Andrzej Marciniak

FIZYKA

Wykłady dla studentów kierunku *informatyka*
Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Kaliszu

I. POMIAR

1.1. Wprowadzenie

Fizyka opiera się na pomiarach wielkości fizycznych. Niektóre z tych wielkości obrano za wielkości podstawowe, które definiujemy wykorzystując ich wzorce. Inne wielkości fizyczne definiujemy za pomocą wielkości podstawowych oraz ich wzorców i jednostek.

Jednostka to nazwa miary danej wielkości – na przykład jednostką długości jest metr (oznaczenie: m). Jednostkę i jej wzorzec można wybrać dowolnie, ale robi się to tak, by wszyscy naukowcy zgadzali się, że jest to wybór rozsądny i użyteczny.

Wielkości fizycznych jest tak wiele, że musimy je jakoś uporządkować. Okazuje się, że nie wszystkie są niezależne od siebie – na przykład prędkość to stosunek drogi do czasu. Można wybrać – na mocy umowy międzynarodowej – niezbyt dużą liczbę wielkości fizycznych i tylko dla nich ustalić wzorce, a wszystkie inne wielkości fizyczne wyrazić przez te wielkości podstawowe i ich wzorce.

1.2 Międzynarodowy Układ Jednostek

W 1971 roku na XIV Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wag dokonano wyboru siedmiu podstawowych wielkości fizycznych, tworząc Międzynarodowy Układ Jednostek (zwany *układem SI* – skr. franc. *Système international d'unités*). Układ ten został przyjęty przez wszystkie kraje świata z wyjątkiem Stanów Zjednoczonych, Liberii i Birmy. Obecnie układ ten zawiera jednostki podane w tabeli 1.1.

Tabela 1.1. Jednostki podstawowe układu SI

Wielkość fizyczna	*Nazwa jednostki*	*Symbol jednostki*
długość	metr	m
masa	kilogram	kg
czas	sekunda	s
natężenie prądu elektrycznego	amper	A
temperatura	kelwin	K
światłość	kandela	cd
liczność materii	mol	mol

Poszczególne jednostki podstawowe są obecnie zdefiniowane następująco:

- *metr* – odległość, jaką pokonuje światło w próżni w czasie 1/299 792 458 s (kiedyś metr definiowano jako część długości mierzonej wzdłuż południka paryskiego od równika do bieguna i na tej podstawie wykonano platynoirydowy wzorzec metra, później jako pewną część południka ziemskiego, a następnie jako pewną długość fali promieniowania w próżni odpowiadającego przejściu między poziomami $2p^{10}$ i $5d^{5}$ atomu kryptonu ^{86}Kr),
- *kilogram* – masa walca o wysokości i średnicy podstawy 39 mm (milimetrów) wykonanego ze stopu platyny (90 %) z irydem (10 %), którego główny wzorzec jest przechowywany w sejfie w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres koło Paryża (dawniej za wzorzec przyjmowano jeden litr wody o temperaturze czterech stopni Celsjusza przy ciśnieniu normalnym),
- *sekunda* – czas równy 9 192 631 770 okresom promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami $F = 3$ i $F = 4$ struktury nadsubtelnej stanu podstawowego $S_{1/2}$ atomu cezu ^{133}Cs w spoczynku w temperaturze 0 K (poprzednio sekundę definiowano jako pewną część roku zwrotnikowego),
- *amper* – niezmieniający się prąd elektryczny, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małych przekrojach kołowych, umieszczonych w próżni w odległości 1 m od siebie, spowodowałby wzajemne oddziaływanie na siebie z siłą równą $2{\cdot}10^{-7}$ N (Newtona) na każdy metr długości przewodu,
- *kelwin* – 1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody (stanu, w którym woda może istnieć jako ciało stałe, gaz i ciecz), przy czym woda powinna mieć odpowiedni skład izotopowy, tj. 0,00015576 mola ^{2}H na jeden mol ^{1}H, 0,0003799 mola ^{17}O na jeden mol ^{16}O i 0,0020052 mola ^{18}O na jeden mol ^{16}O (temperatura 0 K jest równa temperaturze −273,15°C),
- *kandela* – światłość, z jaką świeci w określonym kierunku źródło emitujące promieniowanie monochromatyczne o częstotliwości $5{,}4{\cdot}10^{14}$ Hz (herca) i wydajności energetycznej w tym kierunku równej 1/683 W/sr (wata na steradian, gdzie steradian oznacza niemianowaną jednostkę pochodną układu SI określającą miarę kąta bryłowego, przy czym 1 sr = $(180°/\pi)^2$); starsza definicja określała kandelę jako światłość 1/600 000 m^2 powierzchni ciała doskonale czarnego w temperaturze krzepnięcia platyny pod ciśnieniem 1 atmosfery fizycznej,
- *mol* – liczność materii układu, zawierającego liczbę cząstek (np. atomów, cząsteczek, jonów, elektronów) równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma izotopu węgla ^{12}C; w jednym molu znajduje się $6{,}022140857(74){\cdot}10^{23}$ cząstek (jest to tzw. liczba Avogadra).

Do zapisu jednostek bardzo dużych i bardzo małych stosujemy zapis w postaci iloczynu liczby z przedziału od 0 do 10 i odpowiedniej potęgi liczby 10, np.

$$1\,230\,000\,000 \text{ m} = 1{,}23{\cdot}10^{9} \text{ m} \quad \text{oraz} \quad 0{,}000\,000\,789 \text{ s} = 7{,}89{\cdot}10^{-7} \text{ s}.$$

W zapisie komputerowym wykładnik potęgi oznacza się zwykle literą E, a do oddzielenia części całkowitej od ułamkowej stosuje się kropkę. Dla powyższych przykładów zapisy byłyby następujące: 1.23E9 oraz 7.89E−7.

Innym sposobem zapisu wielkości bardzo dużych i bardzo małych jest zastosowanie przedrostków podanych w tabeli 1.2, np.

$$1{,}23{\cdot}10^{6} \text{ W} = 1{,}23 \text{ MW} \quad \text{i} \quad 7{,}89{\cdot}10^{-6} \text{ s} = 7{,}89\ \mu\text{s}.$$

Tabela 1.2. Nazwy przedrostków jednostek SI

Czynnik	*Przedrostek*	*Symbol*
10^{24}	jotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	eksa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hekto	h
10^{1}	deka	da
10^{-1}	decy	d
10^{-2}	centy	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	jokto	y

1.3. Zamiana jednostek

Często musimy dokonać zamiany jednostek, w których jest wyrażona jakaś wielkość fizyczna. W tym celu mnożymy wynik pomiaru przez tzw. współczynnik przeliczeniowy, czyli równy jedności stosunek wielkości wyrażonej w różnych jednostkach. Na przykład 1 minuta i 60 sekund to takie same odstępy czasu, a więc otrzymujemy

$$\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 1 \ \text{ oraz } \ \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 1,$$

przy czym w powyższych zapisach nie można opuścić jednostek (liczba jednostek musi zawsze występować z jednostką). Wybrane współczynniki przeliczeniowe podano w tabeli 1.3.

Zadania

1. Ziemia jest w przybliżeniu kulą o promieniu $6{,}37\cdot10^{6}$ m. Ile wynosi:
   a) obwód Ziemi w kilometrach,
   b) pole powierzchni Ziemi w kilometrach kwadratowych,
   c) objętość Ziemi wyrażona w kilometrach sześciennych?

Tabela 1.3. Wybrane współczynniki zamiany jednostek

Wielkość fizyczna	*Współczynniki przeliczeniowe*
Masa i gęstość	1 kg = 1000 g = $6{,}02\cdot10^{26}$ u 1 u = $1{,}66\cdot10^{-27}$ kg 1 kg/m^3 = 10^{-3} g/cm^3
Długość i objętość	1 m = 100 cm = 39,4 in = 3,28 ft 1 mila = 1,61 km = 5280 ft 1 in = 2,54 cm 1 nm = 10^{-9} m = 10 Å 1 pm = 10^{-12} m = 1000 fm 1 rok świetlny (y) = $9{,}46\cdot10^{15}$ m 1 m^3 = 1000 l = 35,3 ft^3 = 264 galony amerykańskie
Czas	1 d = 24 h = 86 400 s 1 rok (a) = 365,25 d = $3{,}16\cdot10^{7}$ s
Miara łukowa kąta	1 rad = 57,3° = 0,159 obrotu π rad = 180° = 0,5 obrotu
Prędkość	1 m/s = 3,28 ft/s = 2,24 mili/h 1 km/h = 0,621 mili/h = 0,278 m/s
Siła i ciśnienie	1 N = 105 dyn 1 Pa = 1 N/m^2 = 10 dyn/cm^2 1 atm = $1{,}01\cdot10^{5}$ Pa = 76 cm Hg
Energia i moc	1 J = 10^{7} ergów = 0,239 cal 1 KWh = $3{,}6\cdot10^{6}$ J 1 cal = 4,19 J 1 eV = $1{,}60\cdot10^{-19}$ J 1 KM = 746 W
Temperatura	0 K = −273,15 °C = −459,67 °F n °C = $(9/5)n + 32$ °F n °F = $5(n - 32)/9$ °C
Magnetyzm	1 T = 1 Wb/m^2 = 104 Gs

2. a) Z ilu mikrometrów składa się 1 kilometr?
   b) Jaką częścią centymetra jest 1μm?
   c) Ile mikrometrów zawiera 1 jard (1 jard = 3 ft)?
3. Antarktyda ma kształt zbliżony do półkola o promieniu 2000 km. Średnia grubość jej pokrywy lodowej wynosi 3000 m. Ile centymetrów sześciennych lodu zawiera Antarktyda?
4. Przez mniej więcej 10 lat po rewolucji francuskiej rząd Francji starał się wprowadzić podstawowe jednostki czasu oparte na systemie dziesiętnym: tydzień miał zawierać 10 dni, doba – 10 godzin, godzina – 100 minut, a jedna minuta 100 sekund. Ile wynosi stosunek długości:
   a) francuskiego tygodnia dziesiętnego do normalnego tygodnia?
   b) francuskiej sekundy dziesiętnej do normalnej sekundy?
5. Masa Ziemi wynosi $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. Średnia masa atomów, z których składa się Ziemia jest równa 40 u. Z ilu atomów składa się Ziemia?
6. Gęstość żelaza wynosi 7,87 g/cm^3, a masa atomu żelaza jest równa $9{,}27\cdot10^{-26}$ kg. Oblicz:
   a) objętość atomu żelaza,

b) odległość środków sąsiednich atomów zakładając, że atomy są kuliste i stykają się ze swoimi sąsiadami.

7. Najszybciej rosnącą znaną rośliną jest *Hesperoyucca whiplei*, przyrastająca o 3,7 m w ciągu 14 dni. Wyraź tę szybkość w mikrometrach na sekundę.

8. Jedna cząsteczka wody (H_2O) składa się z dwóch atomów wodoru i jednego atomu tlenu. Masa atomu wodoru wynosi w przybliżeniu 1 u, a atomu tlenu – 16 u.
   a) Wyraź masę cząsteczki wody w kilogramach.
   b) Ile cząsteczek wody zawierają wszystkie oceany Ziemi, których całkowita masa wynosi około $1{,}4 \cdot 10^{21}$ kg?

9. W czasie całkowitego zaćmienia Słońca widać Słońce niemal dokładnie zasłonięte przez Księżyc. Załóżmy, że odległość Ziemi od Słońca jest wówczas około 400 razy większa od odległości od Księżyca.
   a) Obliczyć stosunek średnicy Słońca do średnicy Księżyca.
   b) Ile wynosi stosunek objętości Słońca do objętości Księżyca?

10. Hektar, zdefiniowany jako 10^4 m^2, jest jednostką pola często stosowaną do pomiaru powierzchni gruntów. W kopalni odkrywkowej węgla brunatnego, zajmującej obszar o powierzchni 75 hektarów, wydobywa się rocznie warstwę gruntu o grubości 26 m. Oblicz objętość usuwanej w tym czasie ziemi, wyrażając ją w kilometrach sześciennych.

II. RUCH PROSTOLINIOWY

2.1. Prędkość średnia i chwilowa

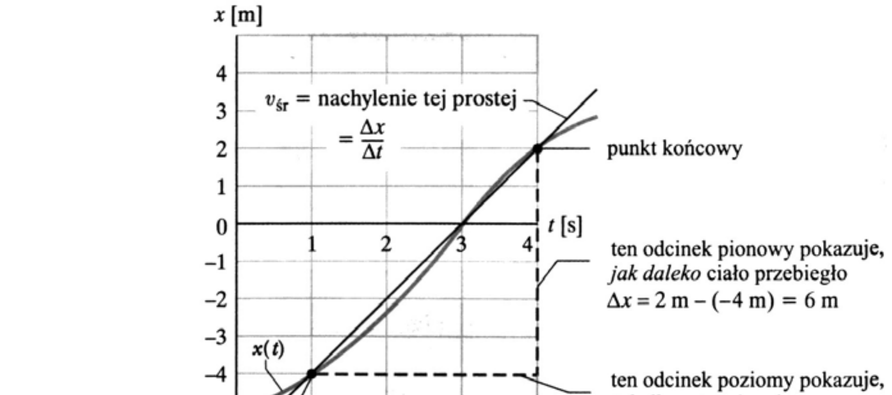
Położenie x cząstki (ciała) na osi x to współrzędna punktu, w jakim się ono znajduje, które jest wyznaczone względem początku osi. Położenie to może być dodatnie, ujemne lub równe zeru. Przemieszczenie Δx cząstki to zmiana jej położenia, czyli

$$\Delta x = x_2 - x_1 ,$$

gdzie x_1 oznacza położenie początkowe, a x_2 – końcowe. Przemieszczenie jest wielkością wektorową i jest dodatnie, gdy cząstka porusza się w kierunku dodatnim osi x, a ujemne, gdy cząstka porusza się w kierunku ujemnym osi x. Gdy cząstka zmienia położenie z punktu x_1 w punkt x_2 w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$, to jej prędkość średnia w tym przedziale czasu wynosi

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \tag{2.1}$$

przy czym znak wielkości v_{sr} jest związany z kierunkiem ruchu. Na wykresie funkcji $x(t)$ prędkość średnia cząstki w przedziale czasu Δt jest nachyleniem (współczynnikiem kierunkowym) prostej łączącej punkty na krzywej odpowiadającej chwili początkowej i końcowej (zob. rys. 2.1).



Rys. 2.1. Wyznaczanie średniej prędkości

Zauważmy, że definicja prędkości średniej nie zawiera drogi przebytej przez cząstkę. Uwzględnia się to w tzw. średniej prędkości podróżnej:

$$s_{sr} = \frac{\text{całkowita droga}}{\Delta t}.$$

Wielkość ta nie uwzględnia kierunku ruchu.

Prędkość chwilowa (krótko: prędkość) v poruszającej się cząstki jest dana wzorem

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

gdzie $\Delta x = x_2 - x_1$ i $\Delta t = t_2 - t_1$. Prędkość chwilową można wyznaczyć jako nachylenie krzywej $x(t)$ dla tej chwili – jest ona równa nachyleniu prostej stycznej do wykresu położenia cząstki w punkcie odpowiadającym tej chwili (zob. rys. 2.2). Prędkość jest wielkością wektorową, czyli ma kierunek.

2.2. Przyspieszenie i ruch ze stałym przyspieszeniem

Przyspieszenie średnie jest ilorazem zmiany prędkości ciała Δv i przedziału czasu Δt, w jakim ta zmiana zachodzi, czyli

$$a_{sr} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \qquad (2.2)$$

przy czym znak tej wielkości wskazuje kierunek wektora przyspieszenia.

Przyspieszenie chwilowe (krótko:przyspieszenie) ciała a jest pochodną pierwszego rzędu prędkości $v(t)$ względem czasu i pochodną drugiego rzędu położenia $x(t)$ względem czasu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Na wykresie funkcji $v(t)$ przyspieszenie ciała a w każdej chwili jest nachyleniem krzywej $v(t)$ w chwili t (zob. rys. 2.2).

Duże wartości przyspieszenia podajemy w jednostkach g przyspieszenia ziemskiego, którego wartość w przybliżeniu jest równa 9,8 m/s^2. Dla przykładu, podczas jazdy kolejką w wesołym miasteczku doznajemy przyspieszenia do $3g$.

Gdy przyspieszenie jest stałe, to oznaczając prędkość w chwili $t = 0$ przez v_0, a w pewnej chwili t przez v, możemy równanie (2.2) napisać w postaci

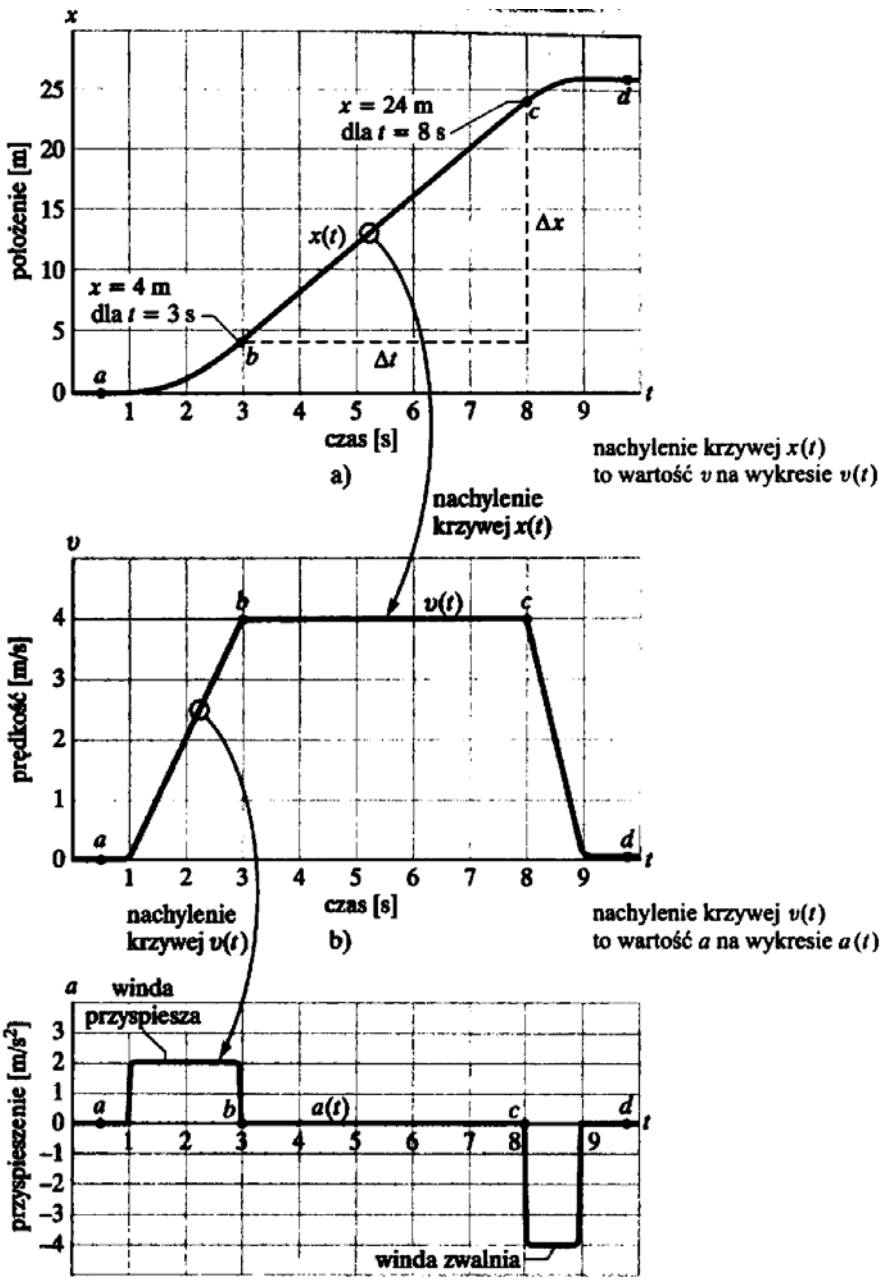
$$a = a_{sr} = \frac{v - v_0}{t - 0},$$

skąd

$$v = v_0 + at. \qquad (2.3)$$

W podobny sposób z równania (2.1) otrzymujemy

$$v_{sr} = \frac{x - x_0}{t - 0},$$



Rys. 2.2. Wykres $x(t)$, prędkości $v(t)$ i przyspieszenia $a(t)$ dla windy wznoszącej się wzdłuż osi x

czyli

$$x = x_0 + v_{sr} t. \tag{2.4}$$

Gdy prędkość zmienia się liniowo w czasie, to prędkość średnia jest równa średniej arytmetycznej na początku i na końcu, tj.

$$v_{sr} = \frac{1}{2}(v_0 + v).$$

Jeśli podstawimy do tego równania prędkość v daną wzorem (2.3), to otrzymamy

$$v_{sr} = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

Wstawiając to do równania (2.4) mamy

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{2.5}$$

Równania (2.3) i (2.5) są podstawowymi równaniami ruchu ze stałym przyspieszeniem.

W równaniu (2.3) nie występuje przemieszczenie $x - x_0$, a w równaniu (2.5) – prędkość v. Jeśli z równania (2.3) wyznaczymy czas t, tj.

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

i podstawimy tę wielkość do równania (2.5), to otrzymamy

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2a}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2,$$

skąd

$$2a(x - x_0) = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 = v^2 - v_0^2,$$

czyli

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{2.6}$$

Jeśli z równania (2.3) wyznaczymy przyspieszenie, czyli

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

i podstawimy do równania (2.5), to otrzymamy

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{t}t^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(v - v_0)t,$$

czyli

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t. \tag{2.7}$$

Gdy z równania (2.3) wyznaczymy v_0, tj.

$$v_0 = v - at,$$

to po podstawieniu do równania (2.5) otrzymamy

$$x = x_0 + (v - at)t + \frac{1}{2}at^2,$$

czyli

$$x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2. \tag{2.8}$$

2.3. Spadek swobodny

Ważnym przykładem ruchu po linii prostej ze stałym przyspieszeniem jest ruch ciała wznoszącego się lub spadającego swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi. Ruch taki jest opisany równaniami ruchu ze stałym przyspieszeniem. Stosujemy umowę, że ruch odbywa się wzdłuż osi pionowej skierowanej do góry i przyspieszenie a oznaczamy przez g, które oznacza wartość bezwzględną swobodnego spadku. W pobliżu Ziemi mamy $g = 9{,}8$ m/s^2.

Przykład

Rzucamy małą piłkę pionowo do góry z początkową prędkością 12 m/s. Jak długo piłka będzie wznosić się do osiągnięcia największej wysokości?

Podczas ruchu piłka porusza się z przyspieszeniem $a = -g$. Wiadomo, że w punkcie najwyższego wzniesienia piłki jej prędkość v musi być równa 0. Znamy zatem prędkość v, przyspieszenie a i prędkość początkową $v_0 = 12$ m/s. Z równania (2.3) mamy

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12}{-9{,}8}\frac{\text{m/s}}{\text{m/s}^2} = 1{,}2 \text{ s}.$$

Ile wynosi największa wysokość, na jaką wzniesie się piłka?

Przyjmijmy, że punkt wyrzucenia piłki ma wartość $x_0 = 0$. Z równania (2.6) otrzymujemy

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = 0\text{ m} + \frac{0 - 12^2\ (\text{m/s})^2}{2(-9{,}8)\ \text{m/s}^2} = 7{,}3\text{ m}.$$

Jak długo piłka będzie wznosić się do punktu leżącego 5 m nad punktem jej wyrzucenia?

Ponieważ znamy v_0, $a = -g$, x oraz x_0, więc możemy skorzystać z równania (2.3). Mamy

$$5\text{ m} = 0\text{ m} + (12\text{ m/s})\,t - \frac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)\,t^2.$$

Pomijając jednostki, które są zgodne, równanie to możemy zapisać następująco:

$$4{,}9t^2 - 12t + 5 = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe, które rozwiązujemy w znany sposób:

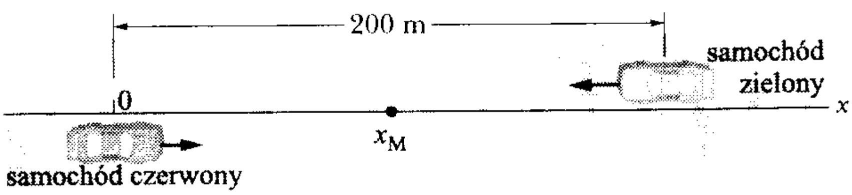
$$\Delta = 12^2 - 4\cdot 4{,}9\cdot 5 = 46, \quad \sqrt{\Delta} \approx 6{,}78,$$

$$t_1 = \frac{12 - 6{,}78}{2\cdot 4{,}9} \approx 0{,}53\text{ s}, \quad t_2 = \frac{12 + 6{,}78}{2\cdot 4{,}9} \approx 1{,}92\text{ s}.$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania, co nie powinno nas dziwić, bo przecież piłka dwukrotnie przechodzi przez podany punkt – raz wznosząc się, a drugi raz spadając. ■

Zadania

1. Samochód jedzie z prędkością 90 km/h. Jaką drogę przebył samochód, gdy kierowca zamknął oczy na 0,5 s?
2. Samochód jadący po prostej drodze przebył 40 km z prędkością 30 km/h, a następne 40 km, w tym samym kierunku, przebył z prędkością 60 km/h.
   a) Ile wynosi średnia prędkość samochodu w czasie 80-kilometrowej podróży (przyjmujemy, że samochód porusza się w dodatnim kierunku osi x)?
   b) Ile wynosi średnia wartość bezwzględna prędkości pojazdu?
3. Dwa pociągi jadą naprzeciwko siebie po prostym torze z prędkością 30 km/h każdy. Ptak rozwijający w locie prędkość 60 km/h wylatuje z lokomotywy jednego z pociągów, gdy są one odległe od siebie o 60 km i leci w stronę drugiego pociągu. Doleciawszy do niego ptak zawraca i leci z powrotem do pierwszego pociągu itd. Jaką całkowitą drogę przeleci ptak aż do zderzenia się pociągów ze sobą?
4. Dwaj zawodnicy uzyskali w biegu na 1 km czasy: 2 min 27,95 s (zawodnik nr 1 na torze nr 1) i 2 min 28,15 s (zawodnik nr 2 na torze nr 2). Okazało się jednak, że długość L_2 toru nr 2 mogła być nieco większa niż długość L_1 toru nr 1. Jak duża może być różnica $L_2 - L_1$, aby wciąż można było stwierdzić, że zawodnik nr 1 biegł szybciej?
5. W scenariuszu filmu przewidziana jest scena, w której dwa samochody, czerwony i zielony, jadą w przeciwnych kierunkach autostradą (zob. rys. 2.3), a w chwili mijania się pojazdów kierowca czerwonego samochodu ma rzucić drugiemu kierowcy pakunek z przemycanym towarem. Aby nakręcić z bliska moment przekazania pakunku, trzeba ustawić jedną z kamer w pobliżu miejsca, w którym pojazdy miną się. W chwili, gdy pada okrzyk „Akcja!” samochody są odległe od siebie o 200 m, czerwony rusza z miejsca ze stałym przyspieszeniem 6,12 m/s^2, a zielony już jedzie ze stałą prędkością 60 km/h, której nie zmienia. W jakiej odległości od początkowego położenia czerwonego samochodu nastąpi przekazanie ładunku?



Rys. 2.3. Początkowe położenia samochodów zbliżających się do siebie

6. Położenie cząstki opisano wzorem $x = 4 - 12t + 3t^2$, gdzie czas t jest podany w sekundach, a położenie x w metrach.
   a) Ile wynosi prędkość cząstki w chwili $t = 1$ s?
   b) Czy w tej chwili porusza się ona w dodatnim, czy ujemnym kierunku osi x?
   c) Ile wynosi wartość bezwzględna jej prędkości w tej chwili?
   d) Czy w następnych chwilach wartość bezwzględna jej prędkości jest większa, czy mniejsza?

e) Czy w jakiejkolwiek chwili prędkość cząstki jest równa zeru? Jeśli tak, to ile wynosi wtedy wielkość t?
f) Czy istnieje chwila późniejsza niż $t = 3$ s, w której cząstka poruszałaby się w ujemnym kierunku osi x? Jeśli tak, to ile wynosi wtedy wielkość t?

7. Cząstka ma w pewnej chwili prędkość o wartości bezwzględnej 18 m/s skierowaną w dodatnim kierunku osi x. W chwili późniejszej o 2,4 s wartość bezwzględna jej prędkości wynosi 30 m/s, lecz cząstka porusza się wówczas w kierunku przeciwnym. Jaka jest wartość bezwzględna i kierunek średniego przyspieszenia cząstki w ciągu tych 2,4 s?

8. Pojazd elektryczny znajduje się początkowo w spoczynku, a potem zaczyna się poruszać ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej z przyspieszeniem równym 2 m/s^2. Po osiągnięciu prędkości 20 m/s pojazd zaczyna zwalniać ze stałym przyspieszeniem 1 m/s^2 i w końcu zatrzymuje się.
a) Jak długo pojazd znajdował się w ruchu?
b) Jaką przebył drogę w tym czasie?

9. Wysokość szybu pewnej windy wynosi 190 m. Maksymalna prędkość kabiny jest równa 305 m/min. Przyspieszenie windy w obydwu kierunkach jazdy ma wartość 1,22 m/s^2.
a) Na jakiej drodze ruszająca z miejca winda osiąga maksymalną prędkość jazdy?
b) Jak długo trwa pełny, 190-metrowy przejazd windy bez zatrzymania po drodze, licząc od chwili zatrzymania na dole do chwili zatrzymania na górze?

10. a) Z jaką prędkością trzeba rzucić piłkę z ziemi pionowo w górę, aby jej maksymalne wzniesienie wyniosło 50 m?
b) Jak długo będzie ona w powietrzu?

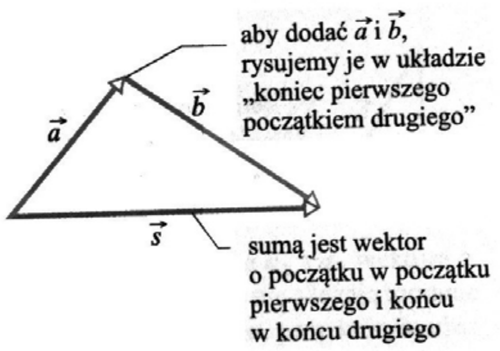
11. Na budowie spadający klucz hydrauliczny uderzył w ziemię z prędkością 24 m/s.
a) Na jakiej wysokości wypadł on komuś z ręki?
b) Jak długo spadał?

12. Balon na ogrzane powietrze wznosi się z prędkością 12 m/s. Gdy znajduje się on na wysokości 80 m, za burtę wypada pewien pakunek.
a) Po jakim czasie pakunek spadnie na ziemię?
b) Z jaką prędkością uderzy on w ziemię?

III. WEKTORY

3.1. Wektory i ich składowe

Skalary mają tylko wartość (przykładem może być temperatura) i spełniają prawa zwykłej algebry. Wektory mają wartość oraz kierunek (przykładem może być przemieszczenie) i spełniają prawa algebry wektorowej. Wektory można dodawać. Aby dodać geometrycznie dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ należy narysować je w tej samej skali i umieścić początek wektora $\vec{b}$ w miejscu, gdzie znajduje się koniec wektora $\vec{a}$. Wektor łączący początek wektora $\vec{a}$ z końcem wektora $\vec{b}$ jest ich sumą (zob. rys. 3.1).



Rys. 3.1. Dodawanie wektorów

Aby odjąć wektor $\vec{b}$ od wektora $\vec{a}$, zmieniamy kierunek wektora $\vec{b}$ na przeciwny, po czym dodajemy wektory $-\vec{b}$ i $\vec{a}$. Dodawanie wektorów jest przemienne i łączne (zob. rys. 3.2 i 3.3), co oznacza, że

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

oraz

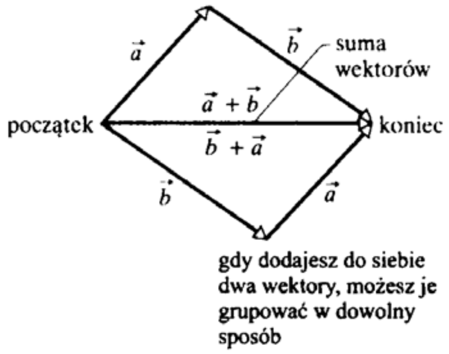
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

W przestrzeni dwuwymiarowej składowe a_x i a_y wektora $\vec{a}$ w układzie współrzędnych Oxy wyznaczamy przez rzutowanie wektora na osie tego układu. Składowe są więc określone przez następujące wzory (zob. rys. 3.4):

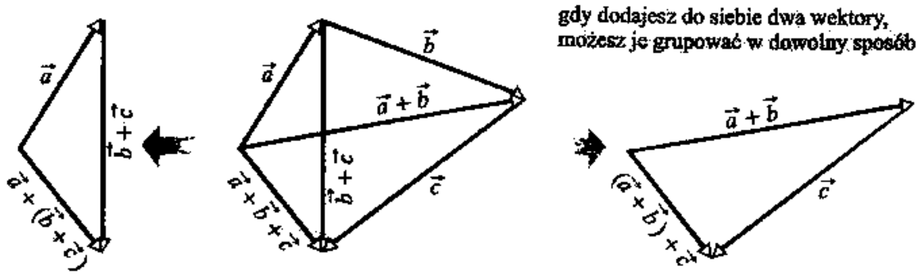
$$a_x = a\cos\theta, \quad a_y = a\sin\theta,$$

gdzie θ oznacza kąt między dodatnim kierunkiem osi x i kierunkiem wektora $\vec{a}$. Jeśli znamy składowe wektora, to możemy wyznaczyć jego długość i kierunek ze wzorów

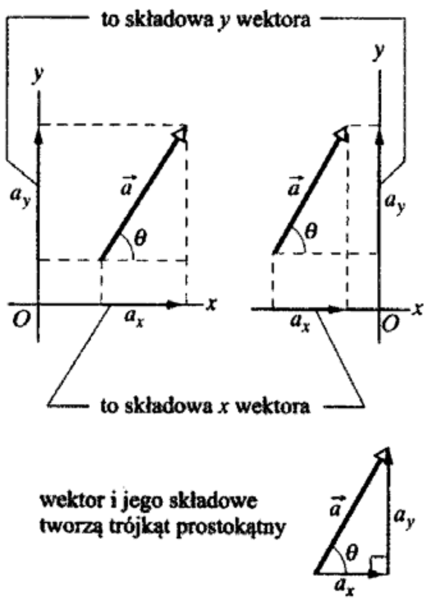
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \mathrm{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}.$$



Rys. 3.2. Przemienność dodawania wektorów



Rys. 3.3. Łączność dodawania wektorów



Rys. 3.4. Składowe wektora

3.2. Dodawanie wektorów

W prawoskrętnym przestrzennym układzie współrzędnych[1)] wektory jednostkowe $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ i $\hat{\mathrm{k}}$ mają długość równą jedności i są skierowane w dodatnich kierunkach osi x, y i z. Dowolny wektor $\vec{a}$ można za ich pomocą zapisać jako

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}},$$

gdzie elementy $a_x\hat{\mathrm{i}}$, $a_y\hat{\mathrm{j}}$ i $a_z\hat{\mathrm{k}}$ są wektorowymi składowymi wektora $\vec{a}$, a wartości a_x, a_y i a_z są składowymi skalarnymi tego wektora.

Aby dodać dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, należy dodać odpowiadające sobie ich składowe, czyli obliczyć

$$r_x = a_x + b_x, \quad r_y = a_y + b_y, \quad r_z = a_z + b_z.$$

Powstały w ten sposób wektor $\vec{r}$ jest ich sumą.

W podobny sposób wykonuje się też odejmowanie wektorów. Obliczenie różnicy wektorów $\vec{a} - \vec{b}$ można sprowadzić do dodawania wektorów $\vec{a} + (-\vec{b})$.

3.3. Mnożenie wektorów

Mnożenie wektorów można wykonać na trzy sposoby: mnożenie wektora przez skalar oraz mnożenie wektora przez wektor, w wyniku którego możemy otrzymać skalar (nazywany *iloczynem skalarnym*) lub wektor (nazywany *iloczynem wektorowym*).

W wyniku pomnożenia wektora $\vec{a}$ przez skalar s otrzymujemy nowy wektor, którego długość jest równa sa, a kierunek jest zgodny z kierunkiem wektora $\vec{a}$, gdy $s > 0$, a przeciwny, gdy $s < 0$. Aby podzielić wektor $\vec{a}$ przez skalar s, wykonujemy mnożenie przez skalar $1/s$.

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oznaczamy przez $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Jest on zdefiniowany następująco:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi, \tag{3.1}$$

gdzie a oznacza moduł (długość) wektora $\vec{a}$, b – moduł wektora $\vec{b}$, a φ oznacza kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Są dwa kąty spełniające równanie (3.1): φ oraz $360° - \varphi$, gdyż cosinusy obu kątów są takie same.

Iloczyn skalarny jest przemienny, czyli

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Jeśli wyrazimy obydwa wektory przez wektory jednostkowe, to ich iloczyn skalarny możemy zapisać w postaci

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}).$$

[1)] O tym, czy układ kartezjański układ współrzędnych jest układem prawo- czy lewoskrętnym, decyduje *reguła prawej dłoni*: kartezjański układ współrzędnych nazywamy układem prawoskrętnym, jeżeli po skierowaniu palców prawej dłoni w dodatnim kierunku osi x, po ich zgięciu (zamknięciu dłoni) wskażą one dodatni kierunek osi y, a kciuk wskaże dodatni kierunek osi z.

Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania możemy prawą stronę tego wzoru wyrazić w postaci iloczynów skalarnych każdego wektora składowego pierwszego wektora i każdego wektora składowego drugiego. Otrzymamy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, który oznaczamy jako $\vec{a} \times \vec{b}$, nazywamy wektor $\vec{c}$ o długości

$$c = ab \sin \varphi,$$

gdzie φ oznacza mniejszy z kątów między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kierunek wektora $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Można go wyznaczyć korzystając z reguły prawej dłoni. W tym celu przesuwamy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tak, by miały wspólny początek (nie zmieniając ich kierunków) i wyobrażamy sobie linię przechodząca przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny tworzonej przez te wektory. Jeżeli otoczymy tę linię prawą dłonią tak, aby kierunek palców pokazywał łuk od wektora $\vec{a}$ do wektora $\vec{b}$, to kciuk wskaże nam kierunek wektora $\vec{c}$.

Kolejność wektorów w iloczynie wektorowym jest istotna. Nie jest on przemienny. Mamy

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Jeśli zapiszemy iloczyn wektorowy za pomocą wektorów jednostkowych, czyli

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{\mathrm{i}} + a_y \hat{\mathrm{j}} + a_z \hat{\mathrm{k}}) \times (b_x \hat{\mathrm{i}} + b_y \hat{\mathrm{j}} + b_z \hat{\mathrm{k}}),$$

wykonamy mnożenie i skorzystamy z faktu, że iloczyn wektorowy każdego wektora jednostkowego przez siebie jest równy zeru, a iloczyn wektorowy dwu różnych wektorów jednostkowych jest równy trzeciemu wektorowi jednostkowemu, to otrzymamy

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}.$$

Zadania

1. Wektor $\vec{a}$ leży w płaszczyźnie xy. Jego kierunek tworzy kąt 250° z dodatnim kierunkiem osi x (licząc w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara), a jego długość wynosi 7,3 m. Jaka jest jego składowa:
   a) x,
   b) y?
2. Składowa x wektora $\vec{a}$ wynosi -25 m, a jego składowa y jest równa 40 m.
   a) Ile wynosi długość wektora $\vec{a}$?
   b) Jaki kąt tworzy kierunek wektora $\vec{a}$ z dodatnim kierunkiem osi x?
3. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = (4\text{ m})\hat{\mathrm{i}} - (3\text{ m})\hat{\mathrm{j}} + (1\text{ m})\hat{\mathrm{k}}$ i $\vec{b} = (-1\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (1\text{ m})\hat{\mathrm{j}} + (4\text{ m})\hat{\mathrm{k}}$. Wyrazić za pomocą wektorów jednostkowych:
   a) wektor $\vec{a} + \vec{b}$,
   b) wektor $\vec{a} - \vec{b}$,
   c) wektor $\vec{c}$, taki że $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.
4. Trzy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ mają długość 50 m każdy i leżą w płaszczyźnie xy. Ich kierunki tworzą z dodatnim kierunkiem osi x kąty odpowiednio 30°, 195° i 315°. Wyznaczyć:

a) długość wektora $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,
b) kąt utworzony przez ten wektor z osią x,
c) długość wektora $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$,
d) kąt utworzony przez ten wektor z osią x.

5. Wektory $\vec{r}$ i $\vec{s}$ leżą w płaszczyźnie xy, ich długości wynoszą 4,5 oraz 7,3 jednostki, a ich kierunki tworzą kąty 320° i 85° z dodatnim kierunkiem osi x (licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Wyznaczyć:
a) $\vec{r} \cdot \vec{s}$,
b) $\vec{r} \times \vec{s}$.

6. Dane są trzy wektory:

$$\vec{a} = 3\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{j}} - 2\hat{\mathrm{k}}, \quad \vec{b} = -\hat{\mathrm{i}} + 4\hat{\mathrm{j}} + 2\hat{\mathrm{k}}, \quad \vec{c} = 2\hat{\mathrm{i}} + 2\hat{\mathrm{j}} + \hat{\mathrm{k}}.$$

Obliczyć:
a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$,
b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$,
c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$.

IV. RUCH W DWÓCH I TRZECH WYMIARACH

4.1. Położenie i przemieszczenie

Położenie ciała (cząstki) względem początku układu współrzędnych wyznacza wektor jego położenia $\vec{r}$, który w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych wyraża się jako

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}.$$

W tym wzorze $x\hat{\mathrm{i}}$, $y\hat{\mathrm{j}}$ i $z\hat{\mathrm{k}}$ to składowe wektorowe wektora położenia $\vec{r}$, a wielkości x, y i z to jego składowe skalarne. Wektor położenia można przedstawić podając jego długość oraz jeden lub dwa kąty wyznaczające jego kierunek, lub też podając jego składowe wektorowe albo skalarne.

Jeżeli ciało porusza się, to jego wektor położenia zmienia się z wektora $\vec{r}_1$ w wektor $\vec{r}_2$, tak że przemieszczenie ciała $\Delta\vec{r}$ można przedstawić jako

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

co można też zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}} \\ &= \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}.\end{aligned}$$

We wzorze tym współrzędne (x_1, y_1, z_1) odpowiadają wektorowi położenia $\vec{r}_1$, a współrzędne $(x2, y2, z2)$ – wektorowi położenia $\vec{r}_2$.

4.2. Prędkość średnia i chwilowa

Jeśli w przedziale czasu Δt przemieszczenie cząstki wynosi $\Delta\vec{r}$, to jej prędkość średnia $\vec{v}_{sr}$ w tym przedziale czasu wynosi

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Granicę, do której dąży $\Delta\vec{r}$, gdy Δt dąży do zera, nazywamy prędkością chwilową (lub krótko: prędkością) $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

co można też zapisać za pomocą wektorów jednostkowych jako

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}},$$

gdzie $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ i $v_z = dz/dt$.

Kierunek prędkości chwilowej $\vec{v}$ cząstki jest zgodny z kierunkiem stycznej do toru cząstki w punkcie, w którym ona znajduje się.

4.3. Przyspieszenie średnie i chwilowe

Jeśli w przedziale czasu Δt prędkość cząstki zmienia się z prędkości $\vec{v}_1$ w prędkość $\vec{v}_2$, to jej średnie przyspieszenie w tym przedziale wynosi

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Granicę, do której dąży przyspieszenie średnie $\vec{a}_{sr}$, gdy Δt dąży do zera, nazywamy przyspieszeniem chwilowym (lub krótko: przyspieszeniem) $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Przyspieszenie to w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych można przedstawić następująco:

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}},$$

gdzie $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ i $a_z = dv_z/dt$ oznaczają składowe przyspieszenia $\vec{a}$ (są one pochodnymi składowych prędkości $\vec{v}$).

4.4. Rzut ukośny

W rzucie ukośnym ciało zostaje wyrzucone w powietrze z prędkością początkową o wartości bezwzględnej v_0 pod kątem θ_0 względem dodatniego kierunku osi x (zob. rys. 3.1). W ruchu ciała przyspieszenie w poziomie jest równe zeru, a przyspieszenie w pionie wynosi $-g$ (jest skierowane w dół).

Prędkość początkową możemy przedstawić jako

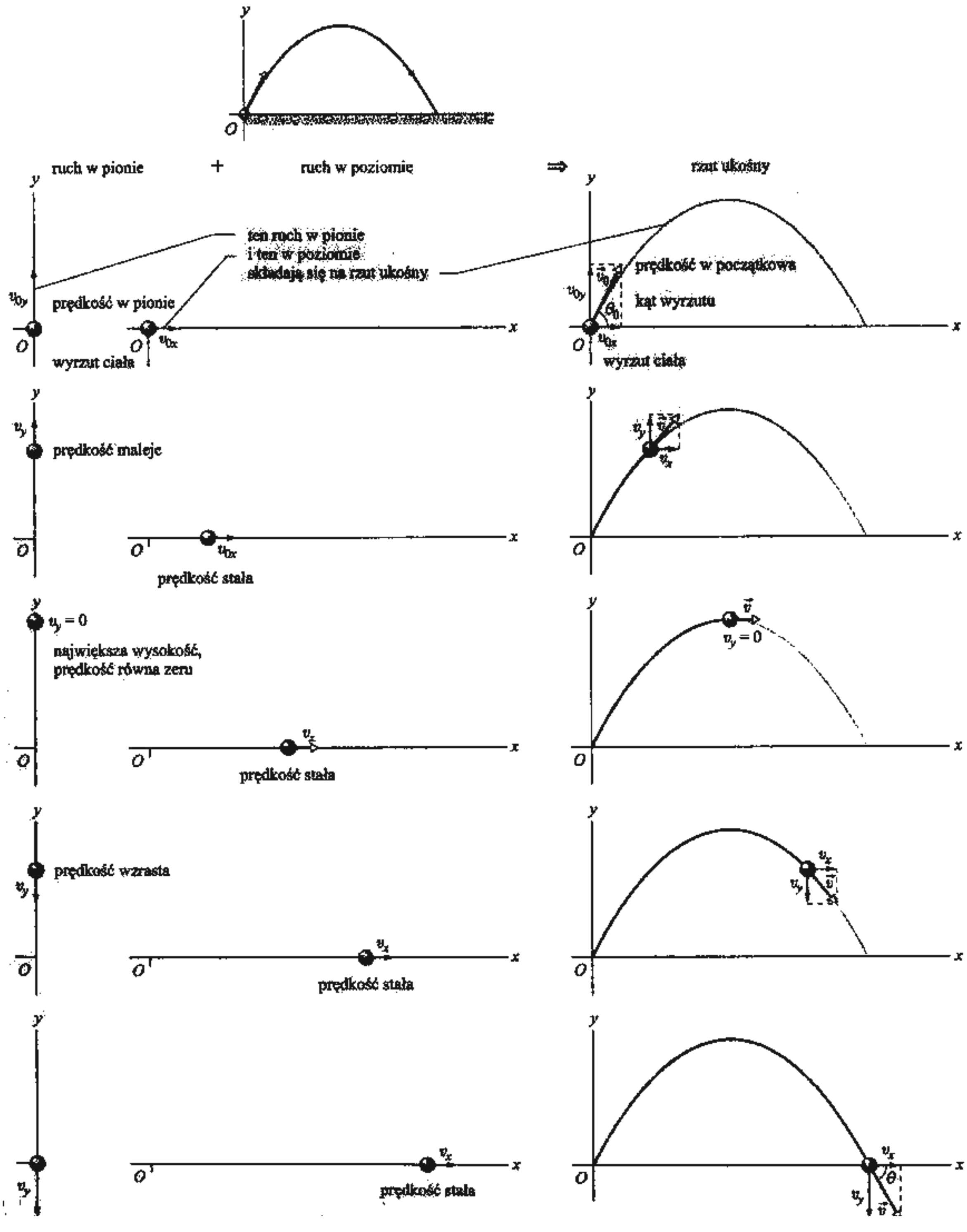
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathrm{i}} + v_{0y}\hat{\mathrm{j}},$$

gdzie składowe v_{0x} i v_{0y} możemy wyznaczyć, o ile znamy kąt θ_0 utworzony przez wektor $\vec{v}$ z dodatnim kierunkiem osi x. Mamy

$$v_{0x} = v_0\cos\theta_0, \quad v_{0y} = v_0\sin\theta_0.$$

Podczas tego ruchu w dwóch wymiarach wektor położenia $\vec{r}$ cząstki i wektor jej prędkości $\vec{v}$ zmieniają się w sposób ciągły, ale wektor przyspieszenia $\vec{a}$ jest stały i zawsze skierowany pionowo w dół. Cząstka nie doznaje żadnego przyspieszenia w kierunku poziomym.

W rzucie ukośnym ruchy cząstki w kierunku poziomym i w kierunku pionowym można traktować jako niezależne – żaden z nich nie ma wpływu na drugi. Dzięki temu zagadnienie ruchu w dwóch wymiarach można rozbić na dwa prostsze zagadnienia jednowymiarowe: ruch cząstki w kierunku poziomym (w którym przyspieszenie wynosi zero) oraz jej ruch w kierunku pionowym (ze stałym przyspieszeniem skierowanym w dół).



Rys. 4.1. Rzut ukośny

Przemieszczenie cząstki w poziomie od jej początkowego położenia x_0 do końcowego x jest opisane równaniem (2.5), w którym należy przyjąć $a = 0$, czyli

$$x = x_0 + v_{0x} t.$$

Ponieważ $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, więc mamy

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0) t. \tag{4.1}$$

Ruch w pionie jest taki sam, jak ruch ciała w rzucie pionowym. Możemy ponownie zastosować równanie (2.5), w którym podstawiamy $a = -g$ i zamieniamy współrzędną x na y. Otrzymujemy

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{4.2}$$

przy czym skorzystaliśmy tu z podanego bliżej zapisu poziomej składowej prędkości v_{0y}. Podobnie z równań (2.3) i (2.6) dostajemy następujące równania:

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{4.3}$$

oraz

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.4}$$

Z rys. 4.1 oraz z równania (4.3) widać, że składowa pionowa prędkości jest dokładnie taka sama, jak przy rzucie pionowym. Na początku jest ona skierowana do góry, a potem jej wartość maleje do zera i jest równa zeru w chwili, gdy cząstka ma największą wysokość. Następnie kierunek składowej pionowej prędkości zmienia się na przeciwny, a jej wartość rośnie wraz z upływem czasu.

Z równań (4.1) i (4.2) można wyznaczyć równanie toru cząstki. Z pierwszego z tych równań mamy

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}$$

i po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{(v_0 \cos\theta_0)^2}.$$

Jeśli dla prostoty przyjmiemy w tym równaniu $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, to przyjmie ono postać

$$y = (\mathrm{tg}\theta_0) x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}. \tag{4.5}$$

Jest to równanie toru przedstawionego na rys. 4.1. Równanie (4.5) ma postać $y = ax + bx^2$, gdzie wielkości a i b są stałymi. Jest to zatem równanie paraboli.

Zasięgiem poziomym R w rzucie ukośnym nazywamy odległość, którą przebyła cząstka w poziomie do chwili jej powrotu na wysokość początkową. Aby wyznaczyć zasięg R, wstawmy $R = x - x_0$ do równania (4.1) oraz $y - y_0 = 0$ do równania (4.2). Otrzymujemy

$$R = (v_0 \cos\theta_0) t \tag{4.6}$$

oraz

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{4.7}$$

Jeżeli z równania (4.6) wyznaczymy t:

$$t = \frac{R}{v_0 \cos\theta_0}$$

i podstawimy do równania (4.7), to otrzymamy

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)\frac{R}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{(v_0 \cos\theta_0)^2},$$

skąd po drobnych przekształceniach mamy

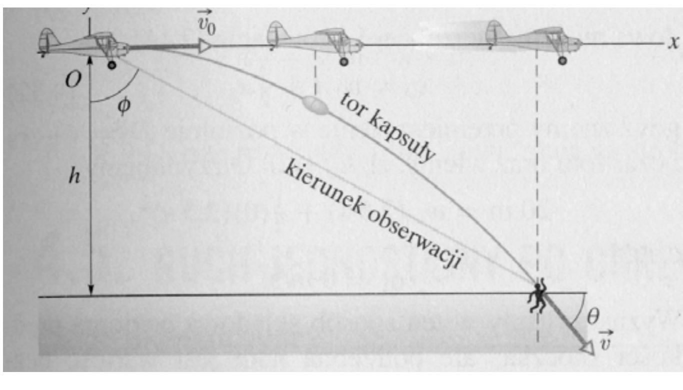
$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0 \cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0. \tag{4.8}$$

Z równania tego nie otrzymamy odległości przebytej przez ciało w poziomie, jeśli położenie końcowe ciała nie znajduje się na tej samej wysokości, co jego położenie początkowe.

Warto zauważyć, że zasięg R w równaniu (4.8) osiąga największą wartość, gdy $\sin 2\theta_0 = 1$, co oznacza, że $2\theta_0 = 90°$, czyli $\theta_0 = 45°$.

Przykład

Samolot ratowniczy leci z prędkością 198 km/h (=55 m/s) na stałej wysokości 500 m. Ku punktowi znajdującemu się bezpośrednio nad rozbitkiem zmagającym się z falami. Pilot chce wypuścić kapsułę ratowniczą tak, aby wpadła do wody możliwie najbliżej rozbitka.



Rys. 4.2. Tor kapsuły ratowniczej

Należy wyznaczyć kąt ϕ, pod jakim pilot widzi rozbitka w chwili najbardziej odpowiedniej do zwolnienia kapsuły.

Z rysunku widać, że kąt ϕ jest równy

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{x}{h}, \tag{4.9}$$

gdzie x oznacza współrzędną poziomą rozbitka (równą współrzędnej kapsuły w chwili upadku do wody), a h oznacza wysokość samolotu nad wodą. Wysokość samolotu jest podana. Aby znaleźć współrzędną x możemy skorzystać z równania (4.1), przyjmując w nim $x_0 = 0$ (bo początek układu znajduje się w punkcie wyrzucenia kapsuły), $v_0 = 55$ m/s (bo kapsuła zostaje upuszczona, a nie wystrzelona, co oznacza, że jej prędkość początkowa jest równa prędkości samolotu) oraz $\theta_0 = 0°$ (bo taki jest kąt w stosunku do dodatniego kierunku osi x). Mamy zatem

$$x = 0\ \mathrm{m} + (55\ \mathrm{m/s})(\cos 0°)t. \tag{4.10}$$

Aby znaleźć czas t, rozważmy ruch kapsuły w pionie. Podstawiając odpowiednie wartości do równania (4.2) mamy

$$-500\ \mathrm{m} = 0\ \mathrm{m} + (55\ \mathrm{m/s})(\sin 0°)t - \frac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})t^2.$$

Rozwiązując to równanie względem t otrzymujemy $t = 10{,}1$ s i po podstawieniu do równania (4.10) mamy $x = 555{,}5$ m. Zatem z równania (4.9) dostajemy

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{555{,}5\ \mathrm{m}}{500\ \mathrm{m}}\right) = 48°.$$

Jaka będzie prędkość $\vec{v}$ kapsuły w chwili, gdy wpadnie ona do wody?

Ruch kapsuły w poziomie jest niezależny od ruchu w pionie podczas jej lotu, czyli nie zależą od siebie składowe pozioma i pionowa jej prędkości. Składowa pozioma prędkości v_x jest cały czas równa jej wartości początkowej $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, ponieważ ruch w poziomie odbywa się bez przyspieszenia. Składowa pionowa prędkości v_y ulega zmianie w stosunku do jej wartości początkowej $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$, gdyż ruch kapsuły w pionie jest przyspieszony.

W chwili, gdy kapsuła wpada do wody mamy $v_{0x} = 55$ m/s. Z równania (4.3) wyznaczamy wartość składowej pionowej w chwili upadku kapsuły do wody:

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt = (55\ \mathrm{m/s})(\sin 0°) - (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})(10{,}1\ \mathrm{s}) = -99\ \mathrm{m/s}.$$

Wobec tego w chwili upadku do wody kapsuła ma prędkość $\vec{v} = (55\ \mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} - (99\ \mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$. ■

4.5. Ruch jednostajny po okręgu

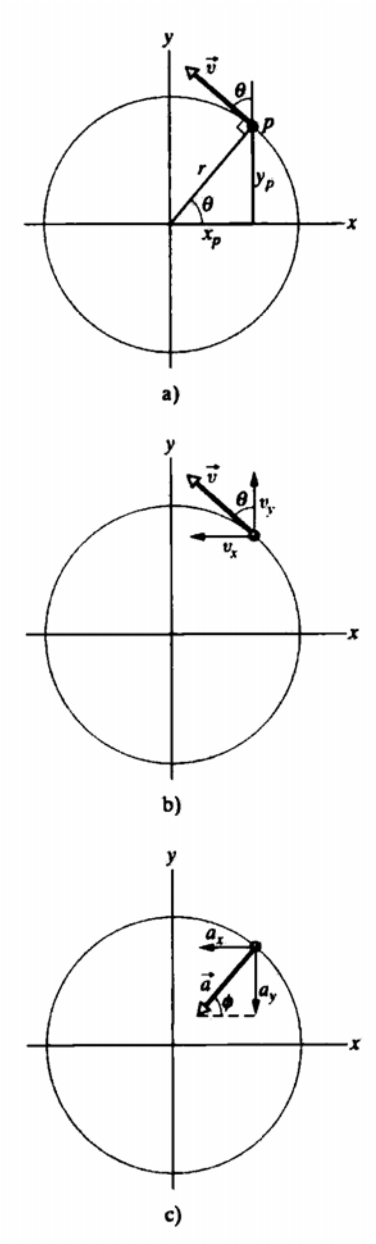
Jeśli ciało porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością o stałej wartości bezwzględnej v, to jego ruch nazywamy ruchem jednostajnym po okręgu, w którym przyspieszenie ciała $\vec{a}$ ma też stałą wartość bezwzględną równą

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4.11}$$

Wektor przyspieszenia $\vec{a}$ jest skierowany w każdej chwili do środka okręgu, po którym rusza się ciało i dlatego nazywa się przyspieszeniem dośrodkowym. Czas, w jakim ciało przebywa cały okrąg, wynosi

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Czas T nosi nazwę okresu tego ruchu.



Rys. 4.3. Jednostajny ruch cząstki po okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara

W celu wyprowadzenia wzoru (4.11) i określenia kierunku przyspieszenia w ruchu jednostajnym po okręgu przeanalizujmy rys. 4.3. Na rysunku tym cząstka p porusza się ze stałą prędkością v po okręgu o promieniu r. W chwili, gdy wykonano rysunek, współrzędne tej cząstki wynosiły x_p i y_p.

Prędkość $\vec{v}$ poruszającej się cząstki jest zawsze styczna do jej toru w punkcie, w którym cząstka właśnie znajduje się. Oznacza to, że wektor $\vec{v}$ jest prostopadły do promienia w punkcie, w którym znajduje się cząstka. Kąt θ utworzony przez wektor $\vec{v}$ z pionem w punkcie p. Jest więc równy kątowi utworzonemu przez promień r z osią x.

Składowe wektora $\vec{v}$ pokazano na rys. 4.3 b). Korzystając z nich możemy prędkość $\vec{v}$ przedstawić następująco:

$$\vec{v} = v_x \hat{\mathrm{i}} + v_y \hat{\mathrm{j}} = (-v \sin\theta)\hat{\mathrm{i}} + (v \cos\theta)\hat{\mathrm{j}}.$$

Z trójkąta prostokątnego na rys. 4.3 a) widać, że sin $\theta = y_p/r$ oraz cos $\theta = x_p/r$, co daje

$$\vec{v} = \left(-\frac{v y_p}{r}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v x_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}}.$$

Aby wyznaczyć przyspieszenie $\vec{a}$ cząstki p, należy to równanie zróżniczkować względem czasu. Ponieważ wartości prędkości v oraz promienia r nie zależą od czasu, więc otrzymujemy

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{j}}.$$

Szybkość dy_p/dt zmiany wielkości y_p jest równa składowej prędkości v_y i podobnie $dx_p/dt = v_x$. Z rys. 4.3 b) widać, że $v_x = -v \sin\theta$, a $v_y = v \cos\theta$. Po podstawieniu tych związków do równania otrzymujemy

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathrm{j}}.$$

Wektor ten i jego składowe są pokazane na rys. 4.3 c). Mamy przy tym

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

co należało dowieść. Kierunek wektora $\vec{a}$ jest wyznaczony przez kąt ϕ z rys. 4.3 c):

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\sin\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \mathrm{tg}\theta,$$

co oznacza, że $\phi = \theta$, czyli że wektor $\vec{a}$ jest skierowany wzdłuż promienia r z rys. 4.3 a), w kierunku środka okręgu, co także należało wykazać.

4.6. Ruch względny w jednym i dwóch wymiarach

Gdy dwa układy odniesienia A i B poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, to prędkość ciała C mierzona przez obserwatora w układzie A jest na ogól inna niż prędkość tego ciała mierzona przez obserwatora w układzie B. Jeśli oznaczymy przez $\vec{r}_{BA}$ wektor położenia początkku układu *B* względem początku układu *A*, a wektory położenia cząstki *C* w układzie *A* przez $\vec{r}_{CA}$, a w układzie *B* przez $\vec{r}_{CB}$, to możemy napisać

$$\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{CB} + \vec{r}_{BA}.$$

Różniczkując obie strony tego równania względem czasu, otrzymujemy związek między prędkościami $\vec{v}_{CA}$ i $\vec{v}_{CB}$ cząstki *C* względem każdego z obserwatorów:

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA}.$$

Następnie, różniczkując to równanie względem czasu, otrzymujemy związek między przyspieszeniami $\vec{a}_{CA}$ i $\vec{a}_{CB}$ cząstki *C* względem każdego z obserwatorów. Ponieważ prędkość $\vec{v}_{BA}$ jest stała, więc jej pochodna względem czasu jest równa zeru. Mamy zatem

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}.$$

Otrzymaliśmy zatem następującą zasadę: obserwatorzy w różnych układach odniesienia, poruszających się względem siebie ze stałą prędkością, rejestrują takie samo przyspieszenie poruszającej się cząstki.

Zadania

1. Wektor położenia elektronu wynosi $\vec{r} = (5\text{ m})\hat{\mathrm{i}} - (3\text{ m})\hat{\mathrm{j}} + (2\text{ m})\hat{\mathrm{k}}$. Wyznaczyć długość wektora $\vec{r}$.
2. Pozyton doznaje przemieszczenia o $\Delta\vec{r} = 2\hat{\mathrm{i}} - 3\hat{\mathrm{j}} + 6\hat{\mathrm{k}}$ i zatrzymuje się w punkcie o wektorze położenia $\vec{r} = 3\hat{\mathrm{j}} - 4\hat{\mathrm{k}}$, przy czym wszystkie dane liczbowe są wyrażone w metrach. Podać wektor początkowego położenia pozytonu.
3. Pociąg jedzie z prędkością o stałej wartości równej 60 km/h na wschód przez 40 min, potem w kierunku 50° na wschód od kierunku północnego przez 20 min, a jeszcze potem na zachód przez 50 min. Wyznaczyć prędkość średnią pociągu podczas tej podróży podając
   a) jej wartość bezwzględną,
   b) kąt.
4. Wektor położenia jonu (w metrach) wynosi w pewnej chwili $\vec{r} = 5\hat{\mathrm{i}} - 6\hat{\mathrm{j}} + 2\hat{\mathrm{k}}$, a 10 s później $\vec{r} = -2\hat{\mathrm{i}} + 8\hat{\mathrm{j}} - 2\hat{\mathrm{k}}$. Wyznaczyć prędkość średnią jonu w czasie tych 10 s, wyrażając ją za pomocą jednostek wektorowych.
5. Położenie cząstki $\vec{r}$ poruszającej się w płaszczyźnie *xy* jest dane wyrażeniem

   $$\vec{r} = (2t^3 - 5t)\hat{\mathrm{i}} + (6 - 7t^4)\hat{\mathrm{j}},$$

   przy czym położenie $\vec{r}$ jest wyrażone w metrach, a czas *t* w sekundach. Obliczyć w chwili $t = 2$ s:
   a) $\vec{r}$,
   b) $\vec{v}$,
   c) $\vec{a}$,
   wyrażając te wektory za pomocą wektorów jednostkowych.
   d) Jaki kąt tworzy styczna do toru cząstki w chwili $t = 2$ s z dodatnim kierunkiem osi *x*?

6. Cząstka porusza się tak, że zależność jej położenia (w metrach) od czasu (w sekundach) jest następująca: $\vec{r} = \hat{\mathrm{i}} + 4t^2\hat{\mathrm{j}} + t\hat{\mathrm{k}}$. Podać wyrażenia opisujące zależność od czasu
   a) prędkości,
   b) przyspieszenia tej cząstki.
7. Cząstka staruje z punktu będącego początkiem układu współrzędnych z prędkością początkową $\vec{v} = (3\hat{\mathrm{i}})\mathrm{m/s}$ i stałym przyspieszeniem $\vec{a} = (-\hat{\mathrm{i}} - 0{,}5\hat{\mathrm{j}})\mathrm{m/s^2}$. Wyznaczyć:
   a) prędkość
   b) wektor położenia cząstki w chwili, gdy współrzędna x jest największa.
8. Lotkę rzucono poziomo z prędkością początkową o wartości 10 m/s w kierunku punktu P na tarczy. Po 0,19 s lotu trafiła ona w punkt Q na obrzeżu tarczy, leżący poniżej punktu P.
   a) Jaka jest odległość punktów P i Q?
   b) Z jakiej odległości od tarczy została rzucona ta lotka?
9. Pocisk, wystrzelony poziomo z działa umieszczonego na wysokości 45 m nad poziomym terenem, wylatuje z lufy z prędkością 250 m/s.
   a) Jak długo będzie trwał lot pocisku?
   b) W jakiej odległości w poziomie od działa (punktu wystrzelenia) pocisk spadnie na ziemię?
   c) Ile będzie wynosiła wartość składowej pionowej prędkości pocisku w chwili jego spadku na ziemię?
10. Samolot lecący z prędkością 290 km/h nurkuje pod kątem $\theta = 30°$ do poziomu i wypuszcza pocisk w celu zmylenia radaru nieprzyjaciela. Odległość w poziomie od punktu wyrzucenia pocisku do punktu jego spadku na ziemię wynosi $d = 700$ m.
    a) Jak długo trwał lot pocisku?
    b) Na jakiej wysokości nad ziemią pocisk ten został wypuszczony?
11. Piłkarz wykopuje piłkę z powierzchni boiska z prędkością początkową o wartości 19,5 m/s pod kątem 45° do poziomu. Inny zawodnik, stojący w odległości 55 m od miejsca wykopu w kierunku lotu piłki, rusza w tej samej chwili na jej spotkanie. Z jaką średnią prędkością powinien on biec, aby dotrzeć do piłki tuż przed jej upadkiem na boisko?
12. Atakując w wyskoku, siatkarz uderza piłkę nad głową i stara się trafić na połowę przeciwnika. Dobór kąta uderzenia nie jest łatwy. Załóżmy, że piłkę uderzono na wysokości 2,30 m nad parkietem, nadając jej prędkość początkową 20 m/s skierowaną pod kątem 18° w dół do poziomu. O ile dalej wylądowałaby piłka na boisku przeciwnika, gdyby wspomniany kąt wynosił 8°?
13. Satelita Ziemi krąży po orbicie kołowej na wysokości $h = 200$ km nad powierzchnią Ziemi. Przyspieszenie ziemskie g na tej wysokości wynosi 9,2 m/s^2. Ile wynosi prędkość v satelity na tej orbicie?
14. Satelita obiega Ziemię po orbicie kołowej na wysokości 640 km nad powierzchnią Ziemi. Okres obiegu wynosi 98 min. Wyznaczyć:
    a) wartość prędkości,
    b) wartość przyspieszenia dośrodkowego tego satelity.
15. Karuzela obraca się wokół osi pionowej ze stałą prędkością kątową. Pasażer znajdujący się na obrzeżu karuzeli porusza się z prędkością liniową o stałej wartości 3,66 m/s, a jego przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}$ ma wartość 1,83 m/s^2. Wektor $\vec{r}$ wyznacza położenie pasażera względem osi obrotu karuzeli.

a) Jaka jest długość wektora $\vec{r}$?
Jaki jest kierunek tego wektora, gdy wektor $\vec{a}$ jest skierowany
b) na wschód,
c) na południe?

16. Diabelski młyn ma promień 15 m i wykonuje 5 obrotów na minutę wokół osi poziomej.
a) Ile wynosi okres jego ruchu?
Jaka jest
b) długość,
c) kierunek przyspieszenia dośrodkowego pasażerki, gdy jest ona na największej wysokości nad ziemią?
Jaka jest
d) długość,
e) kierunek przyspieszenia dośrodkowego pasażerki, gdy jest ona na najmniejszej wysokości nad ziemią?

17. Śnieg pada pionowo ze stałą prędkością 8 m/s. Z punktu widzenia kierowcy samochodu jadącego po prostej i poziomej drodze z prędkością 50 km/h płatki śniegu spadają na ziemię ukośnie. Pod jakim kątem do pionu spadają według kierowcy płatki śniegu?

18. Dwa statki A i B wychodzą jednocześnie z portu. Statek A płynie na północ z prędkością 24 węzłów, a statek B płynie z prędkością 28 węzłów w kierunku 40° na zachód od kierunku południowego (1 węzeł jest równy 1 mili morskiej na godzinę). Jaka jest:
a) wartość,
b) kierunek prędkości statku A względem statku B?