XXXV. TEORIA WZGLĘDNOŚCI

35.1. Równoczesność i dylatacja czasu

Teoria względności zajmuje się pomiarami zdarzeń, gdzie i kiedy zdarzenia zachodzą oraz odległością tych zdarzeń w czasie i przestrzeni. Ponadto teoria ta zajmuje się transformacjami wyników takich pomiarów między układami odniesienia, które poruszają się względem siebie (stąd nazwa: *teoria względności*).

W tym rozdziale zajmiemy się tzw. szczególną teorią względności, opublikowaną przez Alberta Einsteina w 1905 roku. Przymiotnik *szczególna* oznacza, że dotyczy ona tylko inercjalnych układów odniesienia, tzn. takich, w których obowiązują zasady dynamiki Newtona. Einstein stworzył także ogólną teorię względności, w której układy odniesienia mogą przyspieszać w polu grawitacyjnym.

U podstaw teorii względności leżą dwa postulaty:

- **postulat względności**, który mówi, że dla wszystkich obserwatorów w inercjalnych układach odniesienia prawa fizyki są takie same (żaden z układów nie jest wyróżniony),
- **postulat stałej prędkości światła** stwierdzający, że we wszystkich inercjalnych układach odniesienia i we wszystkich kierunkach światło rozchodzi się z tą samą prędkością c.

Obydwa postulaty były wielokrotnie weryfikowane i nigdy nie znaleziono jakiejkolwiek od nich odstępstwa. *Nieprzekraczalna prędkość c* jest zdefiniowania jako równa dokładnie

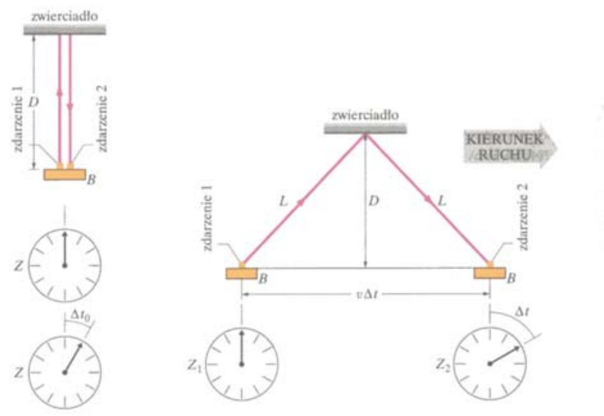
$$c = 299\,792\,458 \text{ m / s}.$$

Zdarzenie to „coś”, co się dokonuje i co obserwator może wskazać przez podanie trzech współrzędnych przestrzennych i jednej współrzędnej czasowej. Dwaj obserwatorzy poruszający się względem siebie na ogół nie będą zgodni co do równoczesności zdarzeń. Jeżeli jeden z obserwatorów stwierdzi, że zdarzenia były równoczesne, to drugi będzie na ogół innego zdania. Równoczesność nie jest pojęciem absolutnym i zależy od ruchu obserwatora.

Jeżeli obserwatorzy poruszający się względem siebie mierzą pewien odstęp czasu między dwoma zdarzeniami, to otrzymują na ogół różne wyniki. Jest tak dlatego, że odstęp czasu między zdarzeniami zależy od tego, w jakiej odległości od siebie one nastąpiły zarówno w przestrzeni, jak i w czasie. Oznacza to, że przestrzenne i czasowe odległości zdarzeń są ze sobą powiązane.

Rozważmy proste doświadczenie (zob. rys. 35.1). Obserwator 1 jedzie w pociągu poruszającym się ze stałą prędkością v. Ze źródła B wychodzi impuls światła (zdarzenie 1), porusza się pionowo w górę, odbija się pionowo w dół od zwierciadła i jest rejestrowany w miejscu, w którym znajduje się źródło (zdarzenie 2). Obserwator 1 mierzy odstęp czasu Δt_0 między obydwoma zdarzeniami, który jest związany z odległością D dzielącą źródło światła od zwierciadła zależnością

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}. \tag{35.1}$$



Rys. 35.1. Dwóch obserwatorów mierzy odstęp czasu między dwoma zdarzeniami

W układzie odniesienia obserwatora 1 obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu, więc do pomiaru czasu wystarczy jeden zegar. Obserwator 2 znajduje się na peronie stacji, przez którą przejeżdża pociąg. W jego układzie odniesienia obydwa zdarzenia zachodzą w innych miejscach i dlatego potrzebuje on dwóch zsynchronizowanych zegarów. W układzie obserwatora 2 światło porusza się z taką samą prędkością c, ale teraz między zdarzeniami światło musi przebyć drogę $2L$. Odstęp czasu między zdarzeniami, które zmierzy obserwator 2 jest więc równy

$$\Delta t = \frac{2L}{c},$$

gdzie

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + D^2}.$$

Podstawiając wielkość D ze wzoru (35.1) mamy

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2}.$$

Jeśli z ostatnich dwóch równań wyeliminujemy wielkość L, to okaże się, że

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (35.2)$$

Wzór ten pozwala nam porównać odstęp czasu Δt zmierzony przez obserwatora 2 z wynikiem Δt_0 uzyskanym przez obserwatora 1.

Pomiary wykonane przez obserwatorów 1 i 2 można rozróżnić dzięki wprowadzeniu pojęcia *czasu własnego*. Jest to odstęp czasu zmierzony pomiędzy dwoma zdarzeniami, które zaszły w tym samym miejscu w inercjalnym układzie współrzędnych. Mierząc w jakimkolwiek innym inercjalnym układzie odniesienia odstęp czasu dzielący te same zdarzenia, zawsze otrzymamy większą wartość. Różnicę między zmierzonym odstępem czasu i odpowiednim czasem własnym nazywamy *dylatacją czasu*.

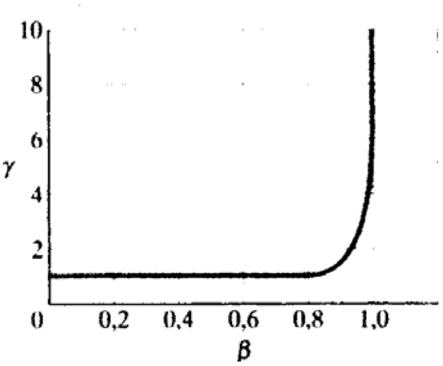
Bezwymiarowy stosunek v/c oznaczamy symbolem β i traktujemy jako prędkość w jednostkach prędkości światła c, a bezwymiarową wielkość

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

nazywamy *czynnikiem Lorentza*. Używają tego czynnika wzór (35.2) na dylatację czasu przyjmuje postać

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 . \tag{35.3}$$

Na rys. 35.2 przedstawiono wykres zależności czynnika Lorentza γ od parametru β. Zwróćmy uwagę, że jeśli parametr β dąży do 1, czyli gdy prędkość zbiża się do prędkości światła c, to czynnik Lorentza dąży do nieskończoności.



Rys. 35.2. Wykres zależności czynnika Lorentza γ od parametru β

Przykład 35.1

Statek kosmiczny mija Ziemię z prędkością względną 0,999c. Po 10 latach (według czasu na statku) statek zawraca i leci z powrotem w kierunku Ziemi z tą samą prędkością względną. Jak długo trwała ta podróż według pomiarów na Ziemi?

Zmierzony na statku czas podróży jest czasem własnym Δt_0, ponieważ obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w układzie odniesienia statku. Pomiar odstępu czasu Δt w układzie odniesienia związany z Ziemią musi dać wartość większą. Na podstawie wzoru (35.2) (lub (35.3)) mamy

$$\Delta t = \frac{10\text{ a}}{\sqrt{1-(0{,}999c/c)^2}} = 22{,}37 \cdot 10\text{ a} = 224\text{ a}.$$

W podróży powrotnej dane liczbowe są takie same, a więc według czasu mierzonego na Ziemi podróż będzie trwała $\Delta t_{całk} = 2 \cdot 10$ a = 448 a. ■

35.2. Względność długości

Długość L_0 pewnego ciała zmierzona przez obserwatora w inercjalnym układzie odniesienia, w którym ciało to spoczywa, jest nazywana *długością własną* lub *długością spoczynkową*. Obserwatorzy w układach odniesienia poruszających się względem tego układu w kierunku równoległym do mierzonej długości zmierzą mniejszą długość ciała.

Jeżeli obydwa układy odniesienia poruszają się względem siebie z prędkością v, to długość skróconą L i długość spoczynkową L_0 wiąże zależność

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma},$$

gdzie parametr $\beta = v / c$ wyraża prędkość względną w jednostkach prędkości światła c, a γ oznacza czynnik Lorenza.

Skrócenie długości czasu jest bezpośrednią konsekwencją dylatacji czasu, z której wynika podany wzór. Rozważmy doświadczenie, w którym obserwator jedzie pociągiem z prędkością v, a obserwator 2 stoi na peronie i obaj postanawiają zmierzyć długość peronu. Obserwator 2, korzystając z taśmy mierniczej, stwierdza, że długość peronu wynosi L_0. Jednocześnie stwierdza, że obserwator 1, który jedzie pociągiem, mija peron w czasie $\Delta t = L_0 / v$, skąd

$$L_0 = v\Delta t. \tag{35.4}$$

Odstęp czasu Δt nie jest czasem własnym, ponieważ dwa zdarzenia, które go wyznaczają („obserwator 1 mija początek peronu" i „obserwator 1 mija koniec peronu") nie zachodzą w tym samym miejscu i obserwator 2 musi użyć dwóch zsynchronizowanych zegarów, aby zmierzyć czas Δt.

Z punktu widzenia obserwatora 1 peron porusza się obok niego. Stwierdza on, że dwa zdarzenia, które mierzy obserwator 1, w jego układzie odniesienia zachodzą w tym samym miejscu. Może on je zmierzyć, korzystając tylko z jednego, spoczywającego zegara. Dlatego zmierzony przez niego czas Δt_0 jest czasem własnym. Według obserwator 1 długość peronu L można obliczyć ze wzoru

$$L = v\Delta t_0. \tag{35.5}$$

Dzieląc równanie (35.5) przez (35.4) i korzystając z zależności (35.3) otrzymujemy

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma},$$

czyli

$$L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

Przykład 35.2

Wyobraźmy sobie, że podróżujemy statkiem kosmicznym, w którego pobliżu wybucha supernowa i musimy uciec przed zbliżającą się z ogromną prędkością falą materii. Niech czynnik Lorenza γ tego statku wyznaczony w układzie inercjalnym związanym z pobliskimi gwiazdami wynosi 22,4. Aby znaleźć się w bezpiecznym miejscu, należy oddalić się na odległość, która we wspomnianym układzie związanym z pobliskimi gwiazdami wynosi $9 \cdot 10^{16}$ m. Jak długo potrwa ucieczka według pomiaru wykonanego w tym układzie, a jak długo w układzie odniesienia statku?

Jak wiadomo, prędkość w ruchu jednostajnym obliczamy ze wzoru

prędkość = odległość / odstęp czasu.

Ponieważ podana wartość czynnika Lorentza γ (podana w układzie związanym z gwiazdami) jest duża, więc (por. rys. 35.2) prędkość statku względem gwiazd jest na tyle duża, że możemy ją przybliżyć przez c. Odległość jest podana w tym samym układzie odniesienia, a więc na podstawie podanego wzoru mamy

(*odstęp czasu w układzie gwiazd*) = (*odległość w układzie gwiazd*) / c,

czyli

(*odstęp czasu w układzie gwiazd*) = $(9 \cdot 10^{16}$ m) / (299 792 458 m / s) $\approx 3 \cdot 10^8$ s = 9,51 a.

W układzie związanym z gwiazdami podana odległość jest długością spoczynkową L_0, gdyż punkty będące początkiem i końcem ucieczki w tym układzie spoczywają. Z punktu widzenia statku zarówno gwiazdy, jak i obydwa końce trasy przesuwają względem siebie z prędkością $v \approx c$. Pomiar ze statku da więc długość skróconą L_0 / γ, a nie długość spoczynkową L_0. Mamy zatem

(*odstęp czasu w układzie statku*) = (*odległość w układzie statku*) / c = $(L_0 / \gamma) / c$,

czyli

(*odstęp czasu w układzie statku*) = $((9 \cdot 10^{16}$ m) / 22,4) / (299 792 458 m / s) $\approx 1{,}34 \cdot 10^8$ s = 0,425 a.

Różnica wynika ze względnego ruchu i spowodowanego tym skrócenia odległości. ■

35.3. Transformacja Lorentza

Przed ogłoszeniem przez Einsteina jego szczególnej teorii względności przyjmowano, że trzy współrzędne przestrzenne x, y i z oraz czas t w dwóch inercjalnych układach odniesienia S i S', w których układ S' porusza się z prędkością v względem osi x układu S, są powiązane ze sobą wzorami transformacyjnymi Galileusza:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{35.6}$$

Ostatnia równość oznacza, że w obydwu układach odniesienia czas płynie w tym samym tempie.

Wzory transformacji (35.6) dają poprawne wyniki, jeżeli prędkość v jest dużo mniejsza od prędkości światа c. W rzeczywistości nie sne prawdziwe dla żadnej prędkości, a ich błędność staje się oczywista, kiedy prędkość v przekracza wartość $0{,}1c$. Wzory, które są prawdziwe dla wszystkich dozwolonych fizycznie prędkości nazywamy *transformacjami Lorentza*. Są one następujące:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx / c^2). \end{aligned} \tag{35.7}$$

Wzory te można wyprowadzić wychodząc z postulatów teorii względności, ale dalej ograniczymy się tylko do ich zbadania i uzasadnimy ich prawdziwość, wykazując, że są zgodne z dotychczasowymi wnioskami na temat równoczesności, dylatacji czasu i skrócenia długości. Warto podkreślić, że współrzędna przestrzenna x i współrzędna czasowa t są związane ze sobą zarówno w pierwszym, jak i w ostatnim równaniu.

Wzory (35.7) są zapisane w postaci, która umożliwia wyznaczenie wartości x' i t', gdy są znane wielkości x i t. Dla przekształceń w odwrotną stronę wystarczy rozwiać ten układ względem x i t, co doprowadzi do wzorów

$$x = \gamma(x' + vt'),$$

$$t = \gamma(t' + vx' / c^2).$$

Zauważmy, że teraz przy prędkości v występuje znak plus. Wynika to z prostego faktu, że jeśli (na przykład) prędkość układu S' jest dodatnia względem obserwatora w układzie S, to prędkość układu S jest ujemna względem obserwatora w układzie S'.

Wzory (35.7) wiążą współrzędne drugiego zdarzenia, jeśli pierwszym zdarzeniem jest minięcie początków układów S i S' dla $t = t' = 0$. W przypadku dowolnej pary zdarzeń 1 i 2, które dzieli odległość przestrzenna Δx i odstęp czasu Δt, gdzie

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{i} \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

zmierzone przez obserwatora w układzie S oraz

$$\Delta x' = x_2' - x_1' \quad \text{i} \quad \Delta t' = t_2' - t_1',$$

zmierzone przez obserwatora w układzie S', transformacje Lorentza mają postać

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'),$$

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2),$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t),$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2),$$

gdzie v oznacza prędkość poruszania się układu S' względem układu S.

Z równania

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \tag{35.8}$$

wynika, że jeżeli nawet jeśli dwa zdarzenia są równoczesne w układzie S', czyli gdy $\Delta t' = 0$, ale zachodzą w tym układzie w różnych miejscach, czyli gdy $\Delta x' \neq 0$, to w układzie S nie będą one równoczesne. Mamy bowiem

$$\Delta t = \gamma \frac{v\Delta x'}{c^2}$$

i (jak widać) różna od zera odległość przestrzenna $\Delta x'$ sprawia, że odstęp czasu Δt też będzie różny od zera.

Jeżeli dwa zdarzenia w układzie S' zachodzą w tym samym miejscu $(\Delta x' = 0)$, ale w różnym czasie $(\Delta t' \neq 0)$, to równanie (35.8) redukuje się do postaci

$$\Delta t = \gamma \Delta t',$$

co potwierdza dylatację czasu pomiędzy układami S i S'. Ponieważ oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w układzie S', to odstęp czasu między nimi można zmierzyć za pomocą jednego zegara znajdującego się w miejscu zdarzenia. Zmierzony odstęp czasu jest więc czasem własnym i można go oznaczyć przez Δt_0, co prowadzi do wzoru (35.3).

Rozważmy teraz równanie

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t).$$

Załóżmy, że pewien przedmiot jest równoległy do osi x i x'. Jeżeli jest on nieruchomy w układzie S', to obserwator w tym układzie może zmierzyć jego długość bez pośpiechu, na przykład przez obliczenie różnicy współrzędnych końców. Uzyskana wartość $\Delta x'$ jest długością spoczynkową L_0 tego przedmiotu, bo pomiar wykonano w układzie, w którym przedmiot spoczywa.

Jeżeli przedmiot porusza się w układzie S, to różnicę współrzędnych jego końców Δx będzie można uznać za długość L w układzie S tylko wtedy, gdy odpowiednie współrzędne będą zmierzone równocześnie, czyli gdy $\Delta t = 0$. Jeżeli do podanego równania podstawimy $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ i $\Delta t = 0$, to otrzymamy

$$L = \frac{L_0}{\gamma},$$

czyli dokładnie wzór na skrócenie długości poznany w poprzednim punkcie.

35.4. Względność prędkości

Załóżmy, że cząstka poruszająca się równolegle do osi x i x' wysyła dwa sygnały. Obserwatorzy, znajdujący się w dwóch inercjalnych układach odniesienia, mierzą odległość przestrzenną i odstęp czasu między tymi zdarzeniami. Wyniki ich pomiarów są związane z równaniami

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

i

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right).$$

Dzieląc pierwsze równanie przez drugie, otrzymamy

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x' / c^2}.$$

Jeżeli licznik i mianownik po prawej stronie tego równania podzielimy przez $\Delta t'$, to mamy

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' / \Delta t' + v}{1 + v(\Delta x' / \Delta t') / c^2}.$$

W granicy wyrażenie $\Delta x / \Delta t$ jest prędkością u cząstki w układzie odniesienia S, a wyrażenie $\Delta x' / \Delta t'$ jest prędkością u' tej samej cząstki w układzie odniesienia S'. Otrzymane równanie możemy więc zapisać w postaci

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v / c^2}. \tag{35.9}$$

Jest to relatywistyczna transformacja prędkości.

Gdy prędkość światła c dąży do nieskończoności, ze wzoru (35.9) otrzymujemy

$$u = u' + v.$$

Wzór ten określa transformację nierelatywistyczną (Galileusza). Jest on tylko przybliżeniem wzoru (35.9) dla prędkości dużo mniejszych od prędkości światła c.

35.5. Zjawisko Dopplera dla światła

Jeżeli źródło światła i detektor światła poruszają się względem siebie, to długość fali światła zmierzoną w układzie odniesienia związanym ze źródłem nazywamy długością własną fali λ_0. Zmierzona przez detektor długość fali λ może być dłuższa (przesunięcie ku czerwieni) lub krótsza (przesunięcie ku fioletowi) w zależności od tego, czy odległość źródło-detektor rośnie, czy maleje.

Przy opisywaniu zjawiska Dopplera dla fal dźwiękowych doszliśmy do wniosku, że wynik obserwacji zależy od prędkości źródła i detektora względem powietrza. Fale świetlne nie wymagają istnienia ośrodka materialnego – mogą rozchodzić się nawet w próżni. W przypadku zjawiska Dopplera dla światła mamy tylko jedną prędkość – względną prędkość źródła i detektora, którą mierzymy w jednym ze zwianych z nimi układów odniesienia. Jeżeli źródło i detektor oddalają się od siebie z prędkością $\vec{v}$ skierowaną wzdłuż łączącej je prostej, to związek pomiędzy długością fali λ mierzoną przez detektor i długością własną fali λ_0 jest następujący:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \tag{35.10}$$

gdzie $\beta = v / c$. Gdy prędkość $\vec{v}$ ma zwrot do źródła, trzeba zmienić na przeciwne znaki przed symbolami β, czyli mamy

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Ponieważ częstotliwość ν jest związana z długością fali λ wzorem $\nu = c / \lambda$, więc ze wzoru (35.10) otrzymamy

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \tag{35.11}$$

gdzie ν_0 oznacza częstotliwość własną źródła. W przypadku małych prędkości, czyli gdy $\beta << 1$, prawą stronę równania (35.11) można rozwinąć w szereg potęgowy względem β i ograniczyć się do wyrazów drugiego rzędu. Otrzymamy wtedy następującą zależność (źródło i detektor oddalają się od siebie):

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \right). \tag{35.12}$$

Odpowiednie równanie, które opisuje zjawisko Dopplera dla fal dźwiękowych w przybliżeniu małych prędkości ma pierwsze dwa wyrazy identyczne, ale inne współczynnik przy trzecim wyrazie. Efekty relatywistyczne dla małych prędkości względnych źródła światła i detektora ujawniają się dopiero w wyrazie β^2.

Obserwując obiekty astronomiczne (gwiazdy, galaktyki i inne źródła światła), możemy wyznaczyć prędkości ich oddalania lub zbliżania, mierząc przesunięcie dopplerowskie docierającego do nas światła. Przesunięcie to występuje tylko w wyniku ruchu radialnego obiektu, czyli ruchu wzdłuż prostej łączącej obiekt z obserwatorem.

Załóżmy, że pewna gwiazda oddala się od nas z prędkością radialną v na tyle małą (wartość β jest również mała), że możemy zaniedbać wyraz β^2 we wzorze (35.12). Mamy wówczas

$$\nu = \nu_0 (1-\beta).$$

Odpowiedni wzór dla długości fali (w obserwacjach astronomicznych posługujemy się zwykle długością fali, a nie jej częstotliwością) będzie miał postać

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}(1-\beta),$$

czyli

$$\lambda = \lambda_0 (1-\beta)^{-1}.$$

Ponieważ założyliśmy, że wartość β jest mała, możemy rozwinąć czynnik $(1-\beta)^{-1}$ w szereg potęgowy. Ograniczając się do wyrazów pierwszego rzędu względem β mamy

$$\lambda = \lambda_0 (1+\beta),$$

czyli

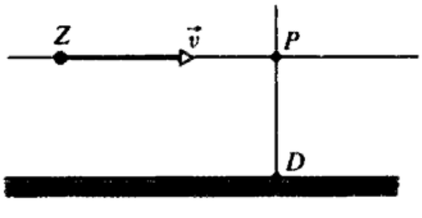
$$\beta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

Zastępując β przez v / c oraz $\lambda - \lambda_0$ przez $|\Delta\lambda|$ możemy napisać

$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} c. \qquad (35.13)$$

Różnicę $\Delta\lambda$ nazywamy *dopplerowskim przesunięciem długości fali* dla źródła światła. Przybliżenie dane wzorem (35.13) można stosować niezależnie od tego, czy źródło światа oddala się, czy zbliża, jeśli tylko $v \ll c$. Biorąc pod uwagę wartość bezwzględną zmiany długości fali, otrzymujemy wartość prędkości.

Dotychczas rozważaliśmy zjawisko Dopplera, gdy źródło i detektor poruszały się wzdłuż łączącej je prostej. Rozważmy teraz sytuację, gdy źródło mija detektor w pewnej odległości od niego (zob. rys. 35.3).



Rys. 35.3. Poprzeczne zjawisko Dopplera

Gdy źródło dociera do punktu P, jego prędkość jest skierowana prostopadle do linii łączącej punkty Z i D. Jeśli źródło wysyła falę dźwiękową o częstotliwości ν_0, detektor rejestruje dokładnie tę częstotliwość, odbierając fale, które były wysłane w punkcie P. Jeżeli jednak źródło emituje fale świetlne, to nadal obserwujemy zjawisko Dopplera, które w tym przypadku nazywa się *poprzecznym zjawiskiem Dopplera*. Obserwowana częstotliwość światła docierającego ze źródła w punkcie P wynosi

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{35.14}$$

Dla małych prędkości ($\beta << 1$) można rozwinąć prawą stronę tego równania w szereg potęgowy względem β i ograniczając się do wyrazów drugiego rzędu otrzymamy

$$\nu = \nu_0\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right).$$

Pierwszy wyraz jest dokładnie taki sam, jaki oczekiwaliśmy dla fal dźwiękowych, a efekty relatywistyczne dla małych prędkości względnych źródła światła i detektora dotyczą wyrazu β^2.

Poprzeczne zjawisko Dopplera jest kolejnym przejawem dylatacji czasu. Jeżeli do wzoru (35.14) wprowadzimy okres drgań $T = 1 / \nu$, to otrzymamy

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma T_0\,,$$

gdzie przez T_0 oznaczyliśmy *okres własny* źródła. Ponieważ okres drgań to nic innego, jak odstęp czasu, powyższe równanie przedstawia znany już wzór na dylatację czasu (zob. wzór (35.3)).

35.6. Pęd i energia

Jak wiemy, w ujęciu nierelatywistycznym pęd cząstki ma wartość

$$p = mv = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,,$$

gdzie Δx oznacza odległość przebytą w czasie Δt. Aby znaleźć relatywistyczne wyrażenie na pęd, zaczniemy od nowej definicji:

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}\,,$$

gdzie Δt_0 oznacza czas, który został wyznaczony przez obserwatora poruszającego się wraz z cząstką. Cząstka spoczywa względem tego obserwatora, co oznacza, że czas, który on mierzy jest czasem własnym.

Korzystając ze wzoru (35.3) na dylatację czasu, możemy to wyrazić w postaci równania

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma\,.$$

Ponieważ iloraz $\Delta x / \Delta t$ to prędkość cząstki v, więc definicja pędu wyraża się wzorem

$$p = \gamma m v\,.$$

Masa m i równoważna jej energia E_0 są powiązane ze sobą zależnością

$$E_0 = mc^2\,.$$

W tym znanym równaniu indeks 0 został dodany celowo, aby zwrócić uwagę, że energia związana z masą ciała jest *energią spoczynkową*. Innymi słowy: ciało ma energię E_0 nawet wtedy, gdy spoczywa i jest to wyłącznie konsekwencją faktu, że ciało ma masę.

Kiedy ciało jest w ruchu, to oprócz energii spoczynkowej ma dodatkową energię w postaci energii kinetycznej E_k. Jeżeli założymy, że jego energia potencjalna jest równa zeru, to całkowita energia E jest sumą energii spoczynkowej i energii kinetycznej:

$$E = E_0 + E_k = mc^2 + E_k. \tag{35.15}$$

Całkowita energia E układu jest też dana równaniem (co podajemy bez dowodu)

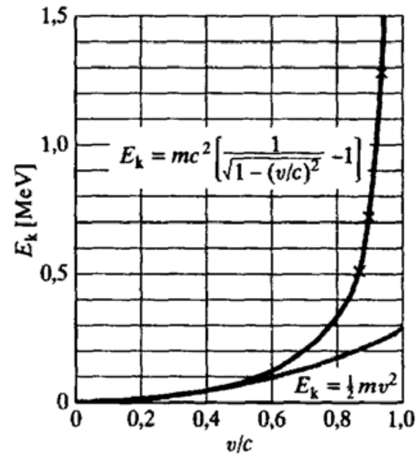
$$E = \gamma mc^2, \tag{35.16}$$

gdzie γ oznacza czynnik Lorentza. Obowiązuje przy tym zasada zachowania energii całkowitej: całkowita energia E układu izolowanego nie ulega zmianie.

Rozwiązując równanie (35.15) względem E_k, a następnie podstawiając do niego wartość E z równania (35.16), otrzymamy

$$E_k = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \tag{35.17}$$

Na rys. 35.4 przedstawiono wykres zależności energii kinetycznej elektronu od stosunku v / c na podstawie powyższego wzoru i wykres w przybliżeniu nierelatywistycznym. Widać, że jeżeli stosunek v / c dąży do jedności, to energia kinetyczna dąży do nieskończoności.



Rys. 35.4. Energia kinetyczna w ujęciu relatywistycznym i nierelatywistycznym

W fizyce nierelatywistycznej pęd cząstki p jest równy mv, a energia kinetyczna E_k jest równa $mv^2 / 2$. Jeżeli z obu tych równań wyeliminujemy prędkość v, to otrzymamy związek między pędem i energią kinetyczną postaci

$$p^2 = 2E_k m.$$

Podobną zależność można otrzymać w mechanice relatywistycznej, eliminując prędkość v ze wzoru na pęd ($p = \gamma mv$) i ze wzoru (35.17) na energię kinetyczną. Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2.$$

Korzystając ze wzoru (35.15), możemy powyższe równanie przekształcić tak, by wyrażało zależność między pędem p i całkowitą energią E cząstki:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

Zadania

1. Zmierzony średni czas życia spoczywających mionów (nietrwałych cząstek elementarnych posiadających ładunek elektryczny) wynosi 2,2000 μs. Zmierzono też, że średni czas życia prędkich mionów w obserwowanej na Ziemi wiązce promieniowania kosmicznego wynosi 16,000 μs. Obliczyć, jaką prędkość względem Ziemi mają miony w wiązce promieniowania kosmicznego.
2. Rakieta o długości 130 m mija stację pomiaru czasu z prędkością 0,74c, gdzie c oznacza prędkość światła.
   a) Jaką długość rakiety zmierzy obserwator znajdujący się na stacji?
   b) Jaki odstęp czasu między minięciem stacji przez początek i koniec rakiety zmierzy zegar umieszczony na stacji?
3. Pręt równoległy do osi x układu odniesienia S porusza się wzdłuż tej osi z prędkością 0,63c. Długość spoczynkowa pręta wynosi 1,7 m. Jaką długość pręta zmierzy obserwator w układzie odniesienia S?
4. Początki dwóch układów odniesienia pokrywają się w chwili $t = t' = 0$. Układy poruszają się względem siebie z prędkością 0,95c. Dwa mikrometeoroidy zderzają się w punkcie, który według obserwatora S ma współrzędne $x = 100$ km i $t = 200$ μs. Jaką współrzędną
   a) przestrzenną,
   b) czasową
   zderzenia podał obserwator S'?
5. Eksperymentator wyzwala jednocześnie dwie lampy błyskowe, czego skutkiem jest silny błysk w początku jego układu odniesienia oraz słaby błysk w odległości $x = 30$ km. Obserwator poruszający się z prędkością 0,25c w dodatnim kierunku osi x widzi obydwa błyski.
   a) Jaki odstęp czasu między błyskami zmierzy obserwator?
   b) Który błysk według obserwatora nastąpił wcześniej?
6. Cząstka porusza się wzdłuż osi x' układu S' z prędkością 0,4c. Układ S' porusza się z prędkością 0,6c względem układu S. Jaką prędkość cząstki zmierzy obserwator w układzie S?
7. Galaktyka A oddala się od nas z prędkością 0,35c. Galaktyka B, która znajduje się dokładnie w przeciwnym kierunku oddala się od nas z tą samą prędkością. Jaką prędkość oddalania się, w jednostkach c, zmierzy obserwator znajdujący się w galaktyce A
   a) dla naszej Galaktyki,
   b) dla galaktyki B?

8. Statek kosmiczny oddalający się od Ziemi z prędkością $0{,}9c$ nadaje komunikaty na częstotliwości 100 Mhz (w układzie odniesienia statku). Na jaką częstotliwość należy nastroić odbiornik na Ziemi, aby odbierać te komunikaty?
9. Jaką pracę należy wykonać, aby elektron, który w chwili początkowej spoczywa, uzyskał prędkość:
   a) $0{,}5c$,
   b) $0{,}99c$,
   c) $0{,}999c$?
10. Jaką pracę należy wykonać, aby zwiększyć prędkość elektronu
    a) z $0{,}18c$ do $0{,}19c$,
    b) z $0{,}98c$ do $0{,}99c$?
    Zwrócić uwagę, że w obydwu przypadkach prędkość elektronu rośnie o $0{,}01c$.

Wykłady opracowano na podstawie podręcznika
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 1 – 4 (wydanie drugie), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2015.