego równania wynika, że prędkość $v_{2,\,konc}$ jest zawsze dodatnia, czyli że ciało o masie m_2, które początkowo jest nieruchome, po zderzeniu zawsze porusza się do przodu. Z kolei z pierwszego równania wynika, że ciało o masie m_1 porusza się po zderzeniu do przodu, jeśli $m_1 > m_2$, ale odbija się od tarczy, gdy $m_1 < m_2$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym oba ciała przed zderzeniem znajdują się w ruchu (zob. rys. 8.4). Zasada zachowania pędu przybiera teraz postać

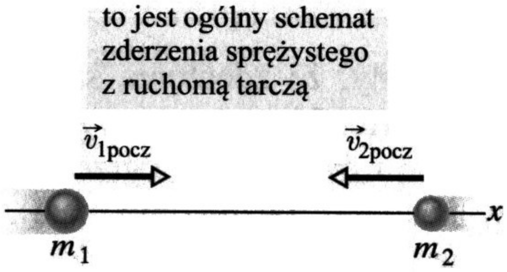
$$m_1 v_{1,\,pocz} + m_2 v_{2,\,pocz} = m_1 v_{1,\,konc} + m_2 v_{2,\,konc}, \tag{8.5}$$

a zasada zachowania energii kinetycznej może być zapisana jako

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\,pocz}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\,pocz}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\,konc}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\,konc}^2. \tag{8.6}$$

Aby rozwiązać ten układ względem prędkości końcowych obu ciał, przekształćmy równanie (8.5) do postaci

$$m_1(v_{1,\,pocz} - v_{1,\,konc}) = -m_2(v_{2,\,pocz} - v_{2,\,konc}),$$



Rys. 8.4. Czołowe zderzenie sprężyste dwóch ciał

a równanie (8.6) do postaci

$$m_1(v_{1,\,pocz} - v_{1,\,konc})(v_{1,\,pocz} + v_{1,\,konc}) = -m_2(v_{2,\,pocz} - v_{2,\,konc})(v_{2,\,pocz} + v_{2,\,konc}).$$

Dzieląc stronami te równania, po niewielkich przekształceniach otrzymujemy

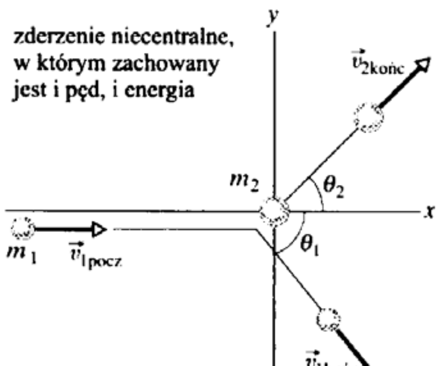
$$v_{1,\,konc} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\,pocz} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,\,pocz}$$

oraz

$$v_{2,\,konc} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\,pocz} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,\,pocz}.$$

Zauważmy, że przypisanie ciałom wskaźników 1 i 2 jest całkowicie dowolne – ich zmiana nie zmienia równań.

Gdy dwa ciała zderzają się ze sobą, nie poruszając się przed zderzeniem wzdłuż tej samej osi (czyli gdy zderzenie nie jest czołowe), ich zderzenie zachodzi w dwóch wymiarach. W układzie zamkniętym i izolowanym obowiązuje zasada zachowania pędu, którą można też zapisać w postaci dwóch równań dla składowych wzdłuż każdej z osi układu współrzędnych, w którym opisujemy zderzenie. W przypadku zderzenia sprężystego musi też być zachowana energia kinetyczna układu, co nam daje trzecie równanie.



Rys. 8.5. Sprężyste zderzenie niecentralne dwóch ciał, w którym ciało o masie m_2 jest przed zderzeniem nieruchome

Na rys. 8.5 przedstawiono zderzenie niecentralne pocisku i tarczy, która przed zderzeniem nie porusza się. Popędy sił działających między tymi ciałami sprawiają, że po zderzeniu ciała poruszają się w kierunkach tworzących z osią x kąty θ_1 i θ_2. Zasada zachowania pędu dla składowych wzdłuż osi x ma postać

$$m_1 v_{1,\,pocz} = m_1 v_{1,\,konc} \cos\theta_1 + m_2 v_{2,\,konc} \cos\theta_2, \tag{8.7}$$

a dla składowych wzdłuż osi y

$$0 = -m_1 v_{1,\,konc} \sin\theta_1 + m_2 v_{2,\,konc} \sin\theta_2. \tag{8.8}$$

W przypadku zderzenia sprężystego zasada zachowania energii kinetycznej daje równanie

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,\,pocz}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\,konc}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\,konc}^2. \tag{8.9}$$

W równaniach (8.7), (8.8) i (8.9) występuje siedem zmiennych: dwie masy m_1 i m_2, trzy prędkości $\vec{v}_{1,\,pocz}$, $\vec{v}_{1,\,konc}$ i $\vec{v}_{2,\,konc}$ oraz dwa kąty θ_1 i θ_2. Jeśli znamy przynajmniej cztery z tych wielkości, to pozostałe możemy wyznaczyć z tych równań.

Zadania

1. Na poziomej płaszczyźnie znajdują się dwie cząstki. Cząstka o masie 2 kg znajduje się w punkcie o współrzędnych $x = -1{,}2$ m i $y = 0{,}5$ m, a cząstka o masie 4 kg – w punkcie o współrzędnych $x = 0{,}6$ m i $y = -0{,}75$ m. Wyznaczyć:
   a) współrzędną x,
   b) współrzędną y
   punktu, w którym należy umieścić cząstkę o masie 3 kg, aby środek masy układu tych trzech cząstek znajdował się w punkcie o współrzędnych $x = -0{,}5$ m i $y = -0{,}7$ m.
2. Jeden kamień upuszczono swobodnie w chwili $t = 0$, a drugi, o masie dwa razy większej niż pierwszy, upuszczono swobodnie z tego samego punktu w chwili $t = 100$ ms.
   a) W jakiej odległości od punktu wypuszczenia kamieni znajduje się środek ich masy w chwili $t = 300$ ms (zakładamy, że żaden z kamieni nie spadł jeszcze na ziemię)?
   b) Ile wynosi prędkość ruchu środka masy kamieni w tej chwili?
3. Gigantyczna oliwka (o masie $m_1 = 0{,}5$ kg) znajduje się w początku układu współrzędnych, a gigantyczny orzech brazylijski (o masie $m_2 = 1{,}5$ kg) – w punkcie o współrzędnych $x = 1$ m i $y = 2$ m. W chwili $t = 0$ na oliwkę zaczyna działać siła $\vec{F}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j})$ N, a na orzech siła $\vec{F}_2 = (-3\hat{i} - 2\hat{j})$ N. Wyznaczyć przemieszczenie środka masy układu śliwka-orzech od chwili $t = 0$ do chwili $t = 4$ s i zapisać je za pomocą wektorów jednostkowych.
4. Ciężarówka o masie 2100 kg, jadąca na północ z prędkością 41 km / h, skręca w pewnej chwili na wschód i przyspiesza do prędkości 51 km / h.
   a) Ile wynosi zmiana energii kinetycznej ciężarówki przy tym manewrze?
   Jakie są przy tym:
   b) wartość,
   c) kierunek zmiany pędu ciężarówki?
5. Kula o masie 1,2 kg spada pionowo na podłoże i ma w chwili zetknięcia z podłożem prędkość 25 m / s. Prędkość kuli tuż po odbiciu ma wartość 10 m / s.

a) Ile wynosi popęd siły działającej na kulę w czasie jej zetknięcia z podłożem?
b) Ile wynosi średnia wartość siły działającej na podłoże ze strony kuli, jeśli czas zetknięcia się kuli z podłożem wynosi 0,02 s?

6. Kula o masie 0,4 kg porusza się początkowo z prędkością 14 m / s w dodatnim kierunku osi x. W pewnej chwili zaczyna na nią działać przez 27 ms siła o ujemnym kierunku osi x. Siła nie ma stałej wartości, a jej popęd ma wartość 32,4 N · m. Wyznaczyć:
   a) wartość prędkości,
   b) kierunek ruchu tej kuli w chwili, w której ta siła już na nią nie działa,
   c) średnią wartość siły,
   d) kierunek popędu siły działającej na kulę.
7. Leżący na podłodze człowiek o masie 9 kg rzuca w bok po podłodze kamień o masie 68 g, nadając mu prędkość 4 m / s. Z jaką prędkością zaczyna się wówczas sam ślizgać po podłodze, jeśli zarówno on, jak i kamień poruszają się po podłodze bez tarcia?
8. Pocisk o masie 10 g uderza w wahadło balistyczne o masie 2 kg i grzęźnie w nim, w wyniku czego środek masy wahadła wznosi się w pionie o 12 cm. Oblicz wartość prędkości początkowej pocisku.
9. Wózek o masie 340 g poruszający się bez tarcia po liniowym torze z poduszką powietrzną z prędkością początkową 1,2 m / s ulega zderzeniu sprężystemu z nieruchomym początkowo wózkiem o nieznanej masie. Po zderzeniu pierwszy wózek porusza się w tym samym kierunku co początkowo z prędkością o wartości 0,66 m / s.
   a) Wyznaczyć masę drugiego wózka.
   b) Jaką prędkość ma drugi wózek po zderzeniu?
   c) Ile wynosi prędkość środka masy układu tych dwóch wózków?
10. Mamy dwie cząstki: cząstkę α (cząstka 1 – pocisk) i jądro tlenu (cząstka 2 – tarcza). Po zderzeniu cząstka α rozprasza się pod kątem $\theta_1 = 64°$, a jądro tlenu zostaje odrzucone pod kątem $\theta_2 = 51°$ z prędkością $1{,}2 \cdot 10^5$ m / s. Masa cząstki α wynosi (w atomowych jednostkach miary) 4 u, a masa jądra tlenu jest równa 16 u. Wyznaczyć:
    a) początkową,
    b) końcową wartość prędkości cząstki α.